Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ягодновский, Линейная деформация дискретных групп и конструкции многозначных групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 5, 197–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:30:31

УДК 517.986

П. В. Ягодовский

Линейная деформация дискретных групп и конструкции многозначных групп

Введена конструкция деформации дискретных многозначных групп, которая описывается как специальная деформация их групповых алгебр в классе конечномерных ассоциативных алгебр. Показано, что деформация обычной группы, приводящая к многозначной группе, задается коциклом с коэффициентами в групповой алгебре исходной группы; получены классификационные результаты о таких деформациях. Указана связь введенной линейной деформации дискретных групп с известными конструкциями многозначных групп. Приведено описание многообразия трехмерных ассоциативных коммутативных алгебр с единицей и фиксированным базисом, удовлетворяющих условию постоянства значности; групповые алгебры n -значных групп порядка три (трехмерные n -групповые алгебры) образуют дискретное множество на этом многообразии.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Важной задачей теории многозначных групп является построение многозначных групп, не являющихся группами с косет-реализацией, т.е. факторами обычной группы по ее группе автоморфизмов. В дискретном случае эта задача связана с известной задачей о построении C -алгебр, не являющихся кольцами Шура (см. [3], [1]). В настоящей работе введено понятие линейной деформации дискретных групп и дана конструкция, позволяющая предъявлять многозначные группы без косет-реализации.

Рассмотрим многообразие $M_{\text{ass}}(\mathcal{L})$ структур ассоциативных алгебр на линейном пространстве $\mathcal{L}$ с фиксированным базисом как алгебраическое подмногообразие в линейном координатном пространстве V , сопоставляя точке из M_{ass} вектор структурных констант соответствующей алгебры. Пусть G – многозначная группа и $v_G \in M_{\text{ass}}$ – точка, соответствующая ее групповой алгебре $\mathbb{R}(G)$. Будем рассматривать прямые в V , проходящие через v_G и целиком лежащие в M_{ass} . Как показано ниже, если G – группа в обычном смысле, то каждой такой прямой отвечает 2-коцикл стандартной B -резольвенты алгебры $\mathbb{R}(G)$ с коэффициентами в самой себе относительно действия Ad . В центре внимания настоящей работы находятся такие прямые, на которых имеются точки, отвечающие многозначным группам. Такие многозначные группы называются *линейными деформациями* группы G . Замечательно, что уже для групп $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ конструкция линейной деформации дает нетривиальные примеры многозначных групп без косет-реализации. Мы даем классификацию всех их линейных деформаций. Далее, для абелевых групп

введена конструкция однородной деформации как частного случая линейной деформации, соответствующего кошиклам специального вида. Получена классификация однородных деформаций циклических групп. Оказалось, что однородная деформация обобщает известную конструкцию многозначных групп, найденную в работе [10]. Основные определения, примеры и результаты теории многозначных групп см. в [2]–[4], [9], [10].

Введем основные понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество A называется n -значной группой ($n \in \mathbb{N}$), если зафиксировано умножение $\mu: A \times A \rightarrow (A)^n$ со значением в n -ой симметрической степени $(A)^n$ множества A , удовлетворяющее следующим условиям:

G1) *ассоциативность*: для любых элементов x, y, z группы A справедливо

$$(\mu)^n(x, \mu(y, z)) = (\mu)^n(\mu(x, y), z)$$

(здесь под $(\mu)^n(\mu(x, y), z)$ подразумевается элемент

$$(\mu(t_1, z), \dots, \mu(t_n, z)) \in ((A)^n)^n \subset (A)^{n^2},$$

где $\mu(x, y) = (t_1, \dots, t_n)$; правая часть равенства понимается аналогично; требуется совпадение получившихся элементов множества $(A)^{n^2}$);

G2) *существование двусторонней единицы*: имеется выделенный элемент $e \in A$, называемый *единицей*, такой, что для все $x \in A$ имеет место равенство $\mu(e, x) = \mu(x, e) = (x, \dots, x)$;

G3) *существование двустороннего обратного*: для любого $x \in A$ существует (хотя бы один) элемент $x' \in A$, называемый *обратным*, такой, что множества $\mu(x, x')$ и $\mu(x', x)$ содержат в себе единицу e .

В частности, обычные группы согласно этому определению являются 1-группами. Через $C_{x,y}^z$ будем обозначать кратность элемента z в $\mu(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебра $\mathbf{A}$ над $\mathbb{R}$ с фиксированным базисом, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами n -группы A , и структурными константами $c_{x,y}^z = (1/n)C_{x,y}^z$ называется *групповой алгеброй n -группы A* .

Ниже мы будем работать в категории групповых алгебр дискретных многозначных групп со счетным или конечным числом элементов. Объекты этой категории называются *n -групповыми алгебрами*. Таким образом, получаем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ассоциативная алгебра $\mathbf{A}$ с единицей a_0 над $\mathbb{R}$ не более чем счетной размерности, фиксированным базисом $\{a_i\}$ и структурными константами $\{c_{i,j}^k\}$ называется *n -групповой алгеброй* ($n \in \mathbb{N}$), если:

A1) структурные константы – неотрицательные рациональные числа, представление которых в виде несократимых дробей имеет знаменателями только делители числа n ;

A2) для любой пары элементов i, j имеет место $\sum_k c_{i,j}^k = 1$;

A3) для любого i существует j такой, что $c_{i,j}^0 > 0$ и $c_{j,i}^0 > 0$ (такие пары элементов a_i и a_j будут называться *взаимно обратными*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. n -группа называется *коммутативной*, если $\forall x, y \in A$ $\mu(x, y) = \mu(y, x)$. n -группа называется *инволютивной*, если для каждого элемента группы существует только один обратный и отображение (называемое *инволюцией*), сопоставляющее элементу его обратный, является антиавтоморфизмом.

Первые примеры n -групп возникают благодаря следующей конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [3], [9], [10]). n -группа A называется *n -группой с косет-реализацией*, если существуют группа G и ее группа автоморфизмов H такие, что групповая алгебра A изоморфна подалгебре групповой алгебры G , инвариантной относительно действия H . n -группы с косет-реализацией будем обозначать через $A = G/H$.

Групповые алгебры инволютивных групп можно путем перенормировки базиса (см. [3]) превратить в C -алгебры, изучающиеся в алгебраической комбинаторике (см. [1]). На языке C -алгебр групповые алгебры n -групп с косет-реализацией являются S -кольцами (кольцами Шура) специального вида.

Групповые алгебры инволютивных конечных многозначных групп являются частными случаями гипергрупп (см. определения и библиографию в [13]), а также табличных алгебр (см. [7]). Класс обобщенных гипергрупп включает в себя также и C -алгебры.

О связи теории многозначных групп и теории интегрируемых систем см. [8].

Часть результатов этой работы анонсирована в кратком сообщении [6]. В этом тексте исправлены имевшиеся в той заметке неточности.

Здесь я хочу выразить благодарность моему научному руководителю В. М. Бухштаберу за постановку задачи и активную поддержку в ее решении, а также А. М. Вершику, С. А. Евдокимову и И. Н. Пономаренко за чрезвычайно полезные обсуждения результатов этой работы.

§ 1. Линейная деформация групп

В этом параграфе описана конструкция линейной деформации групп и показано, что деформация обычной группы задается коциклом с коэффициентами в групповой алгебре исходной группы. Далее, введено понятие однородной деформации абелевой группы как частного случая линейной деформации и доказано необходимое и достаточное условие на коцикл, задающий такую деформацию (см. лемму 2).

Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство (конечномерное или индуктивный предел конечномерных) с фиксированным базисом, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами некоторого множества $N \subset \mathbb{N}$, содержащего 1.

Введем многообразие структур ассоциативных алгебр с единицей 1 на $\mathcal{L}$. Для этого рассмотрим *пространство структурных констант* V с координатами $c_{i,j}^k$ ($i, j \in N \setminus \{1\}$, $k \in N$). Определим набор отображений $f_{ijk}^r: V \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j, k \in N \setminus \{1\}$, $r \in N$) формулой

$$\left(\sum_p c_{i,j}^p c_{p,k}^r - \sum_t c_{i,t}^r c_{j,k}^t \right), \quad (1)$$

и пусть $F: V \rightarrow V'$ – отображение с компонентами f_{ijk}^r . В случае когда N – конечное множество, $V = \mathbb{R}^{|N|(|N|-1)^2}$ и $V' = \mathbb{R}^{|N|(|N|-1)^3}$. Рассмотрим поверхность $M_{\text{ass}}^N = F^{-1}(0)$ в V , которая называется *многообразием структур ассоциативных алгебр с единицей и фиксированным базисом*. Оно является алгебраическим многообразием с фиксированным вложением в V . На M_{ass}^N естественно действует группа GL ; орбиты этого действия в случае $|N| \leq 5$ изучены (см. результаты и библиографию в [11]). Зафиксируем некоторую n -групповую алгебру $\mathbf{A}$. Пусть $T\mathbf{A}$ – пересечение ядра дифференциала отображения F в точке x , соответствующей $\mathbf{A}$, и гиперплоскостей $\{\sum_k c_{i,j}^k = 1 \ \forall i, j \geq 2\}$. Так как выражения (1) второго порядка, то любая прямая, лежащая в $T\mathbf{A}$ и имеющая хотя бы еще одну общую точку с поверхностью M_{ass}^N , полностью на ней лежит. Это означает, что, найдя точку $y \in T\mathbf{A} \cap M_{\text{ass}}^N \setminus x$ с рациональными координатами, мы сразу получаем серию рациональных точек $\{ty + (1-t)x \mid t \in \mathbb{Q}\}$, каждая из которых отвечает некоторой ассоциативной алгебре с единицей и рациональными структурными константами, удовлетворяющими условию A2) из определения 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. m -групповая алгебра называется *линейной деформацией* n -групповой алгебры $\mathbf{A}$, если прямая, соединяющая соответствующие им точки в пространстве структурных констант, целиком лежит на поверхности M_{ass}^N . Многозначную группу будем называть *линейной деформацией* n -группы A , если ее групповая алгебра является линейной деформацией ее групповой алгебры.

Ниже мы встретим примеры, когда множество $T\mathbf{A} \cap M_{\text{ass}}^N$ содержит m -мерную плоскость. В этих случаях возникает m -параметрическое семейство ассоциативных алгебр $(i, j \in N)$:

$$i * j = \sum_{k \in N} \mathcal{C}_{i,j}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_m) k. \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{C}_{i,j}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ – некоторые линейные функции от $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, причем

$$\mathcal{C}_{i,j}^k(0, \dots, 0) = c_{i,j}^k,$$

где $c_{i,j}^k$ – структурные константы алгебры $\mathbf{A}$. Соответствующий набор из m линейных однопараметрических деформаций, каждая из которых отвечает одному ненулевому параметру α_s , будем называть *согласованным*.

Линейную деформацию, соответствующую нулевому вектору из TG , будем называть *тривиальной*.

Пусть G – конечная или не более чем счетная группа. Будем обозначать через $i \cdot j$ произведение i на j , а через $(k)^{-1}$ – обратный к k элемент. Произвольная линейная деформация группы G может быть записана в виде

$$i * j = \sum_{r \in G} L^r(i, j)(r \cdot i \cdot j), \quad (3)$$

где $L^r(i, j) \in \mathbb{Q}_+$ и $L^r(i, 1) = L^r(1, i) = \delta^{r,1}$. Здесь $\mathbb{Q}_+$ – множество неотрицательных рациональных чисел и $\delta^{i,j}$ – символ Кронекера. В случае бесконечной группы предполагается, что для всех i и j суммы в (3) конечны.

Индекс r в $L^r(i, j)$ будем называть *параметром сдвига (сдвигом)*. В обозначениях формулы (3) структурные константы будут иметь вид $c_{i,j}^k = L^{k'}(i, j)$, где $k' = k \cdot (j \cdot i)^{-1}$.

ЛЕММА 1. Точка $\{c_{i,j}^k\}$ принадлежит $\mathrm{TR}(G)$ тогда и только тогда, когда билинейная функция $L: \mathbb{R}(G) \otimes \mathbb{R}(G) \rightarrow \mathbb{R}(G)$ такая, что $L(i \otimes j) = \sum_{r \in G} L^r(i, j) \cdot r$ является 2-коциклом с коэффициентами в алгебре $\mathbb{R}(G)$ стандартной B -резольвенты алгебры $\mathbb{R}(G)$. Здесь $\mathbb{R}(G)$ рассматривается как $\mathbb{R}(G)$ -модуль с действием Ad , т.е. $\forall i, j, k$

$$d_2(L-1)(i, j, k) = i \cdot L(j, k) \cdot (i)^{-1} - L(i \cdot j, k) + L(i, j \cdot k) - L(i, j) = 0 \quad (4)$$

$$u \ L^1(i, j) = 1 - \sum_{r \neq 1} L^r(i, j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения линейной деформации вытекает, что для любого h операция

$$i * j = \sum_{r \in G \setminus e} h L^r(i, j) (r \cdot i \cdot j) + \left(1 - \sum_{r \in G \setminus e} h L^r(i, j)\right) (i \cdot j)$$

будет ассоциативна, т.е. для любых $i, j, k \in G$

$$\begin{aligned} & h^2 \sum_{s, p \in G \setminus e} L^s(i, j) L^p(s \cdot i \cdot j, k) (p \cdot s \cdot i \cdot j \cdot k) \\ & + h \left(1 - \sum_{r \in G \setminus e} h L^r(i, j)\right) \sum_{p \in G \setminus e} L^p(i \cdot j, k) (p \cdot i \cdot j \cdot k) \\ & + h \sum_{s \in G \setminus e} L^s(i, j) \left(1 - \sum_{r \in G \setminus e} h L^r(s \cdot i \cdot j, k)\right) (s \cdot i \cdot j \cdot k) + (i \cdot j) \cdot k \\ & = h^2 \sum_{t, q \in G \setminus e} L^t(j, k) L^q(i, t \cdot j \cdot k) (q \cdot i \cdot t \cdot j \cdot k) \\ & + h \left(1 - \sum_{r \in G \setminus e} h L^r(j, k)\right) \sum_{q \in G \setminus e} L^q(i, j \cdot k) (q \cdot i \cdot j \cdot k) \\ & + h \sum_{t \in G \setminus e} L^t(j, k) \left(1 - \sum_{r \in G \setminus e} h L^r(i, t \cdot j \cdot k)\right) (i \cdot t \cdot j \cdot k) + i \cdot (j \cdot k). \end{aligned}$$

Продифференцировав обе части этого равенства по h и подставив $h = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in G \setminus e} L^p(i \cdot j, k) (p \cdot i \cdot j \cdot k) + \sum_{s \in G \setminus e} L^s(i, j) (s \cdot i \cdot j \cdot k) \\ & = \sum_{q \in G \setminus e} L^q(i, j \cdot k) (q \cdot i \cdot j \cdot k) + h \sum_{t \in G \setminus e} L^t(j, k) (i \cdot t \cdot j \cdot k), \end{aligned}$$

откуда и вытекает искомое равенство:

$$L^p(i \cdot j, k) + L^p(i, j) = L^p(i, j \cdot k) + L^{i^{-1}pi}(j, k).$$

Наконец, чтобы обеспечить равенства $L(1, i) = L(i, 1) = 0$, из коцикла L вычитаем единицу.

Заметим, что в случае, когда G коммутативна, каждая из функций $(L^r - \delta^{r,0})$ будет коциклом со значением в $\mathbb{Q}_+$. Уравнение (4) в этом случае запишется в виде

$$L(j, k) - L(i \cdot j, k) + L(i, j \cdot k) - L(i, j) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, чтобы задать линейную деформацию групповой алгебры $\mathbb{R}(G)$, надо указать отображение $G \rightarrow Z^2(G, \mathbb{Z})$, которое элементу r ставит в соответствие коцикл L^r .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если G абелева и $H^2(G, \mathbb{R}) = 0$, то все линейные деформации $D\mathbb{R}(G)$ групповой алгебры группы G коммутативны. В частности, коммутативны деформации конечно порожденных абелевых групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H^2(G, \mathbb{R}) = 0$ (здесь $\mathbb{R}$ рассматривается как тривиальный G -модуль), то для любого коцикла $L^r \in Z^2(G, \mathbb{Z}) \subset Z^2(G, \mathbb{R})$ существует такая функция $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$, что $L^r(i, j) = \mu(i) + \mu(j) - \mu(i \cdot j)$. Следовательно, $L^r(i, j) = L^r(j, i)$ для всех r .

Ниже предполагаем, что G – коммутативная аддитивная группа с 0 в качестве нейтрального элемента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Линейную деформацию алгебры $\mathbb{R}(G)$ назовем *однородной*, если только для одного значения сдвига $r \neq 0$ коцикл L^r отличен от нулевого.

При изучении однородных деформаций будем у L^r , $r \neq 0$, опускать верхний индекс.

ПРИМЕР 1. n -групповая алгебра $\mathbb{Z}[t]/(t^m = (1 - h) + ht)$, где $h \in \mathbb{Q}$ и $0 \leq m < 1$, с зафиксированным базисом $\{1, t, \dots, t^{m-1}\}$ является однородной деформацией групповой алгебры группы $\mathbb{Z}_m$. Здесь h – параметр деформации. Соответствующий этой деформации коцикл имеет вид ($m > j \geq 0$, $m > i \geq 0$): $L(i, j) = h$, если $j \geq m - i$, и $L^1(i, j) = 0$ в противном случае.

ЛЕММА 2. Коцикл $L \in Z^2(G, \mathbb{R})$ задает однородную деформацию абелевой группы G тогда и только тогда, когда он принимает только одно ненулевое значение и удовлетворяет условию

$$L(i, j)L(i + j + r, k) = L(i, j + k + r)L(j, k). \quad (6)$$

Назовем множество коэффициентов $L(i, -i)$ *главной диагональю*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основывается на следующих предложениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (И. В. Артельных). Для того чтобы для абелевой группы G коцикл $L \in Z^2(G, \mathbb{R})$ задавал однородную деформацию со сдвигом r , достаточно, а если порядок r в G отличен от двух, то и необходимо, чтобы он удовлетворял уравнениям (6) и уравнению

$$L(i, j)L(i + j, k) = L(i, j + k)L(j, k). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В произведениях $(i*j)*k$ и $i*(j*k)$ отличны от нуля только коэффициенты при $i+j+k$, $i+j+k+r$, $i+j+k+2r$. Условия их равенства в случае $r+r \neq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} L^0(i, j)L^0(i+j, k) &= L^0(i, j+k)L^0(j, k), \\ L^0(i, j)L(i+j, k) + L(i, j)L^0(i+j+r, k) &= L(i, j+k)L^0(j, k) \\ &\quad + L^0(i, j+k+r)L(j, k), \\ L(i, j)L(i+j+r, k) &= L(i, j+k+r)L(j, k). \end{aligned}$$

В случае, когда r – элемент второго порядка, вместо первого и последнего уравнений будет одно, получающееся их сложением. Из этих уравнений непосредственно вытекает, с учетом $L^0(p, q) = 1 - L(p, q)$, утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если для абелевой группы G коцикл $L \in Z^2(G, \mathbb{R})$ задает однородную деформацию со сдвигом r , где r – элемент второго порядка, то он удовлетворяет уравнению (7) при дополнительном условии $i = -j$ или $j = -k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что L удовлетворяет уравнению (7) при дополнительном условии $i = -j$. Фактически надо доказать, что

$$L(i, k-i)L(-i, k) = 0. \quad (8)$$

Во-первых, заметим, что если $L(i, -i) = 0$ или $L(k, -k) = 0$, то требуемое равенство вытекает непосредственно из (5). Если $L(r, -r) = 0$, то для всех p имеем $L(r, p) = 0$. Тогда, выписав условие равенства коэффициентов при k в уравнении ассоциативности для тройки элементов $i, -i, k$:

$$L(i, -i)L(r, k) = L(-i, k)(L(i, k-i) + L(i, k-i+r)), \quad (9)$$

получаем уравнение (8). Пусть $L(i, -i) \neq 0$, $L(k, -k) \neq 0$, $L(r, -r) \neq 0$. Тогда, подставив в (9) вместо k сдвиг r и воспользовавшись уравнением (5), получим

$$L(i, -i)L(-i+r, r) = L(-i, r)L(i, r-i).$$

Предположим, что $L(-i+r, r) \neq 0$. В этом случае из уравнения (9) имеем $L(-i, r) > L(-i+r, r)$. Повторив те же рассуждения для $i+r$ вместо i и учитывая это неравенство, получим $L(-i+r, i+r) = 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $L(-i+r, r) = 0$ и $L(-i, r) = L(-i, i) = L(r, r)$. Аналогично выводится $L(r, -i+r) = 0$ и $L(r, -i) = L(-i, i)$. В этом рассуждении можно заменить i на любой другой элемент p с условием $L(-p, p) \neq 0$. В частности, $L(r, k+r) = 0$. Далее, подставив в формулу (9) вместо k сумму $k+r$, получаем

$$L(-i, k+r)L(i, k+r-i) = L(-i, k+r)L(i, k-i) = 0. \quad (10)$$

Если $L(-i, k+r) \neq 0$, то $L(i, k-i) = 0$. Отсюда вытекает условие (8). Пусть $L(-i, k+r) = 0$. Тогда из (5) вытекает

$$L(k, r) + L(-i, k+r) = L(-i, k) + L(-i+k, r).$$

В левой части этого равенства $L(k, r) = L(r, r)$, а $L(-i, k+r) = 0$. В правой части $L(-i+k, r)$ либо равно нулю, либо равно $L(r, r)$. Если $L(-i+k, r) = L(r, r)$, то $L(-i, k) = 0$, и условие (8) выполняется. Если $L(-i+k, r) = 0$, то

$$L(-i, k) = L(r, r) = L(i, -i) = L(-i, k) + L(i, k-i),$$

откуда $L(i, k-i) = 0$ и, следовательно, (8) справедливо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если для коцикла с аргументами из абелевой группы и значениями в $\mathbb{Z}$ выполняется уравнение (7) хотя бы при одном дополнительном условии $i = -j$ или $k = -j$, то его область значений содержит не более чем один ненулевой элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения на коцикл (5) имеем

$$L(i+j, -j) + L(i, j) = L(j, -j) + L(i, j-j), \quad (11)$$

а из уравнения (7) получаем

$$L(i, j)L(i+j, -j) = L(i, j-j)L(j, -j). \quad (12)$$

Так как все коэффициенты $L(i, j)$ неотрицательны и $L(i, 0) = 0$, то одно из слагаемых в левой части уравнения (11) равно $L(-j, j)$, а другое — нулю. Таким образом, произвольный ненулевой коэффициент $L(i, j)$ равен элементу главной диагонали $L(j, -j)$, а также, по аналогичным соображениям, $L(-i, i)$.

Предположим, что $L(j, -j) \neq 0$ и $L(-i, i) \neq 0$. Возможны два случая.

1) $L(j, i) \neq 0$. Тогда из уравнений (11) и (12) имеем $L(-i, i) = L(j, -j)$.

2) $L(j, i) = 0$. Тогда $L(i+j, -j) = L(j, -j) = L(-i-j, i+j)$ и, аналогично, $L(-i, j+i) = L(-i, i) = L(i+j, -i-j)$. Заметив теперь, что для любого k из

$$L(k-k, k) + L(k, -k) = L(-k, k) + L(k, -k+k)$$

следует $L(k, -k) = L(-k, k)$, получаем, что все ненулевые элементы главной диагонали равны между собой, а вместе с ними равны все ненулевые значения коцикла L . Предложение доказано.

В случае, когда r не элемент второго порядка, мы уже все доказали. Если же r имеет порядок 2, то согласно двум последним предложениям коцикл L имеет в образе не более чем одно ненулевое значение, но в этом случае уравнение (7) вытекает непосредственно из уравнения (5), а вместе с ним, с учетом равенства (9), и уравнение (6). Таким образом, лемма 2 доказана.

КОММЕНТАРИЙ. В работах [2], [9], [10] показано, что алгебры, двойственные к групповым алгебрам многозначных групп, обладают структурой n -алгебр Хопфа. Таким образом, линейная деформация n -групповой алгебры порождает деформацию соответствующей n -алгебры Хопфа. Более того (см. ниже), имеются примеры, когда деформация 1-алгебры Хопфа приводит снова к 1-алгебре Хопфа (напомним, что 1-алгебра Хопфа – это обычная алгебра Хопфа). Эта деформация не является деформацией алгебр Хопфа в смысле [5]: мы не требуем выполнения аксиом алгебры Хопфа при всех значениях параметра деформации h , а лишь только при хотя бы одном ненулевом значении h . При этом из конструкции сразу вытекает, что деформация алгебры Хопфа будет снова алгеброй Хопфа не более чем при одном ненулевом значении параметра h . Заметим, что групповые алгебры дискретных групп не обладают нетривиальными деформациями в смысле [5].

В работе [12] введено понятие деформации гипергруппы. *Деформацией гипергруппы* называется серия гипергрупп, структурные константы которых являются функциями от параметра деформации $\alpha \in A$. При этом на множество A не накладывается никаких условий, хотя в рассмотренных примерах A обладает топологией и структурные константы являются непрерывными функциями от α . В качестве примеров приведены две линейные деформации групп $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$, а также нелинейные деформации групп $\mathbb{Z}_2^d$ и $\mathbb{Z}_3^d$, полученные как произведение деформаций $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$. При этом класс линейных деформаций не выделяется, их геометрический смысл не изучается и нет никаких классификационных результатов. Цель введения понятия деформации гипергрупп и рассмотрения примеров линейных и связанных с ними нелинейных деформаций – получить удобный инструмент для изучения случайных блужданий на гипергруппах. Заметим, что гипергруппы согласно определению удовлетворяют условию единственности обратного элемента. Поэтому многие примеры линейных деформаций многозначных групп не являются примерами деформаций соответствующих гипергрупп.

Пример 1, в случае когда $h = 1/2$, содержится в работах [9], [10]. Этот пример будет обобщаться ниже.

§ 2. Линейные деформации групп $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

В этом параграфе приведена полная классификация линейных деформаций групп $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. К сожалению, пока этим списком и ограничиваются группы, у которых удалось вычислить все линейные деформации (случай группы $\mathbb{Z}_2$ тривиален).

Общая схема получения этих результатов такова. В линейном пространстве $Z^2(G, \mathbb{R})$ 2-коциклов группы g (где G – это $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ или $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$) с коэффициентами в $\mathbb{R}$ выберем систему коциклов $L_1, \dots, L_l$ так, чтобы коцикл $L \in Z^2(G, \mathbb{R})$ тогда и только тогда являлся функцией с неотрицательными значениями, когда он представим в виде линейной комбинации: $L = \sum_{i=1}^l c_i L_i$, где все c_i – неотрицательные числа. (Для случаев $G = \mathbb{Z}_3$ и $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ в качестве системы коциклов удастся взять специальный базис в $Z^2(G, \mathbb{R})$.) Каждая линейная деформация задается набором коциклов из $Z^2(G, \mathbb{R})$, по одному коциклу для каждого значения сдвига $r \in G \setminus \{1\}$. Таким образом, получаем $l(|G| - 1)$ параметр. На эти параметры на-

кладывается условие ассоциативности, записываемое в виде системы уравнений второго порядка от параметров. Так как неизвестные параметры являются коэффициентами при 2-коциклах, то в этой системе (после раскрытия скобок) все линейные члены сокращаются, все уравнения будут иметь вид $P = 0$, где P – однородный полином степени два. Такое уравнение, полученное при записи условия равенства нулю коэффициента при d в уравнении ассоциативности $(ab)c - a(bc) = 0$, будем обозначать через $abc(d)$.

Ниже опущены явные вычисления деформаций для групп $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$: они, к сожалению, несколько громоздки и, в целом, повторяют рассуждение для $\mathbb{Z}_3$.

ЛЕММА 3. *Все n -групповые алгебры, полученные линейной деформацией из групповой алгебры группы $\mathbb{Z}_3$, имеют вид*

$$\begin{aligned} a * a &= Ua + (1 - U - W)b + We, \\ b * b &= (1 - V - W)a + Vb + We, \\ a * b &= b * a = (V + W)a + (U + W)b + (1 - U - V - 2W)e, \end{aligned}$$

где U, V, W – рациональные неотрицательные числа такие, что числа W и $U + V + 2W$ не равны одновременно нулю и $1 \geq U + V + 2W$.

Параметры U, V, W выбраны так же, как в лемме 11 (см. ниже).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений на коцикл 5 вытекает, что

$$L(1, 2) = L(2, 1) = L(1, 1) + L(2, 2).$$

Это позволяет написать таблицу умножения произвольной линейной деформации группы $\mathbb{Z}_3$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} e * e &= e, \quad a * e = e * a = a, \quad b * e = e * b = b, \\ a * a &= Be + Da + (1 - B - D)b, \\ a * b &= (A + B)a + (C + D)b + (1 - A - B - C - D)e, \\ b * b &= Ab + Ce + (1 - A - C)a. \end{aligned}$$

Потребуем выполнения условия ассоциативности. Наша цель – доказать, что $B = C$. Уравнения ассоциативности имеют вид

$$\begin{aligned} aab(a) : \quad & D(A + B) + (-B - D)(-A - C) = (A + B)D + (C + D)(A + B), \\ aab(b) : \quad & D(C + D) + (-B - D)A = (A + B)(-B - D) + (C + D)(C + D), \\ abb(a) : \quad & (A + B)(A + B) + (C + D)(-A - C) = (-A - C)D + A(A + B), \\ abb(b) : \quad & (A + B)(C + D) + (C + D)A = (-A - C)(-B - D) + A(C + D). \end{aligned}$$

(Уравнения $aab(e)$ и $abb(e)$ следуют из остальных в силу условия A2) из определения 3.) После раскрытия скобок имеем

$$\begin{aligned} aab(a) : \quad & BA + DC = AC + DB, \\ aab(b) : \quad & BB + BD = CC + CD, \\ abb(a) : \quad & BA + BB = CA + CC, \\ abb(b) : \quad & BD + AC = AB + CD. \end{aligned}$$

Отсюда $BB - CC = CD - BD = CA - BA$, т.е. либо $B = C$, либо $B + C + A = B + C + D = 0$. Второе в силу неотрицательности структурных констант влечет за собой $A = B = C = D = 0$. Таким образом, имеем $B = C$.

В случае группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ имеют место следующие серии деформаций.

СЕРИЯ I:

$$\begin{aligned} a * a &= Ba + Cb + Ac + (1 - A - B - C)e, \\ b * b &= e, \\ c * c &= Ba + Cb + Ac + (1 - A - B - C)e, \\ a * c &= Aa + (1 - A - B - C)b + Bc + Ce, \\ b * c &= a, \\ a * b &= c. \end{aligned}$$

СЕРИЯ II:

$$\begin{aligned} a * a &= Ea + (C + D + E)b + Dc + (1 - C - 2D - 2E)e, \\ b * b &= (2D + 2E)b + (1 - 2D - 2E)e, \\ c * c &= Ea + (C + D + E)b + Dc + (1 - C - 2D - 2E)e, \\ a * c &= Da + (1 - C - D - E)b + Ec + Ce, \\ b * c &= (1 - D - E)a + (D + E)c, \\ a * b &= (D + E)a + (1 - D - E)c. \end{aligned}$$

СЕРИЯ III:

$$\begin{aligned} a * a &= (2D^* + E)a + Eb + (1 - 2D^* - 2E)e, \\ b * b &= D^*a + (D^* + 2E)b + (1 - 2D^* - 2E)e, \\ c * c &= (D^* + E)a + (D^* + E)b + (1 - 2D^* - 2E)e, \\ a * c &= (1 - D^* - E)b + (D^* + E)c, \\ b * c &= (1 - D^* - E)a + (D^* + E)c, \\ a * b &= D^*b + Ea + (1 - D^* - E)c. \end{aligned}$$

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) \cong S_3$ действует на множестве серий деформаций. Обозначим через I^* (соответственно I^{**}) серию, полученную из серии I путем применения к множеству неединичных элементов группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ циклической перестановки (acb) (соответственно (abc)). Аналогично: введем серии II^* , II^{**} , III^* , III^{**} . Подобные обозначения будут использоваться и для параметров деформаций, например параметр D^* (серия III) является результатом применения автоморфизма (acb) к параметру D .

ЛЕММА 4. Все n -групповые алгебры, полученные линейной деформацией из групповой алгебры группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, составляют серии I, I*, I**, II, II*, II**, III, III*, III**. В каждой серии на параметры накладываются условия, обеспечивающие неотрицательность и рациональность структурных констант, а также выполнение аксиомы обратного элемента n -групповых алгебр.

ЛЕММА 5. Все n -групповые алгебры, полученные линейной деформацией из групповой алгебры группы $\mathbb{Z}_4$, содержатся в следующих сериях.

Серия I:

$$\begin{aligned} a * a &= Ha + (1 - H)b, \\ a * b &= Hb + (1 - H)c, \\ a * c &= Ga + Hc + (1 - G - H)e, \\ b * b &= Ga + Hc + (1 - G - H)e, \\ b * c &= (1 - G)a + Gb, \\ c * c &= (1 - G)b + Gc. \end{aligned}$$

Серия II:

$$\begin{aligned} a * a &= Ba + (1 - A - B - F)b + Ac + Fe, \\ a * b &= c, \\ a * c &= Aa + Fb + Bc + (1 - A - B - F)e, \\ b * b &= e, \\ b * c &= a, \\ c * c &= Ba + (1 - A - B - F)b + Ac + Fe. \end{aligned}$$

Серия III:

$$\begin{aligned} a * a &= Ea + (1 - D - E - F)b + Dc + Fe, \\ a * b &= (D + E)a + (1 - D - E)c, \\ a * c &= Da + (D + E + F)b + Ec + (1 - 2D - 2E - F)e, \\ b * b &= 2(D + E)b + (1 - 2D - 2E)e, \\ b * c &= (1 - D - E)a + (D + E)c, \\ c * c &= Ea + (1 - D - E - F)b + Dc + Fe. \end{aligned}$$

Серия IV:

$$\begin{aligned} a * a &= Ea + (1 - E)b, \\ a * b &= Ea + (1 - E)c, \\ a * c &= Ga + Eb + Ec + (1 - G - 2E)e, \\ b * b &= Ga + 2Eb + (1 - G - 2E)e, \\ b * c &= (1 - G - E)a + Gb + Ec, \\ c * c &= Ea + (1 - G - E)b + Gc. \end{aligned}$$

Серия IV^* – результат действия автоморфизма в группе $\mathbb{Z}_4$, переводящего произвольный элемент группы в обратный, к серии IV .

В каждой серии на параметры накладываются условия, обеспечивающие неотрицательность и рациональность структурных констант, а также выполнение аксиомы обратного элемента n -групповых алгебр.

КОММЕНТАРИЙ. Те из описанных в этом параграфе n -групп, на которых каноническая инволюция существует (или, иначе говоря, в которых для любого элемента существует единственный обратный), видимо, новыми не являются. Подобные объекты изучаются под разными названиями: C -алгебры, табличные алгебры, гипергруппы. Например, частные случаи серии линейных деформаций $\mathbb{Z}_3$ встречаются: при $V = W = 0$ – в [2], при $U = V$, $W = 0$ – в [3], [7], [12], [13]; среди групповых алгебр этой серии имеется алгебра Боуза–Меснера турнира Пэли (впервые это обнаружено в работе [3]). Серия $U = V$, $U + V + 2W = 1$ с перенормированным базисом приведена в [7]. Частные случаи серии I деформаций группы $\mathbb{Z}_4$ указаны в [7].

В то же время, по-видимому, наши примеры неинволютивных групп ранее известны не были.

В работе [13] приведено множество примеров гипергрупп порядка три, построенных с помощью строго регулярных графов. Все они также являются многозначными группами с тривиальной инволюцией. Среди них нет групп, принадлежащих серии линейных деформаций $\mathbb{Z}_3$.

Рис. 1. Диаграмма деформаций группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Рис. 2. Диаграмма деформаций группы $\mathbb{Z}_4$

Рассмотрим теперь серии линейных деформаций групп $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_4$. Нетрудно заметить, что серии I и II группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ совпадают с сериями II, III группы $\mathbb{Z}_4$. При этом групповая операция группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ соответствует параметру деформации F , а параметр C переходит в групповую операцию группы $\mathbb{Z}_4$. В частности, это означает, что группу $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ можно линейно продеформировать в группу $\mathbb{Z}_4$. Кроме того, возможно реализовать групповую алгебру группы $\mathbb{Z}_4$ в качестве алгебры с фиксированным базисом тремя способами (в качестве элемента порядка два может выступать a , b или c). Это означает, что группе $\mathbb{Z}_4$ отвечают три разные точки на многообразии структур ассоциативных алгебр размерности 4. Так вот, группу $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ можно продеформировать в каждую из трех групп $\mathbb{Z}_4$, отличающихся нумерацией элементов (см. следствие 3), соответствующие параметры деформации – C , C^* и C^{**} .

Далее, каждой серии линейных деформаций групповой алгебры соответствует специальная плоскость в касательном пространстве к многообразию ассоциативных алгебр, размерность которой равна количеству параметров данной серии (эта плоскость будет целиком лежать на многообразии ассоциативных алгебр; см. конструкцию линейной деформации выше). То, что один и тот же параметр деформации (коцикл) может встречаться в разных сериях, означает, что размерность пересечения соответствующих плоскостей больше нуля (точка, отвечающая исходной алгебре, всегда принадлежит этому пересечению). Таким образом, плоскости, отвечающие линейным деформациям, образуют в касательном пространстве некоторую сложную конфигурацию. Для наглядной иллюстрации этих конфигураций исследовавших выше групп рассмотрим следующие диаграммы. Каждому параметру деформации данной группы поставим в соответствие нульмерную клетку – точку. Две точки соединим одномерной клеткой – отрезком, если соответствующие однопараметрические деформации согласованы. К трем отрезкам, образующим треугольник, приклеим двумерную клетку, если согласованы однопараметрические деформации, отвечающие его вершинам. Можно продолжать так и дальше, но для наших нужд это не требуется. Получившиеся диаграммы для этих групп приведены на рис. 1 и рис. 2. Диаграммой деформаций группы $\mathbb{Z}_3$ будет, как легко видеть, просто закрашенный треугольник с вершинами U , V и W , а для группы $\mathbb{Z}_2$ диаграмма состоит из одной точки.

§ 3. Классификация однородных деформаций циклических групп

Для классификации однородных деформаций нам понадобятся следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Произвольная последовательность $\{L(1, i)\}$, $i \in \mathbb{Z}$, однозначно задает коцикл $L \in Z^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ по следующим формулам:*

$$L(p, q) = \sum_{s=p}^{-1} (L(1, s) - L(1, q + s)), \quad p < 0, \quad (13)$$

$$L(p, q) = \sum_{s=0}^{p-1} (L(1, s + q) - L(1, s)), \quad p > 0. \quad (14)$$

Аналогично, последовательность $\{L'(1, i)\}$, $i \in \mathbb{Z}_n$, однозначно задает коцикл $L \in Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первого утверждения следует из уравнения (5), если положить $j = 1$ и применить индукцию. Второе доказывается аналогично, либо выводится из первого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Чтобы коцикл L задавал однородную деформацию со сдвигом r , необходимо, чтобы*

$$(L(i, j) = L(j, k) \neq 0) \implies (L(i, j + r) = L(j + r, k)). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из формул (6) и (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Коцикл $L \in Z^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, являющийся периодической функцией по своим аргументам с периодом m , назовем *m -периодическим*. Однородную деформацию групповой алгебры $\mathbb{Z}$ назовем *m -периодической*, если ее структурный коцикл L m -периодичен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Равенство $L(m, -m) = 0$, $k > 0$, эквивалентно d -периодичности коцикла L по своим аргументам, где $d \mid m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в доказательстве леммы 2, из $L(m, -m) = 0$ следует, что для всех i имеет место равенство $L(m, i) = 0$, из которого в силу формул из предложения 4 вытекает периодичность последовательности $\{L(i, 1)\}$, а вместе с ней и периодичность коцикла L , причем m кратно периоду.

ТЕОРЕМА 1. *Коцикл L задает m -периодическую деформацию группы $\mathbb{Z}$ (однородную деформацию $\mathbb{Z}_k$) со сдвигом r тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ($\mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_m$) такой, что $L = p^*L'$, где L' — коцикл, задающий деформацию из примера 1, и либо $p(r) = 0$, либо $p(r) = t$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого m существует ровно $\varphi(m)$ (φ – функция Эйлера) коциклов, задающих m -периодические деформации, и существует ровно $k - 1$ коцикл, задающий однородные деформации $\mathbb{Z}_k$ (значения r определены не однозначно).

Первым частный случай этой теоремы (для $\mathbb{Z}_k$, когда период и сдвиг взаимно просты) доказал И. В. Артельных.

Конструкция линейной деформации и лемма 2 позволяют при доказательстве теоремы рассматривать лишь случай, когда область значений коцикла L состоит только из нуля и единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Будем рассматривать случай периодической деформации группы $\mathbb{Z}$. Случай конечной циклической группы рассматривается аналогично.

ЛЕММА 6. Пусть периодический коцикл $L(i, j)$ принимает только одно ненулевое значение, равное единице. Тогда существует взаимно простое с периодом m число q такое, что $L(q, -q) = 1$, и для любого p , не сравнимого с $-q$ по модулю m , $L(q, p) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $s_i = \sum_{j=1}^{m-1} L(i, j)$. Тогда $0 \leq s_1 < m$. Из формул (13) и (14) в периодическом случае нетрудно вывести равенство $s_{i+1} - s_i = s_1 - m \cdot L(1, i)$, откуда следует $s_i = is_1 \pmod{m}$. Если m и s_1 не взаимнопросты, то $s_q = 0$ для некоторого $q \neq m$. Тогда $L(q, -q) = 0$, откуда по предложению 6 следует q -периодичность деформации. Получили противоречие с выбором числа m . Итак, m и s_1 взаимно просты. Но тогда существует такое q , что $qs_1 \equiv 1 \pmod{m}$, т.е. $s_q = 1$. Это означает, что среди чисел $L(i, q)$, $i = 0, \dots, m-1$, только одно отлично от нуля, и, следовательно,

$$L(q, -q) \neq 0 \text{ и } \forall p \not\equiv -q \pmod{m} \text{ имеем } L(q, p) = 0.$$

Рассмотрим эпиморфизм $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ такой, что $p(q) = t$, где q – число из утверждения леммы 6. Пусть коцикл $L' \in Z^2(\mathbb{Z}_m, \mathbb{R})$ удовлетворяет условию $L(u, v) = L'(p(u), p(v))$ (такой коцикл существует в силу периодичности коцикла L). Тогда в силу леммы 6 имеем $(L'(i, t) = 1) \Leftrightarrow (i = t^{m-1})$, откуда, используя предложение 4, получаем, что коцикл L' совпадает с коциклом из примера 1, а коцикл L индуцирован им с помощью p . Далее, нетрудно увидеть, что необходимое условие на коцикл L' из предложения 5 выполняется тогда и только тогда, когда $r = 0$ или $r = t$.

Обратно. Пусть коцикл L индуцирован с помощью какого-нибудь эпиморфизма из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_m$ и сдвиг r такой, как указано выше. Тогда для коцикла L и сдвига r выполняется условие (6), так как оно справедливо для их прообразов. Таким образом, применив лемму 2, получаем утверждение теоремы.

Займемся непериодическими однородными деформациями группы $\mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Коцикл, область значений которого содержит только ноль и единицу, непериодичен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет равенству $L'(1, -i) = L'(1, i - 1)$, $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 6 следует, что $\forall i \neq 0 \ L'(i, -i) = 1$; далее, согласно формулам (13) и (14)

$$1 = L'(-i, i) = \sum_{j=1}^i (L'(1, -j) - L'(1, i-j)).$$

Применяя индукцию к этому уравнению получаем утверждение.

ЛЕММА 7 (о неперидическом продолжении коцикла). *Если m -перидический ($m > 0$) коцикл L принимает только одно ненулевое (равное единице) значение, то существует единственный неперидический коцикл L' , область значений которого содержит только нуль и единицу, такой, что $\forall s, t > 0$ он удовлетворяет уравнению $L'(s, t) = L(s, t)$. Он задает однородную деформацию со сдвигом r группы $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $r = m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – коцикл, задающий m -перидическую деформацию со сдвигом r , и пусть $m > 1$ равно его периду. Положив при положительных s $L'(1, s) = L'(1, -1-s) = L(1, s)$, получим согласно предложению 7 неперидический коцикл. Исследуем область его значений. Коцикл L при любых целых k и при $i = 1, \dots, m-1$ удовлетворяет уравнению $L(1, km+i) = L(1, (k+1)m-i)$. Используя его, нетрудно восстановить значения коцикла L' в случае, когда хотя бы один аргумент больше нуля. Далее, из формул (5) получаем, что $L'(k, -1) + L'(k-1, 1) = L'(-1, 1) = 1$, это позволяет вычислить последовательность $\{L'(-1, k)\}$; затем по формулам, аналогичным формулам (13) и (14), можно найти значения коцикла L' при отрицательных аргументах. Опишем результат:

$$L'(i, j) = L'(j, i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \begin{cases} i = 0; \\ i = pt, j = pt \text{ и} \\ \text{либо } p > 0 \text{ и } q > 0, \\ \text{либо } pq < 0 \text{ и } p + q < 0; \\ i \not\equiv 0 \pmod{m}, j = pt > 0; \\ i \not\equiv 0 \pmod{m}, j = pt - i, p < 0; \end{cases} \\ 1, & \text{если} \begin{cases} i = pt, j = pt \text{ и} \\ \text{либо } p < 0 \text{ и } q < 0, \\ \text{либо } pq < 0 \text{ и } p + q \geq 0; \\ i \not\equiv 0 \pmod{m}, j = pt < 0; \\ i \not\equiv 0 \pmod{m}, j = pt - i, p \geq 0; \end{cases} \\ L(i, j) & \text{при остальных } i, j. \end{cases}$$

Эту же конструкцию можно применить к тривиальной деформации ($L \equiv 0$), считая ее перидической с перидом $m = 1$.

Докажем последнее утверждение леммы. Рассмотрим область отрицательных аргументов коцикла L' и покажем, что сдвиг r не может быть взаимно прост с m . Действительно, пусть $k = \lfloor |r|/m \rfloor + 1$ (квадратные скобки означают взятие целой части). Согласно описанию коцикла L' имеем

$$L'(-km, -m) = L'(-km, (k-1)m - r) = 1$$

и в то же время $L'(-km + r, -m) = 1$, а $L'(-km + r, (k-1)m - r) = 0$. Но эти равенства противоречат предположению 5. Таким образом, $r = pm$ для некоторого p .

Рассмотрим случай $p < 0$:

$$\begin{aligned} L'(-m, m) &= L'(-m, -(1-p)m) = 1, \\ L'(-m + pm, m) &= 0, \quad L'(-m + pm, (1-p)m) = 1. \end{aligned}$$

Опять получаем противоречие с предположением 5. Следовательно, $r = pm > 0$. Наконец из формул $L'(-m, -m) = L'(-m, -pm) = 1$, $L'(-m + pm, -m) = 1$, $L'(-m + pm, -pm) = 0$ вытекает, что p не может быть отлично от 1. Таким образом, коцикл L' может задавать однородную деформацию только со сдвигом, равным m . Выполнение условия предложения 5 при сдвиге m очевидно. Выполнение более общего условия (6) нетрудно усмотреть из описания коцикла L' и из того, что это условие выполняется для коцикла L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Единственный коцикл, который задает непериодическую деформацию со сдвигом $m = 1$, определяется данными: $L'(1, i) = \delta_{-1, i}$. Обратно, коцикл, заданный этими данными, определяет однородную деформацию только при сдвиге m , равном 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L'(1, 1) = 1$. Тогда, так как $L'(-1, 1) = L'(-2, 2) = L'(-2, 1) = 1$ (см. выше), имеем $L'(-1, 2) = 0$ – противоречие с необходимым условием из предложения 5.

Следовательно, $L'(1, 1) = 0$. Пусть существует i такое, что $L'(1, i) = 1$, $L'(1, k) = 0$, $k = 1, \dots, i-1$. Имеем $L'(-s, s) = 1$, $s = 1, \dots, i+1$, что возможно лишь если $L'(1, -m) = 0$, $m = 2, \dots, i$, и $L'(1, -i-1) = 0$. Но тогда $L'(s, -i-1) = 1$ при $s = 1, \dots, i+1$. Равенства $L'(1, -i) = 0$ и $L'(i, -i) = 1$ приводят к противоречию с условием из предложения 5. Таким образом, $L'(1, i) = \delta_{-1, i}$ при $i > 0$. Отсюда и следует, с учетом предложения 7, первое утверждение предложения. Второе утверждение вытекает из предложения 5, примененного к $j = -1$, $i = 1$ и $k = m$.

ТЕОРЕМА 2. *Произвольная периодическая однородная деформация группы $\mathbb{Z}$ со сдвигом $m > 0$ задается коциклом, построенным с помощью конструкции леммы 7.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 7 и предложения 8 достаточно доказать, что у любого коцикла L' , задающего однородную непериодическую деформацию со сдвигом $m > 1$, последовательность $L'(1, i)$ при $i \geq 0$ является m -периодичной. Действительно, положим в $L(1, i) = L'(1, i)$ при $i > 0$ и продолжим L до

m -периодического коцикла. Тогда L – периодический коцикл, принимающий только одно ненулевое значение, а L' получен его непериодическим продолжением.

Из предложения 8 получаем, что $L'(im, km) = 0$, где $i, k > 0$. Заметим, что среди чисел $L'(1, i)$ (где $i > 0$) не все одинаковы: если они все равны нулю, то $m = 1$ (см. предложение 8), а если все равны единице, то по аналогичным предложению 8 соображениям $m = -1$. Пусть $\psi(i)$ – такое число, что $L'(1, im + k) = 0$, $k = 0, \dots, \psi(i) - 1$, и $L'(1, im + \psi(i)) = 1$. Положим $j = \inf(\psi(i))$. Инфимум достигается при некотором i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. $\forall k > 0 \quad \psi(i) = \psi(i + k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $0 \leq p < \psi(i)$ справедливо равенство $L'(1, im + p) = L'(1, (k + i)m + p) = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq L'(km, im + 1 + \psi(i)) = L'(km, im + 1 + \psi(i)) - L'(km, im) \\ &= L'((k + i)m, 1 + \psi(i)) - L'(im, 1 + \psi(i)) \\ &= \sum_{p=0}^{\psi(i)-1} (L'(1, (i + k)m + p) - L'(1, im + p)) \\ &\quad + L'(1, (i + k)m + \psi(i)) - L'(1, im + \psi(i)) = L'(1, (i + k)m + \psi(i)) - 1 \end{aligned}$$

(если $\psi(i) = 0$, в выкладке суммы нет), откуда $L'(1, (i + k)m + \psi(i)) = 1$, т.е. $\psi(i) = \psi(i + k)$.

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (L'(j, (i + k)m + \psi(i)))_{i,k}$, где $j = 0, \dots, m - 1$ и $k \geq 0$. Так как для всех неотрицательных k имеют место равенства $L'(1, (i + k)m + \psi(i)) = 1$ и $L'(1, (i + k + 1)m + \psi(i)) = 1$, то согласно предложению 5 из $L'(j, (i + k)m + \psi(i)) = 1$ следует $L'(j, (i + k + 1)m + \psi(i)) = 1$. Итак, количество единиц в k -м столбце матрицы A не меньше, чем в $(k + 1)$ -м. Увеличив, если нужно, i , будем считать, что их количество во всех столбцах одинаково. Это означает, что все столбцы одинаковы. Следовательно, начиная с $k = im + \psi(i)$ последовательность $\{L'(1, k)\}$ становится m -периодической.

Пусть теперь j – такое число, что $L'(1, j) \neq L'(1, j + m)$, и для всех положительных k верно $L'(1, j + k) \neq L'(1, j + k + m)$. Приведем к противоречию предположение, что $j > 0$. Рассмотрим для каждого положительного k равенство

$$L'(k, j) - L'(k, j + m) = \sum_{p=0}^{k-1} (L'(1, j + p) - L'(1, j + m + p)) = L'(1, j) - L'(1, j + m).$$

Если $L'(1, j) = 1$ и $L'(1, j + m) = 0$, то для всех $k > 0$ имеем $L'(k, j) = 1$ и $L'(k, j + m) = 0$, а если $L'(1, j) = 0$ и $L'(1, j + m) = 1 - L'(k, j) = 0$, то $L'(k, j + m) = 1$. Оба случая приводят к противоречию, если рассмотреть элемент $L'(j, j + m) = L'(j + m, j)$. Итак, $j \leq 0$, а это и означает m -периодичность последовательности $L'(1, k)$ при $k \geq 0$. Таким образом, теорема доказана.

Приведем два примера линейных деформаций группы $\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим групповую алгебру группы $\mathbb{Z}$ с естественным базисом a_i , $i \in \mathbb{Z}$. Определим на ней новую операцию умножения по следующему правилу:

$$a_i * a_j = \begin{cases} (1 - \sum_{t \in \mathbb{Z}, t \neq 0} K_t) a_{i+j} + \sum_{t \in \mathbb{Z}, t \neq 0} K_t a_{i+j+t}, & \text{если } i \text{ и } j \text{ нечетные,} \\ a_{i+j} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Утверждается, что при любых значениях параметров K_t ($t \in \mathbb{Z}$, $t \neq 0$) это умножение определяет структуру ассоциативной алгебры. При этом если параметры – неотрицательные рациональные числа такие, что $\sum_{t \in \mathbb{Z}, t \neq 0} K_t < 1$, и лишь конечное число из них отлично от нуля, то эта алгебра будет линейной деформацией групповой алгебры $\mathbb{Z}$. Если отличен от нуля только один параметр, то это 2-периодическая однородная деформация. В этом примере естественная однородная деформация группы $\mathbb{Z}_2$ переходит при проекции $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ в набор согласованных линейных деформаций группы $\mathbb{Z}$. Этот пример будет обобщен ниже (см. следствие 4).

ПРИМЕР 3. Умножение в непериодической однородной деформации группы $\mathbb{Z}$ со сдвигом 1 (см. предложение 8) имеет вид

$$a_i * a_j = \begin{cases} (1 - K) a_{i+j} + K a_{i+j+1}, & \text{если } i < 0 \text{ и } j < 0 \\ & \text{или } i j < 0 \text{ и } i + j \geq 0, \\ a_{i+j} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§ 4. Свойства конструкции линейной деформации групп

В этом параграфе описана связь конструкции линейной деформации с конструкцией расширения групп. Эта связь позволяет построить линейные деформации у некоторых простейших классов групп.

Пусть G и H – группы, причем G может быть многозначной группой. Для этих групп будем использовать мультипликативную запись, обозначая греческими буквами элементы группы G , а латинскими – элементы H . Пусть $\psi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$ – гомоморфизм. Пусть $\sigma = \sum_{\gamma} l_1^{\gamma}$ и $\Sigma_1 = \sum_{\gamma} l_1^{\gamma} \gamma$. Здесь $l_1^{\gamma} \in \mathbb{R}$ и суммы берутся по всем $\gamma \in G \setminus \{\epsilon\}$ (ϵ – единица группы G). Потребуем, чтобы Σ_1 было элементом центра алгебры $\mathbb{R}(G)$, инвариантным относительно индуцированного гомоморфизмом ψ действия группы H . Пусть $\Lambda: \mathbb{R}(H) \otimes \mathbb{R}(H) \rightarrow \mathbb{R}(Z(G))$, $\Lambda(i, j) = \sum_{\rho \in G \setminus \{\epsilon\}} \Lambda^{\rho}(i, j) \rho$ – функция такая, что

$$\Lambda(i, jk)(\psi(i) \circ \Lambda(j, k)) = \Lambda(ij, k) \Lambda(i, j) \quad (16)$$

(этому уравнению удовлетворяет, например, система факторов группы H со значениями в $Z(G)$) и

$$\Lambda(i, jk) + (\psi(i) \circ \Lambda(j, k)) = \Lambda(ij, k) + \Lambda(i, j). \quad (17)$$

Тогда имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Операция* $(\alpha, \beta \in G; i, j \in H)$

$$\begin{aligned} (\alpha, i) * (\beta, j) = & \left(1 - \sigma \sum_{\rho \in G \setminus \{\epsilon\}} \Lambda^\rho(i, j)\right) (\alpha(\psi(i) \circ \beta), ij) \\ & + \sum_{\rho, \gamma \in G \setminus \{\epsilon\}} \Lambda^\rho(i, j) l_1^\gamma(\rho \gamma \alpha(\psi(i) \circ \beta), ij) \end{aligned}$$

определяет на групповой алгебре $\mathbb{R}(G \times H)$ полупрямого произведения $G \times H$ ассоциативное умножение.

Заметим, что на числовые коэффициенты l_1^γ наложены ограничения, вытекающие из инвариантности Σ_1 (см. выше). Эти ограничения имеют вид линейных однородных уравнений. Таким образом, операция, построенная в предложении 10, линейно зависит от некоторого набора независимых параметров, т.е. представляет собой серию линейных деформаций группы $G \times H$.

При использовании конструкции из предложения 10 проектирование на H переводит деформированное произведение в обычную операцию группы H . Следующая далее конструкция этим свойством не обладает.

Далее, пусть G, H, ψ те же, что и выше. Пусть $\sigma = \sum_\gamma l_1^\gamma + \sum_\gamma l_2^\gamma$ и $\Sigma_\alpha = \sum_\gamma l_\alpha^\gamma$. Здесь $l_\alpha^\gamma \in \mathbb{R}$ (причем $l_1^\epsilon \in \mathbb{R}$), $\alpha = 1, 2$, и суммы берутся по всем $\gamma \in G \setminus \{\epsilon\}$. Потребуем, чтобы Σ_α были инвариантными относительно действия группы H элементами центра алгебры $\mathbb{R}(G)$. Пусть $L: \mathbb{R}(H) \otimes \mathbb{R}(H) \rightarrow \mathbb{R}(K)$ (K – произвольная нормальная подгруппа группы H), $L(i, j) = \sum_{r \in H \setminus \{e\}} L^r(i, j) r$ – коцикл, задающий линейную деформацию группы H , т.е. удовлетворяющий уравнению (4) и уравнению

$$L(i, L(j, k)jk) i L(j, k) i^{-1} = L(l(i, j)ij, k) L(i, j). \quad (18)$$

Далее, пусть $f: H \rightarrow Z(G)$ – гомоморфизм такой, что $f(iji^{-1}) = \psi(i) \circ f(j)$. Тогда имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Операция*

$$\begin{aligned} (\alpha, i) * (\beta, j) = & \left(1 - \sigma \sum_{r \in H \setminus \{e\}} L^r(i, j)\right) (\alpha(\psi(i) \circ \beta), ij) \\ & + \sum_{\substack{r \in H \setminus \{e\} \\ \gamma \in G \setminus \{\epsilon\}}} L^r(i, j) l_1^\gamma(f(r) \gamma \alpha(\psi(i) \circ \beta), ij) \\ & + \sum_{r \in H \setminus \{e\}, \gamma \in G} L^r(i, j) l_2^\gamma(\gamma \alpha(\psi(i) \circ \beta), rij) \end{aligned}$$

определяет на групповой алгебре $\mathbb{R}(G \times H)$ полупрямого произведения $G \times H$ ассоциативное умножение.

Так же, как и выше, получаем серию линейных деформаций группы $G \oplus H$.

ПРИМЕР 4. Простейшим примером на эти предложения может служить серия I линейных деформаций группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (см. лемму 4). В этом случае $G = H = \mathbb{Z}_2$ и ψ – тривиальный гомоморфизм, а f – тождественный. В $G \oplus H$ обозначим:

$$a = (\epsilon, h), \quad b = (\gamma, e), \quad c = (\gamma, h)$$

(здесь γ и h обозначают ненулевые элементы групп G и H соответственно). В качестве коцикла L (предложение 11) возьмем коцикл, отвечающий деформации из примера 1 в случае $m = 2$:

$$L(i, j) = \begin{cases} h, & \text{если } i = j = h, \\ e & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и положим $\Sigma_1 = C\gamma$ и $\Sigma_2 = \gamma$. Тогда при $\Lambda(i, j) = f(L(i, j))$ предложение 10 дает серию I с дополнительным условием $A = B = 0$. Полностью серия получается применением к этим данным предложения 11.

Доказательства обоих предложений аналогичны и проводятся прямым вычислением.

Применение предложения 10 к группам $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$ позволяет легко получить следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Групповую алгебру группы $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ можно линейно продеформировать в групповую алгебру группы $\mathbb{Z}_{k+l}$.*

Как отмечалось выше, на многообразии M_{ass} структур ассоциативных алгебр с единицей и фиксированным базисом имеется естественное действие группы GL. Ограничим это действие на подгруппу $S \subset \text{GL}$ перестановок элементов базиса, оставляющей, разумеется, единицу неподвижной. Сопоставление многозначной группе точки на M_{ass} зависит от взаимно однозначного соответствия элементов группы и элементов выделенного базиса линейного пространства $\mathcal{L}$ (см. § 1). Таким образом, многозначной группе на M_{ass} отвечает, вообще говоря, набор точек, являющихся орбитой действия группы S . В следствии 3 утверждается, что каждая из точек, отвечающих группе $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$, соединена прямой деформации с какой-то из точек, соответствующих группе $\mathbb{Z}_{k+l}$. В случае взаимно простых k и l линейной деформацией оказываются связаны пары различных точек, соответствующих группе $\mathbb{Z}_{k+l}$. На языке n -групп это означает, что имеется линейная деформация, в ходе которой два элемента группы меняются местами.

Для $k = l = 2$ этот факт уже обсуждался выше.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Однородные деформации циклических групп с одним и тем же структурным коциклом и различными сдвигами образуют согласованный набор деформаций.*

В качестве примера рассмотрим серию II линейных деформаций группы $\mathbb{Z}_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того, что такие кошиклы индуцированы общей проекцией циклической группы в группу $\mathbb{Z}_m$, и эти деформации представляют собой поднятие деформации $\mathbb{Z}_m$, рассмотренной в примере 1 с помощью конструкции предложения 11.

Автору известен еще только один случай, когда однородные деформации образуют согласованный набор: деформация из примера 1 и деформация, полученная из нее с помощью автоморфизма взятия обратного в конечной циклической группе; либо непериодическая деформация $\mathbb{Z}$ и она же, повернутая автоморфизмом взятия обратного. Иллюстрацией этого случая может служить серия I линейных деформаций группы $\mathbb{Z}_4$.

Из предложений 10 и 11 легко вывести следующую лемму.

ЛЕММА 8. *Любая группа, которая является расширением циклической группы, обладает линейной деформацией. Кроме того, всякая абелева группа обладает однородной деформацией.*

Рассмотрим наконец еще одну конструкцию, позволяющую строить многозначные группы и которая основана на предложениях 10 и 11.

Поставим элементам группы $i \in H$ в соответствие семейство эпиморфизмов $p_i: G \rightarrow G_i$ на некоторые группы G_i , причем пусть единице соответствует изоморфизм $p_e: G \rightarrow G = G_e$. Пусть V – линейное пространство, элементы базиса которого отождествлены с элементами множества $\{([\alpha], i) \mid i \in H, \alpha \in G, p_i(\alpha) = [\alpha] \in G_i\}$. Через $|\alpha|$ обозначим количество элементов в прообразе $p^{-1}([\alpha])$. Тогда имеет место следующее несложное предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Операция*

$$([\alpha], i) * ([\beta], j) = \frac{1}{|\alpha| \cdot |\beta|} \sum_{\substack{\alpha: p(\alpha)=[\alpha] \\ \beta: p(\beta)=[\beta]}} (\alpha, i) * (\beta, j)$$

определяет на пространстве V ассоциативное умножение. Здесь операция $$ берется из двух предыдущих предложений.*

ПРИМЕР 5. Рассмотрим следующую коммутативную 2-групповую алгебру:

$$\begin{aligned} a * a &= (1/2)(a + b), & a * b &= (1/2)(b + c), \\ a * c &= (1/4)(1e + 1d + 2c), & a * d &= f, \\ a * f &= (1/2)(f + b), & b * b &= (1/2)(1e + 1d + 2c), \\ b * c &= (1/2)(a + f), & b * d &= b, \\ b * f &= (1/2)(b + c), & c * c &= b, \\ c * d &= c, & c * f &= (1/4)(1e + 1d + 2c), \\ d * d &= e, & d * f &= a, \\ f * f &= (1/2)(a + b). \end{aligned}$$

Она построена так: взяли коцикл, задающий линейную деформацию группы $\mathbb{Z}_3$ ($U = 1/2$, $V = W = 0$ в обозначениях леммы 3), затем применили конструкцию предложения 11, где в качестве ψ и f взяты тривиальные гомоморфизмы и $\Sigma_i = e$. На этом этапе мы получим не что иное как прямую сумму группы $G = \mathbb{Z}_2$ и линейной деформации группы $H = \mathbb{Z}_3$. Далее использована конструкция последнего предложения. При этом $G_e = G_a = \mathbb{Z}_2$, f_a и f_e – изоморфизмы и $G_b = G_c = \{\epsilon\}$.

Таким образом, для многозначных групп порядок группы, полученной расширением группы H с помощью группы G , не обязательно равен произведению порядков групп H и G .

§ 5. Конструкции многозначных групп

В этом параграфе описаны связи конструкции линейной деформации и других конструкций многозначных групп. Список конструкций взят из [10], где утверждается, что любая коммутативная двузначная группа порядка три или четыре может быть построена с помощью этих конструкций. Под № 3 в этом списке приведена конструкция групп, описанная выше в примере 1 при $h = 1/2$. Результатом ее применения являются двузначные однородные деформации конечных циклических групп.

Конструкция № 2 (“прибавление новой точки”) – частный случай нашей конструкции из предложения 12. Она соответствует случаю, когда $G = \mathbb{Z}_2$, G_i при $i \neq e_H$ – тривиальные группы и операция $*$ берется из предложения 10 с данными: λ – тождественно нулевой гомоморфизм, $\Sigma_i = e$ и ψ – нулевой гомоморфизм. Группы, построенные с помощью этой конструкции, устроены следующим образом. Множеством их элементов является множество $\{h|h \in H\} \cup \{x\}$. При этом $hx = h$, $hh^{-1} = (1/2)(e_H + x)$ и $h_1 h_2$ равно результату умножения h_1 на h_2 в смысле группы H ($h_1 \neq (h_2)^{-1}$, все произведения выписаны для групповой алгебры).

Конструкция № 4 является частным случаем конструкции “подъема” линейной деформации при расширении групп (см. предложение 11) при $H = \mathbb{Z}_m$, тривиальных ψ и f и при L , являющемся коциклом однородной деформации группы $\mathbb{Z}_m$.

Конструкция № 5 основана на понятии n -коцикла, который является естественным обобщением понятия обычного коцикла на случай, когда результатом расширения обычных групп есть многозначная группа. Конструкции предложений 10 и 12 позволяют строить примеры таких коциклов. Отметим тут, что примеры n -коциклов, которые бы не могли быть получены с помощью этих предложений, неизвестны. Во всяком случае, такие примеры не могут быть найдены при рассмотрении коммутативных двузначных групп порядков, не превышающих 5.

Изучим теперь связь с косет-конструкцией (см. введение; конструкция № 1 в списке [10]). С помощью линейной деформации групп можно построить как группы с косет-реализацией, так и без нее. В статье [3] приведен пример серии, являющейся частью серии линейных деформаций $\mathbb{Z}_3$ (см. лемму 3), и показано, что при некоторых значениях параметров получаются группы без косет-реализации, и в то же время этой серии принадлежат группы с косет-реализацией $\mathbb{Z}_{4k+3}/\mathbb{Z}_{2k+1}$. Ниже описываются свойства групп с косет-реализацией.

n -группа с косет-реализацией должна, очевидно, удовлетворять условию единственности обратного и быть инволютивной. Эти свойства, вообще говоря, не сохраняются при линейной деформации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Каждому элементу a группы A с косет-реализацией G/H , $H \in \text{Aut}(G)$, можно сопоставить число, равное количеству элементов группы G в соответствующей a орбите действия группы H . *Мощностью группы A* назовем порядок группы G . Число $m(a)$ назовем *мощностью элемента a* .

Независимость мощности от выбора косет-реализации вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 9 (о мощности). Пусть дана n -группа A с косет-реализацией и для некоторых a, b произведение ab содержит единицу с кратностью $C_{a,b}^e$. Тогда мощности a и b совпадают и равны $n/C_{a,b}^e$.

Таким образом, мощность является аналогом понятия *веса* в теории гипергрупп (см. [13]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы орбиты действия группы H на A , соответствующие элементам a и b , связаны биекцией, инвариантной относительно H , сопоставляющей элементу его обратный. Тогда коэффициент при e в произведении ab суть порядок стабилизатора произвольного элемента этих орбит под действием H . Орбиты состоят из $n/C_{a,b}^e$ элементов, а это и есть искомая мощность.

Вместо единицы n -группы в последней лемме можно рассматривать любой другой элемент, про который известно, что его мощность равна 1.

Эта лемма бывает особенно удобна при изучении серий линейных деформаций. И значность, и коэффициенты у групп серии $C_{x,x'}^e$ являются линейными функциями от параметра деформации, и часто бывает, что их отношение является целым числом только для конечного числа значений параметра. Таким образом, среди многозначных групп серии только группы, соответствующие этим выделенным значениям параметра деформации, имеют шанс обладать косет-реализацией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Для любых двух базисных элементов a и b n -групповой алгебры с косет-реализацией количество отличных от нуля констант $C_{a,b}^c$ не может превышать минимума мощностей $m(a)$ и $m(b)$; каждое из чисел $C_{a,b}^c$ кратно $n/m(a)$ и $n/m(b)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть дана n -групповая алгебра с косет-реализацией $A = G/H$. Тогда $\forall a_1, a_2$ и $\forall a_3 \in a_1 * a_2$ имеет место неравенство $m(a_1)/m(a_2) \leq m(a_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g_i , $i = 1, 2, 3$, — такие прообразы a_i при естественной проекции групповой алгебры G в A , что $g_1 \times g_2 = g_3$. Обозначим через $\text{St}_A(g_i)$ стабилизатор g_i в группе автоморфизмов H . Тогда существует взаимно однозначное соответствие между смежными классами $\text{St}_H(g_2)/(\text{St}_H(g_1) \cap \text{St}_H(g_2))$ и некоторым подмножеством орбиты элемента g_3 : $h \in [h] \in \text{St}_H(g_2)/(\text{St}_H(g_1) \cap \text{St}_H(g_2))$ $(h \circ g_1)g_2 = h \circ (g_1g_2) = h \circ g_3$. Следовательно,

$$m(g_3) \geq \frac{|\text{St}_H(g_2)|}{|\text{St}_H(g_1) \cap \text{St}_H(g_2)|} \geq \frac{|\text{St}_H(g_2)|}{|\text{St}_H(g_1)|} = \frac{1/m(g_2)}{1/m(g_1)} = \frac{m(g_1)}{m(g_2)}.$$

Лемма о мощности может быть обобщена на случай колец Шура. Назовем многозначную n -группу A *слабо косетной*, если соответствующая комбинаторная алгебра является кольцом Шура над группой G (см. [1]), где G – обычная группа. Нетрудно заметить, что многозначные группы с косет-реализацией будут слабо косетными. Назовем *мощностью* элемента слабо косетной многозначной группы количество элементов группы G в соответствующем разбиении. Тогда можно доказать, что мощность элемента слабо косетной группы выражается формулой $m(a) = n/C_{a,b}^e$, где b – элемент, обратный к a . Для слабо косетных групп имеет место и аналог предложения 13.

§ 6. n -групповые структуры на $\mathbb{R}^3$

В этом параграфе доказывается коммутативность многозначных групп порядка три и описывается геометрия многообразия трехмерных коммутативных ассоциативных алгебр с единицей.

ЛЕММА 10. *Произвольная ассоциативная трехмерная алгебра с единицей a_0 и неотрицательными структурными константами, удовлетворяющая аксиоме АЗ) из определения n -групповой алгебры, коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{C_{i,j}^k\}$, $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$, – структурные константы алгебры, где a_0 – единица. Предположим, что $C_{1,1}^2 \neq 0$ (или $C_{2,2}^1 \neq 0$, тогда переименуем базисные элементы).

Рассмотрим условие ассоциативности $a_1 * (a_1 * a_1) = (a_1 * a_1) * a_1$. Коэффициенты при a_1 имеют вид

$$C_{1,1}^1 C_{1,1}^1 + C_{1,1}^2 C_{2,1}^1 + C_{1,1}^0 C_{0,1}^1 = C_{1,1}^1 C_{1,1}^1 + C_{1,1}^2 C_{1,2}^1 + C_{1,1}^0 C_{1,0}^1.$$

Вспомнив, что $C_{i,0}^k = C_{0,i}^k = \delta_i^k$, получаем $C_{1,2}^1 = C_{2,1}^1$. Аналогично из равенства коэффициентов при a_2 имеем

$$C_{1,1}^1 C_{1,1}^2 + C_{1,1}^2 C_{2,1}^2 = C_{1,1}^1 C_{1,1}^2 + C_{1,1}^2 C_{1,2}^2,$$

откуда $C_{1,2}^2 = C_{2,1}^2$. Точно так же доказывается, что $C_{1,2}^0 = C_{2,1}^0$.

Теперь пусть $C_{1,1}^2 = C_{2,2}^1 = 0$. Тогда из рассмотрения коэффициентов при a_1 в уравнении $a_1 * (a_1 * a_2) = (a_1 * a_1) * a_2$ имеем

$$C_{1,2}^1 C_{1,1}^1 + C_{1,2}^2 C_{1,2}^1 + C_{1,2}^0 C_{0,1}^1 = C_{1,1}^1 C_{1,2}^1,$$

откуда $C_{1,2}^2 C_{1,2}^1 + C_{1,2}^0 = 0$, и, следовательно, в силу неотрицательности констант $C_{1,2}^0 = 0$. Аналогично, поменяв местами a_1 и a_2 , получаем $C_{2,1}^0 = 0$. Тогда в силу наличия обратного в смысле n -групповых алгебр (аксиома АЗ)) $C_{1,1}^0 \neq 0 \neq C_{2,2}^0$. Коэффициент при a_0 в $a_1 * a_2 * a_1$ имеет вид

$$C_{1,2}^1 C_{1,1}^0 = C_{1,1}^0 C_{2,1}^1,$$

что влечет $C_{1,2}^1 = C_{2,1}^1$. Рассмотрение условия ассоциативности $a_2 * a_1 * a_2$ дает $C_{1,2}^2 = C_{2,1}^2$.

Из этой леммы следует, что все многозначные группы порядка три коммутативны. Заметим, что из конструкции № 2 в работе [10] (она является частным случаем нашей конструкции из предложения 12) вытекает, что из существования некоммутативной 1-группы порядка N следует существование двузначной некоммутативной группы порядка $N + 1$. Таким образом, группа диэдра и результаты применения к ней конструкции № 2 дают примеры некоммутативных групповых структур на множествах из k точек, где $k > 5$. Вопрос о наличии некоммутативных n -групп порядка четыре и пять остается открытым.

Многообразие коммутативных ассоциативных алгебр размерности три с единицей (гомеоморфное, как нетрудно проверить, $\mathbb{R}^6$), естественным образом вложенное в $\mathbb{R}^9$, будем сечь гиперплоскостями, определенными условием A2) из определения 3. Оказывается, получающееся сечение имеет следующий вид.

ЛЕММА 11. *Многообразие коммутативных ассоциативных алгебр размерности три с единицей, удовлетворяющих условию A2) из определения 3, гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^3 \times S^1 / (\{0\} \times S^1)$. Соответствующая параметризация задается следующей таблицей (e – единица):*

$$\begin{aligned} a * a &= (2 + MU + L(-2W - U))a + (-M(U + W) - L(U + W))b \\ &\quad + (-1 + MW + L(3W + 2U))e, \\ b * a &= (1 + M(W + V) + L(W + V))a + (1 + M(U + W) - L(U + W))b \\ &\quad + (-1 - M(2W + V + U) + L(U - V))e, \\ b * b &= (-M(W + V) + L(W + V))a + (2 + MV + L(2W + V))b \\ &\quad + (-1 + MW - L(3W + 2V))e, \end{aligned}$$

где $(U, V, W) \in \mathbb{R}^3$ и $(L : M) \in \mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

Таким образом, перебирая рациональные значения параметров U, V, W, L, M , при которых коэффициенты в таблице неотрицательны и существуют обратные к базисным элементам в смысле n -алгебр, получаем список всех n -групповых структур в $\mathbb{R}^3$, а переходя к соответствующим группам, и список всех групп порядка три.

Замечательно, что линейная деформация не есть специфическое свойство особых точек на многообразии алгебр, среди которых встречаются точки, соответствующие n -групповым алгебрам. Точки на многообразии ассоциативных алгебр, соответствующие n -алгебрам, вообще говоря, не являются особыми точками многообразия; более того, как показывает пример многообразия трехмерных ассоциативных коммутативных алгебр с единицей, удовлетворяющих условию A2) из определения 3, эти точки не являются, вообще говоря, особыми точками и при естественном вложении многообразия в евклидово пространство: через точку общего положения этого многообразия проходит одна трехмерная плоскость (она соответствует параметрам U, V и W ; для точки, отвечающей группе $\mathbb{Z}_3$, см. лемму 3) и одна двумерная плоскость, пересекающаяся с первой по прямой (общая прямая: U, V и W умножаются на общий множитель, L и M постоянны; вторая образующая плоскости: U, V, W и M постоянны, а L изменяется; в случае $\mathbb{Z}_3$ результаты деформации вдоль этой образующей не лежат во множестве алгебр с неотрицательными структурными константами).

Список литературы

1. Баннаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы и отношения. М.: Мир, 1987.
2. Бухштабер В. М., Русс Е. Г. Многозначные группы и n -алгебры Хопфа // УМН. 1996. Т. 51. №4. С. 149–150.
3. Бухштабер В. М., Вершик А. М., Евдокимов С. А., Пономаренко И. Н. Комбинаторные алгебры и многозначные группы // Функци. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. №3. С. 12–18.
4. Бухштабер В. М. Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы // УМН. 1990. Т. 45. №3. С. 185–186.
5. Лазарев А. Ю., Мовшев М. В. Деформации алгебр Хопфа // УМН. 1991. Т. 46. №1. С. 211–212.
6. Ягдовский П. В. Деформация многозначных групп // УМН. 1997. Т. 52. №3. С. 179–180.
7. Arad Z., Blau H. On table algebras and applications to finite group theory // J. of algebra. 1991. V. 138. P. 137–185.
8. Buchshtaber V. M., Veselov A. P. Integrable correspondes and algebraic representations of multivalued groups // Int. Math. Res. Not. 1996. V. 8. P. 381–400.
9. Buchshtaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Transformation Groups. 1997. V. 2. № 4. P. 325–349.
10. Buchshtaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, n -Hopf algebras and n -ring homomorphisms // Lie groups and Lie Algebras. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 85–107.
11. Mazzola G. The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five // Manuscripta math. 1979. V. 27. P. 81–101.
12. Kenneth A. Ross, Daming Xu. Hypergroup deformation and Markov chains // J. of theoretical probability. 1994. V. 7. № 4. P. 813–830.
13. Wildberger N. J. Lagrange's theorem and integrality for finite commutative hypergroups with applications to strongly regular graphs // J. of algebra. 1996. V. 182. P. 1–37.

Поступило в редакцию
25.III.1998