Общероссийский математический портал

В. В. Коннов, Дифференциально-геометрический признак квадратичных вложений Веронезе, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 5, 21–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:20:58

УДК 514.76

В. В. Коннов

Дифференциально-геометрический признак квадратичных вложений Веронезе

Находится признак квадратичных многообразий Веронезе. Доказывается, что во множестве гладких n -мерных подмногообразий проективного пространства P^N размерности $N = n(n+3)/2$ только многообразия Веронезе обладают следующими двумя свойствами: 1) касательные проективные пространства для любой пары точек пересекаются в точке; 2) соприкасающееся проективное пространство в каждой точке совпадает с объемлющим пространством. Этот результат обобщает на случай произвольного n признак двумерной поверхности Веронезе в P^5 , доказанный Гриффитсом и Харрисом. Кроме этого в работе находится критерий того, что пара подмногообразий в P^N принадлежит одному многообразию Веронезе. Приводятся вычислительные формулы, необходимые для практического использования доказанных признаков.

Библиография: 9 наименований.

§ 1. Введение

Многообразия Веронезе являются объектом интенсивного изучения не только алгебраической, но и дифференциальной геометрии. Так, в работе [8] вводится понятие структуры Веронезе (*Veronese-structure*) и находятся необходимые и достаточные условия, при выполнении которых гладкое многообразие может быть вложено в проективное пространство как квадратичное многообразие Веронезе. Ряд интересных результатов по дифференциальной геометрии многообразий Веронезе можно найти в [2], [5]–[8].

В работе [4] (см. также [1]) найден признак двумерной квадратичной поверхности Веронезе в пятимерном проективном пространстве. Он заключается в том, что, во-первых, *соприкасающаяся плоскость в каждой точке поверхности имеет максимально возможную размерность* и, во-вторых, *любая пара касательных плоскостей пересекается в точке*. Несложно показать, что квадратичное многообразие Веронезе любой размерности обладает этими двумя свойствами. Поэтому вполне естественной выглядит гипотеза о том, что при выполнении этих двух условий гладкое подмногообразие произвольной размерности вырождается в квадратичное многообразие Веронезе. Однако, как показывают [1], [4], уже для двумерных поверхностей доказательство этой гипотезы оказывается весьма не тривиальным. Целью настоящей работы является обобщение признака двумерного многообразия Веронезе на случай произвольной размерности.

Прежде всего напомним основные определения и факты из теории подмногообразий проективного пространства, необходимые для дальнейшего изложения.

1.1. Отображение проективизации. Пусть W – вещественное векторное пространство размерности $N + 1$, $P^N = P(W)$ – порожденное им проективное пространство, $p: W \setminus 0 \rightarrow P(W)$ – каноническая проекция (*отображение проективизации*).

Используя любую аффинную карту на $P(W)$, легко проверить, что дифференциал $(p_*)_a: T_a W \rightarrow T_{p(a)} P(W)$ отображения проективизации p в точке $a \in W \setminus 0$ обладает свойством: $(p_*)_a(b) = (p_*)_a(c) \iff b \equiv c \pmod{a}$, где $b, c \in W \cong T_a W$. Следовательно, $\ker(p_*)_a = \langle a \rangle$. Здесь и далее через $\langle a, b, \dots, c \rangle$ обозначается подпространство в W , являющееся линейной оболочкой векторов $a, b, \dots, c$. Рассмотрим последовательность векторных пространств и их гомоморфизмов:

$$0 \rightarrow \langle a \rangle \xrightarrow{i} T_a W \cong W \xrightarrow{(p_*)_a} T_{p(a)} P(W) \rightarrow 0,$$

где i – гомоморфизм включения. Так как $\operatorname{Im} i = \ker(p_*)_a = \langle a \rangle$, то рассматриваемая последовательность является точной. Поэтому существует естественный изоморфизм между касательным векторным пространством $T_{p(a)} P(W)$ в точке $p(a)$ проективного пространства $P(W)$ и факторпространством $W/\langle a \rangle$ пространства W по одномерному подпространству $\langle a \rangle$. Таким образом, $T_{p(a)} P(W) \cong W/\langle a \rangle$. В дальнейшем мы будем отождествлять эти векторные пространства.

1.2. Многообразие реперов проективного пространства. Обозначим через $\mathcal{F}(P(W))$ многообразие всех базисов $B = \{e_0, e_1, \dots, e_N\}$ пространства W , нормированных условием $\det\{e_0, e_1, \dots, e_N\} = 1$ относительно некоторого фиксированного базиса B_0 . Каждый базис $B = \{e_u\} \in \mathcal{F}(P(W))$ однозначно определяет проективный репер $\{E_u, E\}$ с вершинами $E_u = p(e_u)$ и единичной точкой $E = p(\sum_{u=0}^N e_u)$. Поэтому фиксация базиса B_0 позволяет отождествить многообразие $\mathcal{F}(P(W))$ с группой Ли $\operatorname{SL}(N + 1)$, которая изоморфна связной компоненте единицы $\operatorname{PGL}_0(N)$ полной проективной группы $\operatorname{PGL}(N)$. Алгебра Ли $\mathfrak{pgl}(N)$ групп Ли $\operatorname{PGL}_0(N)$ и $\operatorname{PGL}(N)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}(N + 1)$ бесследовых квадратных матриц порядка $N + 1$.

Каждый вектор e_u базиса $B \in \mathcal{F}(P(W))$ можно рассматривать как гладкую W -значную функцию $(e_u: B \rightarrow e_u)$ на группе Ли $\operatorname{PGL}_0(N)$. Поэтому de_u – это W -значная 1-форма на $\operatorname{PGL}_0(N)$. Раскладывая ее по базису B пространства W , получим

$$de_u = \omega_u^v e_v. \quad (1)$$

Формы ω_u^v являются *левоинвариантными формами* группы Ли $\operatorname{PGL}(N)$ и удовлетворяют *структурным уравнениям Маурера–Картана*:

$$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v, \quad (2)$$

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \dots + \omega_N^N = 0. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) получаются после применения оператора внешнего дифференцирования к системе (1) и тождеству $\det\{e_0, e_1, \dots, e_N\} = 1$. Равенства (1), в которых 1-формы ω_u^v удовлетворяют уравнениям (2), (3), называются *уравнениями инфинитезимальных перемещений репера проективного пространства*, а сами уравнения (2), (3) – *структурными уравнениями многообразия реперов проективного пространства* [1]. Эти уравнения играют фундаментальную роль при изучении подмногообразий проективного пространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [3], [4]. Пусть ω_u^v – формы Маурера–Картана группы $\mathrm{PGL}(N)$ и $f_1, f_2: M \rightarrow \mathcal{F}(P(W))$ – два гладких отображения связного многообразия M в многообразие $\mathcal{F}(P(W))$. Равенство $f_1^* \omega_u^v = f_2^* \omega_u^v$ является необходимым и достаточным условием того, что $f_1(x) = g \cdot f_2(x)$ для фиксированного $g \in \mathrm{PGL}(N)$ и произвольного $x \in M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [3], [4]. Пусть θ_u^v – дифференциальные 1-формы на связном и односвязном многообразии M , ω_u^v – формы Маурера–Картана группы $\mathrm{PGL}(N)$. Формы θ_u^v удовлетворяют уравнениям Маурера–Картана (2), (3) группы $\mathrm{PGL}(N)$ тогда и только тогда, когда существует гладкое отображение $f: M \rightarrow \mathcal{F}(P(W))$, для которого $\theta_u^v = f^* \omega_u^v$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем нам придется рассматривать проективные пространства $P^N = P(W)$ размерности $N = \binom{2}{n+2} - 1 = n(n+3)/2$, где $n \in \mathbb{N}$. В этом случае базисные векторы пространства W удобно нумеровать симметричной парой индексов (u, v) , где $0 \leq u, v \leq n$. Для многообразия базисов $\mathcal{F}(P(W))$, состоящих из векторов $e_{uv} = e_{vu}$, уравнения (1)–(3) переписутся в виде

$$de_{u_1 u_2} = \omega_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} e_{v_1 v_2}, \quad (4)$$

$$d\omega_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = \omega_{u_1 u_2}^{w_1 w_2} \wedge \omega_{w_1 w_2}^{v_1 v_2}, \quad (5)$$

$$\sum_{u_1, u_2=0}^n \omega_{u_1 u_2}^{u_1 u_2} = 0, \quad (6)$$

где $0 \leq u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \leq n$.

1.3. Гладкие вложения в проективное пространство и их поднятия в векторное пространство. Пусть $f: M \rightarrow P(W)$ – гладкое вложение n -мерного связного многообразия M в проективное пространство $P(W)$; тогда $f(M) = V$ – гладкое связное подмногообразие в $P(W)$.

Рассмотрим произвольное гладкое поднятие F отображения f в векторное пространство W (напомним, что $F: M \rightarrow W$ – это гладкое отображение, удовлетворяющее условию $f = p \circ F$). Поднятие F существует для любой иммерсии f . Действительно, отождествим векторное пространство W с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{N+1}$ и будем рассматривать N -мерную сферу S^N как совокупность единичных векторов в W . Тогда S^N является универсальным накрывающим пространством для $P(W)$, а отображение проективизации p есть двулистное накрытие. Ясно, что для иммерсии $f: M \rightarrow P(W)$ существует поднятие $F: M \rightarrow S^N \subset W$ на сферу S^N , которое является также и поднятием в W . Если теперь $\tilde{F}: M \rightarrow W$ – другое поднятие для f , то для любой точки $x \in M$ векторы $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ коллинеарны и отличны от нуля, так как лежат над одной точкой $f(x)$ пространства $P(W)$. Значит, $\tilde{F}(x) = \lambda(x) \cdot F(x)$, где λ – гладкая функция на M , всюду отличная от нуля (а поэтому сохраняющая свой знак). Итак, допустимая замена поднятия определяется соотношением

$$\tilde{F} = \lambda \cdot F,$$

где λ – гладкая знакопостоянная функция на M .

Для каждой карты (U, ϕ) на M отображение $F_U = F \circ \phi^{-1}: \phi^{-1}(U) \rightarrow W$, являющееся локальным представлением поднятия F , называется *векторным уравнением* подмногообразия V . Допустимая замена поднятия индуцирует *перенормировку* векторного уравнения. Если подмногообразие V задано (локально) векторным уравнением, то проективный характер имеют лишь те его свойства, которые инвариантны относительно перенормировки этого векторного уравнения.

1.4. Последовательности производящих, касательных и нормальных подпространств. Фундаментальные формы подмногообразий. Пусть f – гладкое вложение n -мерного связного многообразия M в проективное пространство $P(W)$, F – некоторое фиксированное поднятие отображения f в векторное пространство W . С подмногообразием $V = f(M) = p \circ F(M) \subset P(W)$ можно связать ряд инвариантных объектов и отображений.

Пусть A – некоторая точка на V , $f(x) = A$ и $F(x) = a$. Поскольку f – диффеоморфизм на образ, то $\text{Im}(f_*)_x = T_A(V)$ – n -мерное подпространство векторного пространства $T_A(P(W)) \cong W/\langle a \rangle$. С другой стороны, так как F – диффеоморфизм на образ, $(f_*)_x = (p_*)_a \circ (F_*)_x$ и $\ker(p_*)_a = \langle a \rangle$, то $\text{Im}(F_*)_x$ – n -мерное подпространство векторного пространства $T_a(W) \cong W$, трансверсальное подпространству $\langle a \rangle$. Поэтому $W_A^1(V) = \langle F(x), \text{Im}(F_*)_x \rangle = (n+1)$ -мерное подпространство векторного пространства W . Если $Q = F_U$ – векторное уравнение подмногообразия V , то

$$W_A^1(V) = \langle F(x), \text{Im}(F_*)_x \rangle = \left\langle Q(u), \frac{\partial Q(u)}{\partial x^1}, \frac{\partial Q(u)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial Q(u)}{\partial x^n} \right\rangle,$$

где (U, ϕ) – карта на M , $u = \phi(x)$ и $f(x) = A$.

Докажем, что подпространство $W_A^1(V)$ не зависит от выбора поднятия, т.е. инвариантно определяется вложением f . Рассмотрим допустимую замену поднятия $\tilde{F} = \lambda \cdot F$, и пусть $Q = F_U$ и $\tilde{Q} = \tilde{F}_U$ – локальные представления поднятий F и $\tilde{F}$ (т.е. Q и $\tilde{Q}$ – векторные уравнения подмногообразия V , заданные в области $\phi^{-1}(U)$ и совпадающие с точностью до перенормировки). Тогда

$$\tilde{Q} = \lambda \cdot Q, \quad \tilde{Q}_i = \lambda_i \cdot Q + \lambda \cdot Q_i,$$

где $\tilde{Q}_i = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x^i}$, $Q_i = \frac{\partial Q}{\partial x^i}$ и $\lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}$. Так как матрица перехода

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

является невырожденной, то $\langle Q, Q_1, \dots, Q_n \rangle = \langle \tilde{Q}, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n \rangle$, и подпространство $W_A^1(V)$ не зависит от выбора поднятия.

Подпространство $W_A^1(V)$ назовем *первым производящим пространством* подмногообразия V в точке A . Его образ при проективизации $p(W_A^1(V)) = PT_A^1(V)$ называется *проективным касательным пространством* подмногообразия V в

точке A , а факторпространство $W/W_A^1(V) = N_A^1(V)$ называется *первым нормальным пространством* подмногообразия V в точке A . Заметим, что *касательное векторное пространство* $T_A^1(V)$ также может быть определено через первое производящее пространство: $T_A^1(V) = W_A^1(V)/\langle a \rangle$.

Поднятие $F: M \rightarrow W$ будем рассматривать как гладкую W -значную функцию на M . Пусть $\mathfrak{N}(M) - C^\infty(M)$ -модуль векторных полей на многообразии M , $x \in M$, $X_i \in \mathfrak{N}(M)$. Так как F – гладкая W -значная функция на M , а X_1 – дифференцирование алгебры гладких функций, то $X_1(F) = dF(X_1)$ – вновь гладкая W -значная функция на M . Аналогично, $X_k(\dots(X_1(F))\dots)$ – гладкая W -значная функция на M , и ее значение $X_k(\dots(X_1(F))\dots)(x)$ в точке $x \in M$ является элементом векторного пространства W . Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждой точки $x \in M$ определим отображение

$$d_x^k F : \underbrace{\mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M) \times \dots \times \mathfrak{N}(M)}_k \rightarrow W$$

следующим образом. Для векторных полей $X_i \in \mathfrak{N}(M)$ положим

$$d_x^k F(X_1, \dots, X_k) = X_k(\dots(X_1(F))\dots)(x).$$

Можно показать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и любой точки $A = f(x) = p(F(x))$ подпространство

$$W_A^k(V) = \langle F(x), \text{Im } d_x^1 F, \dots, \text{Im } d_x^k F \rangle$$

векторного пространства W не зависит от выбора поднятия F (инвариантно относительно перенормировки векторного уравнения) и определяется только вложением f . Подпространство $W_A^k(V)$ назовем *производящим пространством порядка k* подмногообразия V в точке A .

Если $Q = F_U$ – векторное уравнение подмногообразия V , то

$$W_A^k(V) = \left\langle Q(u), \frac{\partial Q(u)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 Q(u)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}, \dots, \frac{\partial^k Q(u)}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} \mid i, \dots, l_k = 1, \dots, n \right\rangle,$$

где (U, ϕ) – карта на M , $u = \phi(x)$ и $f(x) = A$.

Подпространство $PT_A^k(V) = p(W_A^k(V))$ пространства $P(W)$ называется *проективным касательным пространством порядка k* (или *соприкасающимся пространством порядка $k-1$*) подмногообразия V в точке A . Факторпространство $N_A^k(V) = W/W_A^k(V)$ называется *нормальным пространством порядка k* подмногообразия V в точке A .

Отображение

$$\Psi_A^k : \text{Sym} \underbrace{T_x(M) \times T_x(M) \times \dots \times T_x(M)}_k \rightarrow N_A^{k-1}(V),$$

определяемое формулой

$$\Psi_A^k(X_1, X_2, \dots, X_k) = W_A^{k-1}(V) + d_x^k F(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

называется k -ой фундаментальной формой подмногообразия V . В локальной системе координат это отображение имеет вид

$$\Psi_A^k(X_1, X_2, \dots, X_k) = W_A^{k-1}(V) + \frac{\partial^k Q(u)}{\partial x^{l_1} \dots \partial x^{l_k}} X_1^{l_1} X_2^{l_2} \dots X_k^{l_k},$$

где (U, ϕ) – карта на M , $u = \phi(x)$ и $f(x) = A$. Легко проверить, что при замене карты на M компоненты фундаментальной формы Ψ_A^k преобразуются по тензорному закону, а при замене поднятия – умножаются на число. Таким образом, форма Ψ_A^k является относительным тензором на M (а значит, и на V) со значениями в нормальном пространстве $N_A^{k-1}(V)$. Ранг этого тензора

$$\begin{aligned} \text{rank } \Psi_A^k &\equiv \dim(\text{Im } \Psi_A^k) = \dim W_A^k(V) - \dim W_A^{k-1}(V) \\ &= \dim PT_A^k(V) - \dim PT_A^{k-1}(V) = \dim N_A^{k-1}(V) - \dim N_A^k(V) \\ &= \text{rank} \left\langle \frac{\partial^k Q(u)}{\partial x^{l_1} \dots \partial x^{l_k}} \mid l_1, \dots, l_k = 1, \dots, n \right\rangle \end{aligned}$$

является абсолютным инвариантом и полностью определяется вложением f .

Отметим, что в классической литературе по проективно-дифференциальной геометрии тензор Ψ_A^k называется *асимптотической формой порядка k* . При $k = 1$ форма Ψ_A^1 – это просто касательное отображение $(f_*)_x$, ранг которого равен n .

Можно показать, что условие $\Psi_A^k \equiv 0$ является необходимым и достаточным признаком того, что подмногообразие V содержится в своем проективном касательном пространстве порядка $k - 1$. В частности, тождество $\Psi_A^2 \equiv 0$ является признаком того, что V – n -мерная проективная плоскость.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Проективное касательное пространство $PT_A^k(V)$ порядка k (или, что то же самое, соприкасающееся пространство порядка $k - 1$) подмногообразия $V \subset P^N$ можно определить несколько иначе. Пусть $A, A_1, A_2, \dots, A_k$ – точки гладкой кривой $\gamma \subset P^N$. Предельное положение (если оно существует) проективной плоскости, натянутой на точки $A, A_1, A_2, \dots, A_k$, при $A_1, A_2, \dots, A_k \rightarrow A$ называется *проективной касательной плоскостью порядка k кривой γ в точке A* . Объединение проективных касательных плоскостей порядка k в точке A ко всем кривым, лежащим на V и проходящим через A , является подпространством в P^N , которое называется *проективным касательным пространством порядка k подмногообразия V в точке A* .

1.5. Расслоенные многообразия реперов над гладким подмногообразием. Пусть $P^N = P(W)$ – проективное пространство, а $\mathcal{F}(P(W))$ – многообразие реперов, определенное в п. 1.2.

Рассмотрим гладкую проекцию

$$\pi_0 = p \circ e_0: \mathcal{F}(P(W)) \rightarrow P(W), \quad (7)$$

сопоставляющую каждому базису $B = \{e_u\} \in \mathcal{F}(P(W))$ точку $A_0 = p(e_0)$, порожденную вектором e_0 . Проекция (7) определяет главное расслоение с тоталь-

ным пространством $\mathcal{F}(P(W))$, базой $P(W)$ и структурной группой G_0 , являющейся стационарной подгруппой точки A_0 :

$$G_0 = \{g \in \mathrm{PGL}_0(N) \mid \pi_0(Bg) = \pi_0(B) = A_0 \text{ для любого } B \in \mathcal{F}(P(W))\};$$

$$G_0 \cong \left\{ \begin{pmatrix} g_0^0 & \overbrace{0 \dots 0}^{N-1} \\ (g_i^0) & (g_i^j) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(N+1) \right\}.$$

Так как π_0 – гладкая сюръекция, то дифференциал $d_B \pi_0$ является эпиморфизмом на $T_{p(e_0)}(P(W)) \cong W/\langle e_0 \rangle$. Поэтому $\dim(\mathrm{Im}(d_B \pi_0)) = N$. С другой стороны, для любого $X \in \mathfrak{N}(\mathcal{F}(P(W)))$ имеем

$$\begin{aligned} d_B \pi_0(X) &= d_{e_0} p \circ d_B e_0(X) \\ &= (p_*)_{e_0} (\omega_0^0(X) e_0 + \omega_0^1(X) e_1 + \omega_0^2(X) e_2 + \dots + \omega_0^N(X) e_N) \\ &= \langle e_0 \rangle + \omega_0^1(X) \tilde{e}_1 + \omega_0^2(X) \tilde{e}_2 + \dots + \omega_0^N(X) \tilde{e}_N, \end{aligned}$$

где $\tilde{e}_i = (p_*)_{e_0}(e_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Следовательно, 1-формы $\omega_0^1, \omega_0^2, \dots, \omega_0^N$ линейно независимы и образуют базис пространства $T_{p(e_0)}^*(P(W))$. Эти формы являются горизонтальными для расслоения (7). Максимальными интегральными многообразиями вполне интегрируемой системы Пфаффа $\omega_0^1 = \omega_0^2 = \dots = \omega_0^N = 0$ являются слои расслоения (7), каждый из которых диффеоморфен G_0 и состоит из всех реперов, лежащих над фиксированной точкой $A_0 = \pi_0(B)$ пространства $P(W)$.

Пусть теперь V – гладкое связное n -мерное подмногообразие в проективном пространстве $P(W)$, f – отображение вложения. Обозначим через $\mathcal{F}^0(V) = \pi_0^{-1}(V)$ порцию над V для расслоения (7). Тогда $\mathcal{F}^0(V)$ – гладкое связное подмногообразие в $\mathcal{F}(P(W))$, являющееся тотальным пространством для главного расслоения с базой V , проекцией π_0 и структурной группой G_0 . Многообразие $\mathcal{F}^0(V)$ называется *многообразием реперов нулевого порядка над подмногообразием V* .

Пусть $\hat{f}: \mathcal{F}^0(V) \rightarrow \mathcal{F}(P(W))$ – отображение вложения. При помощи оператора антиувлечения функции e_u и формы ω_u^v , определенные на $\mathcal{F}(P(W))$, переносятся на подмногообразии $\mathcal{F}^0(V)$. Обозначим: $\theta_u^v = \hat{f}^* \omega_u^v$. Для W -значных функций $\hat{f}^* e_u = e_u \circ \hat{f}$, заданных на $\mathcal{F}^0(V)$, сохраним прежние обозначения e_u . На многообразии реперов $\mathcal{F}^0(V)$ будут выполняться уравнения (1)–(3). Формы $\theta_0^1, \theta_0^2, \dots, \theta_0^N$ будут являться горизонтальными на расслоении $\pi_0: \mathcal{F}^0(V) \rightarrow V$, причем $\mathrm{rank}\{\theta_0^1, \theta_0^2, \dots, \theta_0^N\} = \dim V = n$.

Расслоенное многообразие реперов $\mathcal{F}^0(V)$ несет полную информацию о дифференциальной геометрии подмногообразия V . В частности, проекция $\pi_0 = p \circ e_0$ позволяет находить фундаментальные формы Ψ_A^k и инвариантные пространства, определенные в п. 1.4, без явного использования поднятия F . Действительно, если F – произвольное фиксированное поднятие в пространство W вложения f , то W -значные функции F и e_0 связаны условием

$$e_0(B) = \lambda \cdot F(f^{-1}(\pi_0(B))),$$

где $\lambda = \lambda(B)$ – знакопостоянная функция на $\mathcal{F}^0(V)$. Рассматривая отображения

$$d_B^k e_0: \underbrace{\mathfrak{N}(\mathcal{F}^0(V)) \times \mathfrak{N}(\mathcal{F}^0(V)) \times \dots \times \mathfrak{N}(\mathcal{F}^0(V))}_k \rightarrow W,$$

построенные по закону

$$d_B^k e_0(X_1, \dots, X_k) = X_k(\dots(X_1(e_0))\dots)(B)$$

для $B \in \mathcal{F}^0(V)$ и $X_i \in \mathfrak{N}(\mathcal{F}^0(V))$, найдем, что

$$W_{A_0}^k(V) = \langle e_0(B), \text{Im } d_B^1 e_0, \dots, \text{Im } d_B^k e_0 \rangle$$

– *производящее пространство порядка k подмногообразия V в точке A_0* ;

$$PT_{A_0}^k(V) = p(W_{A_0}^k(V))$$

– *проективное касательное пространство порядка k подмногообразия V в точке A_0* ;

$$N_{A_0}^k(V) = W/W_{A_0}^k(V)$$

– *нормальное пространство порядка k подмногообразия V в точке A_0* ;

$$\Psi_{A_0}^k(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_k) = W_{A_0}^{k-1}(V) + d_B^k(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

– *фундаментальная форма порядка k* . Здесь $(f^{-1} \circ \pi_0)(B) = x \in M$ и $(f^{-1} \circ \pi_0)_*(X_i) = \hat{X}_i \in \mathfrak{N}(M)$. По существу форма $\Psi_{A_0}^k$ задана на многообразии реперов $\mathcal{F}^0(V)$:

$$\Psi_{A_0}^k(X_1, X_2, \dots, X_k) = W_{A_0}^{k-1}(V) + d_B^k(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

Производящие пространства, инвариантно связанные с вложением f , позволяют строить редукции расслоения $\mathcal{F}^0(V)$. Так, например, требование $\langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle = W_{A_0}^1(V)$ выделяет в $\mathcal{F}^0(V)$ подрасслоение $\mathcal{F}^1(V)$, называемое *расслоением реперов первого порядка над подмногообразием V* . Далее, если $\text{rank } \Psi_A^2 \equiv s$, то условие $\langle e_0, e_1, \dots, e_{n+s} \rangle = W_{A_0}^2(V)$ определяет в $\mathcal{F}^1(V)$ подмногообразие $\mathcal{F}^2(V)$, называемое *расслоением реперов второго порядка над подмногообразием V* . Если существует необходимость, то при помощи производящих пространств более высокого порядка можно продолжить процесс построения соответствующих подрасслоений:

$$\mathcal{F}^0(V) \supseteq \mathcal{F}^1(V) \supseteq \mathcal{F}^2(V) \supseteq \mathcal{F}^3(V) \supseteq \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В ряде случаев, чтобы не загромождать обозначений, удобно не делать различия между производящим пространством порядка k и им порожденным проективным касательным пространством порядка k . В подобной ситуации будем использовать обозначение: $PT_A^k(V) \approx W_A^k(V)$.

§ 2. Признак квадратичных вложений Веронезе

Пусть P^n – вещественное проективное пространство размерности n с однородными координатами $(X^u) = (X^0 : X^1 : \dots : X^n)$. Пространство P^n можно вложить в проективное пространство P^N размерности $N = \binom{n}{n+m} - 1$ по формулам

$$\rho \cdot X^{u_1 u_2 \dots u_m} = X^{u_1} X^{u_2} \dots X^{u_m}, \quad 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m \leq n. \quad (8)$$

Здесь симметричные по всем индексам величины $X^{u_1 u_2 \dots u_m}$ являются однородными координатами в P^N . Вложение $f_n^m : P^n \rightarrow P^N$, определяемое формулами (8), называется *вложением Веронезе*, а его образ $V_n^m = f_n^m(P^n) \subset P^N$ – *многообразием Веронезе* (или, подробнее, *n -мерным многообразием Веронезе степени m*). Одномерные многообразия Веронезе называются *кривыми Веронезе*.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь *квадратичные вложения Веронезе*, т.е. вложения f_n^2 :

$$\rho \cdot X^{uv} = X^u X^v, \quad 0 \leq u \leq v \leq n. \quad (9)$$

В этом случае размерность объемлющего пространства P^N равна

$$N = \binom{2}{n+2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Пусть W – $(n+1)$ -мерное действительное векторное пространство, $S^2(W) = \text{Sym}(W \otimes W)$ – пространство симметрических двухвалентных контравариантных тензоров, $P^N = P(S^2(W))$ – *проективизация тензорного пространства $S^2(W)$* , т.е. проективное пространство, порожденное векторным пространством $S^2(W)$. Обозначим через $\mathcal{T} = \{x \otimes x \in S^2(W) | x \in W \setminus 0\}$ подмножество простых абсолютно вырожденных ненулевых тензоров из $S^2(W)$. Тогда $V_n^2 = p(\mathcal{T})$ – *многообразие Веронезе*, вложенное в проективное пространство $P(S^2(W))$ размерности $N = \binom{2}{n+2} - 1 = n(n+3)/2$. Само квадратичное вложение Веронезе

$$f_n^2 : P(W) \rightarrow P(\text{Sym}(W \otimes W))$$

в бескоординатной форме определяется по закону

$$f_n^2 : \langle x \rangle \mapsto \langle x \otimes x \rangle, \quad (10)$$

где $x \in W$, $\langle x \rangle \approx p(x) \in P(W)$ и $\langle x \otimes x \rangle \approx p(x \otimes x) \in V_n^2 \subset P(\text{Sym}(W \otimes W))$.

Учитывая отождествления

$$\begin{aligned} T_{\langle x \rangle}(P(W)) &\cong W / \langle x \rangle, \\ T_{\langle x \otimes x \rangle}(P(\text{Sym}(W \otimes W))) &\cong \text{Sym}(W \otimes W) / \langle x \otimes x \rangle, \end{aligned}$$

дифференциал

$$d_{\langle x \rangle} f_n^2 : T_{\langle x \rangle}(P(W)) \rightarrow T_{\langle x \otimes x \rangle}(P(\text{Sym}(W \otimes W)))$$

отображения f_n^2 можно рассматривать как мономорфизм

$$d_{\langle x \rangle} f_n^2: W/\langle x \rangle \rightarrow \text{Sym}(W \otimes W)/\langle x \otimes x \rangle.$$

Учитывая (10), можно убедиться, что это отображение задается по закону

$$d_{\langle x \rangle} f_n^2: \langle x \rangle + y \mapsto \langle x \otimes x \rangle + \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x).$$

Следовательно, $\text{Im}(d_{\langle x \rangle} f_n^2) = (x \otimes W + W \otimes x)/\langle x \otimes x \rangle$.

Итак,

$$W_{\langle x \otimes x \rangle}^1(V_n^2) = x \otimes W + W \otimes x$$

– первое производящее пространство многообразия Веронезе V_n^2 в точке $\langle x \otimes x \rangle$;

$$T_{\langle x \otimes x \rangle}(V_n^2) = (x \otimes W + W \otimes x)/\langle x \otimes x \rangle$$

– касательное векторное пространство многообразия Веронезе V_n^2 в точке $\langle x \otimes x \rangle$;

$$PT_{\langle x \otimes x \rangle}^1(V_n^2) = p(x \otimes W + W \otimes x) \approx \langle x \otimes W + W \otimes x \rangle \quad (11)$$

– проективное касательное пространство многообразия Веронезе V_n^2 в точке $\langle x \otimes x \rangle$;

$$N_{\langle x \otimes x \rangle}^1(V_n^2) = \text{Sym}(W \otimes W)/(x \otimes W + W \otimes x)$$

– первое нормальное пространство многообразия Веронезе V_n^2 в точке $\langle x \otimes x \rangle$.

Отметим, что из (11) вытекает одно важное свойство квадратичных вложений Веронезе.

СВОЙСТВО 1. Если $\langle x \otimes x \rangle$ и $\langle y \otimes y \rangle$ – пара различных точек на многообразии Веронезе V_n^2 , то проходящие через них проективные касательные плоскости $PT_{\langle x \otimes x \rangle}^1(V_n^2)$ и $PT_{\langle y \otimes y \rangle}^1(V_n^2)$ имеют единственную общую точку $\langle x \otimes y + y \otimes x \rangle$.

Многообразие Веронезе V_n^2 является простейшей орбитой относительно канонического действия группы

$$G = \text{diag}(\text{PGL}(n) \times \text{PGL}(n)) \cong \text{PGL}(n)$$

на пространстве $P(S^2(W))$. Если $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ – базис векторного пространства W , то базис в $S^2(W)$ образуют тензоры $e_{u_1 u_2} = e_{(u_1} \otimes e_{u_2)}$, где $u_i = 0, 1, \dots, n$. Таким образом, вложение Веронезе f_n^2 индуцирует гладкую инъекцию $\hat{s}_n^2: \mathcal{F}(P^n) \rightarrow \mathcal{F}(P^N)$ по закону $s_n^2: \{e_u\} \mapsto \{e_{vw}\}$, где $e_{uv} = e_{(u} \otimes e_{v)}$. Пусть $\mathcal{F}(V_n^2) = \text{Im}(s_n^2)$ – подмногообразие всех реперов из $\mathcal{F}(P^N)$, произведенных подобным образом. Каждый базис $B = \{e_{u_1 u_2}\}$ из $\mathcal{F}(V_n^2)$ определяет проективный репер в P^N с вершинами $A_{u_1 u_2} = p(e_{u_1 u_2}) \approx \langle e_{u_1 u_2} \rangle$. Относительно этого репера многообразие Веронезе V_n^2 задается параметрическими уравнениями (9). В силу (11) проективная касательная плоскость $PT_{\langle x \otimes x \rangle}^1(V_n^2)$ в точке $\langle x \otimes x \rangle = \{X^{uv}\} = \{X^u X^v\}$ имеет уравнение

$$\rho \cdot X^{uv} = X^{(u} Y^{v)}, \quad 0 \leq u \leq v \leq n,$$

где Y^u – параметры.

Проективный репер $\{A_{uv}\}$ из $\mathcal{F}(V_n^2)$ непосредственно связан с многообразием Веронезе V_n^2 :

$$\begin{aligned} A_{uu} &\in V_n^2, \quad 0 \leq u \leq n; \\ A_{uv} &= PT_{A_{uu}}^1(V_n^2) \cap PT_{A_{vv}}^1(V_n^2), \quad u \neq v, \quad 0 \leq u, v \leq n. \end{aligned}$$

Для каждого значения $u = 0, 1, \dots, n$ рассмотрим проекцию

$$\pi_{uu}: \mathcal{F}(V_n^2) \rightarrow V_n^2, \quad (12)$$

сопоставляющую каждому базису $\{e_{uv}\}$ из $\mathcal{F}(V_n^2)$ точку $A_{uu} = p(e_{uu})$ многообразия Веронезе V_n^2 . Так как проекции π_{uu} являются композициями гладких отображений e_{uu} и p , то π_{uu} – гладкие сюръекции. Каждое отображение π_{uu} определяет главное расслоение с тотальным пространством $\mathcal{F}(V_n^2)$, базой V_n^2 и структурной группой G , изоморфной стационарной подгруппе точки на P^n . Для подмногообразия $\mathcal{F}(V_n^2) \subset \mathcal{F}(P^N)$ обозначим через $\hat{f}_n^2$ соответствующее отображение вложения.

На многообразии $\mathcal{F}(P^N)$ выполняется система уравнений (4)–(6) (см. замечание 1). Обозначим через $\theta_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = (\hat{f}_n^2)^* \omega_{u_1 u_2}^{v_1 v_2}$ увлеченные формы и применим к уравнениям (4)–(6) оператор антиувлечения $(\hat{f}_n^2)^*$. В результате получим

$$de_{u_1 u_2} = \theta_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} e_{v_1 v_2}, \quad (13)$$

$$d\theta_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = \theta_{u_1 u_2}^{w_1 w_2} \wedge \theta_{w_1 w_2}^{v_1 v_2}, \quad (14)$$

$$\sum_{u_1, u_2=0}^n \theta_{u_1 u_2}^{u_1 u_2} = 0, \quad (15)$$

где $0 \leq u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \leq n$. В этих формулах для увлеченных функций $e_{uv} \circ \hat{f}_n^2$ сохранено прежнее обозначение e_{uv} .

Дифференцируя тождество $e_{u_1 u_2} = e_{(u_1} \otimes e_{u_2)}$, определяющее $\mathcal{F}(V_n^2)$, найдем

$$\theta_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = 2 \cdot \omega_{(u_1}^{(v_1} \delta_{u_2)}^{v_2)}, \quad (16)$$

где 1-формы ω_u^v удовлетворяют структурным уравнениям Маурера–Картана группы $PGL(n)$ (см. уравнения (2), (3) при $N = n$).

Базис горизонтальных форм в расслоении π_{uu} составляют 1-формы ω_u^v , где u фиксировано, $v \neq u$. Выберем одну из проекций, например π_{00} , и рассмотрим $S^2(W)$ -значную функцию e_{00} . Вычислим ее дифференциал в точке $B = \{e_{uv}\}$:

$$d_B^1 e_{00}(X_1) = 2\theta_0^i(X_1)e_{0i} \mod \langle e_{00} \rangle.$$

Здесь и далее $i, j = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, $W_{A_{00}}^1(V_n^2) = \langle e_{00}, e_{01}, \dots, e_{0n} \rangle$. Далее, вычисляя второй дифференциал, получим

$$d_B^2(X_1, X_2) = 2\theta_0^i(X_1)\theta_0^j(X_2)e_{ij} \mod \langle e_{00}, e_{01}, \dots, e_{0n} \rangle.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Psi_{A_{00}}^2(X_1, X_2) &= \langle e_{00}, e_{01}, \dots, e_{0n} \rangle + 2\theta_0^i(X_1)\theta_0^j(X_2)e_{ij}, \\ \text{rank } \Psi_{A_{00}}^2 &= \binom{2}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \dim(W_{A_{00}}^2(V_n^2)) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= N+1 = \dim(S^2(W)), \\ W_{A_{00}}^2(V_n^2) &= S^2(W), \quad PT_{A_{00}}^2(V_n^2) = P^N = P(S^2(W)).\end{aligned}$$

Из последних соотношений следует еще одно важное свойство квадратичных вложений Веронезе.

СВОЙСТВО 2. В каждой точке многообразия Веронезе V_n^2 вторая фундаментальная форма имеет максимально возможный ранг $n(n+1)/2$, т.е. соприкасающаяся плоскость совпадает с объемлющим пространством.

Теперь докажем, что свойства 1 и 2 являются характеристическими для квадратичных вложений Веронезе.

ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое связное n -мерное ($n \geq 2$) многообразие, вложенное в вещественное проективное пространство P^N ($N = n(n+3)/2$) и удовлетворяющее условиям:

- (А) касательные проективные пространства для любой пары точек подмногообразия V пересекаются в точке;
- (В) соприкасающееся проективное пространство в каждой точке подмногообразия V совпадает с объемлющим пространством P^N .

Тогда подмногообразие V локально проективно эквивалентно многообразию Веронезе V_n^2 . Если к тому же многообразию V диффеоморфно P^n , то подмногообразия V и V_n^2 совпадают с точностью до проективного преобразования пространства P^N .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (В) теоремы означает, что в каждой точке подмногообразия V вторая фундаментальная форма имеет максимально возможный ранг $n(n+1)/2$. Условие (А) равносильно *секантной вырожденности* подмногообразия V (см. [1], [4]). Таким образом, теорема утверждает, что n -мерными секантно вырожденными подмногообразиями в P^N со второй фундаментальной формой максимального ранга могут быть только квадратичные многообразия Веронезе. Для двумерного случая ($n = 2$, $N = 5$) эта теорема впервые была доказана Гиффитсом и Харрисом в работе [4]. Более простое доказательство для двумерного случая имеется в книге [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Условимся, что всюду в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения:

$$u, v, w, u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 = 0, 1, \dots, n, \quad i, j, k, l, p, q, m, r = 1, 2, \dots, n-1.$$

Пусть $V = f(M)$ – подмногообразие в $P^N = P(W)$, удовлетворяющее условиям теоремы. Здесь f – отображение вложения, W – $(N+1)$ -мерное векторное пространство, порождающее проективное пространство P^N .

Если P и Q – любая пара различных точек на V , то по условию (А) теоремы существует единственная точка, являющаяся пересечением проективных плоскостей $PT_P^1(V)$ и $PT_Q^1(V)$. Поэтому мы можем рассмотреть многообразие реперов $\mathcal{F}(V \odot V) \subset \mathcal{F}(P^N)$, определяемое условиями:

$$\begin{aligned} P &= A_{00} = p(e_{00}) \in V, & Q &= A_{nn} = p(e_{nn}) \in V, \\ PT_P^1(V) \cap PT_Q^1(V) &= A_{0n} = p(e_{0n}), \\ W_P^1(V) &= \langle e_{00}, e_{01}, \dots, e_{0n} \rangle, & W_Q^1(V) &= \langle e_{nn}, \dots, e_{n1}, e_{n0} \rangle. \end{aligned}$$

Можно доказать, что многообразие $\mathcal{F}(V \odot V)$ является тотальным пространством для главного расслоения с базой $V \times V \setminus \text{diag}(V \times V)$, проекцией $\pi_{00} \times \pi_{nn}: \{e_{uv}\} \mapsto A_{00} \times A_{nn}$ и структурной группой G_0 . Эта группа является подгруппой в группе квадратных матриц порядка $N + 1$. Если занумеровать строки и столбцы парой симметричных индексов, то группу G_0 будут образовывать матрицы вида $(C_{u_1 u_2}^{v_1 v_2})$, для которых

$$\begin{aligned} \det(C_{u_1 u_2}^{v_1 v_2}) &= 1, \\ C_{00}^{0i} &= C_{00}^{0n} = C_{00}^{ij} = C_{00}^{in} = C_{00}^{nn} = 0, \\ C_{nn}^{ni} &= C_{nn}^{n0} = C_{nn}^{ij} = C_{nn}^{i0} = C_{nn}^{00} = 0, \\ C_{0i}^{ij} &= C_{0i}^{in} = C_{0i}^{nn} = 0, & C_{ni}^{ij} &= C_{ni}^{i0} = C_{ni}^{00} = 0, \\ C_{0n}^{00} &= C_{0n}^{0i} = C_{0n}^{ij} = C_{0n}^{in} = C_{0n}^{nn} = 0. \end{aligned}$$

Действие группы G_0 на многообразии $\mathcal{F}(V \odot V)$ определяется по закону

$$(\{e_{u_1 u_2}\}, (C_{u_1 u_2}^{v_1 v_2})) \mapsto \{e'_{u_1 u_2}\}, \quad \text{где } e'_{u_1 u_2} = C_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} e_{v_1 v_2}.$$

Главное расслоение $(\mathcal{F}(V \odot V), V \times V \setminus \text{diag}(V \times V), \pi_{00} \times \pi_{nn}, G_0)$ обозначим через Π_0 .

На многообразии $\mathcal{F}(P^N)$ выполняется система уравнений (4)–(6) (см. замечание 1). Пусть $\hat{f}: \mathcal{F}(V \odot V) \rightarrow (P^N)$ – отображение вложения. Сохранив для увлеченных функций $e_{uv} \circ \hat{f}$ прежнее обозначение e_{uv} и обозначив $\theta_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = \hat{f}^* \omega_{u_1 u_2}^{v_1 v_2}$, применим к уравнениям (4)–(6) оператор антиувлечения $\hat{f}^*$. В результате получим уравнения (13)–(15).

Так как $W_P^1(V) = \text{Im}(d_B e_{00})$ и

$$d_B e_{00}(X) = 2\theta_{00}^{00}(X)e_{00} + 2\theta_{00}^{01}(X)e_{01} + \dots + 2\theta_{00}^{0N}(X)e_{0N}$$

для любого $X \in \mathfrak{N}(\mathcal{F}(V \odot V))$, то условие $W_P^1(V) = \langle e_{00}, e_{01}, \dots, e_{0n} \rangle$ равносильно системе дифференциальных уравнений

$$\theta_{00}^{ij} = \theta_{00}^{in} = \theta_{00}^{nn} = 0. \quad (17)$$

Точно так же из условия $W_Q^1(V) = \langle e_{nn}, e_{n1}, \dots, e_{n0} \rangle$ находим

$$\theta_{nn}^{ij} = \theta_{nn}^{i0} = \theta_{nn}^{00} = 0. \quad (18)$$

Базис горизонтальных форм расслоения Π_0 образуют 1-формы

$$\theta_0^1 = \theta_{00}^{01}, \theta_0^2 = \theta_{00}^{02}, \dots, \theta_0^n = \theta_{00}^{0n}, \theta_n^0 = \theta_{nn}^{0n}, \theta_n^1 = \theta_{nn}^{1n}, \dots, \theta_n^{n-1} = \theta_{nn}^{n-1}.$$

При этом на расслоении $\pi_{00}: \mathcal{F}(V \odot V) \rightarrow V$ базис горизонтальных форм образуют 1-формы $\theta_0^1, \theta_0^2, \dots, \theta_0^n$, а на расслоении $\pi_{nn}: \mathcal{F}(V \odot V) \rightarrow V$ аналогичный базис состоит из форм $\theta_n^0, \theta_n^1, \dots, \theta_n^{n-1}$.

Применяя оператор внешнего дифференцирования к системе уравнений (17), (18) и разрешая результат по лемме Картана, найдем

$$2\theta_{0k}^{ij} = A_{kl}^{ij}\theta_0^l + A_k^{ij}\theta_0^n; \quad 2\theta_{0n}^{in} = A_{kl}^i\theta_0^l + A_k^i\theta_0^n; \quad 2\theta_{0k}^{nn} = A_{kl}\theta_0^l + A_k\theta_0^n; \quad (19)$$

$$2\theta_{0n}^{ij} = A_l^{ij}\theta_0^l + A^{ij}\theta_0^n; \quad 2\theta_{0n}^{in} = A_l^i\theta_0^l + A^i\theta_0^n; \quad 2\theta_{0n}^{nn} = A_l\theta_0^l + A\theta_0^n; \quad (20)$$

$$2\theta_{nk}^{ij} = \bar{A}_{kl}^{ij}\theta_n^l + \bar{A}_k^{ij}\theta_n^0; \quad 2\theta_{nk}^{i0} = \bar{A}_{kl}^i\theta_n^l + \bar{A}_k^i\theta_n^0; \quad 2\theta_{nk}^{00} = \bar{A}_{kl}\theta_n^l + \bar{A}_k\theta_n^0; \quad (21)$$

$$2\theta_{n0}^{ij} = \bar{A}_l^{ij}\theta_n^l + \bar{A}^{ij}\theta_n^0; \quad 2\theta_{n0}^{i0} = \bar{A}_l^i\theta_n^l + \bar{A}^i\theta_n^0; \quad 2\theta_{n0}^{00} = \bar{A}_l\theta_n^l + \bar{A}\theta_n^0. \quad (22)$$

Здесь величины $A_{kl}^{ij}, \bar{A}_{kl}^{ij}, A_k^{ij}, \bar{A}_k^{ij}, A_{kl}^j, \bar{A}_{kl}^j, A_{ij}, \bar{A}_{ij}, A_k^i, \bar{A}_k^i, A_k^j, \bar{A}_k^j, A_k, \bar{A}_k, A^j, \bar{A}^j, A, \bar{A}$ являются гладкими функциями на $\mathcal{F}(V \odot V)$. Величины $A_{kl}^{ij}, \bar{A}_{kl}^{ij}$ симметричны по нижним и верхним индексам, $A_k^{ij}, \bar{A}_k^{ij}, A^j, \bar{A}^j$ – по верхним индексам, $A_{kl}^j, \bar{A}_{kl}^j, A_{ij}, \bar{A}_{ij}$ – по нижним индексам. Сравнивая первые серии уравнений в (20) и (22) и учитывая линейную независимость 1-форм $\theta_0^l, \theta_0^n, \theta_n^l$ и θ_n^0 , найдем

$$A^{ij} = \bar{A}^{ij} = A_k^{ij} = \bar{A}_k^{ij} = 0, \quad (23)$$

$$\theta_{0n}^{ij} = 0. \quad (24)$$

Так как для любых векторов X_1 и X_2 , касательных к многообразию $\mathcal{F}(V \odot V)$ в точке $B = \{e_{uv}\}$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} d_{B e_{00}}(X_1) &= 2(\theta_0^i(X_1)e_{0i} + \theta_0^n(X_1)e_{0n}) \mod \langle e_{00} \rangle, \\ d_{B e_{00}}^2(X_1, X_2) &= \theta_0^i(X_1)\theta_0^j(X_2)(A_{ij}^{kl}e_{kl} + 2A_{ij}^k e_{nk} + A_{ij}e_{nn}) \\ &\quad + (\theta_0^i(X_1)\theta_0^n(X_2) + \theta_0^i(X_2)\theta_0^n(X_1))(2A_i^k e_{kn} + A_i e_{nn}) \\ &\quad + \theta_0^n(X_1)\theta_0^n(X_2)A e_{nn} \mod \langle e_{00}, e_{01}, \dots, e_{0n} \rangle, \end{aligned}$$

то $\text{rank}(\Psi_P^2) = \dim \langle \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ni}, \varepsilon_{nn} \rangle$, где $\varepsilon_{ij} = A_{ij}^{kl}e_{kl} + 2A_{ij}^k e_{nk} + A_{ij}e_{nn}$, $\varepsilon_{ni} = 2A_i^k e_{kn} + A_i e_{nn}$, $\varepsilon_{nn} = A e_{nn}$.

По условию (В) теоремы $PT_P^2(V) = P^N$, т.е. $\text{rank}(\Psi_P^2) = n(n+1)/2$. Это возможно лишь в том случае, если векторы $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{nk}, \varepsilon_{nn}$ линейно независимы. Поэтому $A \neq 0$, (A_i^j) – невырожденная $(n-1)$ -матрица, а (A_{ij}^{kl}) – невырожденная $(n(n-1)/2)$ -матрица. Аналогично, вычисляя вторую фундаментальную форму Ψ_Q^2 в точке $Q = p(e_{nn})$, убеждаемся в том, что $\bar{A} \neq 0$ и $(\bar{A}_i^j), (\bar{A}_{ij}^{kl})$ – невырожденные матрицы. В силу вышесказанного существуют матрицы $(B_i^j), (B_{ij}^{kl}), (\bar{B}_i^j)$ и $(\bar{B}_{ij}^{kl})$, определенные условиями

$$A_i^j B_j^k = \bar{A}_i^j \bar{B}_j^k = \delta_i^k, \quad A_{ij}^{kl} B_{kl}^{pq} = \bar{A}_{ij}^{kl} \bar{B}_{kl}^{pq} = \delta_{ij}^{pq} = \delta_i^{(p} \delta_j^{q)} = \frac{1}{2}(\delta_i^p \delta_j^q + \delta_i^q \delta_j^p). \quad (25)$$

Применим оператор внешнего дифференцирования к равенствам (24). В результате получим

$$(\bar{A}_l^k A_{ks}^{ij} - A_s^k \bar{A}_{kl}^{ij}) \theta_n^l \wedge \theta_0^s + \bar{A}^k A_{kl}^{ij} \theta_n^0 \wedge \theta_0^l + A^k \bar{A}_{kl}^{ij} \theta_0^n \wedge \theta_n^l = 0.$$

Учитывая линейную независимость 1-форм θ_0^l , θ_0^n , θ_n^l и θ_n^0 , найдем

$$\bar{A}_l^k A_{ks}^{ij} = A_s^k \bar{A}_{kl}^{ij}, \quad \bar{A}^k A_{kl}^{ij} = 0, \quad A^k \bar{A}_{kl}^{ij} = 0. \quad (26)$$

В силу невырожденности матриц (A_{ij}^{kl}) и $(\bar{A}_{ij}^{kl})$ из вторых и третьих серий равенств системы (26) следуют соотношения

$$\bar{A}^k = A^k = 0. \quad (27)$$

Преобразуем первую систему равенств (26), свернув их с B_p^s :

$$\bar{A}_{pl}^{ij} = B_p^s \bar{A}_l^k A_{ks}^{ij}.$$

Так как величины $\bar{A}_{pl}^{ij}$ симметричны по нижним индексам, то $B_{[p}^s \bar{A}_{l]}^k A_{ks}^{ij} = 0$. Свернув эти равенства с B_{ij}^{mr} , получим $B_{[p}^s \bar{A}_{l]}^k \delta_k^{(m} \delta_s^{r)} = 0$. Следовательно, $B_{[p}^m \bar{A}_{l]}^r = 0$, т.е.

$$B_p^m \bar{A}_l^r - B_l^m \bar{A}_p^r + B_p^r \bar{A}_l^m - B_l^r \bar{A}_p^m = 0.$$

Обозначив $\bar{A}_i^j A_j^i = \alpha$ и свернув последние равенства с A_r^l , найдем

$$\bar{A}_p^m = \frac{\alpha}{n-1} B_p^m.$$

Итак, имеет место следующая система тождеств:

$$\bar{A}_i^j A_j^i = \alpha, \quad \bar{A}_i^k A_k^j = \frac{\alpha}{n-1} \delta_i^j, \quad \bar{A}_{kl}^{ij} = \frac{n-1}{\alpha} \bar{A}_k^s \bar{A}_l^p A_{sp}^{ij}. \quad (28)$$

Теперь с учетом (27) из (20), (22) находим, что $\theta_{0n}^{in} = \frac{1}{2} A_l^i \theta_0^l$ и $\theta_{n0}^{i0} = \frac{1}{2} \bar{A}_l^i \theta_n^l$. После дифференцирования получим

$$\begin{aligned} & (dA_j^i + A_j^i(\theta_{00}^{00} - 2\theta_{0n}^{0n}) - 2A_k^i \theta_{0j}^{0k} + 2A_j^k \theta_{nk}^{ni} - \bar{A}_p^k A_{kj}^i \theta_n^p - A_j \theta_n^i) \wedge \theta_0^j \\ & + (A \delta_j^i - 2\bar{A}_j^k A_k^i) \theta_n^j \wedge \theta_0^n = 0, \\ & (d\bar{A}_j^i + \bar{A}_j^i(\theta_{nn}^{nn} - 2\theta_{n0}^{n0}) - 2\bar{A}_k^i \theta_{nj}^{nk} + 2\bar{A}_j^k \theta_{0k}^{0i} - A_p^k \bar{A}_{kj}^i \theta_0^p - \bar{A}_j \theta_0^i) \wedge \theta_n^j \\ & + (\bar{A} \delta_j^i - 2A_j^k \bar{A}_k^i) \theta_0^j \wedge \theta_n^n = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$dA_j^i + A_j^i(\theta_{00}^{00} - 2\theta_{0n}^{0n}) - 2A_k^i \theta_{0j}^{0k} + 2A_j^k \theta_{nk}^{ni} = C_{jk}^i \theta_0^k + C_j^i \theta_0^n, \quad (29)$$

$$d\bar{A}_j^i + \bar{A}_j^i(\theta_{nn}^{nn} - 2\theta_{n0}^{n0}) - 2\bar{A}_k^i \theta_{nj}^{nk} + 2\bar{A}_j^k \theta_{0k}^{0i} = \bar{C}_{jk}^i \theta_n^k + \bar{C}_j^i \theta_n^0, \quad (30)$$

$$\bar{C}_{[jk]}^i = C_{[jk]}^i = 0, \quad A \delta_j^i - 2\bar{A}_j^k A_k^i = \bar{A} \delta_j^i - 2A_j^k \bar{A}_k^i = 0, \quad A = \bar{A}.$$

В силу этого равенства (28) запишутся в виде

$$\bar{A}_i^j A_j^i = \frac{n-1}{2} A, \quad \bar{A}_i^k A_k^j = \frac{1}{2} A \delta_i^j, \quad \bar{A}_{kl}^{ij} = \frac{2}{A} \bar{A}_k^s \bar{A}_l^p A_{sp}^{ij}. \quad (31)$$

Дифференцирование равенств $\theta_{n0}^{nn} = \frac{1}{2}(A_i \theta_0^i + A \theta_0^n)$ и $\theta_{0n}^{00} = \frac{1}{2}(\bar{A}_i \theta_n^i + A \theta_n^0)$ приводит к соотношениям

$$dA = A(4\theta_{0n}^{0n} - \theta_{00}^{00} - \theta_{nn}^{nn}) + \bar{A}_i A_j^i \theta_0^j + A_i \bar{A}_j^i \theta_n^j, \quad (32)$$

$$dA_l - A_l(2\theta_{n0}^{n0} - \theta_{00}^{00} - \theta_{nn}^{nn}) - 2A_j \theta_{0l}^{0j} - 2A \theta_{0l}^{0n} + 2\bar{A}_l^i \theta_{ni}^{nn} - \bar{A}_j^i A_{il} \theta_n^j = C_{lj} \theta_0^j, \quad (33)$$

$$d\bar{A}_l - \bar{A}_l(2\theta_{0n}^{0n} - \theta_{00}^{00} - \theta_{nn}^{nn}) - 2\bar{A}_j \theta_{nl}^{nj} - 2\bar{A} \theta_{nl}^{n0} + 2\bar{A}_l^i \theta_{0i}^{00} - A_j^i \bar{A}_{il} \theta_0^j = \bar{C}_{lj} \theta_n^j, \quad (34)$$

где $C_{[lj]} = \bar{C}_{[lj]} = 0$. Учитывая (29), (30) и (32), продифференцируем вторую серию равенств системы (31). В результате придем к системе соотношений:

$$C_i^j = \bar{C}_i^j = 0, \quad AC_{ij}^k = \bar{A}_{(i}^k \bar{A}_{j)}^l A_l + \bar{A}_i^l \bar{A}_j^p \bar{A}_k^q A_{lp}^q, \quad A\bar{C}_{ij}^k = A_{(i}^k A_{j)}^l \bar{A}_l + A_i^l A_j^p A_k^q \bar{A}_{lp}^q.$$

Следовательно, уравнения (29), (30) примут вид

$$dA_j^i + A_j^i(\theta_{00}^{00} - 2\theta_{0n}^{0n}) - 2A_k^i \theta_{0j}^{0k} + 2A_j^k \theta_{nk}^{ni} = \frac{1}{A}(\bar{A}_{(j}^i \bar{A}_{k)}^l A_l + \bar{A}_j^l \bar{A}_k^p \bar{A}_i^q A_{lp}^q) \theta_0^k, \quad (35)$$

$$d\bar{A}_j^i + \bar{A}_j^i(\theta_{nn}^{nn} - 2\theta_{n0}^{n0}) - 2\bar{A}_k^i \theta_{nj}^{nk} + 2\bar{A}_j^k \theta_{0k}^{0i} = \frac{1}{A}(A_{(j}^i A_{k)}^l \bar{A}_l + A_j^l A_k^p A_i^q \bar{A}_{lp}^q) \theta_n^k. \quad (36)$$

Последовательно применяя оператор внешнего дифференцирования и лемму Картана к равенствам

$$\begin{aligned} \theta_{0k}^{ij} &= \frac{1}{2} A_{kl}^{ij} \theta_0^l, & \theta_{nk}^{ij} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{kl}^{ij} \theta_n^l, \\ \theta_{0k}^{in} &= \frac{1}{2} A_{kl}^{in} \theta_0^l + \frac{1}{2} A_k^i \theta_0^n, & \theta_{nk}^{i0} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{kl}^{in} \theta_n^l + \frac{1}{2} \bar{A}_k^i \theta_n^0, \\ \theta_{0k}^{nn} &= \frac{1}{2} A_{kl}^{nn} \theta_0^l + \frac{1}{2} A_k^n \theta_0^n, & \theta_{nk}^{00} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{kl}^{nn} \theta_n^l + \frac{1}{2} \bar{A}_k^n \theta_n^0, \end{aligned}$$

придем к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$dA_{kl}^{ij} + A_{kl}^{ij} \theta_{00}^{00} + A_{kl}^{pq} \theta_{pq}^{ij} - 2A_{lp}^{ij} \theta_{0k}^{0p} - 2A_{kp}^{ij} \theta_{0l}^{0p} = C_{kls}^{ij} \theta_0^s - A_{kl}^p \bar{A}_{ps}^{ij} \theta_n^s, \quad (37)$$

$$d\bar{A}_{kl}^{ij} + \bar{A}_{kl}^{ij} \theta_{nn}^{nn} + \bar{A}_{kl}^{pq} \theta_{pq}^{ij} - 2\bar{A}_{lp}^{ij} \theta_{nk}^{np} - 2\bar{A}_{kp}^{ij} \theta_{nl}^{np} = \bar{C}_{kls}^{ij} \theta_n^s - \bar{A}_{kl}^p A_{ps}^{ij} \theta_0^s, \quad (38)$$

$$dA_{jk}^i - 2A_{lj}^i \theta_{0k}^{0l} - 2A_{kl}^i \theta_{0j}^{0l} + 2A_{kj}^l \theta_{ln}^{in} + A_{kj}^i \theta_{00}^{00} + A_{kj}^{lp} \theta_{lp}^{in} - 2A_j^i \theta_{0k}^{0n} - 2A_k^i \theta_{0j}^{0n} + 2A_{kj} \theta_n^i = C_{jkl}^i \theta_0^l, \quad (39)$$

$$d\bar{A}_{jk}^i - 2\bar{A}_{lj}^i \theta_{nk}^{nl} - 2\bar{A}_{kl}^i \theta_{nj}^{nl} + 2\bar{A}_{kj}^l \theta_{l0}^{i0} + \bar{A}_{kj}^i \theta_{nn}^{nn} + \bar{A}_{kj}^{lp} \theta_{lp}^{i0} - 2\bar{A}_j^i \theta_{nk}^{n0} - 2\bar{A}_k^i \theta_{nj}^{n0} + 2\bar{A}_{kj} \theta_0^i = \bar{C}_{jkl}^i \theta_n^l, \quad (40)$$

$$dA_{ij} + A_{ij}(\theta_{00}^{00} + \theta_{nn}^{nn}) - 2A_{il} \theta_{0j}^{0l} - 2A_{jl} \theta_{0i}^{0l} + A_{ij}^k \theta_{kl}^{nn} - 2A_j \theta_{0i}^{0n} - 2A_i \theta_{0j}^{0n} = C_{ijk} \theta_0^k + C_{ij} \theta_0^n, \quad (41)$$

$$d\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ij}(\theta_{nn}^{nn} + \theta_{00}^{00}) - 2\bar{A}_{il} \theta_{nj}^{nl} - 2\bar{A}_{jl} \theta_{ni}^{nl} + \bar{A}_{ij}^{kl} \theta_{kl}^{00} - 2A_j \theta_{ni}^{0n} - 2\bar{A}_i \theta_{nj}^{0n} = \bar{C}_{ijk} \theta_n^k + \bar{C}_{ij} \theta_n^0. \quad (42)$$

Новые величины $C_{klp}^{ij}, \bar{C}_{klp}^{ij}, C_{jkl}^i, \bar{C}_{jkl}^i, C_{jkl}$ и $\bar{C}_{jkl}$, входящие в систему (37)–(42) и появившиеся после применения леммы Картана, удовлетворяют очевидным условиям симметрии.

Тождества

$$A = \bar{A}, \quad \bar{A}_i^k A_k^j = \frac{1}{2} A \delta_i^j, \quad \bar{A}_{kl}^{ij} = \frac{2}{A} \bar{A}_k^s \bar{A}_l^p A_{sp}^{ij}$$

будут играть фундаментальную роль в дальнейшем доказательстве. В частности, будет использован тот факт, что

$$\frac{2}{A} \bar{A}_i^k \bar{A}_j^l A_{kl}^{pq} e_{pq} = \bar{A}_{ij}^{pq} e_{pq}$$

для любого базиса $\{e_{00}, e_{nn}, e_{0i}, e_{ni}, e_{0n}, e_{ij}\}$, лежащего над парой точек $P \times Q$. Эти тождества позволяют одновременно привести к диагональному виду пару фундаментальных форм $\Psi_P^2(V)$ и $\Psi_Q^2(V)$ в точках P и Q .

Рассмотрим допустимую замену базиса, лежащего над парой точек $P \times Q$:

$$\begin{cases} e'_{00} = \rho \cdot \frac{A}{2} e_{00}; & e'_{nn} = \rho \cdot \frac{A^2}{4} e_{nn}; & e'_{0n} = \rho \cdot \frac{A}{2} e_{0n}; \\ e'_{0i} = \rho \cdot \left(\bar{A}_i^j e_{0j} + \frac{1}{2} \bar{A}_i e_{00} \right); & e'_{ni} = \rho \cdot \bar{A}_i^j \left(A_j^k e_{kn} + \frac{1}{2} \bar{A}_j e_{nn} \right); \\ e'_{ij} = \rho \cdot \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{ij}^{pq} e_{pq} + 2 \bar{A}_{ij}^p e_{0p} + \bar{A}_{ij} e_{00} + \bar{A}_i^k \bar{A}_j^l (2 A_{kl}^p e_{pn} + A_{kl} e_{nn}) \right). \end{cases} \quad (43)$$

Здесь множитель ρ однозначно определяется из условия равенства единице определителя матрицы перехода. Данное преобразование принадлежит фундаментальной группе G_0 расслоения Π_0 . Действительно, оно невырождено, сохраняет точки $P = p(e_{00})$ и $Q = p(e_{nn})$, сохраняет проективные касательные плоскости $PT_P^1(V)$ и $PT_Q^1(V)$ вместе с их точкой пересечения $A_{0n} = p(e_{0n})$.

Вычислим компоненты фундаментальных форм $\Psi_P^2(V)$ и $\Psi_Q^2(V)$ в новом базисе $\{e'_{uv}\}$. Пусть $de'_{u_1 u_2} = \bar{\theta}_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} e'_{v_1 v_2}$. Из равенств

$$\begin{aligned} de'_{00} &= 2(A_i^j \bar{\theta}_0^j e'_{0j} + \theta_0^n e'_{0n}) \mod \langle e'_{00} \rangle, \\ de'_{nn} &= 2\left(\frac{A}{2} \theta_n^i e'_{ni} + \frac{A}{2} \theta_n^0 e'_{n0}\right) \mod \langle e'_{nn} \rangle \end{aligned}$$

находим: $\bar{\theta}_0^i = A_j^i \theta_0^j$, $\bar{\theta}_0^n = \theta_0^n$, $\bar{\theta}_n^i = \frac{A}{2} \theta_n^i$, $\bar{\theta}_n^0 = \frac{A}{2} \theta_n^0$. Далее, непосредственная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} de'_{0i} &= \bar{\theta}_0^j e'_{ij} + \bar{\theta}_0^n e'_{in} \mod \langle e'_{00}, e'_{0i}, e'_{0n} \rangle, \\ de'_{in} &= \bar{\theta}_n^j e'_{ij} + \bar{\theta}_n^0 e'_{i0} \mod \langle e'_{nn}, e'_{ni}, e'_{n0} \rangle, \\ de'_{0n} &= \bar{\theta}_n^0 e'_{00} + \bar{\theta}_n^i e'_{0i} + \bar{\theta}_0^i e'_{ni} + \bar{\theta}_0^n e'_{nn} \mod \langle e'_{0n} \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{\theta}_{00}^{ij} = \bar{\theta}_{00}^{in} = \bar{\theta}_{00}^{nn} = \bar{\theta}_{nn}^{ij} = \bar{\theta}_{nn}^{i0} = \bar{\theta}_{nn}^{00} = \bar{\theta}_{0k}^{nn} = \bar{\theta}_{nk}^{00} = \bar{\theta}_{n0}^{ij} = 0, \quad (44)$$

$$\bar{\theta}_{0k}^{ij} = \delta_{(k}^{(i} \delta_{l)}^{j)} \bar{\theta}_0^l, \quad \bar{\theta}_{0k}^{in} = \frac{1}{2} \delta_k^i \bar{\theta}_0^n, \quad \bar{\theta}_{nk}^{i0} = \frac{1}{2} \delta_k^i \bar{\theta}_n^0, \quad \bar{\theta}_{nk}^{ij} = \delta_{(k}^{(i} \delta_{l)}^{j)} \bar{\theta}_n^l, \quad (45)$$

$$\bar{\theta}_{0n}^{in} = \frac{1}{2} \bar{\theta}_0^i, \quad \bar{\theta}_{0n}^{nn} = \bar{\theta}_0^n, \quad \bar{\theta}_{n0}^{00} = \bar{\theta}_n^0, \quad \bar{\theta}_{n0}^{i0} = \frac{1}{2} \bar{\theta}_n^i. \quad (46)$$

Сравнивая систему (19)–(22) с системой (44)–(46), приходим к выводу, что после замены базиса по формулам (43) компоненты фундаментальных форм $\Psi_P^2(V)$ и $\Psi_Q^2(V)$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} A_k^{ij} &= \bar{A}_k^{ij} = A_{ij}^k = \bar{A}_{ij}^k = A^{ij} = \bar{A}^{ij} = A_{ij} = \bar{A}_{ij} = A^i = \bar{A}^i = A_i = \bar{A}_i = 0, \\ A_{kl}^{ij} &= \bar{A}_{kl}^{ij} = 2\delta_{(k}^i \delta_{l)}^j, \quad A_j^i = \bar{A}_j^i = \delta_i^j, \quad A = \bar{A} = 2. \end{aligned} \quad (47)$$

Обозначим через G_1 подгруппу в G_0 , сохраняющую систему равенств (47), и рассмотрим редукцию структурной группы G_0 расслоения Π_0 к подгруппе G_1 . Соответствующее подрасслоение обозначим через Π_1 , а соответствующее тотальное пространство, являющееся интегральным многообразием системы Пфаффа (44)–(46), обозначим через $\mathcal{F}_1(V \odot V)$. Сохраним символ $\hat{f}$ для отображения вложения $\mathcal{F}_1(V \odot V)$ в $\mathcal{F}(P^N)$, увлеченные формы $\hat{f}^* \theta_u^v$ и увлеченные функции $e_{uv} \circ \hat{f}$ будем снова обозначать через θ_u^v и e_{uv} соответственно. В частности, так как базис $\{e'_{uv}\}$, построенный по формулам (43), входит в $\mathcal{F}_1(V \odot V)$, то векторы e'_{uv} будем обозначать снова через e_{uv} , а для 1-форм θ_u^v , входящих в систему (44)–(46), сохраним обозначение θ_u^v .

Первые дифференциальные следствия системы (44)–(46) получим прямой подстановкой выражений (47) в систему дифференциальных уравнений (32)–(42):

$$4\theta_{0n}^{0n} - \theta_{00}^{00} - \theta_{nn}^{nn} = 0, \quad (48)$$

$$2\theta_{nl}^{nn} - 4\theta_{0l}^{0n} = C_{lj}\theta_0^j, \quad (49)$$

$$2\theta_{0l}^{00} - 4\theta_{nl}^{n0} = \bar{C}_{lj}\theta_n^j, \quad (50)$$

$$\delta_j^i(\theta_{00}^{00} - 2\theta_{0n}^{0n}) - 2\theta_{0j}^{0i} + 2\theta_{nj}^{ni} = C_{jk}^i\theta_0^k, \quad (51)$$

$$\delta_j^i(\theta_{nn}^{nn} - 2\theta_{n0}^{n0}) - 2\theta_{nj}^{ni} + 2\theta_{0j}^{0i} = \bar{C}_{jk}^i\theta_n^k, \quad (52)$$

$$2\delta_{kl}^{ij}\theta_{00}^{00} + 2\theta_{kl}^{ij} - 4\delta_{lp}^{ij}\theta_{0k}^{0p} - 4\delta_{kp}^{ij}\theta_{0l}^{0p} = C_{kls}^{ij}\theta_0^s, \quad (53)$$

$$2\delta_{kl}^{ij}\theta_{nn}^{nn} + 2\theta_{kl}^{ij} - 4\delta_{lp}^{ij}\theta_{nk}^{np} - 4\delta_{kp}^{ij}\theta_{nl}^{np} = \bar{C}_{kls}^{ij}\theta_n^s, \quad (54)$$

$$2\theta_{kj}^{in} - 2\delta_j^i\theta_{0k}^{0n} - 2\delta_k^i\theta_{0j}^{0n} = C_{jkl}^i\theta_0^l, \quad (55)$$

$$2\theta_{kj}^{i0} - 2\delta_j^i\theta_{nk}^{n0} - 2\delta_k^i\theta_{nj}^{n0} = \bar{C}_{jkl}^i\theta_n^l, \quad (56)$$

$$2\theta_{ij}^{nn} = C_{ijk}\theta_0^k + C_{ij}\theta_0^n, \quad (57)$$

$$2\theta_{ij}^{00} = \bar{C}_{ijk}\theta_n^k + \bar{C}_{ij}\theta_n^0. \quad (58)$$

Складывая уравнения (51), (52) и учитывая (48), найдем, что $C_{ij}^k = \bar{C}_{ij}^k = 0$. Вычитая из равенства (51) равенство (52), получим

$$4(\theta_{ni}^{nj} - \theta_{0i}^{0j}) = \delta_i^j(\theta_{nn}^{nn} - \theta_{00}^{00}). \quad (59)$$

Находя разность уравнений (53) и (54) и учитывая равенства (59), получим, что $C_{kls}^{ij} = \bar{C}_{kls}^{ij} = 0$. Поэтому уравнения (53), (54) запишутся в виде

$$\theta_{kl}^{ij} = 2(\delta_{lp}^{ij}\theta_{0k}^{0p} + \delta_{pk}^{ij}\theta_{0l}^{0p}) - \delta_{kl}^{ij}\theta_{00}^{00} = 2(\delta_{lp}^{ij}\theta_{nk}^{np} + \delta_{pk}^{ij}\theta_{nl}^{np}) - \delta_{kl}^{ij}\theta_{nn}^{nn}. \quad (60)$$

Дифференцируя равенство (48), получим, что $C_{ij} = \bar{C}_{ij}$. Следовательно,

$$2\theta_{nl}^{nn} - 4\theta_{0l}^{0n} = C_{lj}\theta_0^j, \quad 2\theta_{0l}^{00} - 4\theta_{nl}^{n0} = C_{lj}\theta_n^j. \quad (61)$$

Дифференцирование уравнений (61) и использование леммы Картана и уравнений (57), (58) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} dC_{ij} + \frac{1}{2}C_{ij}(3\theta_{00}^{00} + \theta_{nn}^{nn}) - 2C_{ik}\theta_{0j}^{0k} - 2C_{kj}\theta_{0i}^{0k} - 4\theta_{ij}^{0n} &= C_{ijk}\theta_n^l + \lambda_{ipl}\theta_0^l, \\ dC_{ij} + \frac{1}{2}C_{ij}(3\theta_{nn}^{nn} + \theta_{00}^{00}) - 2C_{ik}\theta_{nj}^{nk} - 2C_{kj}\theta_{ni}^{nk} - 4\theta_{ij}^{n0} &= \bar{C}_{ijk}\theta_0^l + \bar{\lambda}_{ipl}\theta_n^l, \end{aligned}$$

где λ_{ipl} и $\bar{\lambda}_{ipl}$ – некоторые функции, симметричные по всем индексам. Вычитая эти уравнения одно из другого и используя соотношения (59), найдем, что $\lambda_{ipl} = \bar{C}_{ijk}$ и $\bar{\lambda}_{ipl} = C_{ijk}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} dC_{ij} + C_{ij}(\theta_{nn}^{nn} + \theta_{00}^{00}) - C_{ik}(\theta_{nj}^{nk} + \theta_{0j}^{0k}) - C_{kj}(\theta_{0i}^{0k} + \theta_{ni}^{nk}) - 4\theta_{ij}^{n0} \\ = \bar{C}_{ijk}\theta_0^l + C_{ipl}\theta_n^l. \end{aligned} \quad (62)$$

Дифференцируя теперь равенства (59), найдем

$$C_{jkl}^i + \bar{C}_{jkl}^i = \delta_j^i C_{kl} + \delta_k^i C_{lj} + \delta_l^i C_{jk}. \quad (63)$$

Учитывая тождество (63) и дифференцируя систему равенств (60), придем к соотношениям

$$\begin{aligned} C_{klp}^i \delta_q^j + C_{klp}^j \delta_q^i + C_{lpq}^i \delta_k^j + C_{lpq}^j \delta_k^i + C_{pqk}^i \delta_l^j + C_{pqk}^j \delta_l^i + C_{qkl}^i \delta_p^j + C_{qkl}^j \delta_p^i \\ = \delta_k^i \delta_l^j C_{pq} + \delta_k^j \delta_l^i C_{pq} + \delta_l^i \delta_p^j C_{qk} + \delta_l^j \delta_p^i C_{qk} + \delta_p^i \delta_q^j C_{kl} + \delta_p^j \delta_q^i C_{kl} \\ + \delta_q^i \delta_k^j C_{lp} + \delta_q^j \delta_k^i C_{lp} + \delta_k^i \delta_p^j C_{lq} + \delta_k^j \delta_p^i C_{lq} + \delta_l^i \delta_q^j C_{kp} + \delta_l^j \delta_q^i C_{kp}, \quad (64) \\ \bar{C}_{klp}^i \delta_q^j + \bar{C}_{klp}^j \delta_q^i + \bar{C}_{lpq}^i \delta_k^j + \bar{C}_{lpq}^j \delta_k^i + \bar{C}_{pqk}^i \delta_l^j + \bar{C}_{pqk}^j \delta_l^i + \bar{C}_{qkl}^i \delta_p^j + \bar{C}_{qkl}^j \delta_p^i \\ = \delta_k^i \delta_l^j C_{pq} + \delta_k^j \delta_l^i C_{pq} + \delta_l^i \delta_p^j C_{qk} + \delta_l^j \delta_p^i C_{qk} + \delta_p^i \delta_q^j C_{kl} + \delta_p^j \delta_q^i C_{kl} \\ + \delta_q^i \delta_k^j C_{lp} + \delta_q^j \delta_k^i C_{lp} + \delta_k^i \delta_p^j C_{lq} + \delta_k^j \delta_p^i C_{lq} + \delta_l^i \delta_q^j C_{kp} + \delta_l^j \delta_q^i C_{kp}. \quad (65) \end{aligned}$$

При помощи операции свертки легко показать, что общее решение системы (63)–(65) имеет вид

$$C_{jkl}^i = \bar{C}_{jkl}^i = \frac{1}{2}(\delta_j^i C_{kl} + \delta_k^i C_{lj} + \delta_l^i C_{jk}).$$

Теперь уравнения (55), (56) запишутся в виде

$$\theta_{kj}^{in} - \delta_j^i \theta_{0k}^{0n} - \delta_k^i \theta_{0j}^{0n} = \frac{1}{4}(\delta_j^i C_{kl} + \delta_k^i C_{lj} + \delta_l^i C_{jk})\theta_0^l, \quad (66)$$

$$\theta_{kj}^{i0} - \delta_j^i \theta_{nk}^{n0} - \delta_k^i \theta_{nj}^{n0} = \frac{1}{4}(\delta_j^i C_{kl} + \delta_k^i C_{lj} + \delta_l^i C_{jk})\theta_n^l. \quad (67)$$

Дифференцируя их и используя уравнения (62), получим

$$\delta_j^i C_{klp} + \delta_k^i C_{lpj} + \delta_l^i C_{pjk} + \delta_p^i C_{jkl} = 0, \quad \delta_j^i \bar{C}_{klp} + \delta_k^i \bar{C}_{lpj} + \delta_l^i \bar{C}_{pjk} + \delta_p^i \bar{C}_{jkl} = 0.$$

Свертка этих соотношений приводит к равенствам

$$C_{klp} = \overline{C}_{klp} = 0.$$

Поэтому уравнения (57), (58) примут вид

$$2\theta_{ij}^{nn} = C_{ij}\theta_0^n, \quad 2\theta_{ij}^{00} = C_{ij}\theta_n^0. \quad (68)$$

Итак, доказано, что на многообразии реперов $\mathcal{F}_1(V \odot V)$ выполняется система дифференциальных уравнений, состоящая из (48), (59)–(61), (66)–(68) и уравнений

$$dC_{ij} + C_{ij}(\theta_{nn}^{nn} + \theta_{00}^{00}) - C_{ik}(\theta_{nj}^{nk} + \theta_{0j}^{0k}) - C_{kj}(\theta_{0i}^{0k} + \theta_{ni}^{nk}) - 4\theta_{ij}^{n0} = 0. \quad (69)$$

Проверка критерия Фробениуса показывает, что эта система является вполне интегрируемой.

Рассмотрим преобразование

$$\begin{cases} e'_{00} = e_{00}; & e'_{nn} = e_{nn}; & e'_{0n} = e_{0n}; & e'_{0i} = e_{0i}; & e'_{ni} = e_{ni}; \\ e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}C_{ij}e_{0n}. \end{cases} \quad (70)$$

Сразу отметим, что определитель матрицы перехода для этого преобразования равен единице. Пусть $de'_{u_1 u_2} = \bar{\theta}_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} e'_{v_1 v_2}$. Очевидная проверка показывает, что для 1-форм $\bar{\theta}_{u_1 u_2}^{v_1 v_2}$ будет выполняться система дифференциальных уравнений (44)–(46). Следовательно, преобразование (70) принадлежит структурной группе G_1 расслоения Π_1 . В новом базисе система уравнений (48), (59)–(61), (66)–(69) примет вид

$$\begin{cases} 4\bar{\theta}_{0n}^{0n} - \bar{\theta}_{00}^{00} - \bar{\theta}_{nn}^{nn} = 0; \\ 4(\bar{\theta}_{ni}^{nj} - \bar{\theta}_{0i}^{0j}) = \delta_i^j(\bar{\theta}_{nn}^{nn} - \bar{\theta}_{00}^{00}); \\ \bar{\theta}_{kl}^{ij} = 2(\delta_{lp}^{ij}\bar{\theta}_{0k}^{0p} + \delta_{pk}^{ij}\bar{\theta}_{0l}^{0p}) - \delta_{kl}^{ij}\bar{\theta}_{00}^{00} = 2(\delta_{lp}^{ij}\bar{\theta}_{nk}^{np} + \delta_{pk}^{ij}\bar{\theta}_{nl}^{np}) - \delta_{kl}^{ij}\bar{\theta}_{nn}^{nn}; \\ \bar{\theta}_{nl}^{nn} - 2\bar{\theta}_{0l}^{0n} = \bar{\theta}_{0l}^{00} - 2\bar{\theta}_{nl}^{n0} = 0; \\ \bar{\theta}_{kj}^{in} - \delta_j^i\bar{\theta}_{0k}^{0n} - \delta_k^i\bar{\theta}_{0j}^{0n} = \bar{\theta}_{kj}^{i0} - \delta_j^i\bar{\theta}_{nk}^{n0} - \delta_k^i\bar{\theta}_{nj}^{n0} = 0; \\ \bar{\theta}_{ij}^{nn} = \bar{\theta}_{ij}^{00} = \bar{\theta}_{ij}^{n0} = 0. \end{cases} \quad (71)$$

Эти уравнения показывают, в частности, что после преобразования (70) объект C_{ij} стал равен нулю.

Обозначим через $\mathcal{F}_2(V \odot V)$ подмногообразие реперов из $\mathcal{F}_1(V \odot V)$, относительно которых $C_{ij} = 0$, и пусть G_2 – подгруппа в G_1 , которая сохраняет эти условия. Ясно, что четверка

$$\Pi_2 = (\mathcal{F}_2(V \odot V), V \times V \setminus \text{diag}(V \times V), \pi_{00} \times \pi_{nn}, G_2)$$

– подрасслоение в Π_1 . Тотальное пространство $\mathcal{F}_2(V \odot V)$ этого расслоения является максимальным интегральным подмногообразием вполне интегрируемой системы Пфаффа (44)–(46), (71), заданной на $\mathcal{F}(P^N)$.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \omega_0^0 = \frac{1}{2}\bar{\theta}_{00}^{00}, & \omega_0^i = \bar{\theta}_0^i, & \omega_0^n = \bar{\theta}_0^n, \\ \omega_i^0 = \bar{\theta}_{0i}^{00}, & \omega_i^j = 2\bar{\theta}_{0i}^{0j} - \frac{1}{2}\delta_i^j\bar{\theta}_{00}^{00}, & \omega_i^n = \bar{\theta}_{ni}^{nn}, \\ \omega_n^0 = \bar{\theta}_n^0, & \omega_n^i = \bar{\theta}_n^i, & \omega_n^n = \frac{1}{2}\bar{\theta}_{nn}^{nn}, \end{cases} \quad (72)$$

где $1 \leq i, j \leq n-1$. Тогда легко проверяется, что система уравнений (44)–(46), (71) переписывается в виде

$$\bar{\theta}_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = 2 \cdot \omega_{(u_1}^{(v_1} \delta_{u_2)}^{v_2)}, \quad 0 \leq u_1, u_2, v_1, v_2 \leq n. \quad (73)$$

В силу (14) имеем

$$d\bar{\theta}_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = \bar{\theta}_{u_1 u_2}^{w_1 w_2} \wedge \bar{\theta}_{w_1 w_2}^{v_1 v_2}, \quad 0 \leq u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \leq n.$$

Следовательно,

$$2 \cdot d\omega_{(u_1}^{(v_1} \delta_{u_2)}^{v_2)} = 4 \cdot \omega_{(u_1}^{(w_1} \delta_{u_2)}^{w_2)} \wedge \omega_{(w_1}^{(v_1} \delta_{w_2)}^{v_2)}.$$

Преобразуем правую часть этого тождества:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \omega_{(u_1}^{(w_1} \delta_{u_2)}^{w_2)} \wedge \omega_{(w_1}^{(v_1} \delta_{w_2)}^{v_2)} &= (\omega_{(u_1}^{(w_1} \delta_{u_2)}^{w_2} + \omega_{(u_1}^{(w_2} \delta_{u_2)}^{w_1)}) \wedge (\omega_{(w_1}^{(v_1} \delta_{w_2)}^{v_2} + \omega_{(w_1}^{(v_2} \delta_{w_2)}^{v_1)}) \\ &= \delta_{(u_1}^{(v_1} \omega_{u_2)}^{w_2)} \wedge \omega_{w_2}^{v_2)} + 2\omega_{(u_2}^{(v_1} \wedge \omega_{u_1)}^{v_2)} + \delta_{(u_1}^{(v_1} \omega_{u_2)}^{w_1)} \wedge \omega_{w_1}^{v_2)} = 2\delta_{(u_1}^{(v_1} \omega_{u_2)}^{w_2)} \wedge \omega_{w_2}^{v_2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\delta_{(u_1}^{(v_1} d\omega_{u_2)}^{v_2)} = \delta_{(u_1}^{(v_1} \omega_{u_2)}^{w_2)} \wedge \omega_{w_2}^{v_2)}$, т.е. $\delta_{(u_1}^{(v_1} (d\omega_{u_2)}^{v_2} - \omega_{u_2}^{w_2)} \wedge \omega_{w_2}^{v_2)}) = 0$.

Пусть $\Omega_u^v = d\omega_u^v - \omega_u^w \wedge \omega_w^v$. Тогда $\delta_{(u_1}^{(v_1} \Omega_{u_2)}^{v_2)} = 0$, или подробнее:

$$\delta_{u_1}^{v_1} \Omega_{u_2}^{v_2} + \delta_{u_1}^{v_2} \Omega_{u_2}^{v_1} + \delta_{u_2}^{v_1} \Omega_{u_1}^{v_2} + \delta_{u_2}^{v_2} \Omega_{u_1}^{v_1} = 0.$$

Сворачивая найденные соотношения по индексам u_2 и v_2 , получим

$$(n+1)\Omega_{u_1}^{v_1} + \delta_{u_1}^{v_1} \Omega_w^w = 0.$$

Повторно применяя операцию свертки, убеждаемся в том, что $\Omega_w^w = 0$, а следовательно, и $\Omega_{u_1}^{v_1} = 0$. Таким образом, доказано, что 1-формы ω_u^v , входящие в равенства (73), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v. \quad (74)$$

Кроме того, в силу (73) имеем

$$\sum_{u,v=0}^n \theta_{uv}^{uv} = 2 \cdot \sum_{u,v=0}^n \omega_{(u}^{(v} \delta_{v)}^{v)} = n \cdot \sum_{u=0}^n \omega_u^u.$$

Поэтому из равенства (15) следует тождество

$$\sum_{u=0}^n \omega_u^u = 0. \quad (75)$$

Итак, 1-формы ω_u^v , определенные формулами (72), удовлетворяют уравнениям Маурера–Картана группы Ли $\mathrm{PGL}(n)$.

Перейдем к заключительному этапу доказательства. Для любой точки $x \in V$ существует ее окрестность $\bar{V}$, диффеоморфная некоторой области M на P^N . Пусть $f_n^2: M \rightarrow P^N$ и $f: M \rightarrow P^N$ – отображения вложения такие, что: $f_n^2(M) = \bar{V}_n^2 \subset V_n^2$ – область на многообразии Веронезе, а $f(M) = \bar{V} \subset V$ – область на подмногообразии V . Тогда инвариантно определены два многообразия реперов $\mathcal{F}(\bar{V}_n^2) \subset \mathcal{F}(P^N)$ и $\mathcal{F}_2(\bar{V} \odot \bar{V}) \subset \mathcal{F}(P^N)$. При этом если $\hat{f}_n^2: \mathcal{F}(\bar{V}_n^2) \rightarrow \mathcal{F}(P^N)$ и $\hat{f}: \mathcal{F}_2(\bar{V} \odot \bar{V}) \rightarrow \mathcal{F}(P^N)$ – соответствующие вложения, то по доказанному

$$\hat{f}^* \omega_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = (\hat{f}_n^2)^* \omega_{u_1 u_2}^{v_1 v_2} = 2 \cdot \omega_{(u_1 u_2)}^{(v_1 v_2)},$$

где $\omega_{u_1 u_2}^{v_1 v_2}$ – формы Маурера–Картана группы Ли $\mathrm{PGL}(N)$, удовлетворяющие структурным уравнениям (5), (6), а ω_u^v – формы Маурера–Картана группы Ли $\mathrm{PGL}(n)$, удовлетворяющие структурным уравнениям (74), (75). Поэтому, применяя предложение 1, можно заключить, что подмногообразия $\mathcal{F}_2(\bar{V} \odot \bar{V})$ и $\mathcal{F}(\bar{V}_n^2)$ совпадают с точностью до проективного преобразования пространства P^N , т.е.

$$\mathcal{F}_2(\bar{V} \odot \bar{V}) = g \cdot \mathcal{F}(\bar{V}_n^2),$$

где $g \in \mathrm{PGL}(N)$. Так как левое действие группы $\mathrm{PGL}(N)$ на многообразии базисов $\mathcal{F}(P^N)$ и левое действие этой группы на пространстве P^N вместе с проекцией $\pi_{00} = p \circ e_{00}$ удовлетворяют тождеству $\pi_{00} \circ L_g = L_g \circ \pi_{00}$, то

$$\bar{V} = \pi_{00}(\mathcal{F}_2(\bar{V} \odot \bar{V})) = \pi_{00}(g \cdot \mathcal{F}(\bar{V}_n^2)) = g \cdot (\pi_{00}(\mathcal{F}(\bar{V}_n^2))) = g \cdot \bar{V}_n^2,$$

т.е. $\bar{V} = g \cdot \bar{V}_n^2$. Итак, подмногообразие $\bar{V}$ с точностью до проективного преобразования совпадает с областью $\bar{V}_n^2$ на многообразии Веронезе V_n^2 . Таким образом, подмногообразие V локально проективно эквивалентно многообразию Веронезе V_n^2 .

Если теперь V и P^n диффеоморфны, то в качестве M можно взять P^n . Но тогда $\bar{V} = V$, $\bar{V}_n^2 = V_n^2$ и $V = g \cdot V_n^2$. Таким образом, подмногообразия V и V_n^2 проективно эквивалентны. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть V – гладкое n -мерное ($n \geq 2$) подмногообразие в P^N ($N = n(n+3)/2$), заданное векторным уравнением

$$P = P(x) = P(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

на некоторой области в $\mathbb{R}^n$. Это подмногообразие проективно эквивалентно области на многообразии Веронезе V_n^2 тогда и только тогда, когда для

любых $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ и $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ из области определения функции $P(x)$, где $u \neq v$, выполняются условия

$$(A') \quad \text{rank} \left\{ P(u), \frac{\partial P(u)}{\partial x^i}, \frac{\partial P(v)}{\partial x^j}, P(v) \mid i, j = 1, \dots, n \right\} = 2n + 1,$$

$$(B') \quad \det \left\{ P(u), \frac{\partial P(u)}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 P(u)}{\partial x^j \partial x^k} \mid i, j, k = 1, \dots, n, \quad j \leq k \right\} \neq 0.$$

Действительно, в локальных координатах условия (А) и (В) теоремы имеют вид (А') и (В') соответственно.

Таким образом, практическое распознавание многообразий Веронезе сводится к вычислению определителей, составленных из производных не выше второго порядка. В частности, признак двумерного многообразия Веронезе V_2^2 в 5-мерном пространстве в локальных координатах записывается в виде

$$\begin{aligned} \text{rank} \left\{ P(u), \frac{\partial P(u)}{\partial x^1}, \frac{\partial P(u)}{\partial x^2}, \frac{\partial P(v)}{\partial x^1}, \frac{\partial P(v)}{\partial x^2}, P(v) \right\} &= 5, \\ \det \left\{ P(u), \frac{\partial P(u)}{\partial x^1}, \frac{\partial P(u)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 P(u)}{\partial x^1 \partial x^1}, \frac{\partial^2 P(u)}{\partial x^1 \partial x^2}, \frac{\partial^2 P(u)}{\partial x^2 \partial x^2} \right\} &\neq 0 \end{aligned}$$

для любых u и v ($v \neq u$) из области определения векторной функции $P(x)$.

Доказательство теоремы легко может быть преобразовано в доказательство критерия принадлежности пары подмногообразий одному квадратичному многообразию Веронезе.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть V_1 и V_2 – пара гладких связных n -мерных ($n \geq 2$) многообразий, вложенных в проективное пространство P^N ($N = n(n+3)/2$) без пересечений и удовлетворяющих условиям:

(А) касательные проективные пространства для любой точки подмногообразия V_1 и любой точки подмногообразия V_2 пересекаются в точке;

(В) соприкасающиеся проективные пространства во всех точках подмногообразий V_1 и V_2 совпадают с объемлющим пространством P^N .

Тогда для любой пары точек $A \in V_1$ и $B \in V_2$ существуют их окрестности $\bar{V}_1 \subset V_1$ и $\bar{V}_2 \subset V_2$ ($A \in \bar{V}_1$, $B \in \bar{V}_2$) и существует проективное преобразование пространства P^N , переводящее подмногообразия $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ в пару областей на многообразии Веронезе V_n^2 .

Действительно, как и при доказательстве теоремы, условие (А) гарантирует, что с любой парой точек $P \in V_1$ и $Q \in V_2$ можно связать проективный репер $\{A_{uv}\}$, определяемый условиями

$$\begin{aligned} P &= A_{00} = p(e_{00}) \in V_1, \quad Q = A_{nn} = p(e_{nn}) \in V_2, \\ PT_P^1(V_1) \cap PT_Q^1(V_2) &= A_{0n} = p(e_{0n}), \\ W_P^1(V_1) &= \langle e_{00}, e_{01}, \dots, e_{0n} \rangle, \quad W_Q^1(V_2) = \langle e_{nn}, \dots, e_{n1}, e_{n0} \rangle. \end{aligned}$$

Затем, рассматривая многообразие всех базисов $\mathcal{F}(V_1 \times V_2)$ над парами точек $P \in V_1$ и $Q \in V_2$, можно все рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы, практически дословно перенести на данный случай. Разница будет состоять лишь в том, что теперь в качестве базы расслоения $\pi_{00} \times \pi_{nn}: \mathcal{F}(V_1 \times V_2) \rightarrow V_1 \times V_2$ и его редукций будет выступать прямое произведение $V_1 \times V_2$ вместо $V \times V \setminus \text{diag}(V \times V)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть V_1 и V_2 – пара гладких связных n -мерных ($n \geq 2$) непересекающихся подмногообразий в P^N ($N = n(n+3)/2$), заданных векторными уравнениями

$$P = P(x) = P(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad \text{и} \quad Q = Q(y) = P(y^1, y^2, \dots, y^n).$$

Эти подмногообразия принадлежат одному многообразию Веронезе V_n^2 (с точностью до проективного преобразования пространства P^N) тогда и только тогда, когда для любого $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ из области определения функции P и любого $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ из области определения функции Q выполняются условия

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} \left\{ P(u), \frac{\partial P(u)}{\partial x^i}, \frac{\partial Q(v)}{\partial y^j}, Q(v) \mid i, j = 1, \dots, n \right\} &= 2n + 1, \\ \det \left\{ P(u), \frac{\partial P(u)}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 P(u)}{\partial x^j \partial x^k} \mid i, j, k = 1, \dots, n, \quad j \leq k \right\} &\neq 0, \\ \det \left\{ Q(v), \frac{\partial Q(v)}{\partial y^i}, \frac{\partial^2 Q(v)}{\partial y^j \partial y^k} \mid i, j, k = 1, \dots, n, \quad j \leq k \right\} &\neq 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Следствия 2 и 3 могут быть применены для любой конечной системы n -мерных подмногообразий $V_1, V_2, \dots, V_r$ пространства P^N при доказательстве их принадлежности одному многообразию Веронезе V_n^2 .

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В.Ф. Кириченко и Г.А. Клековкину за интерес к полученным результатам и их детальное обсуждение.

Список литературы

1. Akivis M. A., Goldberg V. V. Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam–London–New York–Tokyo: North-Holland, 1993.
2. Chern S. S., do Carmo M., Kobayashi S. Minimal submanifolds on the sphere with second fundamental form of constant length // Functional Analysis and Related Field (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, III, 1968). New York: Springer-Verlage, 1970. P. 59–75.
3. Griffiths P. On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry // Duke Math. J. 1974. V. 41. № 4. P. 775–814.
4. Griffiths P., Harris J. Algebraic geometry and local differential geometry // Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 serie 1979. V. 12. P. 355–452.
5. Little J. A., Pohl W. F. On tight immersions of maximal codimension // Invent. Math. 1971. V. 11. P. 179–204.
6. Nomizu K. A characterization of Veronese varieties // Nagoya Math. J. 1976. V. 60. P. 181–188.
7. Nomizu K., Yano K. On circles and spheres in Riemannian geometry // Math. Ann. 1974. V. 210. P. 163–170.
8. Sasaki T. On the Veronese embedding and related system of differential equations // Global Differential Geometry and Global Analysis. Lecture Note in Math. 1990. V. 1481. P. 210–293.
9. Коннов В. В. Дифференциальная геометрия некоторых классов алгебраических многообразий. Самара: СамГПУ, 1998.

Поступило в редакцию
10.III.1999