Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, A_∞ -структуры и функтор $\mathcal{D}$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 5, 147–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/im307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 07:07:42

УДК 513.83

В. А. Смирнов

 A_∞ -структуры и функтор $\mathcal{D}$

В работе рассматривается вопрос о вычислении множества классов эквивалентности A_∞ -структур, поставленный В.М. Бухштабером. Устанавливается связь этого вопроса с вычислением функтора $\mathcal{D}$ Берикашвили.

Библиография: 9 наименований.

Понятие A_∞ -структуры было введено Стасеффом [1] в 1963 г., однако интерес к этому понятию особенно возрос в последние годы в связи с его использованием в алгебре, геометрии, топологии, физике и др. Здесь мы рассмотрим вопрос о вычислении множества классов эквивалентности A_∞ -структур, поставленный В.М. Бухштабером, установим связь этого вопроса с вычислением функтора $\mathcal{D}$ Берикашвили [2].

Напомним, что цепной комплекс A называется A_∞ -алгеброй [1], если заданы операции

$$\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A, \quad n \geq 0,$$

повышающие размерность на n и удовлетворяющие соотношениям

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^{\varepsilon} \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем местам с номерами k , на которых может стоять π_{n-i} и $\varepsilon = nk + ik + n + k$.

В частности, если $n = 0$, получаем формулу

$$d(\pi_1) = \pi_0(1 \otimes \pi_0 - \pi_0 \otimes 1),$$

означающую гомотопическую ассоциативность операции π_0 .

Если $n = 1$, то получаем формулу

$$d(\pi_2) = \pi_1(\pi_0 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes \pi_0 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \pi_0) - \pi_0(\pi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \pi_1),$$

означающую гомотопическую ассоциативность между операциями π_0 и π_1 . И так далее.

Обычную дифференциальную алгебру также можно рассматривать как A_∞ -алгебру с тривиальными высшими операциями π_n , $n \geq 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00114).

Пример A_∞ -алгебры дает сингулярный цепной комплекс $C_*(\Omega X)$ пространства петель ΩX над пространством X .

Еще один важный пример дают гомологии $H_*(A)$ дифференциальной градуированной алгебры A , которые, как показано в работе [3], имеют структуру A_∞ -алгебры.

С целью упрощения знаков переформулируем определение A_∞ -алгебры. А именно, для цепного комплекса X рассмотрим надстройку SX . Непосредственные вычисления показывают, что задание на X структуры A_∞ -алгебры равносильно заданию операций

$$\pi(n): (SX)^{\otimes n} \rightarrow SX, \quad n \geq 2,$$

понижающих размерность на единицу и таких, что

$$d(\pi(n)) + \sum_{i=2}^{n-1} \pi(i)(1 \otimes \cdots \otimes \pi(n-i+1) \otimes \cdots \otimes 1) = 0.$$

В дальнейшем под A_∞ -структурой на цепном комплексе A мы будем понимать семейство $\pi = \{\pi(n)\}$ операций

$$\pi(n): A^{\otimes n} \rightarrow A, \quad n \geq 2,$$

понижающие размерность на единицу и удовлетворяющие приведенным выше соотношениям. В более короткой форме их можно переписать в виде

$$d(\pi(n)) + \sum_{i=2}^{n-1} \pi(i) \cup \pi(n-i+1) = 0,$$

или, еще короче, $d(\pi) + \pi \cup \pi = 0$.

Пусть A', A'' — A_∞ -алгебры. *Отображением A_∞ -алгебр $f: A' \rightarrow A''$ называется семейство отображений*

$$f(n): A'^{\otimes n+1} \rightarrow A'',$$

сохраняющих размерность и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} d(f(n)) &= \sum_{i=1}^{n-1} f(i)(1 \otimes \cdots \otimes \pi'(n-i+1) \otimes \cdots \otimes 1) \\ &\quad - \sum_{n_1 + \cdots + n_i = n} \pi''(i)(f(n_1) \otimes \cdots \otimes f(n_i)), \end{aligned}$$

или в более короткой записи

$$d(f) = f \cup \pi' - \pi'' \cup f.$$

Отображения A_∞ -алгебр $f, g: A' \rightarrow A''$ называются *гомотопными* и обозначается $f \simeq g$, если существует семейство $h = \{h(n)\}$ отображений

$$h(n): A'^{\otimes n} \rightarrow A'',$$

повышающих размерность на единицу, для которого выполняется соотношение

$$d(h) = g - f - \pi'' \cup h - h \cup \pi'.$$

Семейство h называется *гомотопией* между f и g .

A_∞ -алгебры A' , A'' называются *гомотопически эквивалентными* (обозначается $A' \simeq A''$), если существуют отображения $f: A' \rightarrow A''$, $g: A'' \rightarrow A'$, для которых

$$g \circ f \simeq \text{Id}_{A'}, \quad f \circ g \simeq \text{Id}_{A''}.$$

Две A_∞ -структуры π' и π'' на цепном комплексе A называются *эквивалентными* и обозначается $\pi' \sim \pi''$, если существует семейство $c = \{c(n)\}$ отображений

$$c(n): A^{\otimes n} \rightarrow A,$$

сохраняющих размерности и удовлетворяющих соотношениям $c(1) = \text{Id}$ и

$$d(c) = c \cup \pi' - \pi'' \cup c.$$

Для цепного комплекса X обозначим через $\mathcal{D}_\infty(X)$ множество классов эквивалентности A_∞ -структур на X .

Рассмотрим категорию $\mathcal{X}$, объектами которой являются цепные комплексы X , а морфизмами $X \rightarrow Y$ являются тройки (f, g, h) , где $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ – цепные отображения, $h: X \rightarrow X$ – цепная гомотопия, $d(h) = g \circ f - \text{Id}$. Композицией морфизмов $(f', g', h'): X \rightarrow X'$, $(f'', g'', h''): X' \rightarrow X''$ является морфизм

$$(f'' \circ f', g' \circ g'', h' + g' \circ h'' \circ f'): X \rightarrow X''.$$

Два морфизма $(f', g', h'), (f'', g'', h''): X \rightarrow Y$ будем называть *гомотопными* и обозначать $(f', g', h') \simeq (f'', g'', h'')$, если существует тройка (u, v, w) , для которой:

$u: X \rightarrow Y$ – гомотопия между f' и f'' , т.е. $d(u) = f' - f''$;

$v: Y \rightarrow X$ – гомотопия между g' и g'' , т.е. $d(v) = g' - g''$;

$w: X \rightarrow X$ – отображение, повышающее размерность на два и удовлетворяющее соотношению

$$d(w) = h' - h'' - v \circ f' - g'' \circ u.$$

Объекты X', X'' этой категории будем называть *гомотопически эквивалентными* и обозначать $X' \simeq X''$, если существуют морфизмы

$$(f', g', h'): X' \rightarrow X'', \quad (f'', g'', h''): X'' \rightarrow X'$$

такие, что композиции $(f'', g'', h'') \circ (f', g', h')$, $(f', g', h') \circ (f'', g'', h'')$ гомотопны тождественным отображениям.

ТЕОРЕМА 1. *Соответствие $X \mapsto \mathcal{D}_\infty(X)$ определяет функтор $\mathcal{D}_\infty: \mathcal{X} \rightarrow \text{Ens}_*$ из категории $\mathcal{X}$ в категорию множеств с отмеченными точками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим морфизму $(f, g, h): X \rightarrow Y$ категории $\mathcal{X}$ отображение

$$\mathcal{D}_\infty(f, g, h): \mathcal{D}_\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}_\infty(Y).$$

Пусть $\pi = \{\pi(n)\}$, $\pi(n): X^{\otimes n} \rightarrow X$ — A_∞ -структура на цепном комплексе X . Определим семейство $\phi = \{\phi(n)\}$ операций $\phi(n): Y^{\otimes n} \rightarrow Y$, полагая

$$\phi(n) = f\pi(n)g^{\otimes n} + (f\pi \cup h\pi)(n)g^{\otimes n} + (f\pi \cup h\pi \cup h\pi)(n)g^{\otimes n} + \dots$$

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются соотношения

$$d(\phi) + \phi \cup \phi = 0,$$

т.е. ϕ является A_∞ -структурой на Y .

Покажем, что при этом соответствии эквивалентные A_∞ -структуры переходят в эквивалентные. Пусть $\pi \sim \pi'$, $c = \{c(n)\}$ — соответствующее семейство отображений $c(n): X^{\otimes n} \rightarrow X$, удовлетворяющее соотношениям

$$d(c) = c \cup \pi - \pi' \cup c.$$

Определим семейство $b = \{b(n)\}$ отображений $b(n): Y^{\otimes n} \rightarrow Y$, положив

$$\begin{aligned} b(n) = & fc(n)g^{\otimes n} + (fc \cup h\pi - f\pi' \cup hc)(n)g^{\otimes n} \\ & + (f\pi' \cup h\pi' \cup hc - f\pi' \cup hc \cup h\pi + fc \cup h\pi \cup h\pi)(n)g^{\otimes n} + \dots \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что выполняются следующие соотношения:

$$d(b) = b \cup \phi - \phi' \cup b,$$

т.е. A_∞ -структуры ϕ и ϕ' эквивалентны.

Аналогичным образом показывается, что гомотопные морфизмы

$$(f', g', h'), (f'', g'', h''): X \rightarrow Y$$

индуцируют одно и то же отображение

$$\mathcal{D}_\infty(f', g', h') = \mathcal{D}_\infty(f'', g'', h''): \mathcal{D}_\infty(X) \rightarrow \mathcal{D}_\infty(Y).$$

Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Для цепно эквивалентных комплексов X' и X'' имеет место биекция

$$\mathcal{D}_\infty(X') \longleftrightarrow \mathcal{D}_\infty(X'').$$

В частности, если основное кольцо является полем, то для цепного комплекса X имеет место биекция

$$\mathcal{D}_\infty(X) \longleftrightarrow \mathcal{D}_\infty(H_*(X)).$$

Для вычисления множества классов эквивалентности A_∞ -структур рассмотрим понятие функтора $\mathcal{D}$, введенного Н. А. Берикашвили [2] для описания дифференциалов спектральной последовательности расслоения и переформулированного в дальнейшем [4] на языке скрепляющих коцепей Брауна [5]. Недавно приложения функтора $\mathcal{D}$ были рассмотрены в работе [6].

Пусть K – коалгебра с коумножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$, A – алгебра с умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$. Тогда скрепляющей коцепью $\phi: K \rightarrow A$ называется гомоморфизм, понижающий размерность на единицу и удовлетворяющий соотношению $d(\phi) + \phi \cup \phi = 0$, где $\phi \cup \phi = \pi(\phi \otimes \phi)\nabla$ [5].

Обозначим $M(K, A)$ множество всех скрепляющих коцепей $\phi: K \rightarrow A$. Для произвольного отображения $c: K \rightarrow A$, сохраняющего градуировку и такого, что $c_0 = 0$, определим преобразование

$$F_c: M(K, A) \rightarrow M(K, A),$$

положив $F_c(\phi) = \phi'$, где $\phi': K \rightarrow A$ удовлетворяет равенствам

$$\phi'_n = \phi_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cup \phi_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \phi'_i \cup c_{n-i} - dc_n + c_{n-1}d,$$

т.е. ϕ' удовлетворяет равенству

$$\phi' = \phi + c \cup \phi - \phi' \cup c - d(c).$$

Непосредственные вычисления показывают, что так определенное отображение $\phi' = F_c(\phi)$ является скрепляющей коцепью.

Введем в множество скрепляющих коцепей $M(K, A)$ отношение эквивалентности $\sim$, положив $\phi \sim \phi'$, если существует такое $c: K \rightarrow A$, для которого выполняется равенство $F_c(\phi) = \phi'$. Рефлексивность этого отношения очевидна. Транзитивность следует из формулы

$$F_{c'+c+c' \cup c} = F_{c'} \circ F_c.$$

Покажем симметричность. Пусть $F_c(\phi) = \phi'$. Рассмотрим c' , определенное индуктивным образом:

$$c'_n = -c_n - \sum_{i=1}^{n-1} c'_i \cup c_{n-i}.$$

Тогда имеет место равенство $c' + c + c' \cup c = 0$, и, следовательно,

$$F_{c'}(\phi') = F_{c'} \circ F_c(\phi) = F_{c'+c+c' \cup c}(\phi) = \phi.$$

Легко видеть, что скрещенные тензорные произведения, соответствующие эквивалентным скрещивающим коцепям, изоморфны.

Фактормножество множества $M(K, A)$ по введенному отношению эквивалентности обозначим $\mathcal{D}(K, A)$. Соответствие $(K, A) \mapsto \mathcal{D}(K, A)$ определяет функтор $\mathcal{D}$ в категорию множеств с отмеченными точками, контрвариантный по первому и ковариантный по второму аргументам.

Функтор $\mathcal{D}$ может быть определен не только для скрещивающих коцепей, но и в некоторых других ситуациях, например для теории возмущений дифференциалов [7]. А именно, пусть X – цепной комплекс, $d: X \rightarrow X$ – его дифференциал. Рассмотрим возмущение этого дифференциала в виде $\tilde{d} = d + \phi$, где $\phi: X \rightarrow X$ – некоторый гомоморфизм, понижающий размерность на единицу. Равенство $\tilde{d} \circ \tilde{d} = 0$ эквивалентно равенству

$$d(\phi) + \phi \circ \phi = 0.$$

Поэтому ϕ можно считать скрещивающей коцепью, задающей возмущение дифференциала.

Два возмущения $\tilde{d}', \tilde{d}''$ дифференциала d назовем *эквивалентными* и обозначим $\tilde{d}' \sim \tilde{d}''$, если эквивалентны соответствующие скрещивающие коцепи ϕ', ϕ'' , т.е. существует гомоморфизм $c: X \rightarrow X$ такой, что

$$d(c) = \phi' - \phi'' + c \circ \phi' - \phi'' \circ c.$$

Множество классов эквивалентности возмущений дифференциала по введенному отношению эквивалентности обозначим $\mathcal{D}(X)$.

Рассмотрим более общую ситуацию, в которой возникает функтор $\mathcal{D}$. Пусть A – биградуированная дифференциальная алгебра:

$$A = \sum_{n,m} A_m^n,$$

дифференциал в которой сохраняет верхнюю градуировку и понижает нижнюю на единицу. Семейство $\phi = \{\phi_n\}_{n \geq 1}$ элементов $\phi_n \in A_{-1}^n$ будем называть *скрещивающим семейством*, если оно удовлетворяет соотношениям

$$d(\phi) + \phi \cup \phi = 0,$$

где $\cup$ обозначает умножение в A .

Два скрещивающих семейства ϕ', ϕ'' будем называть *эквивалентными* и обозначать $\phi' \sim \phi''$, если существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 0}$ элементов $c_n \in A_0^n$, удовлетворяющих соотношениям $c_0 = 1$ и $d(c) = c \cup \phi' - \phi'' \cup c$.

Множество классов эквивалентности скрещивающих семейств по введенному отношению эквивалентности обозначим $\mathcal{D}(A)$.

Определим понятие функтора $\mathcal{D}$ для A_∞ -алгебр. Пусть A – дифференциальная биградуированная A_∞ -алгебра, $A = \sum_{n,m} A_m^n$. Дифференциал сохраняет

верхнюю градуировку и уменьшает нижнюю градуировку на единицу. Операции $\pi_n: A^{\otimes n+2} \rightarrow A$ сохраняют верхнюю градуировку и увеличивают нижнюю на n .

Семейство $\phi = \{\phi_n\}_{n \geq 1}$ элементов $\phi_n \in A_{-1}^n$ будем называть *скрещивающим семейством*, если выполняются соотношения

$$d(\phi) + \sum_{n \geq 0} \pi_n(\phi \otimes \cdots \otimes \phi) = 0.$$

Два скрещивающих семейства ϕ', ϕ'' будем называть *эквивалентными* и обозначать $\phi' \sim \phi''$, если существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 0}$ элементов $c_n \in A_0^n$ таких, что $c_0 = 1$ и

$$d(c) = \sum_{n \geq 0} \pi_n(c \otimes \phi' \otimes \cdots \otimes \phi' + \cdots + \phi'' \otimes \cdots \otimes \phi'' \otimes c).$$

Множество классов эквивалентности скрещивающих семейств по введенному отношению эквивалентности обозначим $\mathcal{D}(A)$.

Легко видеть, что соответствие $A \mapsto \mathcal{D}(A)$ определяет функтор $\mathcal{D}$ из категории A_∞ -алгебр в категорию множеств с отмеченными точками. Более того, гомотопные A_∞ -отображения $f, g: A' \rightarrow A''$ индуцируют одно и то же отображение

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g): \mathcal{D}(A') \rightarrow \mathcal{D}(A'').$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если A', A'' – гомотопически эквивалентные A_∞ -алгебры, то имеет место биекция*

$$\mathcal{D}(A') \longleftrightarrow \mathcal{D}(A'').$$

В частности, если основное кольцо является полем, то для A_∞ -алгебры A имеет место биекция

$$\mathcal{D}(A) \longleftrightarrow \mathcal{D}(A_*),$$

где гомологии $A_* = H_*(A)$ рассматриваются как A_∞ -алгебра.

Вычисление функтора $\mathcal{D}$ может быть произведено с использованием произведения Масси. Для простоты кольцо коэффициентов будем предполагать полем $\mathbb{Z}/p$. Пусть A – дифференциальная биградуированная алгебра. Рассмотрим скрещивающие семейства $\phi = \{\phi_n\}_{n \geq 1}$, $\phi_n \in A_{-1}^n$.

Соотношение $d(\phi) + \phi \cup \phi = 0$ перепишем в виде системы равенств:

$$\begin{aligned} d(\phi_1) &= 0, \\ d(\phi_2) + \phi_1 \cup \phi_1 &= 0, \\ d(\phi_3) + \phi_1 \cup \phi_2 + \phi_2 \cup \phi_1 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ d(\phi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i \cup \phi_{n-i} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что элемент ϕ_1 является циклом и, следовательно, определяет элемент $h_1 \in H_{-1}(A^1)$.

Из второго равенства следует, что произведение $h_1 \cup h_1$ равно нулю.

Третье равенство означает, что произведение Масси $m_1(h_1 \otimes h_1 \otimes h_1)$ равно нулю. И так далее.

Таким образом, для элемента $h_1 \in H_{-1}(A^1)$ все произведения Масси равны нулю, т.е. для всех $n \geq 0$ выполняются равенства

$$m_n(h_1 \otimes \cdots \otimes h_1) = 0.$$

Из размерностных соображений следует, что эти равенства можно переписать в виде

$$\sum_n m_n(h_1 \otimes \cdots \otimes h_1) = 0.$$

Множество таких элементов h_1 обозначим $J_1 H_{-1}(A)$.

Пусть ϕ и ϕ' – эквивалентные скрепляющие семейства. Это означает, что существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 0}$, $c_n \in A_0^n$, для которого выполняются равенства $c_0 = 1$ и

$$d(c) = c \cup \phi - \phi' \cup c, \quad c \in A_0, \quad c = 1 + c_1 + c_2 + \cdots$$

Последнее равенство можно переписать в виде системы равенств

$$\begin{aligned} d(c_1) &= \phi_1 - \phi'_1, \\ d(c_2) &= \phi_2 - \phi'_2 + c_1 \cup \phi_1 - \phi'_1 \cup c_1, \\ &\dots\dots\dots \\ d(c_n) &= \phi_n - \phi'_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cup \phi_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \phi'_i \cup c_{n-i}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что эквивалентные скрепляющие семейства ϕ и ϕ' порождают один и тот же элемент h_1 . Таким образом, мы имеем отображение

$$p_1: \mathcal{D}(A) \rightarrow J_1 H_{-1}(A).$$

Заметим, что если модуль A_{-1}^1 является конечно порожденным, то для элемента h_1 мы можем выбрать представители $\psi_n^1 \in A_{-1}^n$ так, что будет выполняться соотношение скрепляющего семейства.

Кроме того, скрепляющее семейство $\psi^1 = \{\psi_n^1\}$ будет удовлетворять соотношению $d(c_1) = \phi_1 - \psi_1^1$. Следовательно, для скрепляющего семейства $F_{c_1}(\phi)$, эквивалентного ϕ , будет выполняться равенство $F_{c_1}(\phi)_1 = \psi_1$.

Подправим скрепляющую коцепь ϕ , взяв вместо нее $F_{c_1}(\phi)$. Рассмотрим семейство $\phi^1 = \phi - \psi^1$. Оно удовлетворяет соотношениям

$$d(\phi^1) + \psi^1 \cup \phi^1 + \phi^1 \cup \psi^1 + \phi^1 \cup \phi^1 = 0, \quad \phi_1^1 = 0,$$

которые следуют из того, что ψ^1 и $\phi^1 + \psi^1$ являются скрепляющими семействами.

Первое из этих соотношений можно переписать в виде системы равенств

$$\begin{aligned} d(\phi_2^1) &= 0, \\ d(\phi_3^1) + \psi_1^1 \cup \phi_2^1 + \phi_2^1 \cup \psi_1^1 &= 0, \\ d(\phi_4^1) + \psi_1^1 \cup \phi_3^1 + \psi_2^1 \cup \phi_2^1 + \phi_2^1 \cup \psi_2^1 + \phi_3^1 \cup \psi_1^1 + \phi_2^1 \cup \phi_2^1 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ d(\phi_n^1) + \sum_{i=1}^{n-2} \psi_i^1 \cup \phi_{n-i}^1 + \sum_{i=2}^{n-1} \psi_i^1 \cup \phi_{n-i}^1 + \sum_{i=2}^{n-2} \phi_i^1 \cup \phi_{n-i}^1 &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что элемент ϕ_2^1 является циклом и, следовательно, порождает элемент $h_2 \in H_{-1}(A^2)$.

Из второго равенства следует, что произведение $h_1 \cup h_2 + h_2 \cup h_1$ равно нулю.

Третье равенство означает, что произведение Масси

$$m_1(h_1 \otimes h_1 \otimes h_2 + h_1 \otimes h_2 \otimes h_1 + h_2 \otimes h_1 \otimes h_1) + h_2 \cup h_2$$

равно нулю. И так далее.

Таким образом, элемент $h_2 \in H_{-1}(A^2)$ для всех $n \geq 2$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \dots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется по всем $k \geq 2$ и $i_1, \dots, i_k$ таким, что

$$i_1 + \dots + i_k = n, \quad \max\{i_1, \dots, i_k\} = 2.$$

Обозначим $h^1 = h_1$, $h^2 = h_1 + h_2$. Из размерностных соображений следует, что эти соотношения вместе с соотношениями на h_1 можно переписать в виде

$$\sum_n m_n(h^1 \otimes \dots \otimes h^1) = 0, \quad \sum_n m_n(h^2 \otimes \dots \otimes h^2) = 0.$$

Пусть ϕ и ϕ' – эквивалентные скрепляющие семейства. Тогда соответствующие подправленные скрепляющие семейства также будут эквивалентны, т.е. существует семейство $c = \{c_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющее соотношению $d(c) = c \cup \phi - \phi' \cup c$. Перепишем это соотношение в виде системы

$$\begin{aligned} d(c_1) &= 0, \\ d(c_2) &= \phi_2 - \phi'_2 + c_1 \cup \phi_1 - \phi_1 \cup c_1, \\ \dots\dots\dots \\ d(c_n) &= \phi_n - \phi'_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \cup \phi_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \phi'_i \cup c_{n-i}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства этой системы следует, что c_1 является циклом и, следовательно, определяет элемент $g_1 \in H_0(A^1)$.

Из второго равенства следует, что для элементов h_2, h'_2 , соответствующих скрепляющим семействам ϕ, ϕ' , выполняется соотношение

$$h_2 - h'_2 = g_1 \cup h_1 - h_1 \cup g_1.$$

И так далее.

Между элементами $h^2 = h_1 + h_2$ определим отношение эквивалентности $\sim$, положив $h^2 \sim h'^2$, если $h_1 = h'_1$ и существует $g^1 = 1 + g_1$, для которого выполняются равенства

$$\sum_n m_n(h'^2 \otimes \cdots \otimes g^1 \otimes \cdots \otimes h^2) = 0,$$

где сумма берется также по всем местам элементов g^1 с номерами i , $1 \leq i \leq n+2$. Множество классов эквивалентности таких элементов h^2 обозначим $J_2 H_{-1}(A)$. В результате получим отображение

$$p_2: \mathcal{D}(A) \rightarrow J_2 H_{-1}(A).$$

В случае, если модуль A_{-1}^2 является конечно порожденным, мы можем выбрать представители $\psi^2 = \{\psi_n^2\}_{n \geq 2}$ элемента h_2 , удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \phi_2^1 - \psi_2^2 &= d(c_2), \\ d(\psi^2) + \psi^1 \cup \psi^2 + \psi^2 \cup \psi^1 + \psi^2 \cup \psi^2 &= 0. \end{aligned}$$

Подправим скрепляющее семейство ϕ , взяв вместо него $F_{c_2}(\phi)$. Рассмотрим семейство $\phi^2 = \phi^1 - \psi^2$. Повторяя предыдущие построения для семейства ϕ^2 , мы получим элемент $h_3 \in H_{-1}(A^3)$, и так далее.

Рассмотрим множество последовательностей $h = \{h_i\}_{i \geq 1}$ элементов $h_i \in H_{-1}(A^i)$, для которых элементы $h^n = h_1 + \cdots + h_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_k m_k(h^n \otimes \cdots \otimes h^n) = 0.$$

Используя размерностные соображения, легко видеть, что они выполняются тогда и только тогда, когда для любых $i \geq 1$ и $n > i$ выполняются соотношения

$$\sum m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется по всем $k \geq 2$ и $i_1, \dots, i_k$ таким, что

$$i_1 + \cdots + i_k = n, \quad \max\{i_1, \dots, i_k\} = i.$$

Между этими последовательностями определим отношение эквивалентности, полагая $h \sim h'$, если существует последовательность $g = \{g_i\}_{i \geq 0}$ элементов $g_i \in H_0(A^i)$, $g_0 = 1$, таких, что элементы $g^n = 1 + g_1 + \cdots + g_n$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_k m_k(h'^n \otimes \cdots \otimes g^n \otimes \cdots \otimes h^n) = 0.$$

Соответствующее фактормножество обозначим $JH_{-1}(A)$. Описанный выше процесс дает отображение

$$p: \mathcal{D}(A) \rightarrow JH_{-1}(A).$$

Непосредственная проверка показывает, что оно является биекцией.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. Для дифференциальной биградуированной алгебры A с конечно порожденными модулями A_{-1}^n имеет место биекция

$$\mathcal{D}(A) \longleftrightarrow JH_{-1}(A).$$

Заметим, что рассмотренное выше отображение $p_1: \mathcal{D}(A) \rightarrow J_1H_{-1}(A)$ индуцирует короткую точную последовательность множеств с отмеченными точками

$$* \rightarrow \mathcal{D}^1(A) \xrightarrow{i^1} \mathcal{D}(A) \xrightarrow{p_1} J_1H_{-1}(A) \rightarrow *,$$

где $\mathcal{D}^1(A)$ – подмножество множества $\mathcal{D}(A)$, порожденное скрещивающимися семействами ϕ , для которых $\phi_1 = 0$.

Пусть ϕ – скрещивающееся семейство, удовлетворяющее соотношению $\phi_1 = 0$. Соотношение $d(\phi) + \phi \cup \phi$ можно переписать в виде системы равенств

$$\begin{aligned} d(\phi_2) &= 0, \\ d(\phi_3) &= 0, \\ d(\phi_4) + \phi_2 \cup \phi_2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ d(\phi_n) + \sum_{i=2}^{n-2} \phi_i \cup \phi_{n-i} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что элемент ϕ_2 является циклом и, следовательно, определяет элемент $h_2 \in H_{-1}(A^2)$.

Из второго равенства следует, что элемент ϕ_3 является циклом и, следовательно, определяет элемент $h_3 \in H_{-1}(A^3)$.

Третье равенство означает, что произведение $h_2 \cup h_2$ равняется нулю. И так далее.

Таким образом, элементы h_2, h_3 удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k \geq 2} m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \dots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется по всем $i_1, \dots, i_k = 2, 3$.

Обозначим через $J^2H_{-1}(A)$ множество элементов $h_2 \in H_{-1}(A^2)$, для которых существует элемент $h_3 \in H_{-1}(A^3)$ такой, что выполняются приведенные выше соотношения.

Соответствие $\phi \mapsto h_2$ определяет отображение

$$p^2: \mathcal{D}^1(A) \rightarrow J^2H_{-1}(A)$$

и короткую точную последовательность

$$* \rightarrow \mathcal{D}^2(A) \xrightarrow{i^2} \mathcal{D}^1(A) \xrightarrow{p^2} J^2H_{-1}(A) \rightarrow *,$$

где $\mathcal{D}^2(A)$ – подмножество множества $\mathcal{D}^1(A)$, порожденное скрещивающимися семействами ϕ , для которых $\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = 0$.

Вообще, для $n \geq 1$ обозначим через $J^n H_{-1}(A)$ множество элементов $h_n \in H_{-1}(A^n)$, для которых существуют элементы $h_i \in H_{-1}(A^i)$, $n < i < 2n$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k \geq 2} m_{k-2}(h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_k}) = 0,$$

где сумма берется по всем $n \leq i_1, \dots, i_k \leq 2n - 1$.

Соответствие $\phi \mapsto h_n$ определяет отображение

$$p^n: \mathcal{D}^n(A) \rightarrow J^n H_{-1}(A)$$

и короткую точную последовательность

$$* \rightarrow \mathcal{D}^{n+1}(A) \xrightarrow{i^{n+1}} \mathcal{D}^n(A) \xrightarrow{p^n} J^n H_{-1}(A) \rightarrow *,$$

где $\mathcal{D}^n(A)$ – подмножество множества $\mathcal{D}(A)$, порожденное скрещивающимися семействами ϕ , для которых $\phi_1 = 0, \dots, \phi_{n-1} = 0$.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Если A – биградуированная дифференциальная алгебра с конечно порожденными модулями A_{-1}^n , то для любого $n \geq 1$ имеет место короткая точная последовательность*

$$* \rightarrow \mathcal{D}^{n+1}(A) \xrightarrow{i^{n+1}} \mathcal{D}^n(A) \xrightarrow{p^n} J^n H_{-1}(A) \rightarrow *.$$

В частности, $\mathcal{D}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $J^n H_{-1}(A) = 0$ для всех $n \geq 1$.

Вернемся теперь к вопросу вычисления множества $\mathcal{D}_\infty(X)$ классов эквивалентности A_∞ -структур на цепном комплексе X . Как было доказано выше, оно находится в биективном соответствии с множеством $\mathcal{D}_\infty(X_*)$.

Заметим, что если две A_∞ -структуры π и π' на X_* эквивалентны, то $\pi(2) = \pi'(2)$. Поэтому $\mathcal{D}_\infty(X_*)$ распадается в объединение множеств $\mathcal{D}_\infty(X_*, \pi(2))$ классов эквивалентности A_∞ -структур с заданной структурой алгебры $\pi(2)$. Рассмотрим вопрос о вычислении этих множеств.

Пусть X – градуированный модуль с заданной структурой алгебры. Как и раньше, это будет означать наличие операции $\pi(2): X \otimes X \rightarrow X$, понижающей размерность на единицу и удовлетворяющей соотношению

$$\pi(2)(\pi(2) \otimes 1 + 1 \otimes \pi(2)) = 0,$$

или, короче, $\pi(2) \cup \pi(2) = 0$.

Обозначим через

$$C^*(X; X) = \sum_n C^n(X; X), \quad C^n(X; X) = \text{Hom}(X^{\otimes n}; X)$$

комплекс Хохшильда, дифференциал в котором определен формулой

$$d(f) = f \cup \pi(2) + (-1)^{n+1} \pi(2) \cup f,$$

где $n = \dim(f)$.

Имеет место умножение

$$\cup: C^n(X; X) \otimes C^m(X; X) \rightarrow C^{n+m-1}(X; X),$$

определенное формулой

$$f \cup g = \sum f(1 \otimes \cdots \otimes g \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется по всем местам, на которых может стоять g .

Однако это умножение не перестановочно с дифференциалом и не является ассоциативным. Для преодоления этой трудности воспользуемся понятием $\vee$ -алгебры [8]. А именно, для цепного комплекса Y обозначим через $Y \vee Y$ подкомплекс тензорного произведения $Y \otimes Y$, состоящий из элементов $z \in Y \otimes Y$, для которых $z + T(z) = 0$, где $T: Y \otimes Y \rightarrow Y \otimes Y$ – перестановочное отображение. Аналогичным образом определяются подкомплексы $Y^{\vee n}$ тензорных произведений $Y^{\otimes n}$.

Цепной комплекс Y называется $\vee$ -алгеброй, если задано отображение

$$\cup: Y \vee Y \rightarrow Y,$$

понижающее размерность на единицу и удовлетворяющее соотношению

$$\cup(\cup \otimes 1 + 1 \otimes \cup) = 0: Y \vee Y \vee Y \rightarrow Y.$$

Непосредственная проверка показывает, что ограничение умножения

$$\cup: C^*(X; X) \otimes C^*(X; X) \rightarrow C^*(X; X)$$

на подкомплекс $C^*(X; X) \vee C^*(X; X)$ задает на $C^*(X; X)$ структуру $\vee$ -алгебры.

Легко видеть, что семейство $\{\pi(n)\}_{n \geq 2}$ отображений $\pi(n): X^{\otimes n} \rightarrow X$ задает на X структуру A_∞ -алгебры тогда и только тогда, когда семейство $\pi = \{\pi(n)\}_{n \geq 3}$ является скрешивающим семейством $\vee$ -алгебры $C^*(X; X)$, т.е. выполняются соотношения $d(\pi) + \pi \cup \pi = 0$.

Таким образом, мы можем применить методы вычисления функтора $\mathcal{D}$.

Обозначим через $J^n H_{-1}^*(X; X)$ множество элементов $h(n)$, $n \geq 3$, в гомологиях Хохшильда $H_{-1}^n(X; X)$, для которых существуют элементы $h(i)$ в $H_{-1}^i(X; X)$, $n < i < 2n$, для которых выполняются соотношения

$$\sum_{k \geq 2} m_{k-2}(h(i_1) \otimes \cdots \otimes h(i_k)) = 0,$$

где сумма берется по всем $n \leq i_1, \dots, i_k \leq 2n - 1$.

Повторяя предыдущие рассуждения о вычислении функтора $\mathcal{D}$, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X – конечно порожденный градуированный модуль с заданной структурой алгебры $\pi(2): X \otimes X \rightarrow X$. Тогда для любого $n \geq 1$ имеет место короткая точная последовательность

$$* \rightarrow \mathcal{D}_{\infty}^{n+1}(X, \pi(2)) \xrightarrow{i^{n+1}} \mathcal{D}_{\infty}^n(X, \pi(2)) \xrightarrow{p^n} J^n H_{-1}^*(X; X) \rightarrow *,$$

где $\mathcal{D}_{\infty}^n(X, \pi(2))$ – подмножество $\mathcal{D}_{\infty}(X, \pi(2))$, порожденное A_{∞} -структурами $\pi = \{\pi(i)\}$, для которых $\pi(i) = 0$, $3 \leq i \leq n$.

В частности, $\mathcal{D}_{\infty}(X, \pi(2))$ равно нулю тогда и только тогда, когда $J^n H_{-1}^*(X; X) = 0$ для любых $n \geq 3$.

Эта теорема дает ответ на вопрос о возможности продолжения заданной структуры алгебры до нетривиальной структуры A_{∞} -алгебры.

Для полного ответа на вопрос о вычислении множества $\mathcal{D}_{\infty}(X)$ требуется использование более сложных алгебраических структур таких, как алгебра Хирша [9] и B_{∞} -алгебра.

В качестве примера рассмотрим алгебру многочленов $A = P[x_1, \dots, x_m]$ от образующих $x_1, \dots, x_m$. Для простоты будем предполагать кольцо коэффициентов полем $\mathbb{Z}/2$.

Выясним вопрос о наличии на A нетривиальных A_{∞} -структур, продолжающих данную структуру алгебры. Для этого, прежде всего, нужно вычислить когомологии Хохшильда алгебры A .

Поскольку для алгебры многочленов имеет место изоморфизм

$$P[x_1, \dots, x_m] \cong P[x_1] \otimes \dots \otimes P[x_m],$$

то для когомологий Хохшильда будет иметь место изоморфизм

$$H^*(A; A) \cong H^*(P[x_1]; P[x_1]) \otimes \dots \otimes H^*(P[x_m]; P[x_m]).$$

Таким образом, для вычисления когомологий Хохшильда алгебры A достаточно вычислить когомологии Хохшильда алгебры многочленов $P[x]$ с одной образующей.

Легко видеть, что имеет место формула

$$H^n(P[x]; P[x]) = \begin{cases} P[x], & n = 0, 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Кроме того, так как дифференциал

$$d: C^0(P[x]; P[x]) \rightarrow C^1(P[x]; P[x])$$

равен нулю, то произведения Масси в когомологиях $H^*(P[x]; P[x])$ равны нулю, а следовательно, равны нулю и произведения Масси в когомологиях исходной алгебры многочленов.

Заметим, что элементы $h(n)$, порождающие нетривиальные A_{∞} -структуры, лежат в когомологиях размерности $n \geq 3$. Для алгебр многочленов с одной и двумя

образующими когомологии Хохшильда в размерностях больших двух равны нулю. Поэтому для таких алгебр нет нетривиальных A_∞ -структур.

Для алгебры многочленов $A = P[x_1, x_2, x_3]$ с тремя образующими имеют место изоморфизмы

$$H^3(A; A) \cong \bigotimes_{i=1}^3 H^1(P[x_i]; P[x_i]) \cong P[x_1, x_2, x_3].$$

Поскольку все когомологии больших размерностей равны нулю, то различные элементы $h(3)$ из этих когомологий будут порождать различные нетривиальные A_∞ -структуры на этой алгебре. Более того, это соответствие является взаимно однозначным, т.е. имеет место биекция

$$\mathcal{D}_\infty(A) \longleftrightarrow H^3(A; A), \quad A = P[x_1, x_2, x_3].$$

Для алгебры многочленов $A = P[x_1, x_2, x_3, x_4]$ с четырьмя образующими имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^3(A; A) &\cong P[x_1, x_2, x_3] \otimes P[x_4] \oplus \cdots \oplus P[x_2, x_3, x_4] \otimes P[x_1], \\ H^4(A; A) &\cong P[x_1, x_2, x_3, x_4]. \end{aligned}$$

Поскольку все когомологии в размерностях, больших четырех, равны нулю, то различные элементы $h(3)$, $h(4)$ из соответствующих когомологий будут порождать различные нетривиальные A_∞ -структуры. Более того, это соответствие является взаимно однозначным, т.е. имеет место биекция

$$\mathcal{D}_\infty(A) \longleftrightarrow H^3(A; A) \oplus H^4(A; A), \quad A = P[x_1, x_2, x_3, x_4].$$

Для алгебры многочленов $A = P[x_1, \dots, x_m]$ с большим числом образующих, $m > 4$, имеет место изоморфизм

$$H^3(A; A) \cong \oplus P[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}] \otimes P[x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_2}, \dots, \hat{x}_{i_3}, \dots, x_m].$$

Среди элементов $h(3)$ этих когомологий нетривиальные A_∞ -структуры порождают те, для которых выполняется равенство $h(3) \cup h(3) = 0$.

Заметим, что для элемента $h \in H^1(P[x]; P[x]) \cong P[x]$ соотношение $h \cup h = 0$ выполняется в том и только том случае, когда многочлен $h \in P[x]$ содержит только четные степени x . Поэтому указанное выше равенство $h(3) \cup h(3) = 0$ выполняется в том и только том случае, когда соответствующие элементы из $P[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}]$ содержат только четные степени элемента x_{i_1} , или элемента x_{i_2} , или элемента x_{i_3} .

Конечно, такие элементы $h(3)$ порождают только часть, а не все возможные A_∞ -структуры на алгебре A .

В заключение отметим, что наличие нетривиальных A_∞ -структур на алгебре многочленов связано прежде всего с некоммутативностью самих A_∞ -структур. Нетривиальных же коммутативных A_∞ -структур на алгебре многочленов нет.

Список литературы

1. *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H -spaces // Trans. A.M.S. 1963. V. 108. № 2. P. 275–312.
2. *Берикашвили Н. А.* Дифференциалы спектральной последовательности // Тр. Тбил. Матем. ин-та им. А.М. Размадзе. 1976. Т. 51. С. 1–105.
3. *Кадеишвили Т. В.* К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. № 3. С. 183–188.
4. *Смирнов В. А.* Функтор D для скрещенных тензорных произведений // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 4. С. 465–472.
5. *Brown E.* Twisted Tensor Products // Ann. of Math. 1959. V. 69. P. 223–246.
6. *Huebschmann J.* Berikashvili's functor $\mathcal{D}$ and the deformation equation // Proc. Georgian Acad. of Sci. 1999. V. 119. P. 59–72.
7. *Gugenheim V. K. A. M., Lambé L. A., Stasheff J. D.* Perturbation Theory in Differential Homological Algebra // Ill. J. Math. 1991. V. 35. № 3. P. 357–373.
8. *Смирнов В. А.* Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 121–154.
9. *Kadeishvili T.* A_∞ -algebra structure and cohomology of Hochschild and Harrison // Proc. of Tbil. Math. Inst. 1988. V. 91. P. 19–27.

Московский педагогический
государственный университет

Поступило в редакцию
7.XII.1999