Общероссийский математический портал

А. Н. Тюрин, О базисах Бора–Зоммерфельда, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 5, 163–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:22:08

УДК 512.7

А. Н. Тюрин

О базисах Бора–Зоммерфельда

С помощью комбинации алгебраической и лагранжевой геометрий в каждом пространстве конформных блоков строится специальный базис – базис Бора–Зоммерфельда (BS). Применяется метод Борсвика–Поля–Урибе [3], в котором каждый вектор BS-базиса определяется полувзвешенным лежандровым распределением бор-зоммерфельдовского слоя вещественной поляризации симплектического многообразия. Преимущество BS-базисов по сравнению с базисами тэта-функций (см. [23]) заключается в том, что мы можем использовать мощные методы анализа асимптотик квантовых состояний. Это дает квазиклассическую унитарность базисов Бора–Зоммерфельда. Следовательно, мы можем применить эти базисы для сравнения связности Хитчина [11] со связностью, определяемой монодромией уравнения Книжника–Замолдчикова, в комбинаторной конструкции (см., например, [14] и [15]).

Библиография: 31 наименование.

§ 1. Циклы степени нуль

Пусть X – келерово многообразие с келеровой формой ω и L – алгебро-геометрическая поляризация с $c_1(L) = [\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Предположим, кроме того, что канонический класс четен:

$$K_X = 0 \pmod{2},$$

и фиксируем *метасплектическую структуру* на X , которую мы понимаем здесь как линейное расслоение $L_{K/2}$, т.е. $L_{K/2}^{\otimes 2} = L_{K_X}$. Тогда $L^k \otimes L_{K/2}$ – голоморфное расслоение на X для любого натурального $k \in \mathbb{Z}^+$, которое называется *уровнем*. Получаем набор пространств

$$\mathcal{H}_I^k = H^0(X, L^k \otimes L_{K/2}), \quad k \geq 0, \quad (1.1)$$

голоморфных сечений расслоения $L^k \otimes L_{K/2}$; здесь символ I обозначает комплексную структуру на X . Таким образом, если $\mathcal{M}$ – семейство поляризованных комплексных структур на подлежащем гладком компактном многообразии X , то пространства (1.1) объединяются в голоморфные векторные расслоения

$$\mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{M} \quad (1.2)$$

со слоями (1.1) для $k \gg 0$.

Для наших приложений достаточно ограничиться следующим предположением: существует целое d такое, что

$$L_{K/2} = L^d, \quad (1.3)$$

т.е. подкрутка на $L_{K/2}$ есть просто сдвиг уровня от k до $k + d$.

В алгебраической геометрии класс гиперплоского сечения $c_1(L) = [\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ определяет *степень* любого алгебраического цикла $C \subset X$: это целое число

$$\deg C = [C] \cdot [\omega]^{(\dim C)/2} = \int_C (\omega|_C)^{(\dim C)/2}.$$

Для любого голоморфного (эффективного алгебраического) цикла C

$$\dim C > 0 \implies \deg C > 0$$

и

$$\deg C = 0 \implies C = x_1 + \dots + x_n$$

есть кластер (нульмерная подсхема) многообразия X , т.е. точка схемы Гильберта $\text{Hilb}^n X$. Более того, существует точная последовательность $0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$, и ограничение глобальных сечений (констант) на C определяет выделенную прямую в пространстве сечений:

$$\mathbb{C} = H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C).$$

Наше линейное расслоение L^{k+d} определяет рациональное (т.е. мероморфное) отображение $X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}_I^{k+d})^\vee$, сопоставляющее точке $x \in X$ гиперплоскость $H^0(\mathcal{I}_x \otimes L^{k+d}) \subset H^0(L^{k+d})$ сечений, зануляющихся в x . Для любого открытого множества U тривиализация ограничения $L|_U$ задается сечением s_U , не обращающимся в нуль на U , и точка $x \in U$ определяет тогда ковектор пространства $H^0(L^k)$ значений в x , используя сечение s_U для отождествления слоя над x с $\mathbb{C}$. Технически существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_x \otimes L^{k+d} \rightarrow L^{k+d} \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

где эпиморфизм – гомоморфизм ограничения. Часть ее когомологической последовательности

$$H^0(\mathcal{I}_x \otimes L^{k+d}) \rightarrow H^0(L^{k+d}) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{k+d}) \quad (1.5)$$

показывает, что $H^0(\mathcal{I}_x \otimes L^{k+d})$ действительно является гиперплоскостью, если $H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{k+d}) = 0$. Теперь $H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{k+d}) = 0$ для $k \gg 0$ по классическим теоремам Серра А и В, и мы имеем отображение

$$\mathbb{P}\varphi_k: X \rightarrow \mathbb{P}H^0(L^{k+d}), \quad (1.6)$$

которое является вложением для $k \gg 0$. Эта стандартная конструкция алгебраической геометрии сводит изучение X к проективной геометрии.

Голоморфная структура на L определяет эрмитову связность a_L с формой кривизны $2\pi i\omega$. С другой стороны, наша келерова метрика определяет связность Леви-Чивита a_{LC} на $L_{K/2}$. Мы предположим также, что

$$a_{L^d} = a_{LC} \quad (1.7)$$

(см. (1.3)).

Определим эрмитову форму на пространстве $H^0(L^{k+d})$ в два этапа: прежде всего каждое сечение $\tilde{s}$ расслоения L^{k+d} локально имеет вид $s \cdot hF$, где s – сечение расслоения L^k и hF – сечение расслоения $L_{K/2}$ (*голоморфная полуформа*). Для двух таких сечений $\tilde{s}_1 = s_1 \cdot hF_1$ и $\tilde{s}_2 = s_2 \cdot hF_2$ положим

$$\langle \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \rangle = \int_X (s_1, s_2) \cdot (hF_1, hF_2). \quad (1.8)$$

Получаем отождествление векторов и ковекторов:

$$H^0(L^{k+d}) = \overline{(H^0(L^{k+d}))}^*.$$

В частности, тривиализация над открытым множеством U дает отображение

$$\varphi_U: U \rightarrow H^0(L^{k+d})$$

и проективизация этого отображения есть комплексно-сопряженное к (1.6) отображение

$$\mathbb{P}\varphi_U: U \rightarrow \mathbb{P}H^0(L^{k+d}). \quad (1.9)$$

В терминах *комплексного квантования* векторы пространства $H^0(L^{k+d})$ называются *состояниями*, а векторы $\overline{\varphi}(x)$ для $x \in X$ называются *когерентными состояниями*. (Подчеркнем еще раз, что состояния – это *распределения*, а не функции.)

Начиная с этого места, мы можем забыть, что линейное расслоение $K/2$ геометрически означает, и рассматривать подкрутку на метаплектическую структуру просто как сдвиг уровня.

Теперь, обращая привычную схему мышления, исследуем, какие не голоморфные подмногообразия X *степени 0* определяют гиперповерхности в пространствах сечений $H^0(X, L^k)$ и какова геометрия этих подмногообразий. Усилим условие $\deg C = 0$ до условия $\omega|_C = 0$; иначе говоря, каждое такое подмногообразие S должно быть изотропным относительно келеровой формы ω . Следовательно, такие подмногообразия максимальной размерности должны быть *лагранжевыми*. Алгебраические подмногообразия могут быть особыми, поэтому мы не обязаны ограничиваться лагранжевыми подмногообразиями: рассматриваемые ниже лагранжевы циклы а priori допускают особенности. Более точно, мы рассматриваем каждый лагранжев цикл как класс дифференцируемого отображения $\phi: S \rightarrow X$

гладкого компактного многообразия S такого, что $\phi^*\omega = 0$ с точностью до естественного действия группы сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $\text{Diff}^+ S$ исходного многообразия. Все базисные концепции и конструкции теории таких циклов можно найти в [9].

Основное свойство таких циклов: *такой цикл не может содержаться ни в каком собственном алгебраическом подмногообразии* (в частности, ни в каком дивизоре).

Таким образом, любой голоморфный объект однозначно определяется своим ограничением, т.е. ϕ^* , на лагранжев цикл $\phi: S \rightarrow X$. Следовательно, ограничение на S можно рассматривать как граничные условия голоморфных сечений линейных расслоений с кривизной, пропорциональной ω .

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрически лагранжевы циклы как носители граничных условий голоморфных объектов имеют минимально возможную размерность. Привычные граничные условия имеют своими носителями границы комплексных областей, т.е. вещественные подмногообразия *вещественной* коразмерности 1. Следовательно, только для римановых поверхностей лагранжевы граничные условия совпадают с привычными. В современной теории интегрируемых систем ограничение голоморфных объектов на окружность вокруг точки сводит множество аналитических проблем к алгебраической геометрии кривых (см., например, [5]). Таким образом, вполне уместно прибавить это свойство лагранжевых подмногообразий к прокламации Алана Вейнштейна [28, с. 5]: вполне естественно ожидать, что ограничения на лагранжевы циклы дадут многомерное обобщение современной теории интегрируемых систем.

Если мы исключим комплексную структуру I на X , поляризация L даст нам четверку

$$(X, \omega, L, a_L), \quad (1.10)$$

где ω – келерова форма и a_L – эрмитова связность на L с формой кривизны $F_a = 2\pi i \cdot \omega$ (типа $(1, 1)$ для данной голоморфной структуры на L). Следовательно, пара (X, ω) – симплектическое многообразие – *фазовое пространство механической системы*.

У вложенного лагранжева подмногообразия $S \subset X$ не существует инвариантов вложения. Существуют два пути, чтобы получить такие инварианты:

- 1) рассмотреть семейство таких циклов, которое уже допускает инварианты (например, особые циклы);
- 2) снабдить подмногообразия дополнительной структурой *суперцикла* или сечением некоторого расслоения.

Ограничение пары (L^k, a_{L^k}) на лагранжев цикл S дает такую дополнительную структуру суперцикла. В частности, оно определяет пространство ковариантно постоянных сечений $H_a^0((L^k, a_{L^k})|_S)$, которое иногда бывает ненулевым, как для точек. Действительно, ограничение на любое лагранжево подмногообразие $\phi: S \rightarrow X$ есть топологически тривиальное линейное расслоение ϕ^*L^k с *плоской* связностью $\phi^*(a_{L^k})$. Калибровочный класс такой связности определяется ее характером монодромии

$$\chi: \pi_1(S) \rightarrow \text{U}(1) \quad (1.11)$$

и допускает ковариантно постоянное сечение (как и ограничение голоморфного расслоения на точку) в том и только том случае, если этот характер *тривиален*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Лагранжев цикл S называется *бор-зоммерфельдовским циклом уровня k* (BS_k -циклом), если характер (1.11) ограничения пары (L^k, a_{L^k}) тривиален.

В частности, в точности так же, как и для точек,

$$S \text{ есть } \text{BS}_k \implies H_a^0((L, a_L)|_S) = U(1).$$

Более того, такие сечения определяют *тривиализации* ограничений $L^{k+d}|_S$, которые идентифицируют C^∞ -сечения тривиального расслоения с комплекснозначными функциями на S :

$$\Gamma(L^{k+d}|_S) = C_{\mathbb{C}}^\infty(S).$$

Следовательно, ограничение на S определяет вложение

$$\text{res}: H^0(L^{k+d}) \hookrightarrow C_{\mathbb{C}}^\infty(S). \quad (1.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Образ

$$\text{res}(H^0(L^k)) = \mathcal{H}_S^k \subset C^\infty(S) \quad (1.13)$$

называется *аналогом пространства Харди уровня k* .

Теперь вспомним, что наше пространство $\mathcal{H}_I^k$ (1.1) есть пространство скрученных голоморфных *полуформ*: $\mathcal{H}_I^k = H^0(L^k \otimes L_{K/2})$. Чтобы сохранить этот геометрический смысл, фиксируем комплексную полуформу hF на S ; мы назовем такую пару (S, hF) *полувзвешенным лагранжевым циклом*, если эта полуформа вещественна. Мы можем отождествить пространство функций с подпространством полуформ:

$$\Gamma(L^{k+d})|_S = C_{\mathbb{C}}^\infty(S) \cdot \text{hF} = \Gamma(\Delta^{1/2}), \quad (1.14)$$

где Δ – элемент объема на S (детали см. в [9]). Это пространство самосопряжено относительно эрмитовой структуры типа (1.8).

Следуя [3], мы можем сконструировать распределение в некотором пополнении пространства $C^\infty(S) \cdot \text{hF}$. Его ограничение на образ пространства $\mathcal{H}_I^k$ определяет голоморфный ковектор или состояние. Этот ВРУ-метод использует обычные граничные условия коразмерности 1, а не лагранжевы граничные условия и обыкновенные пространства Харди строго псевдовыпуклых областей вместо их аналогов (1.13). Мы отсылаем читателя за деталями к прекрасной работе [3]. Мы не воспроизводим их конструкцию полностью по двум причинам: во-первых, за недостатком места, так как эта работа реализует большую программу и содержит намного больше результатов, чем нам нужно здесь, во-вторых, в работе [9], используя замечательные результаты Дж. Роунслея, мы максимально приблизили эту конструкцию к привычным конструкциям алгебраической геометрии.

Исходная аналитическая конструкция распределения следующая:

- 1) наша эрмитова связность на L^* определяет контактную структуру на расслоении единичных окружностей P расслоения L^* ;
- 2) расслоение на единичные диски в L^* есть строго псевдовыпуклая область, и существует ортогональный проектор Сеге $\Pi: L^2(P) \rightarrow \mathcal{H}$ на пространство Харди граничных значений голоморфных функций на расслоении на диски;
- 3) контактное многообразие P – главное $U(1)$ -расслоение, и естественное $U(1)$ -действие на P коммутирует с Π и определяет разложение $\mathcal{H} = \bigoplus_k H^0(L^{k+d})$ пространства Харди;
- 4) если мы фиксируем метаплектическую структуру на P , мы можем поднять каждое BS_{k+d} -подмногообразие до лежандрова подмногообразия $\Lambda \subset P$, называемого *планковским* циклом, отмеченным поднятой полуформой hF ;
- 5) Λ определяет ассоциированное пространство лежандровых распределений порядка m – проекцию Сеге конормальных распределений к Λ порядка $m + \frac{1}{2} \dim X$ (см. [3, п. 2.1]);
- 6) полуформа на Λ отождествляется с символом лежандрова распределения порядка m (см. [3, п. 2.2]); следовательно, на уровне символов все лежандровы распределения выглядят как дельта-функции или их производные;
- 7) для лежандрова многообразия Λ с полуформой мы фиксируем лежандрово распределение порядка $\frac{1}{2}$ с символом hF , которое есть проекция Сеге дельта-функции δ_Λ .

В результате мы получаем:

- 1) для каждого лежандрова подъема $\Lambda \subset P$ BS_{k+d} -подмногообразия S с полуформой hF мы получаем вектор

$$BPU_{k+d}(\Lambda, hF) = \Pi_{hF}^k(\delta_\Lambda) \in H^0(L^{k+d}), \quad (1.15)$$

где Π_{hF}^k – проекция Сеге в $(k+d)$ -ю компоненту пространства Харди распределения с символом hF ;

- 2) каждый такой подъем определен с точностью до $U(1)$ -действия на P ; следовательно, пара (S, hF) определяет точку проективизации

$$BPU_{k+d}(S, hF) = \mathbb{P}(\Pi_{hF}^k(\delta_\Lambda)) \in \mathbb{P}H^0(L^{k+d}). \quad (1.16)$$

Наши наблюдения заключаются в следующем:

- 1) эта конструкция без каких-нибудь существенных изменений подходит для случая, когда $\phi: S \rightarrow X$ является *иммерсией* или $\phi(S)$ обладает структурой гладкого орбифолда;
- 2) если соотношение (1.3) выполнено, то существует канонический *геодезический* подъем бор-зоммерфельдовского цикла до планковского (см. следующий параграф), следовательно, пара (S, hF) определяет антиголоморфное сечение расслоения L^{k+d} с точностью до скалинка.

Следующий аналог теорем Серра А и В доказан в [3, § 3].

ТЕОРЕМА 1.1. *Если n достаточно велико, то для любого полувзвешенного BS_k -цикла (S, hF) BPU-отображение $BPU_{nk}(S, hF)$ не равно нулю.*

Существуют два-три способа канонически снабдить лагранжево подмногообразие S полуформой:

1) если X – келерово многообразие с метаплектической структурой; эта метаплектическая структура определяет металинейную структуру на S (см., например, [10]), и келерова метрика g определяет полуформу hF_g на S (этот метод особенно важен в наших приложениях);

2) если наш лагранжев цикл является графиком метасимплектоморфизма с симплектическим объемом как квадратом полуформы;

3) если S допускает свободное действие тора.

Мы видим, что полувзвешенные бор-зоммерфельдовские орбифолды геометрически ведут себя как алгебро-геометрические точки. Обозначим через $\mathcal{L}$ базу семейства всех лагранжевых относительно ω циклов. Поляризация (L, a_L) определяет подпространство

$$BS_{k+d}^l \subset \mathcal{L} \quad (1.17)$$

бор-зоммерфельдовских циклов; этот символ имеет индекс $l = [S] \in H^{\dim_{\mathbb{C}} X}(X, \mathbb{Z})$ (класс когомологий цикла) и индекс k , которые иногда мы будем опускать. Это пространство распадается на связные компоненты согласно топологическим типам общих лагранжевых циклов. Напомним, что по теореме Дарбу–Вейнштейна мы можем отождествить малую трубчатую окрестность подмногообразия S с окрестностью нулевого сечения кокасательного расслоения многообразия T^*S , и любой лагранжев цикл в этой окрестности может быть идентифицирован с замкнутой 1-формой на S (как ее график). Мы получаем систему “карт” пространства $\mathcal{L}$, и касательное пространство

$$T\mathcal{L}_S = \{\alpha \in \Omega_S \mid d\alpha = 0\} \quad (1.18)$$

есть пространство замкнутых 1-форм на S . С другой стороны, периоды этих форм дают инфинитезимальные деформации характера (1.11). Следовательно, если $S \in BS$, касательное пространство есть пространство точных форм на S :

$$TBS_S = \{\alpha \in \Omega_S \mid \alpha = \partial f\} = C^\infty(S)/\mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Отсюда имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Нормальное пространство BS в $\mathcal{L}$ к S есть*

$$NBS_S = H^1(S, \mathbb{R}). \quad (1.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Подпространство BS пространства лагранжевых циклов является частным случаем *isodrastic* деформаций лагранжевых циклов (см. [29]).

Далее, для каждого семейства лагранжевых циклов с базой B и для гладкого элемента S мы имеем *отображение Кодаиры–Спенсера*

$$KS: TB_S \rightarrow H^1(S, \mathbb{R}).$$

База B любого семейства лагранжевых циклов содержит подпространство BS -циклов $B \cap BS_k \subset B$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Коразмерность этого подпространства в гладком цикле S равна $\text{codim}(B \cap \text{BS}) = b_1(S) - \text{corank KS}$.*

Каждый полувзвешенный цикл (S, hF) является взвешенным циклом с формой объема hF^2 и определяет число

$$v(S, \text{hF}) = \int_S \text{hF}^2,$$

которое называется *объемом* полувзвешенного цикла.

Обозначим символом

$$\text{BS}_{k+d}^v \quad (1.21)$$

базу семейства всех полувзвешенных BS-циклов объема v . Тогда это бесконечномерное многообразие допускает структуру *комплексного келерова* многообразия (см. [27] и [9]).

Тогда ВРУ-конструкция определяет “мероморфное” отображение

$$\mathbb{P}\varphi_k: \text{BS}_{k+d}^v \rightarrow \mathbb{P}H^0(L^{k+d})^*, \quad (1.22)$$

дифференциал которого двойствен мономорфизму ограничения (1.12) (см. [27] и [9]).

В этой работе мы ограничимся исследованием подмногообразий пространства лагранжевых циклов, трансверсальных к бор-зоммерфельдовским. Хорошо известны три типа конечномерных семейств таких лагранжевых циклов. Разумно ожидать существование в них лишь конечного числа BS-циклов.

ПРИМЕР 1 (вещественная поляризация). Вещественная поляризация четверки (M, ω, L, a) есть расслоение

$$\pi: M \rightarrow B \quad (1.23)$$

такое, что $\omega|_{\pi^{-1}(b)} = 0$ для каждой точки $b \in B$, и для общей точки b слой $\pi^{-1}(b)$ – гладкое лагранжево подмногообразие.

Следовательно, если мы рассматриваем пару (M, ω) как фазовое пространство механической системы, то оно допускает вещественную поляризацию в том и только том случае, если она *полностью интегрируема*. В компактном случае общий слой является n -мерным тором T^n (где $2n = \dim_{\mathbb{R}} X$) и $\dim B = n$. Следовательно,

$$\dim B = \text{rank } H^1(T^n, \mathbb{R}) \implies \dim B \cap \text{BS} = 0. \quad (1.24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, не существует естественного способа определения канонической ориентации в пространстве слоев вещественной поляризации. Метаплектическая структура предоставляет такую возможность в некоторых случаях.

ПРИМЕР 2 (многообразие модулей spLag -циклов). Пусть S – специальный лагранжев цикл и $\mathcal{M}^{[S]}$ – “многообразие модулей” всех деформаций цикла S как специального лагранжева цикла в X (см. [25]). Тогда по теореме МакЛина касательное пространство $T\mathcal{M}^{[S]} = H^1(S, \mathbb{R})$ есть пространство гармонических 1-форм и коранг отображения Кодаиры–Спенсера равен нулю. Следовательно, по определению гладкий BS-цикл должен быть *инфинитезимально жестким*, так что

$$\dim(\mathcal{M}^{[S]} \cap \text{BS}) = 0. \quad (1.25)$$

В частности, если X – трехмерное многообразие Калаби–Яо, поляризованное риччи-плоской метрикой с фиксированной комплексной ориентацией, мы имеем систему функций, пронумерованных уровнем k ,

$$CD^k: H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (1.26)$$

сопоставляющих классу когомологий $d \in H^3(X, \mathbb{Z})$ число $\#(\mathcal{M}^d \cap \text{BS}_k)$ (см. [26] и [24], где объяснены связи этих функций с инвариантом Кассона–Дональдсона).

Выбор полуформ на всех BS_{k+d} -циклах этих семейств и ВРУ-отображение дает конечное множество точек в $\mathbb{P}H^0(L^{k+d})$. Конечно, это еще не базис. Но во многих случаях этот набор точек в $\mathbb{P}H^0(L^{k+d})$ может быть поднят до базиса векторного пространства $H^0(L^{k+d})$ (как и было предсказано в работе [3, с. 400]).

Такая программа была реализована Пуанкаре для случая, когда X – C -алгебраическая кривая рода $g > 1$.

ПРИМЕР 3 (относительные ряды Пуанкаре). Пусть C – алгебраическая кривая рода $g > 1$ с фиксированной $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структурой, т.е. с фиксированной *метаструктурой* L , так что $L^2 = L_{K_C}$. Тогда L определяет метаплектическую структуру и поляризацию.

Это линейное расслоение обладает эрмитовой связностью, квадрат которой есть связность Леви-Чивита на кокасательном расслоении T^*C . Тогда каждый 1-цикл $S = S^1$ лагранжев; $S \in \text{BS}_2$ в том и только том случае, если он *геодезический*. Если $k > 1$, то цикл является BS_k -циклом в том и только том случае, если он *k-геодезический*, т.е. его голономия является k -м корнем из единицы. Параметризуя такой цикл длиной дуги, получаем полуформу hF на нем. Значит, он определяет ряд Пуанкаре из $H^0(L^{2k})$ как автоморфную форму. Оказывается, эта форма – относительный ряд Пуанкаре цикла (см. [3, § 4]).

По той же причине BS_{k+d} -цикл S определяет сечение расслоения L^{k+d} , если канонический класс $[K_X] = dc_1(L)$ с $d \in \mathbb{Z}$, а эрмитова связность a “пропорциональна” связности на $\det T^*X$, индуцированной связностью Леви-Чивита (см. ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и при доказательстве классических теорем Серра А и В, мы не можем обойтись без техники функционального анализа. Наша цель – локализовать эту технику в одном месте, как это сделано в [9]. После этого наша теория становится комбинацией проективной алгебраической и лагранжевой геометрий. Назовем этот гибрид, как в [9], *алаг-геометрией*.

§ 2. ВРУ-конструкция, геодезический подъем и геометрическое квантование

1. ВРУ-конструкция. Для удобства в приложениях мы немного расширим рамки ВРУ-конструкции, описанной в (1.15)–(1.16). Мы должны повторить некоторые детали. Вернемся к началу § 1: пусть (X, ω, L, a_L) – предквантование фазового пространства (X, ω) (1.10).

Рассмотрим главное $U(1)$ -расслоение P двойственного линейного расслоения L^* , т.е. расслоение на единичные окружности в L^* . Пусть $D \subset L^*$, $\partial D = P$, – расслоение на единичные диски с границами. Тогда каждая комплексная поляризация I , т.е. комплексная структура на X , совместимая с другими данными предквантования, определяет на D структуру D_I комплексной псевдовыпуклой области. (Напомним, что L – положительное линейное расслоение.) Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие модулей таких комплексных структур.

Эрмитова связность на L^* задается 1-формой α на P , которая определяет контактную структуру на P с формой объема

$$\frac{1}{2\pi} \alpha \wedge d\alpha^n, \quad \text{где } n = \dim_{\mathbb{C}} X.$$

Нуль-пространство формы α в точке $p \in P$ совпадает с максимальным комплексным подпространством касательного пространства для любой комплексной структуры.

Для каждого $I \in \mathcal{M}$ подпространство Харди

$$\mathcal{H}_I \subset L^2(P) \tag{2.1}$$

состоит из граничных значений голоморфных в D_I функций. Имеется ортогональный проектор Сеге

$$\Pi_I: L^2(P) \rightarrow \mathcal{H}_I. \tag{2.2}$$

Естественное действие группы $U(1) = \text{Ном } P$ на P , как на главном расслоении, коммутирует с проекцией Π_I и раскладывает пространство Харди $\mathcal{H}_I$ в гильбертову прямую сумму изотипов:

$$\mathcal{H}_I = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_I^k, \quad \mathcal{H}_I^k = H^0(L^{k+d}), \tag{2.3}$$

соответствующих только положительным характеристам. Следовательно,

$$\Pi_I = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Pi_k. \tag{2.4}$$

Таким образом, расслоение $\mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{M}$ (1.2) погружается в тривиальное расслоение $L^2(P) \times \mathcal{M}$ на $\mathcal{M}$ со слоем (2.1), или (что то же самое) существует проекция Сеге тривиального расслоения

$$\Pi: L^2(P) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k,$$

послойно совпадающая с (2.2).

Во многих случаях векторные расслоения $\mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{M}$ (1.2) допускают *проективно плоские связности*. Это значит, что локально проективизация $\mathbb{P}\mathcal{H}_I^k$ не зависит от выбора комплексной структуры I . Предположим, что существует односвязное комплексное многообразие $\mathcal{T}$ с голоморфным действием дискретной группы Mod такое, что $\mathcal{M} = \mathcal{T}/\text{Mod}$. Поднимем наши расслоения на $\mathcal{T}$. Тогда для каждой упорядоченной пары точек $I_1, I_2 \in \mathcal{T}$ проективно плоская связность определяет изоморфизм слоев $p_{I_1, I_2}: \mathcal{H}_{I_1} \rightarrow \mathcal{H}_{I_2}$.

Наше первое дополнение к [3] относится к действиям групп: предположим, что группа Mod действует на X , сохраняя ω и (L, a_L) , и существует центральное расширение $\widetilde{\text{Mod}}$:

$$1 \rightarrow \text{U}(1) \rightarrow \widetilde{\text{Mod}} \rightarrow \text{Mod} \rightarrow 1, \quad (2.5)$$

где центр $\text{U}(1) = \text{Hom } P$ действует на P как группа главного расслоения. Это действие индуцирует естественное представление

$$\rho: \widetilde{\text{Mod}} \rightarrow \text{Op}(L^2(P)) \quad (2.6)$$

в алгебру операторов на пространстве функций.

Проекторы Π_I (2.4) для каждого $g \in \widetilde{\text{Mod}}$ определяют преобразование

$$p_{I, g(I)} \circ \Pi_{g(I)} \circ \rho(g) \circ \Pi_I \in \text{Op}(\mathcal{H}_I), \quad (2.7)$$

коммутирующее с действием группы $\text{U}(1)$. Так что это преобразование раскладывается в гильбертову прямую сумму изотипов:

$$\text{Op}(\mathcal{H}_I) = \bigoplus_k \text{End } H^0(L^k). \quad (2.8)$$

Эти преобразования проективизируются до представления

$$\mathbb{P}\rho_I^k: \text{Mod} \rightarrow \text{Hom } \mathbb{P}H^0(L^k).$$

Напомним, что и X , и главное расслоение P допускают метаплектические структуры.

Далее, если (S, hF) – полувзвешенный BS-орбифолд, то комплексно-сопряженное к ковариантно постоянному сечению определяет подъем его до полувзвешенного лежандрова цикла (S, hF) в P . Тогда BPU-конструкция (см. (1.15)) определяет сечение $\text{BPU}_{1-d}(\Lambda, \text{hF}) \in H^0(X, L)$. Таким же образом мы получаем подъем цикла S из BS_{k+d} до лежандрова цикла Λ в P , который является его циклическим $(k+d)$ -накрытием, и систему сечений для полувзвешенного цикла (S, hF) :

$$\text{BPU}_{k+d}(\Lambda_{k+d}, \text{hF}) \in H^0(X, L^{k+d}). \quad (2.9)$$

Лагранжев цикл S может быть восстановлен по всему множеству его BPU-образов как квазиклассический предел при $1/k \rightarrow 0$, где $1/k$ играет роль постоянной

Планка: волновые фронты распределений концентрируются на $S \subset X$ (см. [3] и литературу к этой статье).

Далее, для двух лагранжевых циклов (S_1, hF_1) и (S_2, hF_2) асимптотика скалярного произведения $\langle \text{BPU}_k(S_1, hF_1), \text{BPU}_k(S_2, hF_2) \rangle$ (см. (1.8)) может быть вычислена в терминах пересечения $S_1 \cap S_2$ (см. [3]). В частности,

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset \implies \text{BPU}_k(S_1, hF_1) \perp \text{BPU}_k(S_2, hF_2) \quad (2.10)$$

асимптотически при $k \rightarrow \infty$. (Для орбифолдов асимптотики послабее, но все еще достаточно выразительны для нужных геометрических следствий.) Эта техника оценок асимптотик приходит из физической интерпретации геометрической ситуации как “классическое” геометрическое квантование (GQ), т.е. система квантования, применявшаяся до появления БРСТ-метода. Более точный асимптотический анализ квантовых состояний дает

$$\langle \text{BPU}_k(S, hF), \text{BPU}_k(S, hF) \rangle \sim \left(\frac{k}{\pi} \right)^{\frac{1}{2} \dim X} \int_S |hF|^2 + O(k^{\frac{1}{2}(\dim X - 1)}), \quad (2.11)$$

и если $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, то

$$\langle \text{BPU}_k(S_1, hF_1), \text{BPU}_k(S_2, hF_2) \rangle \sim \left(\frac{k}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}(\dim X - 1)} + O(k^{\frac{1}{2}(\dim X - 2)}). \quad (2.12)$$

Отсюда и из описания дифференциала BPU-отображения получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – любая вещественная поляризация (см. § 1, пример 1) с трансверсальным множеством BS_{k+d} -слоев. Тогда эти слои можно снабдить такими полуформами, что для $k \gg 0$ BPU-векторы в $H^0(L^{k+d})$ линейно независимы:

$$\text{rank} \langle \text{BPU}_{k+d}(\text{BS}_{k+d}(L) \cap B) \rangle = \#(\text{BS}_k(L) \cap B).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Более изощренный анализ асимптотик квантовых состояний усиливает это наблюдение: пусть $S_1, \dots, S_{N_{\max}} \subset \text{BS}_{k+d}$ – максимальный набор непересекающихся BS_{k+d} -циклов. Тогда $N_{\max} \leq \text{rank } H^0(L^{k+d})$, причем правая часть этого неравенства может быть вычислена по теореме Римана–Роха.

2. Геодезический подъем. Вообще говоря, подъем BS-цикла многообразия X до лежандрового цикла многообразия P определен с точностью до естественного $U(1)$ -действия на P , и состояния $\text{BPU}_k(S, hF)$ определены с точностью до множителя. Но в наших приложениях мы можем сделать этот подъем почти канонически (с точностью до конечного числа возможностей) и получить базис пространства $H^0(L^{k+d})$ (тоже с точностью до конечного числа возможностей).

Для описания этого почти канонического подъема мы должны вернуться к рассмотрению лагранжевой грассманизации касательного расслоения многообразия X , как она описана в работе [25]. Поточечно касательное пространство $(TX)_x$ в

точке $x \rightarrow X$ есть $\mathbb{C}^n$ с симплектической формой $\langle \cdot, \cdot \rangle = \omega_x$ и с постоянной евклидовой метрикой g_x , составляющими эрмитову триаду (ω_x, I_x, g_x) . Лагранжев грассманиан $(\Lambda_{\uparrow})_x = \Lambda_{\uparrow}(TX)_x$ есть многообразие ориентированных лагранжевых подпространств в $(TX)_x$. Объединение таких грассманианов по всем точкам в X дает лагранжеву грассманизацию касательного расслоения TX :

$$\pi: \Lambda_{\uparrow}(TX) \rightarrow X \quad \text{с} \quad \pi^{-1}(x) = (\Lambda_{\uparrow})_x. \quad (2.13)$$

Комплексная структура I_x на $(TX)_x$ определяет стандартную идентификацию:

$$(\Lambda_{\uparrow})_x = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n). \quad (2.14)$$

Это пространство допускает каноническое отображение

$$\det: (\Lambda_{\uparrow})_x \rightarrow \mathrm{U}(1) = S^1_x, \quad (2.15)$$

сопоставляющее матрице $u \in \mathrm{U}(n)$ число $\det u \in \mathrm{U}(1) = S^1$. Объединение этих отображений над всеми точками многообразия X определяет отображение

$$\det: \Lambda_{\uparrow}(TX) \rightarrow S^1(L_{-K}), \quad (2.16)$$

где $S^1(L_{-K})$ – расслоение на единичные окружности линейного расслоения $\bigwedge^n TX = \det TX$, с первым классом Черна $c_1(\det TX) = -K_X$, где K_X – канонический класс многообразия X (см., например, [24] и [25]).

Мы уже отмечали, что, вообще говоря, наши лагранжевы циклы не имеют выделенной ориентации. Поэтому мы должны рассмотреть лагранжеву грассманизацию $\Lambda(TX)$ без ориентации. Тогда мы получим отображение $\det: \Lambda(TX) \rightarrow S^1(L_{-K/2})$ вместо (2.16).

Теперь для ориентированного лагранжева цикла $S \subset X$ мы имеем гауссов подъем вложения $i: S \rightarrow X$ до сечения

$$G(i): S \rightarrow \Lambda(TX)|_S, \quad (2.17)$$

сопоставляющий точке $x \in S$ подпространство $TS_x \subset (TX)_x$. Композиция этого отображения Гаусса с проекцией $\det$ дает отображение

$$\det \circ G(i): S \rightarrow S^1(L_{-K/2})|_S. \quad (2.18)$$

Следовательно, каждый лагранжев цикл S определяет лежандров цикл

$$\Lambda = \det \circ G(i)(S) \subset S^1(L_{-K/2}). \quad (2.19)$$

Связность Леви-Чивита келеровой метрики определяет связность a_{LC} на $L_{-K/2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Лагранжев цикл S называется *почти геодезическим*, если лежандров цикл $\Lambda = \det \circ G(i)(S)$ горизонтален относительно связности Леви-Чивита a_{LC} на $L_{-K/2}$.

Теперь используем свойство (1.3). Линейное расслоение $L_{-K/2}$ есть L^{-d} , где L – линейное расслоение поляризации. Мы предполагаем, что связность Леви-Чивита индуцирована связностью a_L на L . Тогда имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Лагранжев цикл S есть BS_0 в том и только том случае, если он почти геодезический.*

Эрмитовы структуры на наших линейных расслоениях определяют отображение

$$\mu_d: S^1(L^*) \rightarrow S^1(L_{-K/2}) \quad (2.20)$$

главных $U(1)$ -расслоений, которое послойно есть минус изогения степени d . Следовательно, *каждый* лагранжев цикл S определяет ориентированный лежандров цикл (см. (2.19))

$$\Lambda = \mu_d^{-1}(\det \circ G(i)(S)) \subset S^1(L^*) = P. \quad (2.21)$$

Рассмотрим пару изогений

$$\begin{aligned} \mu_{d+k}: S^1(L^d) &\rightarrow S^1(L^{d(k+d)}), \\ \mu_d: S^1(L^{k+d}) &\rightarrow S^1(L^{d(k+d)}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

и подъем $l: S \rightarrow S^1(L^{k+d})$, заданный ковариантно постоянным сечением над BS_{k+d} -циклом S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Подъем l называется *почти геодезическим*, если

$$\mu_{d+k} \circ \det \circ G(i)(S) = \mu_d \circ l(S).$$

Очевидно, что число таких геодезических подъемов $\leq |d(k+d)|$.

Суммируя, получим, что Λ^k – пространство лежандровых циклов на P , образы которых при проекции на X есть накрытие BS_{k+d} -цикла на X , задаваемое корнем k -й степени из единицы (такие лежандровы циклы называются *циклами Планка*). Тогда естественная проекция $p: \Lambda_{k+d} \rightarrow BS_{k+d}$, сопоставляющая лежандрову циклу лагранжев цикл, является главным $U(1)$ -расслоением.

Геодезический подъем

$$l: \widetilde{BS}_{k+d} \rightarrow \Lambda_{k+d}, \quad (2.23)$$

который мы только что описали, есть мультисечение этого главного расслоения и $p: \widetilde{BS}_{k+d} \rightarrow BS_{k+d}$ – циклическое накрытие.

Рассмотрим вещественную поляризацию $\pi: X \rightarrow B$ (1.23). Имеется конечное число бор-зоммерфельдовских слоев

$$B \cap BS_{k+d} = \{S_i\} \quad \text{для } i = 1, \dots, N_\pi^{k+d}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Выбор геодезических подъемов $\{\tilde{S}_i\} \subset \Lambda_{k+d}$ называется *выбором тэта-структуры* вещественной поляризации π .

Снабжая эти лагранжевы циклы полуформами, мы получаем конечное множество $\{\tilde{S}_i, hF_i\}$ полувзвешенных лежандровых циклов.

Мы знаем, что $\text{BPU}_k(\{\tilde{S}_i, hF_i\}) \subset \mathbb{P}H^0(L^{k+d})$ – линейно независимая система векторов (состояний) при $k \gg 0$ и при общем выборе полуформ. В частности, если

$$\#(\text{BS}_{k+d} \cap B) = \text{rank } H^0(L^{k+d}), \quad (2.24)$$

мы получаем бор-зоммерфельдовский базис.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что мы имитируем здесь ситуацию примера 3 из § 1. Другие описания и приложения геодезического подъема лагранжева цикла до лежандрова см. в [23]–[25].

3. Геометрическое квантование. Существуют глубокие причины для совпадений рангов, как предполагается в (2.24) для бор-зоммерфельдовских слоев вещественной поляризации фазового пространства классической механической системы. Поэтому полезно рассматривать каждое симплектическое многообразие (S, ω) именно как фазовое пространство классической механической системы, а пару (L, a_L) , где a_L – эрмитова связность на линейном расслоении L с формой кривизны $F_a = 2\pi i \cdot \omega$, как структуру предквантования этой системы.

Базисы Бора–Зоммерфельда идентифицируют два подхода к квантованию системы (S, ω, L, a) (см. [1], [21] или [30]). Первый подход – выбор *комплексной* поляризации, т.е. выбор комплексной структуры I на S такой, что $S_I = X$ – келерово многообразие с келеровой формой ω . Тогда форма кривизны эрмитовой связности a имеет ходжев тип $(1, 1)$. Следовательно, для каждого уровня $k \in \mathbb{Z}^+$ линейное расслоение L^k голоморфно на S_I . Комплексное квантование приводит к пространству волновых функций уровня k (1.1) (см., например, [16]).

Второй подход геометрического квантования – выбор *вещественной* поляризации системы (S, ω, L, a) (см. пример 1 из § 1), т.е. расслоения $\pi: S \rightarrow B$ (1.23). Мы уже знаем, что ограничение пары (L, a) на лагранжев слой дает плоскую связность, класс которой задается характером фундаментальной группы $\chi: \pi_1(\text{слоя}) \rightarrow \text{U}(1)$.

Пусть L_π – пучок ростков сечений расслоения L , ковариантно постоянных вдоль слоев. Получаем пространство $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_i H^i(S, L_\pi)$. В регулярном случае Снятинский доказал, что $H^i(S, L_\pi) = 0$ при $i \neq n$. Для вычисления последней компоненты $H^n(S, L_\pi)$ необходимо привлечь слои Бора–Зоммерфельда: вполне оправдано ожидание того, что число таких слоев конечно. В регулярном случае

$$H^n(S, L_\pi) = \bigoplus_{\text{BS} \cap B} \mathbb{C} \cdot s_i,$$

где s_i – ковариантно постоянные сечения ограничений пары (L, a) на (бор-зоммерфельдовские) слои вещественной поляризации π (см. [22]).

В общем случае мы можем использовать этот результат в регулярном случае как определение пространств волновых функций (уровня k):

$$\mathcal{H}_\pi^k = \bigoplus_{\text{BS}_{k+d} \cap B} \mathbb{C} \cdot s_i, \quad (2.25)$$

и воспользоваться ВРУ-конструкцией для сравнения пространств (1.1) и (2.25).

Существует канонический метод описания подмножества $\text{BS}_{k+d}(L) \cap B$, использующий специальные координаты на B – так называемые координаты *действия*, являющиеся половиной координат “действие-угол” (см. [1], [8]).

Как уже было замечено (см. (2.7)), важное наблюдение, математически доказанное во многих случаях, заключается в том, что проективизация пространств (1.1) не зависит от выбора комплексной структуры:

$$\frac{\partial \mathbb{P} \mathcal{H}_I^k}{\partial I} = 0. \quad (2.26)$$

Иначе говоря, векторные расслоения (1.2) допускают плоские проективные связности. Таким образом, пространства волновых функций определяются симплектической структурой и структурой предквантования (см., например, [11]). Этот факт остается справедливым и для проективизации пространств (2.25). Более того, эти пространства не зависят от вещественной поляризации π (1.21) при условии, если мы расширим систему предквантования $(S, \omega, L, a,)$, “взвесив” бор-зоммерфельдовские слои полуплотностями или полуформами (см. [8]), необходимыми для определения спаривания Блаттнера–Константа–Сурье. (Описание отличий между квантованиями полуплотностями и полуформами см. в [30].)

Для сравнения пространств $\mathcal{H}_I^k$ и $\mathcal{H}_\pi^k$ при помощи ВРУ-конструкции мы должны прежде всего сравнить их ранги. Эта арифметическая проблема может быть решена во всех интересующих нас случаях (см., например, [14] и [12]). Геометрические причины такого сорта равенств исследованы в [23].

§ 3. Приложение: теория неабелевых тэта-функций с характеристиками

Классическая теория тэта-функций – прекрасная модель для нашей теории. Несмотря на то, что эта теория реализована во всех подходах геометрического квантования (см. [23]), мы должны проверить, что все классические базисы (тэта-функции с характеристиками) пространства тэта-функций могут быть реализованы как базисы Бора–Зоммерфельда, полученные ВРУ-конструкцией, что геодезический подъем есть выбор тэта-структуры и т.д. Эта полезная и серьезная работа заслуживает специальной статьи (или книги). Здесь же абелева теория будет только моделью для теории *неабелевых тэта-функций*.

Пусть A – главно поляризованное абелево многообразие (прав) комплексной размерности g с нулевой точкой $o \in A$ и плоской метрикой g . Тогда касательное расслоение TA имеет постоянную эрмитову структуру (т.е. евклидову метрику, симплектическую форму и комплексную структуру I). Келерова форма ω задает

поляризацию степени 1. В равенстве (1.3) имеем $d = 0$. Фиксируем гладкое лагранжево разложение тора A :

$$A = T_+^g \times T_-^g, \quad (3.1)$$

на два семейства лагранжевых относительно ω торov (напомним, что A гладко эквивалентно стандартному тору $\mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ со стандартной постоянной целой формой ω и это разложение есть просто приведение этой формы к стандартному виду). Пусть L – линейное расслоение с голоморфной структурой, заданной эрмитовой связностью a с кривизной $F_a = 2\pi i \cdot \omega$. Тогда $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$, где Θ – классический симметрический тэта-дивизор. Разложение (3.1) индуцирует разложение $H^1(A, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_+^g \times \mathbb{Z}_-^g$ и лагранжево разложение

$$A_k = (T_+^g)_k \times (T_-^g)_k \quad (3.2)$$

подгруппы точек порядка k .

В этом случае комплексное квантование совпадает с классической теорией тэта-функций. Действительно, лагранжево разложение (3.2) подгруппы точек k -го порядка определяет набор совместимых тэта-структур всех уровней и разложение пространства волновых функций

$$\mathcal{H}_I^k = H^0(A, L^k) = \bigoplus_{w \in (\mathbb{Z}^g)_k^-} \mathbb{C} \cdot \theta_w, \quad \text{rank } \mathcal{H}_I^k = k^g, \quad (3.3)$$

где θ_w – тэта-функция с характеристикой w (см. [18]).

С другой стороны, прямое произведение (3.1) дает нам и вещественную поляризацию

$$\pi: A \rightarrow T_-^g = B. \quad (3.4)$$

Заметим, что в этом случае координаты “действия” совпадают с плоскими координатами на торе $T_-^g = B$, и в силу этого отождествления

$$B \cap \text{BS}_k = (T_-^g)_k \quad (3.5)$$

– подгруппа точек k -го порядка.

Таким образом, применение процедуры геометрического квантования к вещественной поляризации (3.4) системы предквантования (A, ω, L^k, a_k) , где a_k – эрмитова связность, определяемая голоморфной структурой на L^k , дает нам разложение

$$\mathcal{H}_\pi^k = \bigoplus_{\rho \in \text{U}(1)_k^g} \mathbb{C} \cdot s_\rho. \quad (3.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. 1) $\text{rank } \mathcal{H}_{L^k} = \text{rank } \mathcal{H}_\pi^k = k^g$.

2) Более того, существует изоморфизм $\mathcal{H}_I^k = \mathcal{H}_\pi^k$, канонический с точностью до скалярного множителя.

Действительно, отождествление BS_k -слоев проекции π на T_+^g дает нам в то же время подъем BS_k -слоев до лежандровых подмногообразий в P . Более того, канонический класс K_A равен нулю. Так что существуют каноническая метаплектическая структура на A и канонический набор полуформ на всех бор-зоммерфельдовских слоях, инвариантных относительно сдвигов и определенных однозначно с точностью до общего фазового множителя. Напомним, что гомоморфизм Босвика-Поля-Урибе (1.22) определяет вложение

$$\text{BPU}_k: \mathcal{H}_\pi^k \hookrightarrow \mathcal{H}_I^k \quad (3.7)$$

(потому что сечения ортогональны) и тем самым – изоморфизм (потому что ранги равны). Более того, легко доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Гомоморфизм BPU_k (3.7) есть гомоморфизм H_k -модулей, где H_k – группа Гайзенберга уровня k .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для каждого BS_k -тора T_j^g множества (3.5), снабженного трансляционно инвариантной полуформой объема 1, BPU -квантово метаническое состояние $\text{BPU}_k(T_j^g)$ совпадает с тэта-функцией с соответствующей характеристикой.

Подчеркнем еще раз, что функции специальных базисов пространств тэта-функций называются *тэта-функциями с характеристиками уровня k* .

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечно, это совпадение проверяется чисто аналитически, используя вид ядра Шварца проекции Π_k , фурье-образов дельта-функций и интерпретации тэта-функций как решений уравнения теплопроводности.

Таким образом, комбинация конструкций комплексной и вещественной поляризации дает нам ортогональные базисы в полных линейных системах дивизоров. Однако основной вопрос для любого келерова многообразия X есть поиск вещественной поляризации вида (1.23) (возможно, с вырожденными слоями).

Наконец, если Σ – риманова поверхность рода g и $A = J_\Sigma$ – ее якобиан, то как вещественное многообразие якобиан есть

$$J_\Sigma = T^{2g} = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{U}(1))$$

с симплектической формой ω и линейным расслоением L с эрмитовой связностью a , кривизна которой $F_a = 2\pi i\omega$. Мы применяем наши конструкции к четверкам

$$(\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{U}(1)), \omega, L_\Theta, a). \quad (3.8)$$

Тогда лагранжево разложение (3.1) дает вещественную поляризацию с BS_k -слоями (3.5).

Снабжая Σ комплексной структурой I , мы получаем комплексную поляризацию пространства $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{U}(1)) = J_\Sigma$. Таким образом, в этом случае набор пространств (1.1) имеет вид $\mathcal{H}_I^k = H^0(J_\Sigma, L_\Theta^k)$ и является слоем голоморфных векторных расслоений (1.2)

$$\mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{M}_g \quad (3.9)$$

над многообразием модулей римановых поверхностей рода g .

Тогда идентификация (3.7) показывает, что эти пространства локально не зависят от комплексной структуры I , т.е. существует проективно плоская связность на каждом векторном расслоении (3.9). Эти связности могут быть описаны в терминах уравнения теплопроводности (см. [11] и [31]).

В этой работе мы применим описанный метод к следующему некоммутативному обобщению этой ситуации: рассмотрим $(6g - 6)$ -мерное пространство

$$R_g = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_2), \text{SU}(2))/\text{PU}(2), \quad (3.10)$$

т.е. пространство классов $\text{SU}(2)$ -представлений фундаментальной группы римановой поверхности (оно зависит только от g), и применим BPU-конструкцию к его геометрическому квантованию.

Существенно новым здесь является тот факт, что R_g особо. Поэтому сначала мы должны рассмотреть как модель следующий *особый абелев случай*.

Пусть

$$K_\Sigma = J_\Sigma / \{\pm \text{id}\} \quad (3.11)$$

– куммерово многообразие. Все геометрические объекты (3.8) инвариантны относительно инволюции $-\text{id}$, и мы получаем предквантованную механическую систему

$$(K_\Sigma, \omega, L_\Theta, a) \quad (3.12)$$

с особым фазовым пространством, причем

$$\text{Sing } K_\Sigma = (J_\Sigma)_2 \quad (3.13)$$

– точки 2-кручения якобиана.

Комплексная структура I на Σ определяет комплексную поляризацию куммерова многообразия K_Σ . Мы будем рассматривать пространства волновых функций только четного уровня:

$$\mathcal{H}_I^{2k} = H^0(K_\Sigma, L_\Theta^{2k}) = H_{\text{ev}}^0(J_\Sigma, L_\Theta^{2k}), \quad (3.14)$$

т.е. пространства четных (симметрических) тэта-функций.

Для описания вещественной поляризации куммерова многообразия K_Σ представим Σ как связную сумму g 2-торов:

$$\Sigma = T_1^2 \# T_2^2 \# \cdots \# T_g^2, \quad (3.15)$$

и фиксируем стандартную пару образующих фундаментальной группы (a_i, b_i) каждого 2-тора T_i^2 . Мы получаем стандартное представление фундаментальной группы поверхности Σ :

$$\pi_1(\Sigma) = \left\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = \text{id} \right\rangle. \quad (3.16)$$

Убивая образующие a_i , получаем *тело с ручками* $\tilde{\Sigma}_a$ с границей

$$\partial \tilde{\Sigma}_a = \Sigma \quad (3.17)$$

и фундаментальной группой

$$\pi_1(\tilde{\Sigma}_a) = \langle b_1, \dots, b_g \rangle \quad (3.18)$$

– свободной группой с образующими b_i .

Мы можем определить якобиан этого тела с ручками:

$$J_{\tilde{\Sigma}_a} = H_1(\tilde{\Sigma}_a, \mathbb{R}) / H_1(\tilde{\Sigma}_a, \mathbb{Z}), \quad (3.19)$$

и его куммерово многообразие

$$K_{\tilde{\Sigma}_a} = J_{\tilde{\Sigma}_a} / \{\pm \text{id}\}. \quad (3.20)$$

Тогда наша вещественная поляризация (3.4) может быть описана как естественное отображение

$$\pi: J_{\Sigma} \rightarrow J_{\tilde{\Sigma}_a}, \quad (3.21)$$

определяющее вещественную поляризацию куммерова многообразия

$$\pi: K_{\Sigma} \rightarrow K_{\tilde{\Sigma}_a}. \quad (3.22)$$

Слои этой поляризации лагранжевы, и 2^g куммеровых многообразий g -мерных торов над $(K_{\tilde{\Sigma}_a})_2$ особы:

$$\text{Sing } \pi^{-1}(w) = (\pi^{-1}(w))_2, \quad w \in (J_{\tilde{\Sigma}_a})_2. \quad (3.23)$$

Очевидно, что инволюция $-\text{id}$ на $J_{\tilde{\Sigma}_a}$ сохраняет BS-слои проекции (3.4) и действует свободно на

$$(J_{\tilde{\Sigma}_a})_{2k} \setminus (J_{\tilde{\Sigma}_a})_2, \quad (3.24)$$

сохраняя поточечно подмножество $(J_{\tilde{\Sigma}_a})_2$. Таким образом, число BS $_{2k}$ -слоев вещественной поляризации (3.21)

$$\#(K_{\tilde{\Sigma}_a} \cap \text{BS}_{2k}(K_{\Sigma}, L_{\Theta})) = 2^{g-1}(k^g + 1) \quad (3.25)$$

равно рангу пространства четных тэта-функций уровня $2k$ (3.14).

Далее, BS-слои над

$$((J_{\tilde{\Sigma}_a})_{2k} \setminus (J_{\tilde{\Sigma}_a})_2) / \{\pm \text{id}\} \quad (3.26)$$

неособы, а слои над $(J_{\tilde{\Sigma}_a})_2$ особы и *односвязны*. Следующее утверждение остается справедливым и в неабелевом случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для любого особого BS_k -слоя $\pi^{-1}(w)$

$$H_1(\pi^{-1}(w)) = H_1(\pi^{-1}(w) \cap \text{Sing } K_\Sigma).$$

Как обычно, мы определяем пространство волновых функций (как в (3.6)) для вещественной поляризации (3.22)

$$\mathcal{H}_\pi^{2k} = \bigoplus_{w \in ((J_{\Sigma_a})_{2k} \setminus (J_{\Sigma_a})_2) / \{\pm \text{id}\}} \mathbb{C} \cdot s_w \bigoplus_{w \in (J_{\Sigma_a})_2} \mathbb{C} \cdot s_w. \quad (3.27)$$

Суммируя наши результаты, мы получаем следующее ортогональное разложение пространства (3.3) тэта-функций:

$$\mathcal{H}_I^{2k} = H_{\text{ev}}^0(J_\Sigma, L^{2k}) \oplus H_{\text{odd}}^0(J_\Sigma, L^{2k}), \quad (3.28)$$

на четные и нечетные тэта-функции. Четная компонента – пространство волновых функций (3.14) комплексной поляризации куммерова многообразия. Тогда прямая ВРУ-конструкция дает линейное погружение

$$\text{ВРУ}: \bigoplus_{w \in ((J_{\Sigma_a})_{2k} \setminus (J_{\Sigma_a})_2) / \{\pm \text{id}\}} \mathbb{C} \cdot s_w \rightarrow H_{\text{ev}}^0(J_\Sigma, L_\Theta^{2k}) \quad (3.29)$$

для неособых BS -слоев и ее простая модификация для случая *орбифолдов* дает полную идентификацию:

$$H^0(K_\Sigma, L_\Theta^{2k}) = \mathcal{H}_\pi^{2k}. \quad (3.30)$$

При этой идентификации разложению (3.27) соответствует разложение

$$H^0(L_\Theta^{2k}) = H^0(\mathcal{O}_{(J_\Sigma)_2}) \oplus H^0(J_{(J_\Sigma)_2} \otimes L^k).$$

К сожалению, в неабелевом случае особенности намного сложнее, чем в случае гладкого орбифолда. Поэтому мы применим комбинированную стратегию: для гладких слоев и орбифолдов в гладкой части фазового пространства мы применим прямой ВРУ-метод и его простейшую модификацию, но для более сложных особенностей мы применим специальный трюк, обходящий сложный анализ.

Далее, перейдем к комплексному квантованию пространства R_g .

Пространство (3.10) стратифицировано подпространствами приводимых представлений

$$R^{\text{triv}} \subset R_g^{\text{red}} \subset R_g, \quad R_g^{\text{irr}} = R_g - R_g^{\text{red}}. \quad (3.31)$$

Используя аргументы симплектической редукции, мы получаем невырожденную симплектическую форму Ω на этом пространстве. Эта форма определяет симплектическую структуру на R_g^{irr} .

Существует и эрмитово линейное расслоение L с $U(1)$ -связностью A_{CS} на R_g (связность Черна–Саймонса, см. [20] или [23, § 3]). По определению форма кривизны этой связности есть

$$F_{A_{\text{CS}}} = 2\pi i \cdot \Omega. \quad (3.32)$$

Следовательно, четверка

$$(R_g, \Omega, L, A_{CS}) \quad (3.33)$$

есть предквантованная система.

Стандартный способ выбора комплексной поляризации – это выбор комплексной структуры I на римановой поверхности Σ рода g . Комплексная структура на пространстве классов представлений R_g отождествляет $R_\Sigma = R_g = \mathcal{M}^{\text{ss}}$ с многообразием модулей полустабильных векторных расслоений на Σ_I (см. [11] и библиографию в этой работе).

Форма кривизны $F_{A_{CS}}$ (3.32) имеет тип $(1, 1)$, и линейное расслоение L допускает единственную голоморфную структуру, совместимую с эрмитовой связностью A_{CS} . Более того, комплексная структура I на Σ определяет келерову метрику Вейля–Петерсона на $\mathcal{M}^{\text{ss}}$ с келеровой формой $\omega_{\text{WP}} = \Omega$. Эта метрика определяет связность Леви–Чивита на комплексном касательном расслоении $T\mathcal{M}^{\text{ss}}$, а тем самым и эрмитову связность A_{LC} на линейном расслоении

$$\det T\mathcal{M}^{\text{ss}} = L^{\otimes 4} \quad (3.34)$$

и эрмитову связность A_{LC} на L , совместимую с голоморфной структурой на L . Следовательно, $A_{LC} = A_{4CS}$ и равенство (1.3) выполнено с $d = -2$. Значит, мы можем использовать геодезический подъем (2.23).

Результат комплексного квантования предквантовой системы (3.33) есть пространство волновых функций уровня k , т.е. пространство I -голоморфных сечений:

$$\mathcal{H}_I^k = H^0(R_I, L^{k-2}). \quad (3.35)$$

Известно, что эта система пространств и мономорфизмов связана с системой представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена CQFT. Ранги этих пространств дает формула Верлинде (см. [4]):

$$\text{rank } \mathcal{H}_I^k = \frac{k^{g-1}}{2^{g-1}} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(\sin(\frac{n\pi}{k}))^{2g-2}} \quad (3.36)$$

(не забывают про сдвиг $k \mapsto k - 2$).

Множество красивых фактов геометрии отображения (1.6)

$$\mathbb{P}\varphi_k: R_I = \mathcal{M}^{\text{ss}} \rightarrow \mathbb{P}H^0(L^k)^*, \quad (3.37)$$

открытых Бовилем, Ласло, Паули, Зорге и многими другими, делают вполне оправданным название этой области математики: *теория неабелевых тэта-функций*. Мы должны особо отметить результат Оксбери и Раманана о пространствах уровня 4 [19]. В этом случае пространство (3.35) есть естественная прямая сумма пространств абелевых тэта-функций якобиана и примиванов римановой поверхности. Объединение базисов (3.3) в этом случае есть базис Бора–Зоммерфельда для этого частного случая.

Далее, векторные расслоения (1.2)

$$\mathcal{H}^k \rightarrow M_g \quad (3.38)$$

над многообразиями модулей кривых рода g допускают проективно плоские связности Хитчина [11].

Напомним, что наше пространство R_g с комплексной структурой, индуцированной комплексной структурой I на Σ , есть особое алгебраическое многообразие R_I и

$$\text{Sing } R_I = K_\Sigma \quad (3.39)$$

– куммерово многообразие кривой Σ . Имеем

$$L^k|_{K_\Sigma} = L_\Theta^{2k}. \quad (3.40)$$

Легко видеть, что если $k \gg 0$, то это ограничение дает эпиморфизм

$$\text{res}: H^0(L^k) \rightarrow H^0(L_\Theta^{2k}) \rightarrow 0, \quad (3.41)$$

и, используя нашу эрмитову структуру (1.8), мы получаем ортогональное разложение

$$H^0(L^k) = H^0(L_\Theta^{2k}) \oplus H^0(J_{K_\Sigma} \otimes L^k). \quad (3.42)$$

Для первой компоненты этого разложения мы уже имеем специальный базис (3.29), (3.30). Более того, эта компонента раскладывается как

$$H^0(L_\Theta^{2k}) = H^0(\mathcal{O}_{(J_\Sigma)_2}) \oplus H^0(J_{(J_\Sigma)_2} \otimes L^k). \quad (3.43)$$

Суммируя, мы имеем фильтрацию векторных расслоений (3.38):

$$\mathcal{H}_{\text{triv}} \subset \mathcal{H}_{\text{red}}^{2k} \subset \mathcal{H}^{k+2}, \quad (3.44)$$

соответствующую флагу (3.31), и разложения (3.42) и (3.43) (см. также (3.27) и (3.30)). Каждое расслоение этого флага имеет проективно плоскую связность, и эти связности совместимы. Монодромии первых двух расслоений

$$\text{Mon } \mathcal{H}_{\text{triv}} = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2), \quad \text{Mon } \mathcal{H}_{\text{red}}^{2k} = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_{2k}) \quad (3.45)$$

конечны. Наш основной результат (см. (4.18)) сводит вопрос о монодромии расслоения $\mathcal{H}^{k+2}$ к чисто комбинаторному вычислению представления (4.15). Это представление – объект совершенно другой красивой теории, поставляющей инварианты трехмерных многообразий, – называется *TQFT-представлением группы* Mod_g . Образ этого представления исследован многими авторами. Мы приведем здесь суммирующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1 [6, теорема 1.1]. *Образ TQFT-представления бесконечен, если $g \geq 2$, $k \neq 2, 3, 4, 6$ и $g = 2$, $k \neq 10$.*

Прямым следствием основного результата этой работы является отождествление образа TQFT-представления и монодромии связности Хитчина [11] (см. ниже (4.18)), и мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Монодромия связности Хитчина бесконечна, если $g \geq 2$, $k \neq 2, 3, 4, 6$ и $g = 2$, $k \neq 10$.*

Заметим, что конечность монодромии Хитчина для уровня 4 следует из конструкции Оксбери–Раманана (см. замечание после формулы (3.37)).

§ 4. Комбинаторная теория и отождествления

Пусть Γ – любой 3-валентный граф с вершинами $V(\Gamma)$ и ребрами $E(\Gamma)$ с $|V(\Gamma)| = 2g - 2$ и $|E(\Gamma)| = 3g - 3$. Рассмотрим функции

$$w: E(\Gamma) \rightarrow \left\{0, \frac{1}{2k}, \dots, \frac{1}{2}\right\} \quad (4.1)$$

на ребрах графа Γ со значениями в рациональных числах со знаменателем $2k$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

0) $w(C_i) \in \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{k}$, если C_i разбивает граф Γ ;

и для любых трех ребер C_l, C_m, C_n , сходящихся в одной вершине P_i , имеем:

1) $w(C_l) + w(C_m) + w(C_n) \in \frac{1}{k} \cdot \mathbb{Z}$;

2) $w(C_l) + w(C_m) + w(C_n) \leq 1$;

3) для любого упорядочения тройки C_l, C_m, C_n

$$|w(C_l) - w(C_m)| \leq w(C_n) \leq w(C_l) + w(C_m). \quad (4.2)$$

Функция w , удовлетворяющая этим условиям, называется *допустимым целым весом* уровня k на Γ . Пусть $W_g^k(\Gamma)$ – множество допустимых целых весов. Это множество погружено во множество W_g^k (4.1) всех (без всяких условий) функций

$$W_g^k(\Gamma) \subset W_g^k, \quad (4.3)$$

число которых равно $|W_g^k| = k^{3g-3}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 (см., например, [14]). Число $|W_g^k(\Gamma)|$ допустимых весов уровня k не зависит от графа Γ .

Условия (4.2) называются условиями *Клебша–Гордона*. Мы можем рассмотреть пространство всех вещественных функций, удовлетворяющих этим условиям. Получим комплекс Δ_Γ (см. [12]).

Таким образом, с каждым графом связано пространство

$$\mathcal{H}_\Gamma^k = \bigoplus_{w \in W_g^k(\Gamma)} \mathbb{C} \cdot w \quad (4.4)$$

с естественным эрмитовым спариванием $\langle \cdot, \cdot \rangle$, так что $\{w\}$ образуют унитарный ортонормальный базис. Все эти пространства содержатся в общем пространстве

$$\mathcal{H}_\Gamma^k \subset \mathcal{H}_g^k = \bigoplus_{w \in W_g^k} \mathbb{C} \cdot w. \quad (4.5)$$

Геометрия комплексной конфигурации

$$\bigcup_{\text{по всем графам}} \mathbb{P}\mathcal{H}_\Gamma^k \subset \mathbb{P}\mathcal{H}_g^k$$

отражает топологические свойства комплекса Мура–Зайберга [17] 3-валентных графов.

Это комбинаторное описание имеет следующий геометрический смысл: рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{3g-3}$ с координатами c_i , соответствующими вершинам $\{C_i\} = E(\Gamma)$. Оно содержит подкомплекс Δ_Γ и подрешетку $\mathbb{Z}^{3g-3} \subset \mathbb{R}^{3g-3}$. Мы можем рассмотреть тор “действия”:

$$T^A = \mathbb{R}^{3g-3} / \mathbb{Z}^{3g-3}. \quad (4.6)$$

Тогда T^A содержит топологический комплекс $\bar{\Delta}_\Gamma$, который получается возможным склеиванием граничных точек выпуклого многогранника Δ_Γ . Каждая функция $w \in W_g^k$ (4.1) определяет точку $w \in T_{2k}^A$ порядка k на торе действия. Получаем идентификацию:

$$W_g^k = T_k^A. \quad (4.7)$$

В частности, допустимые веса W_g^k мы можем рассматривать как подмножество точек порядка k на торе действия:

$$W_g^k(\Gamma) \subset T_k^A. \quad (4.8)$$

Теперь, если мы раздуем ребра 3-валентного графа Γ до трубочек, а вершины – до маленьких 2-сфер, мы получим риманову поверхность Σ_Γ рода g с отмеченными $3g - 3$ не пересекающимися, не стягиваемыми и попарно не изотопными окружностями $\{C_i\}$ на Σ_Γ , которые являются меридианами трубочек. Изотопический класс такого набора окружностей называется *отметкой* римановой поверхности. Легко видеть, что дополнение

$$\Sigma_g - \{C_1, \dots, C_{3g-3}\} = \bigcup_{i=1}^{2g-2} P_i \quad (4.9)$$

есть объединение $2g - 2$ триньенов P_i , где каждый триньен есть 2-сфера с тремя удаленными непересекающимися дисками:

$$P_i = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3), \quad \bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset, \quad i \neq j. \quad (4.10)$$

С другой стороны, каждое разложение на триньены римановой поверхности Σ задается выбором максимального набора не пересекающихся, не стягиваемых, попарно не изотопных гладких окружностей на Σ . Легко видеть, что такая система содержит $3g - 3$ простых замкнутых окружностей:

$$C_1, \dots, C_{3g-3} \subset \Sigma_g, \quad (4.11)$$

с дополнением, являющимся объединением $2g - 2$ триньенов P_j . Тип такого разложения задается его 3-валентным графом $\Gamma(\{C_i\})$, сопоставляющим вершину каждому триньену P_i , ребро соединяет P_i и P_j и соответствует окружности C_l ,

если $C_l \subset \partial P_i \cap \partial P_j$. Следовательно, класс изотопий разложения на триньены задается 3-валентным графом Γ .

Модулярная группа Mod_g действует на R_g симплектоморфизмами, сохраняющими предквантованную систему. Каждый элемент $\gamma \in \text{Mod}_g$ меняет систему окружностей $\{[C_i]\} \rightarrow \{\gamma([C_i])\}$, но сохраняет граф триньенного разложения:

$$\Gamma(\{[C_i]\}) = \Gamma(\{\gamma([C_i])\}). \quad (4.12)$$

Следовательно, множество допустимых весов $W_g^k(\Gamma(\{[C_i]\}))$ не меняется и определяет базис (4.4) пространства $\mathcal{H}_\Gamma^k$.

Используя fusion-матрицы, описывающие монодромию уравнения Книжника–Замолодчикова, Т. Коно [14] построил канонический изоморфизм:

$$\mathcal{H}_{\Gamma_1}^k = \mathcal{H}_{\Gamma_2}^k \quad \text{для любых двух графов } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_2, \quad (4.13)$$

и, как следствие, получил унитарное представление центрального расширения

$$1 \rightarrow Z(k) \rightarrow \widetilde{\text{Mod}}_g^k \rightarrow \text{Mod}_g \rightarrow 1, \quad (4.14)$$

где $Z(k)$ – циклическая группа, порожденная элементом $\exp(2\pi i \frac{k}{8(k+2)})$. Компоненты представления Коно есть

$$\rho_c^k: \widetilde{\text{Mod}}_g^k \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_\Gamma^k. \quad (4.15)$$

Это и есть TQFT-представление (см. [6]). Разложение с такими компонентами параллельно разложению представления старшего веса аффинной алгебры Ли алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ на собственные подпространства оператора L_0 конструкции Сугавара представления алгебры Вирасоро (см. [15]).

По этим представлениям мы строим векторные расслоения

$$\pi: \mathcal{H}_c^k \rightarrow M_g \quad (4.16)$$

над многообразием модулей M_g кривых рода g со слоями

$$\pi^{-1}(\Sigma_\Gamma) = \mathcal{H}_\Gamma^k \quad (4.17)$$

и с проективно плоской унитарной связностью a_c , имеющей представление монодромии (4.15). Действительно, Mod_g действует транзитивно на всех отметках $\{[C_i]\}$ и на всех триньенных разложениях.

Опишем наш основной результат. Мы хотим идентифицировать проективизации пространств (3.35) и (4.4).

ТЕОРЕМА 4.1. Для $k \gg 0$ (граница зависит от рода g) существует каноническое отождествление

$$\mathcal{H}_I^{k+2} = \mathcal{H}_{\Gamma_0}^k \quad (4.18)$$

с точностью до конечного числа возможностей для специального 3-валентного графа Γ_0 , описанного ниже.

Эта идентификация влечет длинную цепочку идентификаций объектов и конструкций двух разных теорий: комплексного квантования системы (3.33) (WZNW-модель SQFT) и комбинаторной теории Виттена, Решетихина–Тураева, Тзучиа–Кани, Дринфельда, Мура–Зайберга и Коно. Следовательно, мы можем использовать алгебро-геометрические результаты неабелевой теории тэта-функций для эффективного вычисления топологических инвариантов трехмерных многообразий. С другой стороны, стандартные базисы пространств $\mathcal{H}_\Gamma^k$ (4.4) дают неабелевы тэта-функции с характеристиками уровня k , и, следуя работам Мамфорда, мы могли бы написать специальные уравнения для образов многообразия $\mathcal{M}^{\text{ss}}$ в пространстве конформных блоков.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $k \gg 0$ во многих пунктах доказательства является лишним. Мы фиксируем его только для простоты аргументов, связанных с BPU-конструкцией.

Итак, мы должны построить BS_{k+2} -циклы на R_g , пронумерованные элементами множества $W_g^k(\Gamma)$ (4.3). Это уже сделано Джеффри и Вейтсманом в [12]: для отмеченной римановой поверхности Σ_Γ имеем отображение

$$\pi_{\{C_i\}}: R_g \rightarrow \mathbb{R}^{3g-3} \quad (4.19)$$

с координатами $(c_1, \dots, c_{3g-3})$, так что

$$c_i(\pi_{\{C_i\}}(\rho)) = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \text{tr } \rho([C_i]) \right) \in [0, 1], \quad (4.20)$$

где $\{C_i\} = E(\Gamma)$.

Хорошо известно, что:

- 1) отображение $\pi_{\{C_i\}}$ – вещественная поляризация системы $(R_g, k \cdot \omega, L^k, k \cdot A_{\text{CS}})$;
- 2) координаты c_i – координаты “действия” нашей гамильтоновой системы;
- 3) отображение $\pi_{\{C_i\}}$ – отображение моментов для действия тора T^{3g-3} на R_g ,

$$R_g \times T^{3g-3} \rightarrow R_g, \quad (4.21)$$

построенного Голдманом [7];

- 4) образ R_g при $\pi_{\{C_i\}}$ – выпуклый многогранник

$$\Delta_{\{C_i\}} \subset [0, 1]^{3g-3}; \quad (4.22)$$

- 5) симплектический объем пространства R_g равен евклидову объему многогранника $\Delta_{\{C_i\}}$:

$$\int_{R_g} \omega^{3g-3} = \text{Vol } \Delta_{\{C_i\}} = \frac{2 \cdot \zeta(2g-2)}{(2\pi)^{g-1}};$$

6) число бор-зоммерфельдовских слоев вещественной поляризации $\pi_{\{C_i\}}$

$$N_{\text{BS}}(\pi_{\{C_i\}}, R_g, \omega, L, A_{\text{CS}}) \quad (4.23)$$

равно числу полуцелых точек полиэдра $\Delta_{\{C_i\}}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_{k\text{-BS}}}{k^{3g-3}} = \int_{R_g} \omega^{3g-3} = \text{Vol } \Delta_{\{C_i\}}, \quad (4.24)$$

функции c_i непрерывны на всем R_g и гладки над $(0, 1)$.

Каждый вес $w \in W_g^k(\Gamma)$ определяет точку в $\Delta_{\{C_i\}}$ (4.22) с координатами $c_i = 2w(C_i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2 [12]. 1) *Отображение $x \mapsto 2x$ переводит комплекс Δ_Γ (4.7) в $\Delta_{\{C_i\}}$ (4.22): $2\Delta_\Gamma = \Delta_{\{C_i\}}$.*

2) *Это преобразование переводит $W_g^k(\Gamma)$ во множество BS_k -слоев вещественной поляризации $\pi_\Gamma = \pi_{\{C_i\}}$ (4.19):*

$$2W_g^k(\Gamma) = \Delta_{\{C_i\}} \cap \text{BS}_{k+2}(L). \quad (4.25)$$

3) *В частности, $|W_g^k(\Gamma)| = \#(\Delta_{\{C_i\}} \cap \text{BS}_{k+2}(L))$.*

Суммируя все эти результаты, получаем:

1) фиксируя граф $\Gamma(\{[C_i]\})$ триньенного разложения, мы канонически нумеруем k -бор-зоммерфельдовские слои всех поляризаций с тем же графом множеством допустимых весов $W_g^k(\Gamma(\{[C_i]\}))$ этого графа;

2) фиксируя набор классов окружностей $\{[C_i]\}$, мы получаем конечное число непересекающихся k -бор-зоммерфельдовских циклов S_w при $w \in W_g^k(\Gamma(\{[C_i]\}))$ в R_g ;

3) для любого уровня k , любой римановой поверхности Σ и любого ее триньенного разложения $\{C_i\}$ имеем

$$\text{rank } \mathcal{H}_I^{k+2} = \text{rank } \mathcal{H}_\Gamma^k = \text{rank } \mathcal{H}_\pi^k = \text{числу Верлинде (3.36)}. \quad (4.26)$$

Мы дополним описание BS_{k+2} -слоев вещественной поляризации π_Γ из работы [12] описанием слоев $\pi_\Gamma^{-1}(w)$, для которых

$$\pi_\Gamma^{-1}(w) \cap K_\Sigma \neq \emptyset. \quad (4.27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как мы увидим чуть позже, BS_{k+2} -слои, не пересекающиеся с $K_\Sigma = \text{Sing } R_I$, могут иметь только особенности орбифолда. Мы можем применить к ним БПУ-конструкцию и получить часть базиса “тэта-функций с характеристиками”.

Вернемся к геометрической процедуре, описанной после формулы (4.8). Раздвывая наш граф Γ , мы получим тело с ручками $\tilde{\Gamma}$ с границей

$$\partial \tilde{\Gamma} = \Sigma, \quad (4.28)$$

задающее последовательность фундаментальных групп

$$1 \rightarrow \ker \rightarrow \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 1,$$

где ядро есть подгруппа циклов римановой поверхности, гомотопных точке в $\tilde{\Gamma}$. Для того чтобы узнать в этой конструкции наше предыдущее тело с ручками $\tilde{\Sigma}_a$ (3.17), напомним, что стандартное представление (3.16) фундаментальной группы поверхности Σ_g определяет другое “двойственное” представление, задаваемое GNW-конструкцией (Гурупрасад–Нилакантан–Вейль, см. [26]). Положим

$$\alpha_i = r_{i-1} b_i^{-1} r_i^{-1}, \quad \beta_i = r_i a_i^{-1} r_{i-1}^{-1}, \quad \text{где } r_i = \prod_{j=1}^i [a_j, b_j].$$

Тогда

$$\pi_1(\Sigma_g) = \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g \mid \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = 1 \right\rangle$$

есть другое представление группы $\pi_1(\Sigma_g)$. Сопоставляя образующим a_i, b_j образующие α_i, β_j , получаем автоморфизм W фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_g)$, т.е. $W \in \text{Mod}_g$, и W является инволюцией, т.е. $W^2 = \text{id}$.

Для того чтобы показать, что

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{W}(\Sigma)_a = \tilde{\Sigma}_{W(a)}, \quad (4.29)$$

рассмотрим специальный 3-валентный граф Γ_0 , соответствующий представлению Σ в виде связной суммы g 2-торов (см. [14, рис. 12а и 13b]). Получим базис (3.16). Чтобы получить граф Γ_0 , фиксируем следующую систему циклов $\{C_i\}$ на Σ (она состоит из трех групп):

- 1) $a_1, \dots, a_g$ – циклы a_i из [14, рис. 13b];
- 2) $a'_2, \dots, a'_{g-1}$ – циклы c_i из [14, рис. 13b];
- 3) $c_1 = [a_1, b_1], \dots, c_{g-1} = [a_{g-1}, b_{g-1}]$ – циклы b_i из [14, рис. 13b].

Тогда элементы

$$\{c_i\} \subset [\pi_g, \pi_g] \quad (4.30)$$

лежат в коммутаторе фундаментальной группы, так как $E(\Gamma_0)$ содержит подмножество

$$E(\Gamma_0)^a = \{a_1, \dots, a_g\}. \quad (4.31)$$

Наше тело с ручками (3.17), преобразованное элементом W , совпадает с $\tilde{\Gamma}_0$.

Пронумеруем координаты $\{c_i\}$ (4.19) и (4.20) теми же символами, как и циклы a_i, a'_j, c_k . Тогда

$$\rho \in K_\Sigma \implies c_i(\rho) = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, g-1, \quad (4.32)$$

$$\rho \in K_\Sigma \implies a_i = a'_i \quad \text{для } i = 2, \dots, g-1. \quad (4.33)$$

Следовательно, $\dim \pi_{\Gamma_0}(K_\Sigma) = g$. Более точно, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Имеем $\pi_{\Gamma_0}(K_\Sigma) = K_{\tilde{\Gamma}_0}$, и π_{Γ_0} – вещественная поляризация (3.22).*

Нам осталось проверить следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Имеем*

$$K_{\tilde{\Gamma}_0} \cap \text{BS}_k(R_g, L) = K_{\tilde{\Gamma}_0} \cap \text{BS}_{2k}(K_\Sigma, L_\Theta).$$

Доказательство следует немедленно из описания геометрии BS_k -слоев в предложении 5.2 и следствия 5.1 следующего параграфа.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. 1) $W_g^k(\Gamma_0)$ содержит подмножество весов

$$W_g^k(\Gamma_0)_{\text{Ab}} = K_{\tilde{\Gamma}_0} \cap \text{BS}_{k+2}(L) \subset W_g^k(\Gamma_0),$$

которые называются абелевыми весами.

2) Веса из множества $W_g^k(\Gamma_0)_{\text{non-Ab}} = W_g^k(\Gamma_0) \setminus W_g^k(\Gamma_0)_{\text{Ab}}$ называются неабелевыми весами.

3) Пространство (4.4) может быть разложено на абелевы и неабелевы части:

$$\mathcal{H}_{\Gamma_0}^k = \left(\bigoplus_{w \in W_g^k(\Gamma_0)_{\text{Ab}}} \mathbb{C} \cdot w \right) \oplus \left(\bigoplus_{w \in W_g^k(\Gamma_0)_{\text{non-Ab}}} \mathbb{C} \cdot w \right).$$

4) Равенство (3.30) отождествляет абелеву компоненту:

$$\left(\bigoplus_{w \in W_g^k(\Gamma_0)_{\text{Ab}}} \mathbb{C} \cdot w \right) = H^0(K_\Sigma, L_\Theta^{2k}).$$

Чтобы получить базис из “тэта-функций с характеристиками” всего пространства $H^0(L^k)$ по трийному разложению поверхности Σ и линейному изоморфизму $\text{BPU}_k: \mathcal{H}_{\pi_{\Gamma_0}}^k \rightarrow H^0(L^k)$ (2.24), мы должны снабдить каждый слой S_w для $w \in W_g^k$ канонической полуформой hF_w так, чтобы проектор Сеге (2.2) продолжался на классы распределений, включающих (Λ_w, hF_w) для каждого $w \in W_g^k(\Gamma)$.

§ 5. Ковариантно постоянные полуформы и особенности

Для выбора ковариантно постоянных полуформ на БЗ-слоях напомним некоторые факты о структуре этих слоев. Пусть Γ – 3-валентный граф с вершинами $V(\Gamma)$ и ребрами $E(\Gamma)$. Пусть

$$w: E(\Gamma) \rightarrow \left\{ 0, \frac{1}{2k}, \dots, \frac{1}{2} \right\}$$

– целый допустимый вес. Для $\alpha \in \{0, \frac{1}{2k}, \dots, 1\}$ пусть

$$w^{-1}(\alpha) = \Gamma_1(\alpha) \cup \dots \cup \Gamma_n(\alpha) \subset \Gamma \quad (5.1)$$

– разложение на связные компоненты. Тогда каждая компонента $\Gamma_i(\alpha)$ есть 3-валентный граф с n_i унивалентными вершинами $a_1, \dots, a_{n_i}$ (см. [14]).

Каждый калибровочный класс связности содержит связность a_0 , адаптированную к триньному разложению (см. [12, определение 2.2]). Фиксируем фильтрацию

$$Z(\mathrm{SU}(2)) = \mathbb{Z}_2 \subset \mathrm{U}(1) \subset \mathrm{SU}(2) \quad (5.2)$$

и рассмотрим ее как тройку

$$G = \{\mathbb{Z}_2, \mathrm{U}(1), \mathrm{SU}(2)\}. \quad (5.3)$$

Для $[a] \in \pi^{-1}(w)$ мы имеем функцию

$$e_w: E(\Gamma) \rightarrow G, \quad (5.4)$$

сопоставляющую каждой окружности C_j элемент тройки G , сопряженный стабилизатору монодромии связности $[a]$ вдоль этой окружности, и функцию

$$v_w: V(\Gamma) \rightarrow G, \quad (5.5)$$

сопоставляющую триньну P_i стабилизатор плоской связности $a|_{P_n}$. Конечно,

$$\begin{aligned} C_j \subset \partial P_n &\implies v_w(P_n) \subset e_w(C_j), \\ C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \partial P_n, \quad e_w(C_1) = e_w(C_2) = \mathrm{SU}(2) &\implies \\ \implies e_w(C_3) = \mathrm{SU}(2) &\implies v_w(P_n) = \mathrm{SU}(2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

и т.д.

Очевидно, что

$$e_w(C_j) = \mathrm{U}(1) \quad \text{или} \quad e_w(C_j) = \mathrm{SU}(2). \quad (5.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Функции e_w и v_w зависят только от w , а не от выбора связности $[a] \in \pi^{-1}(w)$.*

Более точно, они зависят от разложения (5.1).

Таким образом, w определяет прямые произведения

$$\prod_{C \in E(\Gamma)} e_w(C) \quad \text{и} \quad \prod_{P \in V(\Gamma)} v_w(P),$$

и $\prod_{P \in V(\Gamma)} v_w(P)$ действует на $\prod_{C \in E(\Gamma)} e_w(C)$ следующим образом: для

$$g = (g_1, \dots, g_{2g-2}) \in \prod_{P \in V(\Gamma)} v_w(P), \quad g_i \in v_w(P_i),$$

и

$$(t_1, \dots, t_{3g-3}) \in \prod_{C \in E(\Gamma)} e_w(C) \quad t_n \in e_w(C_n),$$

если $C_n \subset \partial P_i \cap \partial P_j$, имеем

$$g(t_n) = g_i \circ t_n \circ g_j^{-1}. \quad (5.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2 [12, теорема 2.5]. *Слой $\pi^{-1}(w)$ представляется в виде*

$$\pi^{-1}(w) = \prod_{C \in E(\Gamma)} e_w(C) / \prod_{P \in V(\Gamma)} v_w(P). \quad (5.9)$$

Применение этого описания к $w \in K_{\tilde{\Gamma}_0} \cap \text{BS}_k(R_g, L)$ доказывает предложение 4.4: в этом случае для каждого $P \in V(\Gamma_0)$

$$U(1) \subset v_w(P) \text{ и } e_w(c_i) = \text{SU}(2)$$

для c_i из (4.30).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Для слоя $\pi^{-1}(w)$ имеем изоморфизм*

$$\pi^{-1}(w) \cong T^t \times [(S^3)^p \times (S^2)^s] / G_w, \quad (5.10)$$

где t, p и s – неотрицательные целые числа и G_w – конечные абелевы группы, определяемые весом w или, более точно, комбинаторикой данных (4.1). Более того,

$$H_1(\pi^{-1}(w)) = \mathbb{Z}^t \oplus \mathbb{Z}_2^p. \quad (5.11)$$

Сдвиги вдоль тора T^t в (5.10) индуцированы гамильтонианами, поднятыми с $\mathbb{R}^{3g-3}$ при отображении π . Мы будем рассматривать полуформы, инвариантные относительно этих сдвигов.

Джефри и Вейтсман [12] используют нормализацию координат “действия” при помощи разветвленного накрытия, чтобы построить ковариантно постоянное сечение s_w ограничения пары $(L^k, A_{k\text{-CS}})$ на $\pi^{-1}(w)$.

Наши группы (5.2)–(5.3) допускают биинвариантные полуформы hF_1 на $U(1)$ и hF_2 на $\text{SU}(2)$. Для каждого w мы нормализуем эти формы $\text{hF}_1(w)$ и $\text{hF}_2(w)$ так, что полуформа

$$\text{hF}_w = (\text{hF}_1(w))^{t-s} \cdot (\text{hF}_2(w))^{p+s} \quad (5.12)$$

однородна степени 1 на $\pi^{-1}(w)$ (см. (5.10)) относительно скейлинга

$$\text{hF}_i(w) \rightarrow t \cdot \text{hF}_i(w).$$

Мы скажем, что такая полуформа однородно нормализована.

Легко видеть [13, п. 4.7], что так нормализованная полуформа для неособого BS_{k+2} -слоя задается гамильтонианом объема 1, поднятым с $\mathbb{R}^{3g-3}$.

Следовательно, каждый BS_{k+2} -слой снабжен полуформой (5.12), и мы можем построить соответствующее лежандрово распределение в P . Напомним, что R_g почти однородно относительно действия тора Голдмана (4.21). Следовательно, ядра Шварца когерентных состояний не зависят от точек, и вне особенностей слоев они ведут себя, как в однородном случае (см. [3, (10)–(13)]). Подъем в P каждого BS_{k+2} -слоя $\pi^{-1}(w)$ определяет лежандров цикл $\Lambda_w \subset P$, взвешенный полуформой

$$\overline{\text{hF}}_w = (\varphi_4 \circ \det \circ G(i))^* \text{hF}_w, \quad (5.13)$$

с монодромией, являющейся корнем k -й степени из 1.

Наконец, для применения ВРУ-конструкции на главном расслоении $P = S^1(L^*)$ должна быть выбрана метаплектическая структура. Это сделать просто, используя (3.34).

Теперь для отождествления (4.18) рассмотрим разложение (3.42)

$$H^0(L^k) = H^0(K_\Sigma, L_\Theta^{2k}) \oplus H^0(J_{K_\Sigma} \otimes L^k),$$

$$\mathcal{H}_{\Gamma_0}^k = \left(\bigoplus_{w \in W_g^k(\Gamma_0)_{\text{Ab}}} \mathbb{C} \cdot w \right) \oplus \left(\bigoplus_{w \in W_g^k(\Gamma_0)_{\text{non-Ab}}} \mathbb{C} \cdot w \right)$$

из следствия 4.1. Тогда равенство (3.30) отождествляет первую (абелеву) компоненту, а ВРУ-конструкция отождествляет вторую (неабелеву) компоненту. Этот метод (и его модификация для орбифолдов) приложим здесь, потому что в неабелевом случае BS_k -слои содержатся в гладкой части пространства R_g .

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–140.
3. Borthwick D., Paul T., Uribe A. Legendrian distributions with applications to the non-vanishing of Poincaré series of large weight // Invent. math. 1995. V. 122. P. 359–402; hep-th/9406036.
4. Beauville A. Vector bundles on Riemann surfaces and conformal field theory // Algebraic geometric methods in math. physics. Caciely, 1993. P. 145–166.
5. Дубровин Б. А., Кривев И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–288.
6. Funar L. On the TQFT representations of the mapping class groups. Math. GT / 9804047, 1-21 (to appear in Pacific Journal of Math.).
7. Goldman W. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations // Invent. Math. 1986. V. 85. P. 263–302.
8. Guillemin V., Sternberg S. Symplectic techniques in physics. N.Y.: CUP, 1983.
9. Gorodentsev A., Tyurin A. ALAG. Preprint/Max-Planck-Institut für Mathematik, 1999. Series 130. S. 1–34.
10. Guillemin V. Symplectic spinors and partial differential equations // Coll. Inter. C.N.R.S., Aix-en-Provence, 1974–1975. P. 217–252.
11. Hitchin N. J. Flat connections and geometric quantization // Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 347–380.
12. Jeffrey L. C., Weitsman J. Bohr–Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula // Commun. Math. Phys. 1992. V. 150. P. 593–630.
13. Jeffrey L. C., Weitsman J. Half density quantization of the moduli space of flat connections and Witten’s semiclassical invariants // Topology. 1993. V. 32. P. 509–529.
14. Kohno T. Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class group. I // Topology. 1992. V. 31. P. 203–230.

15. *Kohno T.* Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class group. II. Estimating tunnel number of knots // Contemporary mathematics. 1994. V. 175. P. 193–217.
16. *Кириллов А. А.* Геометрическое квантование // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 141–178.
17. *Moore G., Seiberg N.* Classical and quantum conformal field theory // Comm. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 177–254.
18. *Mumford D.* Tata lectures on theta. I. Progr. Math. V. 28. Birkhäuser, 1983; II. Jacobian theta functions and differential equations. Progr. Math. V. 43. Birkhäuser, 1984; III. Progr. Math. V. 97. Birkhäuser, 1991.
19. *Oxbury W. M.* Prym varieties and the moduli of spin bundles // Algebraic geometry / Ed. P. E. Newstead. Lect. Notes in Pure App. Math. V. 200. P. 351–376.
20. *Ramadas T. R., Singer L. M., Weitsman J.* Some comments on Chern–Simmons gauge theory // Commun. Math. Phys. 1989. V. 126. P. 409–420.
21. *Śniatycki J.* Geometric quantization and quantum mechanics // Applied Math. Sciences. V. 30. Springer, 1980.
22. *Śniatycki J.* Bohr–Sommerfeld conditions in geometric quantization // Reports in Math. Phys. 1974. V. 7. P. 127–135.
23. *Tyurin A.* Quantization and “theta functions”. Preprint/Jussieu Avril, 1999. № 216. e-print math.AG/9904046, 32 p.
24. *Tyurin A.* Geometric quantization and mirror symmetry. Preprint/Warwick, 1999. № 22. alg-geom 9902027, 53 p.
25. *Tyurin A.* Special Lagrangian geometry and slightly deformed algebraic geometry (spLag and sdAG). Preprint/Warwick, 1998. № 8. alg-geom 9806006, 45 p.
26. *Tyurin A.* Non-Abelian analogue of Abel’s theorem. Preprint/ICTP, 1997. № 157. 55 p.
27. *Tyurin A.* Complexification of Bohr–Sommerfeld conditions. Preprint/Inst. of math. of University of Oslo, 1999. № 15. 32 p.
28. *Weinstein A.* Symplectic geometry // BAMS. 1981. V. 5. P. 1–13.
29. *Weinstein A.* Connections of Berry and Hannay type for moving Lagrangian submanifolds // Advances in Math. 1990. V. 82. P. 133–159.
30. *Woodhouse N.* Geometric quantization. Oxford Math. Monographs. Oxford: OUP, 1980.
31. *Welters G.* Polarized Abelian varieties and the heat equations // Comp. Math. 1983. V. 49. P. 173–194.

Поступило в редакцию
28.IX.1999