Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Аналогии неравенства Гарнака–Тома для вещественной алгебраической поверхности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 5, 45–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/im304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:25:12

УДК 512.7

В. А. Краснов

Аналоги неравенства Гарнака–Тома для вещественной алгебраической поверхности

Доказываются два аналога неравенства Гарнака–Тома для вещественной алгебраической поверхности. В этих неравенствах участвует группа Пикара и группа Брауэра комплексификации данной поверхности. Приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы данные неравенства становились равенствами. При формулировке этих условий используются вещественные отображения цикла.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Пусть далее X – неособое вещественное проективное алгебраическое многообразие, причем $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Тогда кроме неравенства Гарнака–Тома (см. [16])

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad (0.1)$$

также выполняются следующие его аналоги (см. [5]):

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)), \quad (0.2)$$

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{even}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{odd}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \end{aligned} \quad (0.3')$$

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{odd}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{odd}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{even}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \end{aligned} \quad (0.3'')$$

где $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа, $H^{\text{even}}(-, -) = \bigoplus H^{2q}(-, -)$, $H^{\text{odd}}(-, -) = \bigoplus H^{2q+1}(-, -)$. Если неравенство (0.1) становится равенством, то X называется *M-многообразием*. Если неравенство (0.2) становится равенством, то X называется *GM-многообразием*. А если оба неравенства (0.3'), (0.3'') становятся равенствами, то X называется *GMZ-многообразием*.

В работах [5], [10], [11] были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы X было GM(Z)-многообразием. Например, если X – поверхность и $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, то X является GM-поверхностью, а если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, то X является GMZ-поверхностью (см. [5]). В частности, если X – рациональная поверхность, то получаем равенства

$$2s = 2 + \dim H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = 2 + \dim H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}), \quad (0.4')$$

$$r = \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = \dim H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}), \quad (0.4'')$$

где s – число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$, $r = \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Из (0.4') получаем равенство

$$\dim H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) = 2s - 2,$$

которое было доказано в [15], но, как объяснено выше, оно было фактически доказано еще в [5].

Первая задача данной работы состоит в нахождении аналогов неравенств (0.3'), (0.3'') для поверхности, которые содержали бы числа

$$\dim H^q(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}), \quad \dim H^q(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}), \quad q = 1, 2.$$

Заметим, что при доказательстве неравенств (0.3'), (0.3'') применялись эквивариантные когомологии $H^N(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$, $N > 2 \dim X$, а здесь мы применяем эквивариантные когомологии $H^N(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)$ и этальные когомологии $H_{\text{et}}^N(X, \mathbb{G}_m)$. Благодаря этому доказывается

ТЕОРЕМА 0.1. *Если X – поверхность, то выполняются неравенства*

$$s \leq \frac{1}{2}(\dim H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^2(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}) + \log_2 s_a) + 1, \quad (0.5')$$

$$r \leq \dim H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^1(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}) + \log_2 s_a, \quad (0.5'')$$

где s – число компонент связности множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$, s_a – число компонент связности множества вещественных точек $A(\mathbb{R})$ для многообразия Альбанезе A поверхности X , $r = \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$.

Вторая задача данной работы состоит в нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы неравенства (0.5'), (0.5'') становились равенствами. Мы формулируем эти условия с помощью вещественных отображений цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)}: H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (0.6)$$

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}: H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (0.7)$$

где $\tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ – приведенная группа когомологий. Прежде всего определим эти отображения.

Рассмотрим сначала отображение

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)}: \text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

которое устроено следующим образом. Если $y \in \text{Pic } X$ и Y – дивизор, представляющий элемент y , то двойственный класс когомологий $[Y(\mathbb{R})]^* \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ по определению равен $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)}(y)$ (см. подробности в [6]). Так как при $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ канонический гомоморфизм

$$\alpha: \text{Pic } X \rightarrow (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G$$

является изоморфизмом (см. [13]), то группу $\text{Pic } X$ можно отождествить с группой $(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G$. Поэтому имеем отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)}: (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (0.8)$$

Нетрудно увидеть, что подгруппа $(1 + g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})$, где g – образующая G , содержится в ядре гомоморфизма (0.8), поэтому определено следующее отображение цикла:

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)}: (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G / (1 + g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Так как

$$(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G / (1 + g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}}) = H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}),$$

то последний гомоморфизм можно переписать следующим образом:

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)}: H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Итак, отображение цикла (0.6) определено; перейдем к определению отображения (0.7). Сначала определим отображение

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}: \text{Pic } X_{\mathbb{C}} \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

как композицию отображений

$$\text{Pic } X_{\mathbb{C}} \xrightarrow{c_1} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{R} H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

где c_1 – гомоморфизм Чженя, β – гомоморфизм ограничения, R – гомоморфизм редукции по mod 2. Через $(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^-$ обозначим подгруппу $\text{Pic } X_{\mathbb{C}}$, на которой образующая g действует умножением на -1 . Заметим, что если $y \in \text{Pic } X_{\mathbb{C}}$, то

$$\beta(c_1(g(y))) = -\beta(g(c_1(y))) = -\beta(c_1(y)),$$

поэтому $R(\beta(c_1((1 - g)y))) = 0$. Таким образом, подгруппа $(1 - g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})$ группы $(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^-$ содержится в ядре гомоморфизма $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}$. Так как

$$(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^- / (1 - g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}}) = H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}),$$

то получаем гомоморфизм $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}: H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$.

Определим теперь гомоморфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}: H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Сначала определим гомоморфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}: (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^- \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Пусть $l \in (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^-$ и L – соответствующее линейное расслоение на $X_{\mathbb{C}}$. Тогда $L(\mathbb{C})$ – комплексно-аналитическое расслоение на $X(\mathbb{C})$, причем должно существовать антиголоморфное отображение $g_L: L(\mathbb{C}) \rightarrow L(\mathbb{C})'$, где $L(\mathbb{C})'$ – двойственное линейное расслоение, такое, что g_L удовлетворяет условиям:

1) коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} L(\mathbb{C}) & \xrightarrow{g_L} & L(\mathbb{C})' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\mathbb{C}) & \xrightarrow{g} & X(\mathbb{C}) \end{array}$$

т.е. для каждой точки $x \in X(\mathbb{C})$ слой $L(\mathbb{C})_x$ отображается в слой $L(\mathbb{C})'_{g(x)}$;

2) отображение слоев $(g_L)_x: L(\mathbb{C})_x \rightarrow L(\mathbb{C})'_{g(x)}$ является антилинейным изоморфизмом.

Заметим, что отображение g_L определено неоднозначно. Если $a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то ag_L также удовлетворяет требованиям 1), 2). С другой стороны, если $g_L^{(1)}, g_L^{(2)}$ — два таких отображения, то отображение $(g_L^{(2)})^{-1} \circ g_L^{(1)}: L(\mathbb{C}) \rightarrow L(\mathbb{C})$ является комплексно-аналитическим автоморфизмом линейного расслоения, поэтому из компактности $X(\mathbb{C})$ следует равенство $(g_L^{(2)})^{-1} \circ g_L^{(1)} = \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$ — константа. Следовательно, $g_L^{(1)} = \bar{\lambda} g_L^{(2)}$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Обозначим через $(g_L)': L(\mathbb{C}) \rightarrow L(\mathbb{C})'$ отображение, комплексно-сопряженное к двойственному отображению, отождествляя при этом расслоение $(L(\mathbb{C})')'$ с расслоением $L(\mathbb{C})$. Тогда из рассуждения, проведенного выше, получим, что существует константа $\lambda \in \mathbb{C}^*$ такая, что выполняется равенство $(g_L)' = \lambda g_L$. Если $x \in X(\mathbb{R})$, то из равенства $(g_L)'_x = \lambda(g_L)_x$ вытекает, что $\lambda = e^{i\varphi}$. Заменив тогда g_L на $e^{i\varphi/2} g_L$, получим, что выполняется равенство

$$(g_L)'_x = (g_L)_x. \quad (0.9)$$

Пусть $x \in X(\mathbb{R})$ и $v, w \in L(\mathbb{C})_x$; тогда получаем спаривание

$$(v, w)_{g_L} = (g_L)_x(w)(v) \in \mathbb{C}. \quad (0.10)$$

Из условия 2) следует, что спаривание (0.10) является невырожденной полуторалинейной формой на $L(\mathbb{C})_x$. А из равенства (0.9) вытекает, что эта форма эрмитова. Будем обозначать через $\sigma_{g_L}(x)$ сигнатуру этой формы на $L(\mathbb{C})_x$, $x \in X(\mathbb{R})$. Так как L — линейное расслоение, то $\sigma_{g_L}(x)$ принимает значения ± 1 . Таким образом, получаем функцию

$$\sigma_{g_L}: X(\mathbb{R}) \rightarrow \mu_2. \quad (0.11)$$

Отождествляя μ_2 с $\mathbb{F}_2$, мы получим непрерывную функцию $\sigma_{g_L}: X(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{F}_2$, т.е. элемент группы $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Будем обозначать его через $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}(L, g_L)$. Неоднозначность выбора $\sqrt{\lambda} = e^{i\varphi/2}$ приводит к тому, что функция (0.11) определена с точностью до множителя ± 1 . Таким образом, однозначно определен только элемент $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}(L) \in \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, поэтому имеем гомоморфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}: (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^- \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Непосредственная проверка показывает, что подгруппа $(1 - g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})$ принадлежит ядру гомоморфизма $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}$, следовательно, определен гомоморфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}: H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Осталось положить $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)} = \text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0)} \oplus \text{cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}$; тогда получим гомоморфизм (0.7).

В данной работе доказываются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, X является ГМ-поверхностью и гомоморфизмы (0.6), (0.7) мономорфны; тогда неравенства (0.5'), (0.5'') становятся равенствами.

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – группа кручения, неравенства (0.5'), (0.5'') становятся равенствами; тогда гомоморфизмы (0.6), (0.7) мономорфны.

СЛЕДСТВИЕ 0.4. Пусть $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$ и X является M -поверхностью; тогда гомоморфизмы (0.6), (0.7) мономорфны.

§ 1. Пучок μ_∞ на X_{et}

Далее X – неособое вещественное проективное алгебраическое многообразие. Рассмотрим этальную топологию X_{et} на X и пучок $\mathbb{G}_m$ на X_{et} , определенный равенством $\mathbb{G}_m(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$. Через μ_n обозначается подпучок $\mathbb{G}_m$, определенный равенством $\mu_n(U) = \{\text{группа корней } n\text{-ой степени из } 1 \text{ в } \Gamma(U, \mathcal{O}_U)\}$.

Положим $\mu_\infty(U) = \{\text{группа всех корней из } 1 \text{ в } \Gamma(U, \mathcal{O}_U)\}$; тогда получим предпучок μ_∞ на X_{et} , который является пучком, что вытекает из квазикompактности X . Пучки μ_n образуют индуктивную систему, если для каждого разложения на множители $p = q \cdot r$ мы рассмотрим гомоморфизм вложения $\mu_q \rightarrow \mu_p$. Тогда получим равенство

$$\mu_\infty = \varinjlim_n \mu_n. \quad (1.1)$$

Пусть $\mu_\infty = \{\text{группа всех корней из } 1 \text{ в } \mathbb{C}\}$; тогда μ_∞ является G -модулем, где $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, поэтому μ_∞ определяет G -пучок на $(X_{\mathbb{C}})_{\text{et}}$, который в свою очередь определяет пучок на X_{et} , равный μ_∞ . Заметим также, что G -модуль μ_∞ равен G -модулю $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_-$, где “ $-$ ” обозначает, что действие образующей $g \in G$ на $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_-$ совпадает с умножением на -1 . Равенство

$$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_- = \mu_\infty \quad (1.2)$$

определяется гомоморфизмом $r \bmod \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i r}$. Так как пучок μ_∞ получается из G -модуля μ_∞ , то определен канонический гомоморфизм (см. [8])

$$H_{\text{et}}^q(X, \mu_\infty) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mu_\infty). \quad (1.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Гомоморфизм (1.3) является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (1.1) и квазикompактности X получаем равенство

$$H_{\text{et}}^q(X, \mu_\infty) = \varinjlim_n H_{\text{et}}^q(X, \mu_n). \quad (1.4)$$

Если μ_n – группа корней n -ой степени из 1 в $\mathbb{C}$, то имеем равенство G -модулей:

$$\mu_\infty = \varinjlim_n \mu_n,$$

поэтому из компактности $X(\mathbb{C})$ вытекает равенство

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mu_\infty) = \varinjlim_n H^q(X(\mathbb{C}); G, \mu_n). \quad (1.5)$$

Так как канонический гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(X, \mu_n) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mu_n)$$

является изоморфизмом (см. [8], [14]), то из равенств (1.4), (1.5) получаем, что гомоморфизм (1.3) также является изоморфизмом. Предложение доказано.

Обозначим через b_q^- размерность пространства G -инвариантов $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_-)^G$. Тогда имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Существует (неканонический) изоморфизм*

$$H_{\text{et}}^q(X, \mu_\infty) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_q^-} \oplus H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}},$$

где $H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}$ – подгруппа кручения группы $H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (1.2) получаем точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{Q}_- \xrightarrow{\text{exp}} \mu_\infty \rightarrow 1,$$

где $\text{exp}(r) = e^{2\pi i r}$. Из нее вытекает длинная точная последовательность эквивариантных когомологий

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) &\xrightarrow{i^*} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mu_\infty) \\ &\rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{i^*} H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Так как $H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) = H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \otimes \mathbb{Q}$, то из этой длинной точной последовательности получаем следующую короткую точную последовательность:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) / i^* H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) &\rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mu_\infty) \\ &\rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Остается доказать, что существует изоморфизм

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) / i^* H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_q^-}. \quad (1.6)$$

Из равенства $(i^* H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)) \otimes \mathbb{Q} = H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-)$ получаем, что существует изоморфизм

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) / i^* H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\tilde{b}_q^-}, \quad (1.7)$$

где $\tilde{b}_q^- = \dim H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-)$. Но из второй спектральной последовательности для эквивариантных когомологий

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_-)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-)$$

получаем равенство пространств $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Q}_-) = H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_-)^G$, поэтому $\tilde{b}_q^- = b_q^-$ и, следовательно, равенство (1.7) совпадает с равенством (1.6). Предложение доказано.

Рассмотрим теперь гомоморфизм групп когомологий

$$H_{\text{et}}^q(X, \mu_\infty) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X, \mathbb{G}_m), \quad (1.8)$$

индуцированный вложением $\mu_\infty \hookrightarrow \mathbb{G}_m$. Тогда получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. При $q > 2$ гомоморфизм (1.8) является изоморфизмом, а при $q = 2$ он будет эпиморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим факторпучок $\mathbb{G}_m/\mu_\infty$ через φ ; тогда из точной последовательности пучков на X_{et}

$$1 \rightarrow \mu_\infty \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \varphi \rightarrow 1 \quad (1.9)$$

следует, что достаточно доказать равенство нулю группы когомологий $H_{\text{et}}^q(X, \varphi)$ при $q \geq 2$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму из пучков на X_{et}

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mu_\infty & \xrightarrow{\times n} & \mu_\infty \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\times n} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \varphi & \xrightarrow{\times n} & \varphi \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 1 & & 1 \end{array}$$

строки и столбцы в которой точны. Из нее следует, что гомоморфизм пучков $\varphi \xrightarrow{\times n} \varphi$ является изоморфизмом. Поэтому группа элементов n -го порядка ${}_n H_{\text{et}}^q(X, \varphi)$ равна нулю. С другой стороны, группа $H_{\text{et}}^q(X, \mathbb{G}_m)$ является группой кручения при $q \geq 2$ (см. [2]), а группа $H_{\text{et}}^q(X, \mu_\infty)$ является группой кручения при $q \geq 0$ (см. предложение 1.2), следовательно, в силу точной последовательности (1.9) группа $H_{\text{et}}^q(X, \varphi)$ также является группой кручения при $q \geq 2$. Поэтому из равенства ${}_n H_{\text{et}}^q(X, \varphi) = 0$ при каждом $n \geq 2$ получаем, что $H_{\text{et}}^q(X, \varphi) = 0$ при $q \geq 2$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Из предложений 1.2, 1.3 вытекает, что при $q > 2$ выполняется равенство

$$H_{\text{et}}^q(X, \mathbb{G}_m) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_q^-} \oplus H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}.$$

Заметим также, что при $q \leq 2$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} H_{\text{et}}^0(X, \mathbb{G}_m) &= \mathbb{R}^*, & H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{G}_m) &= \text{Pic } X, \\ H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m) &= (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}, \end{aligned}$$

где $\rho_0(X)$ – число Лефшеца, оно равно рангу трансцендентной группы когомологий

$$H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)/\text{NS}(X).$$

Отметим, что равенство для $H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ доказано в [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Аналогичные предложения имеют место для этальных когомологий многообразия $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$, т.е. гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mu_{\infty})$$

является изоморфизмом при любом q ; имеет место (неканонический) изоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty}) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_q} \oplus H^{q+1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\text{tors}},$$

где $b_q = \text{rk } H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, а также гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty}) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)$$

является изоморфизмом при $q > 2$, а при $q = 2$ он будет эпиморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. G -модуль $\mathbb{Z}_-$ определяет пучок абелевых групп на X_{et} , будем обозначать его также через $\mathbb{Z}_-$. Рассмотрим пучки $(\mathbb{G}_m)_- = \mathbb{G}_m \otimes \mathbb{Z}_-$, $(\mu_{\infty})_- = \mu_{\infty} \otimes \mathbb{Z}_-$ на X_{et} . Для их когомологий имеют место предложения, аналогичные предложениям 1.1–1.3, т.е. гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(X, (\mu_{\infty})_-) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, (\mu_{\infty})_-)$$

является изоморфизмом при любом q . Имеет место (неканонический) изоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(X, (\mu_{\infty})_-) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_q^+} \oplus H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})_{\text{tors}},$$

где число b_q^+ равно размерности пространства $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^G$; гомоморфизм $H_{\text{et}}^q(X, (\mu_{\infty})_-) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X, (\mathbb{G}_m)_-)$ является изоморфизмом при $q > 2$, а при $q = 2$ он будет эпиморфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H_{\text{et}}^{\text{even}}(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H_{\text{et}}^{\text{odd}}(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})), \end{aligned} \quad (1.10')$$

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{odd}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H_{\text{et}}^{\text{odd}}(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})) \\ &\quad + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H_{\text{et}}^{\text{even}}(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})). \end{aligned} \quad (1.10'')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim X = m$; тогда выполняются равенства (см. [5], [7])

$$\begin{aligned} H^{2m+3}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) &= H^{\text{even}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \\ H^{2m+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) &= H^{\text{odd}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \end{aligned}$$

поэтому из предложения 1.2 получаем следующие равенства:

$$H_{\text{et}}^{2m+2}(X, \mu_{\infty}) = H^{\text{even}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (1.11')$$

$$H_{\text{et}}^{2m+1}(X, \mu_{\infty}) = H^{\text{odd}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (1.11'')$$

Заметим теперь, что проекция $X_{\mathbb{C}} \rightarrow X$ является конечным накрытием Галуа, поэтому имеет место спектральная последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mu_{\infty}). \quad (1.12)$$

Из этой спектральной последовательности и равенств (1.11'), (1.11'') получаем неравенства

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \sum_{p=2}^{2m+2} \dim_{\mathbb{F}_2} H^p(G, H_{\text{et}}^{2m+2-p}(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})), \\ \dim H^{\text{odd}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \sum_{p=1}^{2m+1} \dim_{\mathbb{F}_2} H^p(G, H_{\text{et}}^{2m+1-p}(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})), \end{aligned}$$

так как $H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty}) = 0$ при $q > 2m$ (см. замечание 1.5). Осталось использовать равенства (см. [3]) $H^q(G, A) = A^G/(1+g)A$ при четном $q \geq 2$ и $H^q(G, A) = A^-/(1-g)A$ при нечетном q , где $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, A – G -модуль, $A^- = \{a \in A \mid g(a) = -a\}$. Предложение доказано.

Возникает вопрос о том, когда неравенства (1.10'), (1.10'') становятся равенствами. Анализ спектральной последовательности (1.12) показывает, что оба неравенства (1.10'), (1.10'') становятся равенствами тогда и только тогда, когда вырождается спектральная последовательность (1.12). Эти рассуждения аналогичны доказательству соответствующего утверждения для G -пучка $\mathbb{Z}$ на $X(\mathbb{C})$ в [5], поэтому мы их опускаем. Заметим также, что если мы будем рассматривать пучок $(\mu_{\infty})_-$ вместо пучка μ_{∞} , то получим те же неравенства, но обращение их в равенства будет равносильно вырождению спектральной последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, (\mu_{\infty})_-)) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, (\mu_{\infty})_-). \quad (1.13)$$

Тем самым спектральные последовательности (1.12), (1.13) вырождаются одновременно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. *Пусть группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная; тогда неравенства (1.10'), (1.10'') становятся равенствами, если и только если X является ГМ-многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим сначала размерность

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty}))$$

при $p \geq 1$. Из равенства $H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty}) = H^q(X(\mathbb{C}), \mu_{\infty})$ и точной последовательности G -модулей

$$0 \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{i^*} H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_-) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mu_{\infty}) \rightarrow 0,$$

которая получается из точной последовательности G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{Q}_- \xrightarrow{\exp} \mu_{\infty} \rightarrow 1$$

в случае свободной группы $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, мы получаем равенства

$$H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_{\infty})) = H^{p+1}(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

Таким образом, правые части неравенств (1.10'), (1.10'') совпадают с правыми частями неравенств (0.3'), (0.3''). Следовательно, неравенства (1.10'), (1.10'') будут равенствами, если и только если X является $\text{GM}\mathbb{Z}$ -многообразием. Но в случае свободной группы $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ многообразие X будет $\text{GM}\mathbb{Z}$ -многообразием, если и только если оно является GM -многообразием (см. [5]). Предложение доказано.

§ 2. Мнимые линейные расслоения

Рассмотрим группу когомологий $H_{\text{et}}^1(X, (\mathbb{G}_m)_-)$. Мы хотим дать геометрическую интерпретацию ее элементам. Прежде всего заметим, что существует канонический гомоморфизм (см. [8])

$$H_{\text{et}}^1(X, (\mathbb{G}_m)_-) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-, \quad (2.1)$$

где G -пучок $(\theta^*)_-$ на $X(\mathbb{C})$ равен $\theta^* \otimes \mathbb{Z}_-$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Гомоморфизм (2.1) является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральные последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, (\mathbb{G}_m)_-), \quad (2.2)$$

$$P_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-,)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-,). \quad (2.3)$$

Из них получаются точные последовательности

$$0 \rightarrow H^1(G, (\mathbb{C}^*)_-) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X, (\mathbb{G}_m)_-) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)^G \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

$$0 \rightarrow H^1(G, (\mathbb{C}^*)_-) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-,) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-,)^G \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

где $(\mathbb{C}^*)_-=\mathbb{C}^* \otimes \mathbb{Z}_-$. Гомоморфизм (2.1) продолжается до гомоморфизма спектральной последовательности (2.2) в спектральную последовательность (2.3). В частности, получаем гомоморфизм точной последовательности (2.4) в точную последовательность (2.5), т.е. получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^1(G, (\mathbb{C}^*)_-) & \rightarrow & H_{\text{et}}^1(X, (\mathbb{G}_m)_-) & \rightarrow & H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)^G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ 0 & \rightarrow & H^1(G, (\mathbb{C}^*)_-) & \rightarrow & H^1(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-,) & \rightarrow & H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-,)^G \rightarrow 0 \end{array} \quad (2.6)$$

Левый вертикальный гомоморфизм в ней, конечно, является изоморфизмом. Но правый – также изоморфизм, так как

$$H^1(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)^G = (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^-, \quad H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-,)^G = (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^-.$$

Следовательно, средний вертикальный гомоморфизм в диаграмме (2.6) является изоморфизмом. Предложение доказано.

Пусть L – голоморфное линейное расслоение на $X(\mathbb{C})$, L' – двойственное расслоение. *Мнимой структурой* на L мы будем называть антиголоморфное отображение $g_L: L \rightarrow L'$, удовлетворяющее условиям:

1) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{g_L} & L' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\mathbb{C}) & \xrightarrow{g} & X(\mathbb{C}) \end{array}$$

коммутативна, т.е. для каждой точки $x \in X(\mathbb{C})$ слой L_x отображается в слой $L'_{g(x)}$;

2) отображение слоев $(g_L)_x: L_x \rightarrow L'_{g(x)}$ является антилинейным изоморфизмом;

3) выполняется равенство $(g_L)'_x = (g_L)_{g(x)}$, где штрих заменяет данное отображение на комплексно-сопряженное к двойственному отображению и $(L'_x)'$ отождествляется с L_x .

Пару (L, g_L) , где L – голоморфное линейное расслоение на $X(\mathbb{C})$, а g_L – мнимая структура на L , будем называть *мнимым* линейным расслоением. Операция тензорного произведения превращает множество классов изоморфных мнимых линейных расслоений в абелеву группу. Эта группа канонически изоморфна группе $H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-)$. Данный факт проверяется с помощью стандартных рассуждений с когомологиями Чеха и G -покрытиями (см. [1]). Заметим, что аналогичное рассуждение для группы $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)$ проведено в [6].

Во введении изложена конструкция, которая каждому мнимому линейному расслоению (L, g_L) сопоставляет класс когомологий $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}(L, g_L) \in H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Таким образом, получаем отображение

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}: H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (2.7)$$

Нетрудно проверить, что

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}((L, g_L) \otimes (M, g_M)) = \text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}(L, g_L) + \text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}(M, g_M),$$

поэтому отображение (2.7) является гомоморфизмом групп.

Рассмотрим еще гомоморфизм $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}: H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$, который определяется равенством

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}(L, g_L) = \beta(c_1(L)),$$

где $c_1(L) \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – класс Чженя, а $\beta: H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ – гомоморфизм ограничения. Положим теперь $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)} = \text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)} \oplus \text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}$; тогда получим гомоморфизм

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}: H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}).$$

Мы хотим описать этот гомоморфизм на языке гомологической алгебры; для этого рассмотрим экспоненциальную точную последовательность G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_- \xrightarrow{\exp} (\mathcal{O}^*)_- \rightarrow 1,$$

где $\mathcal{O}_- = \mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_-$ и $\exp(f) = e^{2\pi i f}$. Тогда из нее получаем связывающий гомоморфизм

$$\delta: H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}).$$

Возьмем композицию его с гомоморфизмом ограничения

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}).$$

Так как (см. [7])

$$H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}),$$

то получаем гомоморфизм

$$\Delta: H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Гомоморфизмы $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$, Δ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим композицию гомоморфизма Δ с проекцией $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ через

$$\Delta^{(0)}: H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

и покажем, что $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}$ совпадает с $\Delta^{(0)}$. Сначала нужно проверить это утверждение для $X = \text{Spec } \mathbb{R}$, причем можно провести непосредственную проверку, но проще поступить следующим образом. Так как $(\text{Spec } \mathbb{C})(\mathbb{R}) = \text{pt}$ – одноточечное пространство и

$$H^1(\text{pt}; G, (\mathbb{C}^*)_-) = H^1(G, (\mathbb{C}^*)_-) = \mathbb{Z}/2 \quad H^0(\text{pt}, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2,$$

то достаточно установить, что гомоморфизмы $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}$, $\Delta^{(0)}$ для $\text{Spec } \mathbb{R}$ являются изоморфизмами. Соответствующую проверку мы опускаем. Возьмем теперь точку $x \in X(\mathbb{R})$ и рассмотрим соответствующий морфизм $\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$, он индуцирует коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) & \xrightarrow{\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(G, (\mathbb{C}^*)_-) & \xrightarrow{\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}} & H^0(\text{pt}, \mathbb{F}_2), \\ H^1(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-) & \xrightarrow{\Delta^{(0)}} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(G, (\mathbb{C}^*)_-) & \xrightarrow{\Delta^{(0)}} & H^0(\text{pt}, \mathbb{F}_2). \end{array}$$

Так как нижние строки в них совпадают для любой точки $x \in X(\mathbb{R})$, то верхние строки тоже должны совпадать. Итак, совпадение гомоморфизмов $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}$, $\Delta^{(0)}$ доказано. Обозначим теперь композицию гомоморфизма Δ с проекцией

$$H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \quad (2.8)$$

через $\Delta^{(2)}: H^1(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$ и покажем, что гомоморфизм $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}$ совпадает с гомоморфизмом $\Delta^{(2)}$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) & \xrightarrow{\delta} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ H^1(X(\mathbb{C}), \theta^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \end{array} \quad (2.9)$$

где гомоморфизмы α – это краевые гомоморфизмы из вторых спектральных последовательностей для эквивариантных когомологий. Заметим, что гомоморфизм

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})$$

совпадает с проекцией (2.8) (см. [7]), а гомоморфизм δ в нижней строке диаграммы (2.9) совпадает с гомоморфизмом c_1 . Поэтому совпадение гомоморфизмов $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}$, $\Delta^{(2)}$ вытекает из рассмотрения диаграммы (2.9) и определений гомоморфизмов $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}$, $\Delta^{(2)}$. Итак, гомоморфизмы $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0)}$, $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(2)}$ соответственно совпадают с гомоморфизмами $\Delta^{(0)}$, $\Delta^{(2)}$, поэтому гомоморфизм $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$ совпадает с гомоморфизмом Δ . Предложение доказано.

§ 3. Доказательство теорем

В этом параграфе X – неособая вещественная проективная алгебраическая поверхность, причем предполагается, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

3.1. Доказательство теоремы 0.1. Сначала докажем две леммы.

ЛЕММА 3.1. *Существуют канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H_{\text{et}}^5(X, \mathbb{G}_m) &= H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \\ H_{\text{et}}^6(X, \mathbb{G}_m) &= H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 1.4 имеем при $q \geq 5$ равенство

$$H_{\text{et}}^q(X, \mathbb{G}_m) = H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}.$$

Осталось заметить, что (см. [9]) $H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ при нечетном $q \geq 3$, $H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ при четном $q \geq 4$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Существуют канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H_{\text{et}}^0(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) &= \mathbb{C}^*, & H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) &= \text{Pic } X_{\mathbb{C}}, & H_{\text{et}}^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) &= \text{Br } X_{\mathbb{C}}, \\ H_{\text{et}}^3(X, \mathbb{G}_m) &= H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_-)/i^*H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-), \\ H_{\text{et}}^4(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) &= (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_-, & H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) &= 0 \quad \text{при } q > 4. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует из определения группы $H_{\text{et}}^0(-, -)$. Второе равенство вытекает из равенства

$$H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) = H_{\text{zar}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m).$$

Третье равенство вытекает из регулярности X (см. [2]). Последние три равенства вытекают из равенства (см. замечание 1.5)

$$H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m) = H^q(X(\mathbb{C}), \mu_{\infty}) \quad \text{при } q > 2$$

и точной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{Q}_- \xrightarrow{\exp} \mu_{\infty} \rightarrow 1$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 0.1. Из спектральной последовательности Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m) \quad (3.1)$$

и лемм 3.1, 3.2 получаем неравенства

$$\begin{aligned} 2s &\leq \dim H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^2(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}) \\ &\quad + \dim H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)/\text{Tors}) + 2, \\ r &\leq \dim H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^1(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}) \\ &\quad + \dim H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)/\text{Tors}). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что (см. [4])

$$\dim H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)/\text{Tors}) = \dim H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)/\text{Tors}) = \log s_a.$$

Теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 0.2. Сначала мы докажем несколько лемм.

ЛЕММА 3.3. В спектральной последовательности Хохшильда–Серра (3.1) дифференциалы $d_q^{p,q-1}$ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in X(\mathbb{R})$ и $\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$ – соответствующий морфизм. Тогда рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E_q^{p,q-1}(X) & \xrightarrow{d_q^{p,q-1}} & E_q^{p+q,0}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_q^{p,q-1}(\text{Spec } \mathbb{R}) & \xrightarrow{d_q^{p,q-1}} & E_q^{p+q,0}(\text{Spec } \mathbb{R}) \end{array} \quad (3.2)$$

которая получается из гомоморфизма спектральной последовательности Хохшильда–Серра (3.1) в аналогичную спектральную последовательность для $\text{Spec } \mathbb{R}$. Так как $H_{\text{et}}^q(\text{Spec } \mathbb{C}, \mathbb{G}_m) = 0$ при $q > 0$, то при $q > 0$ имеем равенства

$$E_2^{p,q}(\text{Spec } \mathbb{R}) = H^p(G, H_{\text{et}}^q(\text{Spec } \mathbb{C}, \mathbb{G}_m)) = 0.$$

Следовательно, нижний дифференциал $d_q^{p,q-1}$ в диаграмме (3.2) равен нулю. С другой стороны, гомоморфизм $E_2^{p,0}(X) \rightarrow E_2^{p,0}(\text{Spec } \mathbb{R})$ является изоморфизмом при $p \geq 0$. Поэтому, полагая последовательно $q = 2, 3, \dots$, получим из диаграммы (3.2) равенство нулю верхнего дифференциала $d_q^{p,q-1}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная и X является GM-поверхностью. Тогда при $q = 3, 4$ дифференциалы $d_r^{p,q}$ в спектральной последовательности (3.1) равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра для пучка μ_∞ на X_{et} :

$$E_2^{p,q}(\mu_\infty) = H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_\infty)) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X_{\mathbb{C}}, \mu_\infty). \quad (3.3)$$

Тогда вложение $\mu_\infty \hookrightarrow \mathbb{G}_m$ определяет гомоморфизм спектральной последовательности (3.3) в спектральную последовательность (3.1). Поэтому имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E_r^{p,q}(\mu_\infty) & \xrightarrow{d_r^{p,q}} & E_r^{p+r, q-r+1}(\mu_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_r^{p,q}(\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{d_r^{p,q}} & E_r^{p+r, q-r+1}(\mathbb{G}_m) \end{array} \quad (3.4)$$

Так как гомоморфизм $H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mu_\infty) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)$ является изоморфизмом при $q \geq 3$ (см. замечание 1.5), то гомоморфизм $E_2^{p,q}(\mu_\infty) \rightarrow E_2^{p,q}(\mathbb{G}_m)$ также является изоморфизмом при $q \geq 3$. Спектральная последовательность (3.3) вырождается в силу предложения 1.8. Поэтому, полагая последовательно $r = 2, 3, \dots$, получим из диаграммы (3.4) равенство нулю нижнего дифференциала $d_r^{p,q}$ в ней при $q \geq 3$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Если отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)} : H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфно, то дифференциал $d_2^{0,2}$ из спектральной последовательности (3.1) равен нулю.

Эта лемма доказана в [12]. Мы не будем повторять ее доказательство, тем более, доказательство следующей леммы очень похоже на доказательство леммы 3.5.

ЛЕММА 3.6. Если отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)} : H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфно, то дифференциал $d_2^{0,2}$ из спектральной последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\text{et}}^q(X_{\mathbb{C}}(\mathbb{G}_m)_-)) \Rightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, (\mathbb{G}_m)_-) \quad (3.5)$$

равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вторую спектральную последовательность для эквивариантных когомологий $H^*(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-)$

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-). \quad (3.6)$$

Определен канонический гомоморфизм спектральной последовательности (3.5) в спектральную последовательность (3.6) [8], поэтому, в частности, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H_{\text{et}}^2(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H_{\text{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)) \\ \downarrow & & \cong \downarrow \\ H^0(G, H^2(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H^1(X_{\mathbb{C}}, (\theta^*)_-)) \end{array} \quad (3.7)$$

Правый вертикальный гомоморфизм в ней является изоморфизмом, поэтому достаточно доказать равенство нулю нижнего дифференциала $d_2^{0,2}$ в диаграмме (3.7). Будем доказывать это утверждение. Из точной экспоненциальной последовательности G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \theta_- \xrightarrow{\exp} (\theta^*)_- \rightarrow 1$$

получаем связывающий гомоморфизм

$$\delta: H^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) \rightarrow H^6(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}). \quad (3.8)$$

Он будет изоморфизмом, так как при $q \geq 3$

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \theta_-) = H^q(X(\mathbb{C}), \theta_-)^G = 0.$$

Группа $H^6(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$ равна группе $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Соответствующий изоморфизм получается из гомоморфизма ограничения (см. [5])

$$\beta: H^6(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^6(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (3.9)$$

Композицию изоморфизма (3.8) с изоморфизмом (3.9) обозначим через

$$\Delta: H^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^5(G, (\mathbb{C}^*)_-) & \xrightarrow{\Delta} & H^0((\text{Spec } \mathbb{R})(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) & \xrightarrow{\Delta} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array}$$

возникающей из структурного морфизма $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{R}$, получаем изоморфизм

$$\tilde{\Delta}: \tilde{H}^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (3.10)$$

где приведенная группа когомологий $\tilde{H}^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-)$ равна по определению факторгруппе

$$H^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) / H^5(G, (\mathbb{C}^*)_-).$$

Из спектральной последовательности (3.6) получаем гомоморфизм

$$H^4(G, H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) \rightarrow \tilde{H}^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-). \quad (3.11)$$

Так как

$$H^4(G, H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) = H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \theta^*)) = H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}),$$

то композиция гомоморфизма (3.11) с изоморфизмом (3.10) определяет гомоморфизм

$$\tilde{\Delta}: H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (3.12)$$

Покажем, что он совпадает с гомоморфизмом $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^1(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) & \xrightarrow{\Delta} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \\ \cup t^4 \downarrow & & \cup t^4 \downarrow \\ H^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) & \xrightarrow{\Delta} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array} \quad (3.13)$$

где t – образующая группы $H^1(G, \mathbb{Z}_-)$. Верхний гомоморфизм Δ в диаграмме (3.13) совпадает с отображением цикла $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$ (см. предложение 2.2), правый вертикальный гомоморфизм в ней равен гомоморфизму

$$\cup t^4: H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^6(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}),$$

который устроен следующим образом. На слагаемом $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ он является тождественным отображением, а на слагаемом $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ он равен гомоморфизму редукции (см. [11]). Из диаграммы (3.13) получается аналогичная диаграмма для приведенных групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^- & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow_R \\ \tilde{H}^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array} \quad (3.14)$$

в которой левый вертикальный гомоморфизм индуцирует гомоморфизм (3.11). Если теперь использовать связь гомоморфизма $\text{Cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$ с гомоморфизмом $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$, а она заключается в коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^1(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) & \xrightarrow{\widetilde{\text{Cl}}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}} & \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \\ \downarrow = & & \downarrow_R \\ (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^- & \xrightarrow{\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}} & \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array} \quad (3.15)$$

то из коммутативной диаграммы (3.14) и равенства верхних гомоморфизмов в диаграммах (3.14), (3.15) вытекает равенство гомоморфизма (3.12) с отображением цикла

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}: H^1(G, \mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (3.16)$$

Таким образом, из мономорфности гомоморфизма (3.16) следует мономорфность гомоморфизма (3.12), а поэтому мономорфен гомоморфизм (3.11). Из определения гомоморфизма (3.11) следует, что дифференциал

$$d_2^{2,2}: H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) \rightarrow H^4(G, H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-))$$

равен нулю. А тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H^2(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) \\ \cup t^2 \downarrow & & \cup t^2 \downarrow \\ H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) & \xrightarrow{d_2^{2,2}} & H^4(G, H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) \end{array}$$

в которой правый гомоморфизм является изоморфизмом, получаем, что $d_2^{0,2} = 0$. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 0.2. Прежде всего заметим, что из доказательства теоремы 0.1 видно, что для доказательства теоремы 0.2 достаточно проверить вырождение спектральной последовательности Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\mathrm{et}}^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H_{\mathrm{et}}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m).$$

Доказанные выше леммы 3.3, 3.4 показывают, что достаточно проверить равенство нулю дифференциалов $d_2^{p,2}$ при $p \geq 0$. Для этого при четном p рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H_{\mathrm{et}}^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H_{\mathrm{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) \\ \cup t^p \downarrow & & \cup t^p \downarrow \cong \\ H^p(G, H_{\mathrm{et}}^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{p,2}} & H^{p+2}(G, H_{\mathrm{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) \end{array} \quad (3.17)$$

а при нечетном p рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H_{\mathrm{et}}^2(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H_{\mathrm{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, (\mathbb{G}_m)_-)) \\ \cup t^p \downarrow & & \cup t^p \downarrow \cong \\ H^p(G, H_{\mathrm{et}}^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{p,2}} & H^{p+2}(G, H_{\mathrm{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) \end{array} \quad (3.18)$$

Первые вертикальные гомоморфизмы в диаграммах (3.17), (3.18) являются изоморфизмами, а левые – эпиморфизмами. В силу лемм 3.5, 3.6 верхние дифференциалы в диаграммах (3.17), (3.18) равны нулю, поэтому нижние дифференциалы также равны нулю. Теорема доказана.

3.3. Доказательство теоремы 0.3.

Сначала докажем несколько лемм.

ЛЕММА 3.7. *Имеют место канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H^0(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) &= \mathbb{C}^*, & H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) &= \text{Pic } X_{\mathbb{C}}, \\ H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)_{\text{tors}} &= \text{Br } X_{\mathbb{C}}, & H^3(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) &= H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-), \\ H^q(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) &= 0 & \text{при } q > 3. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует из компактности $X(\mathbb{C})$; второе равенство общеизвестно; третье равенство доказано в [12], но фактически доказательство его имеется в [8]; два последних равенства вытекают из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 1,$$

так как $H^q(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$ при $q \geq 3$, $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) = 0$ при $q \geq 5$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. *Имеют место канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) &= H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \\ H^6(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) &= H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из длинной экспоненциальной точной последовательности

$$\begin{array}{c} \cdots \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow \cdots \\ \parallel \\ H^q(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})^G \end{array}$$

получаем равенства

$$H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) = H^6(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-), \quad H^6(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) = H^7(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Осталось применить гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-),$$

который является изоморфизмом при $q \geq 4$ (см. [9]). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.9. *Если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – группа кручения, то*

$$H^p(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) / \text{Tors}) = 0$$

при $p > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)_{\text{tors}} & \xrightarrow{\delta} & H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) / H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) & \rightarrow & 0
 \end{array} \quad (3.19)$$

где $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ – образ гомоморфизма $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})$, а $\mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ – линейная оболочка множества $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ в $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})$ над полем $\mathbb{Q}$. Строки в диаграмме (3.19) получаются из экспоненциальной точной последовательности и сами являются точными, поэтому из диаграммы (3.19) вытекает равенство

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) / \text{Tors} = H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) / \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-). \quad (3.20)$$

Так как при $p > 0$

$$H^p(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})) = 0, \quad H^p(G, \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = 0,$$

то из точной последовательности G -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) / \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow 0$$

получаем при $p > 0$ равенство

$$H^p(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) / \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = 0.$$

Осталось применить равенство (3.20). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.10. Пусть $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – группа кручения; тогда неравенства (0.5'), (0.5'') становятся равенствами, если и только если вырождается спектральная последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*). \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3.7, 3.8 и спектральной последовательности (3.21) вытекают неравенства

$$\begin{aligned}
 s &\leq \frac{1}{2}(\dim H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*))) + 1, \\
 r &\leq \dim H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)),
 \end{aligned}$$

причем они становятся равенствами, если и только если вырождается спектральная последовательность (3.21). Из равенства

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)_{\text{tors}} = \text{Br } X_{\mathbb{C}}$$

(см. лемму 3.7) получаем точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \text{Br } X_{\mathbb{C}} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) / \text{Tors} \rightarrow 0.$$

Из нее в силу леммы 3.9 вытекает равенство при $p > 0$

$$\dim H^p(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}) = \dim H^p(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)).$$

Лемма доказана.

Заметим, что мы могли бы рассмотреть спектральную последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), (\mathcal{O}^*)_-)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, (\mathcal{O}^*)_-); \quad (3.22)$$

тогда получили бы утверждение, аналогичное лемме 3.10, т.е. справедлива

ЛЕММА 3.11. Пусть $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – группа кручения; тогда неравенства (0.5'), (0.5'') становятся равенствами, если и только если вырождается спектральная последовательность (3.22).

Наконец, имеет место

ЛЕММА 3.12. Если вырождается спектральная последовательность (3.21) или спектральная последовательность (3.22), то отображения цикла

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)} : H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) &\rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \\ \text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)} : H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) &\rightarrow \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{aligned}$$

мономорфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проверим мономорфность отображения $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$. Для $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(1)}$ проверка аналогична, поэтому ее опускаем. При доказательстве леммы 3.10 было показано, что гомоморфизм $\text{cl}_{\mathbb{R}}^{(0,2)}$ разлагается в композицию гомоморфизма

$$\begin{array}{ccc} H^4(G, H^1(X(\mathbb{C}), (\theta^*)_-)) & \longrightarrow & \tilde{H}^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) \\ \parallel & & \\ H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) & & \end{array} \quad (3.23)$$

с изоморфизмом

$$\tilde{H}^5(X(\mathbb{C}); G, (\theta^*)_-) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Осталось заметить, что если вырождается спектральная последовательность (3.22), то гомоморфизм (3.23) мономорфен. Лемма доказана.

Заметим, наконец, что теорема 0.3 вытекает из лемм 3.10–3.12.

3.4. Доказательство следствия 0.4. Так как по условию $H^1(X(\mathbb{C}), \theta) = 0$, то из экспоненциальной точной последовательности получаем следующую точную последовательность G -модулей:

$$0 \rightarrow \text{Pic } X_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\delta} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow 0.$$

Из нее возникает последовательность гомоморфизмов

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^p(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) &\rightarrow H^p(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \\ &\rightarrow H^p(G, H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Она может быть неточной, но для M -поверхности она точна при каждом p . Это вытекает из существования разложения

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^+ \oplus H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^-,$$

где $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^{\pm}$ – подгруппы $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$, на которых образующая $g \in G$ действует умножением на ± 1 . Разложение доказано в [17], а в [12] подробно объяснено, как из него вытекает точность последовательности (3.24). Таким образом, при $p = 1, 2$ имеем равенство

$$\dim H^p(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \dim H^p(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^p(G, H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)). \quad (3.25)$$

Покажем теперь, что также выполняется равенство

$$\dim H^p(G, H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \dim H^{p+1}(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}). \quad (3.26)$$

Действительно, из равенств

$$\text{Br } X_{\mathbb{C}} = H^2(X(\mathbb{C}), \theta^*)_{\text{tors}}, \quad H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$$

и экспоненциальной точной последовательности получаем равенство

$$\text{Br } X_{\mathbb{C}} = \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-). \quad (3.27)$$

Так как при $p = 1, 2$

$$H^p(G, \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = 0,$$

то из равенства (3.27) следует равенство (3.26). Тогда из равенств (3.25), (3.26) получаем равенства

$$\dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \dim H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^2(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}), \quad (3.28)$$

$$\dim H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = \dim H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + \dim H^1(G, \text{Br } X_{\mathbb{C}}). \quad (3.29)$$

Так как X – M -поверхность, то она является $\text{GM}\mathbb{Z}$ -поверхностью (см. [5]), поэтому имеют место равенства

$$s = \frac{1}{2} \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) + 1, \\ r = \dim H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)).$$

В силу равенств (3.28), (3.29) получаем, что неравенства (0.5'), (0.5'') являются равенствами. Осталось применить теорему 0.3.

§ 4. Примеры и замечания

Если $H^1(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$, то

$$\begin{aligned} \text{Pic } X_{\mathbb{C}} &= H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-), \quad \text{Br } X_{\mathbb{C}} = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_\text{tors} = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-), \\ H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) &= 0, \quad \log_2 s_a = 0 \end{aligned}$$

и неравенства (0.5'), (0.5'') становятся обычными неравенствами Гарнака–Томы для поверхности (см. [5])

$$s \leq \frac{1}{2} (\dim H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))) + 1, \quad (4.1')$$

$$r \leq \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \quad (4.1'')$$

так как $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$. Превращение неравенств (4.1'), (4.1'') в равенства означает, что поверхность X является GMZ-поверхностью.

Достаточные условия для этого рассмотрены в [5], [11].

Заметим, что рациональные поверхности всегда являются поверхностями (если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$), но поверхности Энриквеса могут не быть GMZ-поверхностями. Опишем, когда это происходит. Для вещественной поверхности Энриквеса множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ разбивается на две части $X(\mathbb{R})^{(i)}$, $i = 1, 2$, одна из которых может быть пустой. Это разделение можно описать следующим образом. Рассмотрим факторпространство $Y = X(\mathbb{C})/g$, где $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения. Множество $X(\mathbb{R})$ вложено в Y и разбиение определяется равенствами нулю классов гомологий $[X(\mathbb{R})^{(1)}], [X(\mathbb{R})^{(2)}]$ в группе $H_2(Y, \mathbb{F}_2)$.

Пусть теперь обе части $X(\mathbb{R})^{(1)}$, $X(\mathbb{R})^{(2)}$ непустые. Тогда поверхность X будет GMZ-поверхностью, если $w_1(X(\mathbb{R})) \neq 0$. Если одна из частей $X(\mathbb{R})^{(1)}$, $X(\mathbb{R})^{(2)}$ пустая, то X будет GMZ-поверхностью при выполнении условия $w_2(X(\mathbb{R})) \neq 0$.

Скажем несколько слов про КЗ-поверхности. Рассмотрим поверхность четвертой степени

$$x_0^4 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0.$$

Мы можем немного изменить коэффициенты этого уравнения, чтобы у полученной поверхности группа Пикара $\text{Pic } X_{\mathbb{C}}$ порождалась плоским сечением. Итак, для такой поверхности имеем равенства

$$H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}/2, \quad H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = 0.$$

Следовательно, гомоморфизм (0.6) не мономорфен, тогда неравенство (0.5') строгое.

Список литературы

1. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
2. Grothendick A. Le groupe de Brauer // Dix Exposés sur la Cohomologie des Schemas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 46–188.
3. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
4. Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–374.

5. Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
6. Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
7. Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
8. Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
9. Краснов В. А. Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 101–126.
10. Краснов В. А. Вещественные алгебраические GM-многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 61–88.
11. Краснов В. А. Вещественные алгебраические GMZ-поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 4. С. 51–80.
12. Краснов В. А. О группе Пикара и группе Брауэра вещественной алгебраической поверхности // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 211–230.
13. Manin Y. I. Le groupe de Brauer–Grothendick en géométrie diophantienne // Actes du Congrès Intern. Math. Nice (1970). V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 401–411.
14. Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and its Applications. Yaroslavl, 1992. P. 113–136.
15. Silhol R. Cohomologie de Galois et cohomologie des variétés algébriques réelles; applications aux surfaces rationnelles // Bul. Soc. Math. France. 1987. V. 115. P. 107–125.
16. Thom R. Sur l’homologie des variétés algébriques réelles // Different. and combinator. top. Princeton–N. Y.: Univ. Press, 1965. P. 255–265.
17. Розлин В. А. Сравнения по mod 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функци. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 71–75.

Ярославский государственный университет.
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию
10.II.1999