Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, Неполные суммы Kloostermana и их приложения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 6, 41–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:51:03

УДК 511

М. А. Королев

Неполные суммы Kloostermana и их приложения

Получена нетривиальная оценка верхней грани абсолютной величины неполной суммы Kloostermana, количество слагаемых в которой много меньше модуля.

Библиография: 11 наименований.

Введение

В теории чисел *суммами Kloostermana* называются тригонометрические суммы вида

$$S_1 = \sum'_{n=1}^m \exp \left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m} \right), \quad (1)$$

где m – натуральное число, a, b – целые числа. Здесь и далее штрих означает суммирование по числам n , взаимно простым с m , а символом n^* обозначено натуральное число, не превосходящее m и такое, что $n^*n \equiv 1 \pmod{m}$. Наряду с суммами (1) рассматриваются также суммы

$$S_2 = \sum'_{n \leq x} \exp \left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m} \right), \quad (2)$$

где $x < m$, называемые *неполными суммами Kloostermana*.

Суммы (1) и (2) возникают при решении самых различных проблем теории чисел. Примерами служат задачи о количестве попаданий чисел вида $\left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\}$ в заданный интервал и об асимптотическом поведении суммы

$$\sum'_{n \leq x} \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\}. \quad (3)$$

Продвижение в этих задачах связано с получением нетривиальных оценок модулей сумм (1) и (2).

Первые такие оценки были получены в 1926 г. в [1]. Они имеют вид

$$|S_1| \ll m^{\frac{3}{4} + \varepsilon} D^{\frac{1}{4}}, \quad (4)$$

$$|S_2| \ll m^{\frac{7}{8} + \varepsilon} d^{\frac{1}{4}}, \quad (5)$$

где обозначено $d = (a, m)$, $D = \max(d; (b, m))$.

В 1931 г. Г. Салле в статье [2] улучшил оценку (4) для случая $m = p^\alpha$, $p > 2$ простое, $\alpha \geq 2$, $(a, p) = (b, p) = 1$. Он получил

$$|S_1| \leq 3p^{\alpha/2}. \quad (6)$$

Из этого результата следует более общее неравенство

$$|S_1| \leq \tau(p^\alpha) p^{\alpha/2} d^{1/2}. \quad (7)$$

Наконец, в 1948 г. появилась работа [3], в которой содержалось доказательство неравенства, подобного (6), для случая $m = p$, $p > 2$ простое, $(a, p) = (b, p) = 1$:

$$|S_1| \leq 2p^{1/2}. \quad (8)$$

С помощью известного свойства мультипликативности сумм Клоостермана и оценок (7), (8) для произвольного нечетного модуля m можно получить неравенство

$$|S_1| \leq \tau(m) m^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} \ll m^{\frac{1}{2}+\varepsilon} d^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Случай четного m был изучен Карлитцом и Учиямой в [4], и для него были получены оценки, подобные (9).

Неравенство (9) позволяет оценить и неполную сумму:

$$|S_2| \ll m^{\frac{1}{2}+\varepsilon} d^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Последний результат дает возможность получить асимптотику для суммы (3), начиная с $x \geq m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, причем остаточный член в этой формуле имеет порядок x^α , где $0 < \alpha < 1$ – некоторое число, не зависящее от x . Однако при $x < m^{1/2}$ в случае произвольного модуля m к этой задаче до недавнего времени не было никаких подходов.

Метод, разработанный А. А. Карацубой (см. [5]–[9]), позволил получить нетривиальные оценки верхней границы модуля неполной суммы Клоостермана уже при $x \geq m^\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число. Более того, это удалось сделать и в ряде специальных случаев, когда параметр n пробегает некоторое множество с количеством элементов $x \geq \exp(c(\lg m)^{3/4}(\lg \lg m)^{1/4})$, $c > 0$ – абсолютная постоянная. Это, в свою очередь, дало возможность получить асимптотическую формулу для суммы (3), уже начиная с $x \geq m^\varepsilon$. Соответствующий результат А. А. Карацубы формулируется так.

ТЕОРЕМА. Пусть ε – положительное сколь угодно малое фиксированное число, не превосходящее 0.001, x – вещественное число с условием $m^\varepsilon \leq x \leq m$, $mx_1 = \varphi(m)x$, $L = \lg m$. Тогда существует $c = c(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sum'_{n \leq x} \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} = \frac{1}{2} x_1 (1 + O(L^{-c})). \quad (11)$$

(Сообщение об этом и некоторых других результатах см. в [7].)

В настоящей работе с помощью метода А. А. Карацубы и одного утверждения, являющегося оригинальной частью работы (лемма А), доказывается, что асимптотическая формула для суммы (3) имеет место для любых m при $x \geq \exp\left(c \frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$, $c > \lg 2$ – произвольная постоянная, а для некоторой бесконечной последовательности модулей (куда попадают, в частности, простые модули) – уже при $x \geq \exp((\lg m)^{4/5}(\lg \lg m)^{73/5})$.

§ 1. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе будут приведены вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основной леммы и теорем.

ЛЕММА 1. При $x \geq 2$ имеет место равенство

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \lg \lg x + c + \frac{\theta}{\lg x},$$

где $c = 0.26 \dots$ – абсолютная постоянная, а $|\theta| < 10$.

ЛЕММА 2. Пусть $a \geq 2$, $b - a > 1$, $r \geq 0$ целое и J – некоторое множество простых чисел из промежутка $(a, b]$. Пусть w пробегает значения, являющиеся произведениями вида $w = p_1 p_2 \dots p_r$, где $p_i \in J$, $i = 1, 2, \dots, r$, и $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Тогда выполняется неравенство

$$\sum_w \frac{1}{w} \leq \frac{1}{r!} \left(\sum_{p \in J} \frac{1}{p} \right)^r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q_1, \dots, q_s$ – все простые числа из множества J . Если $s < r$, то утверждение леммы очевидно, так как в этом случае сумма в левой части неравенства равна нулю. Пусть $r \leq s$. Каждое из чисел w может быть записано в виде $w = q_1^{\alpha_1} \dots q_s^{\alpha_s}$, где α_i равно 0 или 1, $i = 1, 2, \dots, s$, и $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = r$. При раскрытии скобок в правой части встретятся все слагаемые вида

$$\frac{r!}{\alpha_1! \dots \alpha_s!} (q_1^{\alpha_1} \dots q_s^{\alpha_s})^{-1} = r! w^{-1}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $x \geq y \geq 2$. Обозначим $N(x, y)$ количество чисел ряда $1, 2, \dots, [x]$, все простые делители которых не превосходят y . Величину $\Phi(x, y)$ определим как количество чисел того же ряда, все простые делители которых больше y . Леммы 3 и 4 устанавливают верхние оценки для N и Φ , необходимые для дальнейшего.

ЛЕММА 3. Пусть $y = y(x) \leq x$ и $y(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда имеет место оценка

$$N(x, y) < x \exp \left(-\lg x \frac{\lg \lg \lg y}{\lg y} + \lg \lg y + O \left(\frac{\lg \lg y}{\lg \lg \lg y} \right) \right),$$

причем постоянная в знаке O абсолютная.

Доказательство этой леммы см., например, в [10].

ЛЕММА 4. Пусть $x \geq y \geq y_1 > 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\Phi(x, y) < \frac{3x \lg x}{(\lg y)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем рассматриваемые $\Phi(x, y)$ чисел на два класса. К первому отнесем бесквадратные числа, а ко второму – все остальные. Пусть Φ_1 и Φ_2 – количества чисел в первом и втором классах соответственно.

Возьмем целое $t \geq 0$. Обозначим $\Phi_1(t)$ количество чисел n первого класса, представимых в виде $n = p_1 \dots p_{t+1}$, где $y < p_1 < \dots < p_{t+1} \leq x$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \sum_{p_1 \dots p_{t+1} \leq x} 1 = \sum_{p_1 \dots p_t \leq xy^{-1}} \sum_{y < p_{t+1} \leq x(p_1 \dots p_t)^{-1}} 1 \\ &\leq \sum_{p_1 \dots p_t \leq xy^{-1}} \pi\left(\frac{x}{p_1 \dots p_t}\right). \end{aligned}$$

При достаточно больших h справедливо неравенство $\pi(h) \leq 2h(\lg h)^{-1}$. Воспользовавшись этим неравенством и утверждениями лемм 1 и 2, будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &\leq 2 \sum_{p_1 \dots p_t \leq xy^{-1}} \frac{x}{p_1 \dots p_t} \left(\lg \frac{x}{p_1 \dots p_t}\right)^{-1} \\ &\leq 2 \frac{x}{\lg y} \sum_{p_1 \dots p_t \leq xy^{-1}} \frac{1}{p_1 \dots p_t} \leq 2 \frac{x}{\lg y} \cdot \frac{1}{t!} \left(\sum_{y < p \leq x} \frac{1}{p}\right)^t \\ &\leq 2 \frac{x}{\lg y} \cdot \frac{1}{t!} \left(\lg \lg x - \lg \lg y + \frac{20}{\lg y}\right)^t \\ &\leq 2 \frac{x}{\lg y} \cdot \frac{1}{t!} (\lg \lg x - \lg \lg y + 0.1)^t. \end{aligned}$$

Так получаем оценку величины Φ_1 :

$$\Phi_1 = \sum_{t=0}^{+\infty} \Phi_1(t) \leq 2 \frac{x}{\lg y} \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{t!} (\lg \lg x - \lg \lg y + 0.1)^t = 2e^{0.1} \frac{x \lg x}{(\lg y)^2}.$$

Нетрудно видеть, что Φ_2 не превосходит

$$\sum_{l > y} \frac{x}{l^2} < \frac{2x}{y}.$$

Таким образом,

$$\Phi(x, y) = \Phi_1 + \Phi_2 \leq 2e^{0.1} \frac{x \lg x}{(\lg y)^2} + \frac{2x}{y} < \frac{3x \lg x}{(\lg y)^2}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5 (А. А. Карацуба). Пусть $m > 1$ – целое число, k и s – натуральные числа, вещественные числа X , X_1 , Y , Y_1 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} k < X < X_1, & \quad kX_1^{2k-1} < m, \\ s < Y < Y_1, & \quad sY_1^{2s-1} < m, \end{aligned}$$

параметр n пробегает N значений натуральных чисел с условием $(n, m) = 1$; a и b – целые числа, причем $(a, m) = d$; p и q принимают значения последовательных простых чисел, причем $(p, m) = (q, m) = 1$. Множество чисел вида npq , $X < p \leq X_1$, $Y < q \leq Y_1$, обозначим буквой A , а количество элементов A обозначим символом $\|A\|$. Тогда для тригонометрической суммы

$$S = \sum_{n \in A} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right)$$

справедлива следующая оценка:

$$|S| \leq \|A\| \Delta,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= (s! k!)^{\frac{1}{2sk}} (\pi_1(X))^{-\frac{1}{2s}} (\pi_1(Y))^{-\frac{1}{2k}} (smdY)^{\frac{1}{2sk}}, \\ \pi_1(X) &= \pi(X_1) - \pi(X) - \sum_{\substack{X < p \leq X_1 \\ p|m}} 1. \end{aligned}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [6].

ЛЕММА 6 (“стаканчик” Виноградова). Пусть ρ – натуральное число, α и β вещественные, $0 < \delta < 1/16$, $2\delta < \beta - \alpha < 1 - 2\delta$. Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и со следующими свойствами:

- 1) $\psi(x) = 1$ при $\alpha + \delta \leq x \leq \beta - \delta$;
- 2) $0 < \psi(x) < 1$ при $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$, $\beta - \delta < x < \beta + \delta$;
- 3) $\psi(x) = 0$ при $\beta + \delta \leq x \leq 1 + \alpha - \delta$;
- 4) $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{|r| > 0} g(r) \exp(2\pi i r x),$$

где

$$|g(r)| \leq \min\left(\beta - \alpha; \frac{1}{\pi|r|}; \frac{1}{\pi|r|} \left(\frac{\rho}{\pi|r|\delta}\right)^\rho\right) = c(r). \quad (12)$$

ЛЕММА 7. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_Q$ – действительные числа с условием $0 \leq \lambda_s < 1$, $s = 1, 2, \dots, Q$. Пусть $\rho \geq 1$ целое, $0 < \delta < 1/16$, α, β, R вещественные, $2\delta < \beta - \alpha < 1 - 2\delta$, $\psi(x)$ – функция из предыдущей леммы, отвечающая заданным ρ, δ, α и β . Пусть при любых допустимых значениях α и β для суммы

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{s=1}^Q \psi(\lambda_s)$$

выполнено соотношение

$$U(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)Q + O(R).$$

Тогда:

1) при любом σ , $0 \leq \sigma < 1$, число A_σ значений λ_s таких, что $0 \leq \lambda_s < \sigma$, выражается формулой

$$A_\sigma = \sigma Q + R_\sigma, \quad R_\sigma = O(R) + O(Q\delta);$$

2) $\sum_{s=1}^Q \lambda_s = \frac{1}{2}Q + O(R) + O(Q\delta)$.

Доказательство этого и предыдущего утверждений см., например, в [11].

§ 2. Основная лемма

Прежде чем сформулировать основное утверждение этого параграфа, введем ряд обозначений.

Пусть $m \geq m_1 > 1$ – натуральное число, x – вещественное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\exp((\lg m)^{4/5}(\lg \lg m)^5) < x \leq m^{4/7}, \quad (13)$$

$C > 1$ – абсолютная постоянная, точное значение которой будет выбрано позже. Положим также

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{4}m^{\frac{1}{2k-1}}, \quad V_k = m^{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k^2-1}}, \\ \gamma &= \frac{5 \lg \lg x - 4 \lg \lg m - \lg \lg \lg m - \lg C}{24 \lg \lg x}, \quad \varepsilon = \frac{\lg x}{\lg m}, \\ Q_1 &= \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4}\varepsilon(\lg x)^{1-10\gamma}\right), \quad Q_2 = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{1}{4}\varepsilon(\lg x)^{1-8\gamma}\right), \\ Q_3 &= \frac{1}{4} \exp((\lg x)^{1-4\gamma}), \quad Q_4 = \frac{1}{4} \exp((\lg x)^{1-2\gamma}). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\lg \lg \lg m}{2 \lg \lg m} < \gamma < \frac{5}{96}, \quad \frac{(\lg \lg m)^5}{(\lg m)^{1/5}} < \varepsilon \leq \frac{4}{7}.$$

Целые числа k_1, k_2, s_1 и s_2 , определяемые условиями

$$\begin{aligned} U_{k_1} &\leq Q_4 < U_{k_1-1}, & U_{k_2+2} &< Q_3 \leq U_{k_2+1}, \\ U_{s_1} &\leq Q_2 < U_{s_1-1}, & U_{s_2+1} &< Q_1 \leq U_{s_2}, \end{aligned}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon}(\lg x)^{2\gamma} + \frac{1}{2} &\leq k_1 < \frac{1}{2\varepsilon}(\lg x)^{2\gamma} + \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2\varepsilon}(\lg x)^{4\gamma} - \frac{3}{2} &< k_2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}(\lg x)^{4\gamma} - \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{\varepsilon^2}(\lg x)^{8\gamma} + \frac{1}{2} &\leq s_1 < \frac{2}{\varepsilon^2}(\lg x)^{8\gamma} + \frac{3}{2}, \\ \frac{2}{\varepsilon^2}(\lg x)^{10\gamma} - \frac{5}{2} &< s_2 \leq \frac{2}{\varepsilon^2}(\lg x)^{10\gamma} - \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

ЛЕММА А. Все натуральные числа n , не превосходящие x и взаимно простые с t , за исключением не более чем

$$\frac{60x \lg \lg x}{(\lg x)^\gamma}$$

чисел, можно представить в виде

$$n = l^2 p q h, \quad (15)$$

где l, h целые, p, q простые, причем:

- 1) $\mu(pqh) \neq 0$;
- 2) $1 \leq l \leq \lg x$;
- 3) при некоторых k и s , $k_1 \leq k \leq k_2$, $s_1 \leq s \leq s_2$, выполнены неравенства

$$V_k < p \leq U_k, \quad U_{s+1} < q \leq U_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего изложим логическую схему доказательства. Станем отсеивать из ряда

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots, [x], \quad (n, m) = 1, \quad (16)$$

те числа n , которые не могут быть представлены в виде (15). Процедура отсеивания состоит из нескольких шагов. На первом шаге (п. 1°) отбрасываются те n из ряда (16), которые делятся на квадраты “больших” целых чисел. На втором шаге (п. 2°) специальным образом выбирается величина $Q = Q(x)$ и отбрасываются те числа, все простые делители которых больше Q , а также те числа, все простые делители которых не превосходят Q . Таким образом, все числа ряда (16), оставшиеся после первых двух шагов, можно представить в виде $n = l^2 n_1$, где n_1 – бесквадратное, а l – маленькое целое число. При этом n будет обладать по крайней мере одним простым делителем, не превосходящим Q , и хотя бы одним простым делителем, большим Q .

Последний, третий шаг (пп. 3°–5°) является центральной частью доказательства. Здесь отсев происходит так. Сначала удаляются те n , у которых ни один простой делитель числа не попадает в промежуток $(U_{s_2+1}; U_{s_1}]$. Тогда для каждого из оставшихся n можно будет указать по крайней мере один простой делитель q , удовлетворяющий одному из неравенств $U_{s+1} < q \leq U_s$, $s = s_1, s_1+1, \dots, s_2$. Наконец,

из получившегося множества удаляем те n , у которых нет ни одного простого сомножителя из объединения промежутков $(V_k; U_k]$, $k = k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$. Нетрудно убедиться в том, что все числа ряда (16), оставшиеся после описанной процедуры, допускают представление в виде, указанном в формулировке леммы.

Отметим, что основную часть отбрасываемых чисел составляют удаляемые на последнем шаге. Станем доказывать утверждение, следуя изложенной схеме.

1°. Количество чисел n ряда (16), делящихся на квадрат “большого” целого числа $l > \lg x$, т.е. представимых в виде $n = l^2 n_1$, $l > \lg x$, не превосходит величины

$$\sum_{l > \lg x} \frac{x}{l^2} < \frac{2x}{\lg x}.$$

2°. Положим $Q = \exp\left(\frac{\lg x}{\lg \lg x}\right)$. Согласно леммам 3 и 4 количество чисел n ряда (16), у которых либо все простые делители не превосходят Q , либо все простые делители больше Q , ограничено сверху величиной

$$N(x, Q) + \Phi(x, Q) < \frac{4x(\lg \lg x)^2}{\lg x}.$$

Таким образом, отбросив

$$< \frac{2x}{\lg x} + \frac{4x(\lg \lg x)^2}{\lg x} < \frac{5x(\lg \lg x)^2}{\lg x}$$

чисел, можно ограничиться рассмотрением тех $n \leq x$, которые удовлетворяют условиям $n = l^2 n_1$, $1 \leq l \leq \lg x$, $\mu(n_1) \neq 0$, причем n делится на простое число, не превосходящее Q .

3°. Для удобства записи введем следующие обозначения для промежутков:

$$\begin{aligned} J &= (1; U_{s_2+1}], & J' &= (U_{s_2+1}; U_{s_1}], & J'' &= (U_{s_1}; Q], & J_0 &= (1; V_{k_2}], \\ J_i &= (U_{k_2-i+1}; V_{k_2-i}], & i &= 1, 2, \dots, \nu, & \nu &= k_2 - k_1, \\ J_{\nu+1} &= (U_{k_1}; Q]. \end{aligned}$$

Все дальнейшие рассуждения (пп. 4°, 5°) будут опираться на тот факт, что в каждом из этих промежутков, а также в каждом из промежутков $(V_k; U_k]$, $k = k_1, \dots, k_2$, имеется достаточно много простых чисел, не делящих m . Покажем, что это действительно так.

Пусть $(u; v]$ – любой из указанных промежутков. Покажем сначала, что

$$\frac{u}{v} \leq \exp(-(\lg m)^{1/5}).$$

Если $(u; v]$ есть J или J_0 , то $u = 1$,

$$v \geq U_{s_2+1} = \frac{1}{4} m^{\frac{1}{2s_2+1}} \quad \text{и} \quad \frac{u}{v} \leq m^{-\frac{1}{2s_2+1}}.$$

Если $(u; v]$ есть J'' или $J_{\nu+1}$, то $v = Q$, $u \leq U_{k_1} \leq Q_4$, так что $u/v \leq Q_4/Q$. Наконец, в силу неравенств

$$\begin{aligned} U_{s_2+1} &< \frac{1}{4} m^{\frac{1}{2s_1+1}} = U_{s_1} m^{-\frac{2}{4s_1^2-1}} < U_{s_1} m^{-\frac{1}{4s_1^2-1}}, \\ U_{k+1} &= \frac{1}{4} V_k m^{-\frac{1}{4k^2-1}} < V_k m^{-\frac{1}{4k_2^2-1}} < V_k m^{-\frac{1}{4s_1^2-1}}, \quad k = k_1, \dots, k_2 - 1, \\ V_k &= 4U_k m^{-\frac{1}{4k^2-1}} \leq 4U_k m^{-\frac{1}{4k_2^2-1}} < 4U_k m^{-\frac{1}{4s_1^2-1}}, \quad k = k_1, \dots, k_2, \end{aligned}$$

для каждого из оставшихся промежутков выполнено

$$\frac{u}{v} \leq 4m^{-\frac{1}{4s_1^2-1}}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$\max\left(m^{-\frac{1}{2s_2+1}}; Q_4 Q^{-1}; 4m^{-\frac{1}{4s_1^2-1}}\right) < \exp(-(\lg m)^{\frac{1}{5}}).$$

Воспользовавшись определением величин γ и ε , а также неравенствами (13) и (14), получим

$$\begin{aligned} 2s_2 + 1 &< \frac{4}{\varepsilon^2} (\lg x)^{10\gamma} = 4C^{-\frac{5}{12}} (\lg m)^{\frac{1}{3}} (\lg x)^{\frac{1}{12}} (\lg \lg m)^{-\frac{5}{12}} \\ &< 4C^{-\frac{5}{12}} (\lg m)^{\frac{1}{4}} (\lg \lg m)^{-\frac{5}{12}}, \\ m^{-\frac{1}{2s_2+1}} &< \exp\left(-\frac{C^{\frac{5}{12}}}{4} (\lg m)^{\frac{3}{4}} (\lg \lg m)^{\frac{5}{12}}\right) < \exp(-(\lg m)^{\frac{1}{5}}); \\ (\lg x)^{2\gamma} &= C^{-\frac{1}{12}} (\lg \lg m)^2 > 2 \lg \lg x; \\ Q_4 Q^{-1} &= \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\lg x}{\lg \lg x} \left(1 - \frac{\lg \lg x}{(\lg x)^{2\gamma}}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\lg x}{2 \lg \lg x}\right) < \exp(-(\lg m)^{\frac{1}{5}}); \end{aligned}$$

наконец,

$$\begin{aligned} s_1 &< \frac{2}{\varepsilon^2} (\lg x)^{8\gamma} + \frac{3}{2}, \quad 4s_1^2 - 1 < \frac{48}{\varepsilon^4} (\lg x)^{16\gamma} = 48C^{-\frac{2}{3}} (\lg m)^{\frac{4}{5}} (\lg \lg m)^{-4}, \\ 4m^{-\frac{1}{4s_1^2-1}} &< 4 \exp\left(-\frac{C^{\frac{2}{3}}}{48} (\lg m)^{\frac{1}{5}} (\lg \lg m)^4\right) < \exp(-(\lg m)^{\frac{1}{5}}). \end{aligned}$$

Далее, для каждого из рассматриваемых промежутков справедливо неравенство

$$\begin{aligned} v &\geq U_{s_2+1} = \frac{1}{4} m^{\frac{1}{2s_2+1}} > \frac{1}{4} \exp\left(\frac{C^{\frac{5}{12}}}{4} (\lg m)^{\frac{3}{4}} (\lg \lg m)^{\frac{5}{12}}\right) \\ &> \exp((\lg m)^{\frac{3}{4}} (\lg \lg m)^{\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

Поскольку при больших h

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\lg h} \leq \pi(h) \leq 2 \cdot \frac{h}{\lg h},$$

то при $m \geq m_1$ имеем

$$\begin{aligned} \pi(v) - \pi(u) &\geq \frac{v}{2 \lg v} - \frac{2u}{\lg u} = \frac{v}{2 \lg v} \left(1 - 4 \frac{u \lg v}{v \lg u} \right) \\ &> \frac{v}{2 \lg v} (1 - 4 \exp(-(\lg m)^{1/5}) \lg m) > \frac{v}{4 \lg v} \geq \frac{U_{s_2+1}}{4 \lg U_{s_2+1}} \\ &> \frac{\exp((\lg m)^{3/4} (\lg \lg m)^{1/3})}{4 (\lg m)^{3/4} (\lg \lg m)^{1/3}} > 2 \exp((\lg m)^{3/4}). \end{aligned}$$

Количество простых чисел промежутка $(u; v]$, делящих m , не превосходит числа всех простых делителей m , которое, в свою очередь, не превосходит $2 \lg m$. Поэтому для числа простых чисел промежутка $(u; v]$, взаимно простых с m , справедлива следующая оценка снизу:

$$\pi(v) - \pi(u) - \sum_{\substack{u < p \leq v \\ p|m}} 1 > 2 \exp((\lg m)^{3/4}) - 2 \lg m > \exp((\lg m)^{3/4}).$$

4°. Пусть N_1 – количество чисел $n = l^2 n_1$ ряда (16), оставшихся после первых двух шагов, которые не имеют простых делителей из промежутка J' , и пусть $N_1(l)$ – количество таких n , отвечающих данному значению $l \leq \lg x$. Для каждого из этих n число n_1 запишем в виде $n_1 = wv$, где все простые делители w не превосходят Q , а все простые делители v больше Q . Поскольку в каноническом разложении n отсутствуют простые числа из промежутка J' , то все простые делители w можно разбить на две группы. В первую войдут все делители w , принадлежащие промежутку J , а во вторую – принадлежащие промежутку J'' . Поэтому число w может быть представлено в виде

$$w = p_1 \dots p_{r_0} q_1 \dots q_{r_1}, \quad (17)$$

где $r_0 \geq 0$, $r_1 \geq 0$, $p_i \in J$, $i = 1, 2, \dots, r_0$, $q_j \in J''$, $j = 1, 2, \dots, r_1$. Так как n_1 – бесквадратное число, то все простые $p_1, \dots, p_{r_0}$, $q_1, \dots, q_{r_1}$ различны.

Обозначим $N_1(l; r_0, r_1)$ количество таких n , отвечающих данным значениям r_0 и r_1 . Для целого $r \geq 0$ положим

$$N_1(l; r) = \sum N_1(l; r_0, r_1),$$

где суммирование ведется по всем наборам r_0, r_1 , для которых $r_0 + r_1 = r$. Зафиксируем произвольное число w вида (17). Вспомогая определение величины $\Phi(x, y)$, получаем, что данному w отвечает

$$\Phi\left(\frac{x}{l^2 w}, Q\right) \quad (18)$$

чисел v таких, что $n = l^2 w v \leq x$. Фиксируем r_0 и r_1 . Суммируя (18) по всем w , отвечающим выбранным r_0 и r_1 , и пользуясь оценкой леммы 4, получаем

$$N_1(l; r_0, r_1) = \sum_w \Phi\left(\frac{x}{l^2 w}, Q\right) < \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \sum_w \frac{1}{w}.$$

Для оценки последней суммы по w используем неравенство леммы 2:

$$\sum_w \frac{1}{w} \leq \frac{1}{r_0!} \left(\sum_{p \in J} \frac{1}{p} \right)^{r_0} \cdot \frac{1}{r_1!} \left(\sum_{q \in J''} \frac{1}{q} \right)^{r_1}.$$

Изучим отдельно каждую из сумм. Применяя лемму 1, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{p \in J} \frac{1}{p} &= \sum_{\substack{2 \leq p \leq U_{s_2+1} \\ (p, m)=1}} \frac{1}{p} \leq \sum_{2 \leq p \leq U_{s_2+1}} \frac{1}{p} \leq \lg \lg U_{s_2+1} + c + \frac{10}{\lg U_{s_2+1}}, \\ \sum_{q \in J''} \frac{1}{q} &= \sum_{\substack{U_{s_1} < q \leq Q \\ (q, m)=1}} \frac{1}{q} \leq \sum_{U_{s_1} < q \leq Q} \frac{1}{q} \leq \lg \lg Q - \lg \lg U_{s_1} + \frac{20}{\lg U_{s_1}}. \end{aligned}$$

С помощью неравенств (14) нетрудно получить

$$\begin{aligned} U_{s_2+1} &< \exp\left(\frac{1}{3}\varepsilon(\lg x)^{1-10\gamma}\right), \\ U_{s_1} &> \exp\left(\frac{1}{5}\varepsilon(\lg x)^{1-8\gamma}\right), \end{aligned}$$

как только $m \geq m_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lg \lg U_{s_2+1} + c + \frac{10}{\lg U_{s_2+1}} &\leq \lg \lg U_{s_2+1} + \frac{1}{2} \\ &\leq (1 - 10\gamma) \lg \lg x + \lg \varepsilon - \lg 3 + \frac{1}{2} = \alpha_0, \\ \lg \lg Q - \lg \lg U_{s_1} + \frac{20}{\lg U_{s_1}} &\leq \lg \lg Q - \lg \lg U_{s_1} + \frac{1}{2} \\ &\leq 8\gamma \lg \lg x - \lg \lg \lg x - \lg \varepsilon + \lg 5 + \frac{1}{2} = \alpha_1. \end{aligned}$$

Собрав полученные оценки вместе, последовательно находим

$$\begin{aligned} \sum_w \frac{1}{w} &\leq \frac{\alpha_0^{r_0}}{r_0!} \cdot \frac{\alpha_1^{r_1}}{r_1!}, \\ N_1(l; r_0, r_1) &< \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \cdot \frac{\alpha_0^{r_0}}{r_0!} \cdot \frac{\alpha_1^{r_1}}{r_1!}, \\ N_1(l; r) &< \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \cdot \frac{1}{r!} \sum_{r_0+r_1=r} \frac{r!}{r_0! r_1!} \alpha_0^{r_0} \alpha_1^{r_1} = \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \cdot \frac{(\alpha_0 + \alpha_1)^r}{r!}, \\ N_1(l) &= \sum_{r=0}^{+\infty} N_1(l; r) < \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_0 + \alpha_1)^r}{r!} = \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \exp(\alpha_0 + \alpha_1). \end{aligned}$$

Так как

$$\alpha_0 + \alpha_1 = (1 - 2\gamma) \lg \lg x - \lg \lg \lg x + \lg \left(\frac{5e}{3} \right),$$

то

$$N_1(l) < \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \cdot \frac{(\lg x)^{1-2\gamma}}{\lg \lg x} \cdot \frac{5e}{3} = \frac{5ex \lg \lg x}{l^2 (\lg x)^{2\gamma}}.$$

Из равенства

$$N_1 = \sum_{l \leq \lg x} N_1(l)$$

получаем верхнюю оценку величины N_1 :

$$N_1 < 5e \frac{x \lg \lg x}{(\lg x)^{2\gamma}} \sum_{l \leq \lg x} \frac{1}{l^2} < \frac{5\pi^2 e}{6} \cdot \frac{x \lg \lg x}{(\lg x)^{2\gamma}}.$$

Исключим из рассматриваемого множества эти N_1 чисел. Тогда для каждого из оставшихся чисел n можно указать хотя бы один простой делитель q такой, что $(q, m) = 1$ и $q \in J'$. Поскольку

$$J' = (U_{s_2+1}; U_{s_1}] = \bigcup_{s=s_1}^{s_2} (U_{s+1}; U_s],$$

то для такого q можно единственным образом указать число s так, что будут выполнены неравенства

$$U_{s+1} < q \leq U_s, \quad s_1 \leq s \leq s_2. \quad (19)$$

5°. Пусть N_2 – количество чисел $n = l^2 n_1$ из множества, получившегося в п. 4°, которые не имеют простых делителей из объединения промежутков $(V_k; U_k]$, $k = k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$, а $N_2(l)$ – количество таких n , которые отвечают данному значению $l \leq \lg x$. При оценке величин $N_2(l)$ и N_2 будем следовать рассуждениям п. 4°.

Для каждого из рассматриваемых чисел n бесквадратный сомножитель n_1 запишем в виде $n_1 = wv$, где все простые делители w (если такие есть) попадают в объединение промежутков $J_0, J_1, \dots, J_{\nu+1}$, а все простые делители v больше Q . Для каждого i , $i = 0, 1, \dots, \nu + 1$, определим число $r_i \geq 0$ как количество простых делителей w , попавших в промежуток J_i . Обозначим $N_2(l; r_0, r_1, \dots, r_{\nu+1})$ количество чисел n из рассматриваемого множества, отвечающих данным значениям $l, r_0, r_1, \dots, r_{\nu+1}$. Наконец, для целого $r \geq 0$ положим

$$N_2(l; r) = \sum N_2(l; r_0, r_1, \dots, r_{\nu+1}),$$

где суммирование ведется по всем наборам $r_0, r_1, \dots, r_{\nu+1}$, для которых $r_0 + r_1 + \dots + r_{\nu+1} = r$.

Рассуждая так же, как и в п. 4°, получим неравенство

$$N_2(l; r_0, r_1, \dots, r_{\nu+1}) = \sum_w \Phi \left(\frac{x}{l^2 w}, Q \right) < \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \sum_w \frac{1}{w},$$

где суммирование проводится по всем числам w , которые отвечают данному набору $r_0, r_1, \dots, r_{\nu+1}$.

Применив лемму 2, оценим последнюю сумму по w :

$$\sum_w \frac{1}{w} \leq \prod_{i=0}^{\nu+1} \frac{\sigma_i^{r_i}}{r_i!}, \quad \sigma_i = \sum_{p \in J_i} \frac{1}{p}, \quad i = 0, 1, \dots, \nu + 1.$$

Займемся теперь величинами σ_i . Прежде всего, из неравенств (14), которым удовлетворяет k_2 , находим верхнюю оценку V_{k_2} :

$$V_{k_2} < \exp(2(\lg x)^{1-4\gamma}).$$

Воспользовавшись леммой 1, получим

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sum_{p \in J_0} \frac{1}{p} \leq \lg \lg V_{k_2} + c + \frac{10}{\lg V_{k_2}} < \lg \lg V_{k_2} + 0.3 \\ &< (1 - 4\gamma) \lg \lg x + \lg 2 + 0.3 < (1 - 4\gamma) \lg \lg x + 1 = \alpha_0. \end{aligned}$$

Фиксируем i , $1 \leq i \leq \nu$. Положим $k = k_2 - i$. Тогда

$$\sigma_i = \sum_{p \in J_i} \frac{1}{p} < \lg \lg V_k - \lg \lg U_{k+1} + \frac{20}{\lg U_{k+1}} = \lg \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) + \rho(k),$$

где

$$\rho(k) = \frac{20}{\lg U_{k+1}} - \lg \left(1 - \frac{(2k+1) \lg 4}{\lg m} \right).$$

Из (14) мы заключаем, что

$$k \leq k_2 < \frac{1}{10} (\lg m)^{1/3} - \frac{1}{2}.$$

Поэтому величина $\rho(k)$ по модулю не превосходит

$$25 \cdot \frac{(2k+1)}{\lg m} < \frac{1}{4(2k-1)^2}.$$

Так, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_i &< \lg \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) + \frac{1}{4(2k-1)^2} \\ &< \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4(2k-1)^2} + \frac{1}{4(2k-1)^2} = \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2(k_2-i)-1} = \alpha_i. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая, что $U_{k_1} > \exp\left(\frac{1}{2}(\lg x)^{1-2\gamma}\right)$, находим

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu+1} &< \lg \lg Q - \lg \lg U_{k_1} + \frac{20}{\lg U_{k_1}} \\ &< \lg \lg Q - \lg \lg U_{k_1} + 0.3 < 2\gamma \lg \lg x - \lg \lg \lg x + 1 = \alpha_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки вместе, получим серию неравенств:

$$\sum_w \frac{1}{w} < \prod_{i=0}^{\nu+1} \frac{\alpha_i^{r_i}}{r_i!},$$

$$N_2(l; r_0, r_1, \dots, r_{\nu+1}) < \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \prod_{i=0}^{\nu+1} \frac{\alpha_i^{r_i}}{r_i!},$$

$$N_2(l; r) < \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \sum_{r_0+r_1+\dots+r_{\nu+1}=r} \frac{\alpha_0^{r_0} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_{\nu+1}^{r_{\nu+1}}}{r_0! r_1! \dots r_{\nu+1}!} = \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \cdot \frac{\alpha^r}{r!},$$

где $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{\nu+1}$,

$$N_2(l) = \sum_{r=0}^{+\infty} N_2(l; r) < \frac{3x \lg x}{(l \cdot \lg Q)^2} \exp(\alpha),$$

$$N_2 = \sum_{l \leq \lg x} N_2(l) < \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{x \lg x}{(\lg Q)^2} \exp(\alpha).$$

Поскольку

$$\alpha = (1 - 4\gamma) \lg \lg x + 1 + 2\gamma \lg \lg x - \lg \lg \lg x + 1 + \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{2k-1}$$

$$< (1 - \gamma) \lg \lg x - \lg \lg \lg x + 2,$$

то

$$N_2 < \frac{(\pi e)^2 x \lg x}{2(\lg Q)^2} \cdot \frac{(\lg x)^{1-\gamma}}{\lg \lg x} = \frac{(\pi e)^2 x \lg \lg x}{2(\lg x)^\gamma}.$$

Исключим из рассмотрения и эти N_2 чисел. Таким образом, всего из ряда (16) оказалось исключено не более

$$\frac{5x(\lg \lg x)^2}{\lg x} + \frac{5\pi^2 e x \lg \lg x}{6(\lg x)^{2\gamma}} + \frac{(\pi e)^2 x \lg \lg x}{2(\lg x)^\gamma} < \frac{60x \lg \lg x}{(\lg x)^\gamma}$$

чисел. Для каждого из оставшихся можно указать хотя бы один простой делитель p , попавший в объединение промежутков $(V_k; U_k]$, $k = k_1, \dots, k_2$. Наряду с (19) это означает, что все оставшиеся числа допускают представление (15). Лемма А доказана.

§ 3. Оценка короткой суммы Клоостермана

Пусть параметры $m, x, C, k_1, k_2, s_1, s_2, \gamma$ и ε удовлетворяют условиям § 2, a, b — целые числа, $(a, m) = d \geq 1$. В этом параграфе мы будем заниматься неполной суммой Клоостермана

$$S = \sum'_{n \leq x} \exp \left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m} \right).$$

ТЕОРЕМА 1. Для суммы S справедлива оценка

$$|S| \leq x(\Delta_1 + \Delta_2),$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= d^{\frac{1}{2k_1s_1}} (\lg m)^{-5}, \\ \Delta_2 &= 4(\lg x)^{-\frac{5}{24}} (\lg m)^{\frac{1}{6}} (\lg \lg m)^{\frac{25}{24}}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем сумму S на две части: $S = S_1 + S_2$. К сумме S_1 отнесем слагаемые, отвечающие тем n , которые имеют вид $n = l^2 n_1$, $l \leq \lg x$, $\mu(n_1) \neq 0$. В S_2 войдут все остальные слагаемые. Нетрудно видеть, что число членов в S_2 не превосходит величины

$$\sum_{\lg x < l \leq \sqrt{x}} \frac{x}{l^2} < \frac{2x}{\lg x}.$$

Оценивая S_2 тривиально, получим

$$|S| \leq |S_1| + \frac{2x}{\lg x}.$$

Обозначим A множество всех простых чисел, не делящих m и содержащихся в объединении промежутков $(V_k; U_k]$, $k = k_1, \dots, k_2$, а B обозначим множество всех простых чисел, не делящих m и содержащихся в промежутке $(U_{s_2+1}; U_{s_1}]$.

Сумму S_1 разобьем на суммы $S_{\mu, \nu}$. К сумме $S_{\mu, \nu}$ отнесем все слагаемые, отвечающие числам n , которые могут быть представлены в виде $n = l^2 hu = ru$, где $\mu(hu) \neq 0$, а $l \leq \lg x$. Здесь u есть произведение μ простых сомножителей из A и ν простых сомножителей из B : $u = p_1 \dots p_\mu q_1 \dots q_\nu$, а r не имеет простых делителей из множеств A и B .

Обозначим μ_0 и ν_0 максимальные возможные значения величин μ и ν . Поскольку для любых $p \in A$ и $q \in B$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}p &> V_{k_2} > \exp((\lg x)^{1-4\gamma}), \\ q &> U_{s_2+1} > \exp\left(\frac{1}{8}\varepsilon(\lg x)^{1-10\gamma}\right),\end{aligned}$$

то для μ_0 и ν_0 получаем следующие оценки:

$$\mu_0 \leq (\lg x)^{4\gamma}, \quad \nu_0 \leq \frac{8}{\varepsilon} (\lg x)^{10\gamma}. \quad (20)$$

Те суммы $S_{\mu, \nu}$, где хотя бы один из индексов μ, ν равен нулю, оценим тривиально. Слагаемые, входящие в такие суммы, отвечают различным числам $n \leq x$, для которых невозможно указать пару простых делителей p, q с условием: $p \in A$, $q \in B$. Согласно лемме А общее число таких n не превосходит величины $x\Delta$, где $\Delta = 60 \lg \lg x / (\lg x)^\gamma$. Поэтому

$$|S_{0,0}| + \sum_{\mu=1}^{\mu_0} |S_{\mu,0}| + \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |S_{0,\nu}| \leq x\Delta.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$W = \sum_r \sum_{w \leq xr^{-1}} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right), \quad n = rw.$$

Здесь величина r пробегает возрастающую последовательность чисел вида $r = l^2 h$, определенных выше. Величина w принимает значения, являющиеся произведениями $\mu + \nu$ простых сомножителей, каждый из которых независимо от других пробегает свою возрастающую последовательность чисел: $w = p_1 \dots p_\mu q_1 \dots q_\nu$. Именно, $p_1, \dots, p_\mu$ независимо друг от друга пробегает множество A , а $q_1, \dots, q_\nu$ — множество B .

Слагаемое, отвечающее значению $n = rw$, где $\mu(w) \neq 0$ (т.е. такому значению w , где все числа $p_1, \dots, p_\mu, q_1, \dots, q_\nu$ различны), встретится в сумме W ровно $\mu! \nu!$ раз.

Рассмотрим теперь слагаемое, отвечающее значению $n = rw$, где $\mu(w) = 0$. Пусть среди чисел $p_1, \dots, p_\mu$ оказалось ровно g различных, причем первое встречается α_1 раз, второе — α_2 раз, $\dots$, g -е — α_g раз. Пусть также среди чисел $q_1, \dots, q_\nu$ ровно t различных, причем первое повторяется β_1 раз, второе — β_2 раз, $\dots$, t -е — β_t раз. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_g = \mu$ и $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_t = \nu$. Так как $\mu(w) = 0$, то хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ строго больше 1. Поэтому соответствующее слагаемое встретится в сумме W

$$\frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_g)! (\beta_1 + \dots + \beta_t)!}{\alpha_1! \dots \alpha_g! \beta_1! \dots \beta_t!} < \mu! \nu!$$

раз. Заметим, что все такие $n = rw$ имеют вид: $n = l^2 n_1$, $\mu(n_1) \neq 0$, $l > \lg x$. Поэтому количество таких чисел $n \leq x$ не превосходит величины

$$\sum_{\lg x < l \leq \sqrt{x}} \frac{x}{l^2} < \frac{2x}{\lg x}.$$

Так, получаем

$$(\mu! \nu!)^{-1} W = S_{\mu, \nu} + 2\theta \frac{x}{\lg x}, \quad |\theta| < 1,$$

$$|S_{\mu, \nu}| < (\mu! \nu!)^{-1} |W| + \frac{2x}{\lg x}.$$

Займемся оценкой суммы W . Обозначим $u = rp_2 \dots p_\mu q_2 \dots q_\nu$, $p = p_1$, $q = q_1$, $n = upq$. Перепишем W в виде

$$W = \sum_u \sum_{p \in A} \sum_{\substack{q \in B \\ pq \leq xu^{-1}}} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right).$$

Множества A и B , в которых меняются p и q , разобьем на промежутки следующим образом. Каждый из сегментов $(V_k; U_k]$, $k = k_1, \dots, k_2$, разобьем на промежутки

$$(X; X_1] = (\max(V_k; 2^{-(\tau+1)} U_k); 2^{-\tau} U_k], \quad \tau = 0, 1, \dots, \tau_0.$$

Если для промежутка, отвечающего значению $\tau = \tau_0$, оказалось $X_1 < 2X$, то объединим его с $(2^{-\tau_0}U_k; 2^{-(\tau_0-1)}U_k]$. В итоге получим промежуток $(X'; X'_1]$, для которого $2X' \leq X'_1 \leq 4X'$. Таким образом, для каждого получившегося промежутка $(X; X_1]$ окажутся выполненными неравенства

$$2X \leq X_1 \leq 4X.$$

Подобным образом каждый из промежутков $(U_{s+1}; U_s]$, $s = s_1, \dots, s_2$, разобьем на промежутки $(Y; Y_1]$, где $2Y \leq Y_1 \leq 4Y$. Число получившихся при таком разбиении пар X, Y не превосходит величины

$$k_2 s_2 \log_2(U_{k_1}) \log_2(U_{s_1}) < (\lg m)^3.$$

В соответствии с этим сумма W разобьется на $< (\lg m)^3$ сумм

$$W(X, Y) = \sum_{u \leq x(XY)^{-1}} \sum'_{X < p \leq X_1} \sum'_{\substack{Y < q \leq Y_1 \\ XY < pq \leq Z}} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right),$$

где $Z = [\min(X_1 Y_1, xu^{-1})]$. Обозначим символом W_1 внутреннюю сумму по p и q . Функцию $\delta(z)$ определим следующим образом:

$$\delta(z) = \begin{cases} 1, & z = pq, \quad (z, m) = 1, \quad X < p \leq X_1, \quad Y < q \leq Y_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда W_1 переписывается в виде

$$W_1 = \sum_{XY < z \leq Z} \delta(z) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 z^* + b_1 z}{m}\right),$$

где $a_1 = au^*$, $b_1 = bu$. При этом $(a_1, m) = (a, m) = d$. Теперь преобразуем W_1 так, чтобы интервал изменения z не зависел от u :

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{XY < z \leq X_1 Y_1} \left(\frac{1}{m} \sum_{f=0}^{m-1} \sum_{y=1}^Z \exp\left(2\pi i \frac{f(z-y)}{m}\right) \right) \delta(z) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 z^* + b_1 z}{m}\right) \\ &= \frac{Z}{m} \sum_{XY < z \leq X_1 Y_1} \delta(z) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 z^* + b_1 z}{m}\right) \\ &\quad + \frac{1}{m} \sum_{f=1}^{m-1} \frac{\exp\left(-2\pi i \frac{f(Z+1)}{m}\right) - \exp\left(-2\pi i \frac{f}{m}\right)}{\exp\left(-2\pi i \frac{f}{m}\right) - 1} \\ &\quad \times \sum_{XY < z \leq X_1 Y_1} \delta(z) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 z^* + (b_1 + f)z}{m}\right). \end{aligned}$$

Пусть T – наибольшее возможное значение модуля суммы

$$\sum_{XY < z \leq X_1 Y_1} \delta(z) \exp\left(2\pi i \frac{a_2 z^* + b_2 z}{m}\right) = \sum'_{X < p \leq X_1} \sum'_{Y < q \leq Y_1} \exp\left(2\pi i \frac{a_2 p^* q^* + b_2 pq}{m}\right),$$

где a_2, b_2 – целые числа, $(a_2, m) = d$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$|W_1| \leq \left(\frac{Z}{m} + \frac{1}{m} \sum_{f=1}^{m-1} \left(\sin \frac{\pi f}{m} \right)^{-1} \right) T \leq \left(\frac{Z}{m} + \frac{1}{m} \sum_{f=1}^{m-1} \left(\frac{f}{m} \right)^{-1} \right) T < 2T \lg m.$$

Для заданных X, X_1, Y, Y_1 определим k и s так, чтобы выполнялись неравенства

$$V_k = m^{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k^2-1}} < X < X_1 \leq U_k = \frac{1}{4} m^{\frac{1}{2k-1}}, \quad (21)$$

$$U_{s+1} = \frac{1}{4} m^{\frac{1}{2s+1}} < Y < Y_1 \leq U_s = \frac{1}{4} m^{\frac{1}{2s-1}}, \quad (22)$$

$$k_1 \leq k \leq k_2, \quad s_1 \leq s \leq s_2.$$

Тогда окажутся выполненными следующие условия:

$$kX_1^{2k-1} < m, \quad sY_1^{2s-1} < m, \\ X > k \geq 3, \quad Y > s \geq 3.$$

Это позволяет нам применить лемму 5. Так, получим

$$T \leq XY \Delta',$$

где

$$\Delta' = (k! s!)^{\frac{1}{2ks}} (\pi_1(X))^{-\frac{1}{2s}} (\pi_1(Y))^{-\frac{1}{2k}} (smdY)^{\frac{1}{2ks}},$$

а

$$\pi_1(X) = \pi(X_1) - \pi(X) - \sum_{\substack{X < p \leq X_1 \\ p|m}} 1.$$

Воспользовавшись известным неравенством

$$n! < e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n,$$

а также тем, что $s > k \geq 3$, будем иметь

$$\begin{aligned} (k! s!)^{\frac{1}{2ks}} \cdot s^{\frac{1}{2ks}} &\leq \left(e^2 \sqrt{ks} \left(\frac{k}{e} \right)^k \left(\frac{s}{e} \right)^s \right)^{\frac{1}{2ks}} s^{\frac{1}{2ks}} \\ &= e^{-\left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2s} - \frac{1}{ks}\right)} (ks)^{\frac{1}{4ks}} s^{\frac{1}{2ks}} k^{\frac{1}{2s}} s^{\frac{1}{2k}} \\ &< (3 \cdot 3)^{\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 3}} \cdot 3^{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3}} \cdot 3^{\frac{1}{2 \cdot 3}} \cdot s^{\frac{1}{2k}} < 3^{\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

Согласно неравенствам (14)

$$\begin{aligned} s^{\frac{1}{2k}} &\leq s_2^{\frac{1}{2k_1}} \leq \exp \left(\frac{\lg(2\varepsilon^{-2}(\lg x)^{10\gamma})}{\varepsilon^{-1}(\lg x)^{2\gamma}} \right) < \exp \left(\frac{(10\gamma \lg \lg x - 2 \lg \varepsilon + \lg 2)}{(\lg x)^{2\gamma}} \right) \\ &\leq 2 \exp \left(\frac{\frac{25}{12} \lg \lg x - \frac{5}{3} \lg \lg m - 2 \lg \lg x + 2 \lg \lg m}{C^{-\frac{1}{12}} (\lg \lg m)^2} \right) \\ &= 2 \exp \left(\frac{\frac{1}{12} \lg \lg x + \frac{1}{3} \lg \lg m}{C^{-\frac{1}{12}} (\lg \lg m)^2} \right) \leq 2 \exp \left(\frac{C^{\frac{1}{12}}}{4} (\lg \lg m)^{-1} \right) < 3 \end{aligned}$$

при $m \geq m_1$. Таким образом,

$$(k! s!)^{\frac{1}{2ks}} s^{\frac{1}{2ks}} < 3^{\frac{4}{3}}.$$

Далее, поскольку $X_1 \geq 2X$, для $\pi_1(X)$ справедлива оценка снизу:

$$\pi_1(X) \geq \pi(2X) - \pi(X) - 2 \lg m.$$

Так как

$$\pi(2X) = \frac{2X}{\lg X} + O\left(\frac{X}{(\lg X)^2}\right), \quad \pi(X) = \frac{X}{\lg X} + O\left(\frac{X}{(\lg X)^2}\right),$$

то при достаточно больших X (что достигается при $m \geq m_1$)

$$\pi_1(X) \geq \frac{X}{\lg X} + O\left(\frac{X}{(\lg X)^2}\right) - 2 \lg m, \quad \pi_1(X) \geq \frac{X}{2 \lg X}.$$

Аналогично, при $m \geq m_1$

$$\pi_1(Y) \geq \frac{Y}{2 \lg Y}.$$

Поэтому

$$(\pi_1(X))^{-\frac{1}{2s}} (\pi_1(Y))^{-\frac{1}{2k}} \leq 2^{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2s}} (\lg X)^{\frac{1}{2s}} (\lg Y)^{\frac{1}{2k}} X^{-\frac{1}{2s}} Y^{-\frac{1}{2k}}.$$

Так как $k \geq k_1 \geq 3$, $s \geq s_1 > 3$, то

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2s}} &\leq 2^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}, \\ (\lg X)^{\frac{1}{2s}} &\leq \exp\left(\frac{\lg \lg m}{2s_1}\right) \leq \exp\left(\frac{\lg \lg m}{\varepsilon^{-2}(\lg x)^{8\gamma}}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{\lg \lg m}{(\lg x)^{2\gamma}}\right) = \exp(C^{\frac{1}{12}} (\lg \lg m)^{-1}) \leq 2, \\ (\lg Y)^{\frac{1}{2k}} &\leq \exp\left(\frac{\lg \lg m}{2k_1}\right) \leq \exp\left(\frac{\lg \lg m}{\varepsilon^{-1}(\lg x)^{2\gamma}}\right) \leq \exp\left(\frac{\lg \lg m}{(\lg x)^{2\gamma}}\right) \leq 2, \end{aligned}$$

и поэтому

$$(\pi_1(X))^{-\frac{1}{2s}} (\pi_1(Y))^{-\frac{1}{2k}} \leq 2^{\frac{7}{3}} X^{-\frac{1}{2s}} Y^{-\frac{1}{2k}}.$$

Таким образом,

$$\Delta' \leq 2^{\frac{7}{3}} 3^{\frac{4}{3}} d^{\frac{1}{2ks}} X^{-\frac{1}{2s}} Y^{-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2ks}} m^{\frac{1}{2ks}}.$$

Принимая во внимание неравенства (21) и (22), будем иметь

$$\begin{aligned} m^{\frac{1}{2ks}} X^{-\frac{1}{2s}} Y^{-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2ks}} \\ \leq m^{\frac{1}{2ks}} \left(m^{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k^2-1}}\right)^{-\frac{1}{2s}} \left(\frac{1}{4} m^{\frac{1}{2s+1}}\right)^{-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2ks}} \leq 4^{\frac{1}{2k} - \frac{1}{2ks}} m^{-\delta}, \end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{s - 6k^2}{2ks(2s + 1)(4k^2 - 1)}.$$

Обращаясь к (14), находим нижнюю границу для величины δ :

$$\delta \geq \frac{\varepsilon^5}{16(\lg x)^{24\gamma}} = \frac{C \lg \lg m}{16 \lg m}.$$

Собрав все полученные оценки вместе, найдем верхнюю границу для Δ' в виде

$$\Delta' \leq 2^{\frac{7}{3}} 3^{\frac{4}{3}} 4^{\frac{1}{6}} d^{\frac{1}{2ks}} (\lg m)^{-\frac{C}{16}} < 28 d^{\frac{1}{2ks}} (\lg m)^{-\frac{C}{16}}.$$

Наконец, замечая, что $ks \geq k_1 s_1$, получаем

$$T \leq 28XY d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{-\frac{C}{16}},$$

так что

$$|W_1| \leq 56XY d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{1-\frac{C}{16}}.$$

Далее, из определения величины u следует, что в сумме $W(X, Y)$ каждое значение u повторяется не более

$$(\mu - 1)! (\nu - 1)! = (\mu\nu)^{-1} \mu! \nu!$$

раз. Поэтому

$$|W(X, Y)| \leq \sum'_{u \leq x(XY)^{-1}} (\mu\nu)^{-1} \mu! \nu! |W_1|,$$

где штрих в сумме по u означает отсутствие повторяющихся слагаемых. Воспользовавшись найденной выше оценкой W_1 , получим последовательно ряд неравенств:

$$\begin{aligned} |W(X, Y)| &\leq (\mu\nu)^{-1} \mu! \nu! x(XY)^{-1} 56XY d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{1-\frac{C}{16}} \\ &= 56\mu! \nu! (\mu\nu)^{-1} x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{1-\frac{C}{16}}, \\ (\mu! \nu!)^{-1} |W| &\leq (\mu! \nu!)^{-1} (\lg m)^3 (\mu\nu)^{-1} 56\mu! \nu! x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{1-\frac{C}{16}} \\ &= 56(\mu\nu)^{-1} x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{4-\frac{C}{16}}, \\ |S_{\mu, \nu}| &\leq (\mu! \nu!)^{-1} |W| + \frac{2x}{\lg x} \leq 56(\mu\nu)^{-1} x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{4-\frac{C}{16}} + \frac{2x}{\lg x}, \\ \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |S_{\mu, \nu}| &\leq 2 \lg \mu_0 \lg \nu_0 \cdot 56x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{4-\frac{C}{16}} + \frac{2\mu_0 \nu_0 x}{\lg x}. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства (20), получим

$$\begin{aligned} 112 \lg \mu_0 \lg \nu_0 &< \lg m, \\ \frac{2\mu_0 \nu_0 x}{\lg x} &< \frac{16x}{(\lg x)^2} \lg m (\lg x)^{14\gamma} \\ &= 16C^{-\frac{7}{12}} x (\lg m)^{-\frac{4}{3}} (\lg x)^{\frac{11}{12}} (\lg \lg m)^{-\frac{7}{12}} < x (\lg m)^{-\frac{1}{9}}, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_0} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |S_{\mu,\nu}| < x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{5-\frac{C}{16}} + x (\lg m)^{-\frac{1}{9}}.$$

Если взять теперь $C = 160$, то для S_1 получится следующая оценка:

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \sum_{\mu=0}^{\mu_0} \sum_{\nu=0}^{\nu_0} |S_{\mu,\nu}| < x\Delta + x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{-5} + x (\lg m)^{-\frac{1}{9}} \\ &\leq 2x\Delta + x d^{\frac{1}{2k_1 s_1}} (\lg m)^{-5} = x(2\Delta + \Delta_1). \end{aligned}$$

Переходя к оценке S , будем иметь

$$|S| \leq |S_1| + \frac{2x}{\lg x} < x \left(2\Delta + \Delta_1 + \frac{2}{\lg x} \right) < x(3\Delta + \Delta_1).$$

Поскольку

$$3\Delta = 3C^{\frac{1}{24}} (\lg x)^{-\frac{5}{24}} (\lg m)^{\frac{1}{6}} (\lg \lg m)^{\frac{1}{24}} \lg \lg x < 4(\lg x)^{-\frac{5}{24}} (\lg m)^{\frac{1}{6}} (\lg \lg m)^{\frac{25}{24}} = \Delta_2,$$

то

$$|S| \leq x(\Delta_1 + \Delta_2).$$

Теорема 1 доказана.

§ 4. Дробные доли чисел вида $\frac{an^* + bn}{m}$

Оценка тригонометрической суммы, полученная в предыдущем параграфе, может быть использована в решении ряда вопросов, касающихся распределения дробных долей специального вида функций, когда аргумент пробегает “короткую” последовательность значений.

Пусть, как и выше, $m \geq m_1$ — достаточно большое натуральное число, x — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\exp((\lg m)^{\frac{4}{5}} (\lg \lg m)^{\frac{73}{5}}) \leq x \leq m^{\frac{4}{7}},$$

a, b — целые числа, причем $(a, m) = 1$. Обозначим N количество чисел, не превосходящих x и взаимно простых с m .

Ниже будут доказаны две следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть α и β — вещественные числа, подчиненные условию $0 \leq \alpha < \beta < 1$, $K(\alpha, \beta)$ — число решений системы неравенств

$$\alpha \leq \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} < \beta, \quad 1 \leq n \leq x, \quad (n, m) = 1.$$

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$K(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)N + O(x\Delta),$$

где

$$\Delta = (\lg x)^{-\frac{5}{24}} (\lg m)^{\frac{1}{6}} (\lg \lg m)^{\frac{49}{24}},$$

а постоянная в знаке O абсолютная.

ТЕОРЕМА 3. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum'_{n \leq x} \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} = \frac{1}{2}N + O(x\Delta),$$

где

$$\Delta = (\lg x)^{-\frac{5}{24}} (\lg m)^{\frac{1}{6}} (\lg \lg m)^{\frac{49}{24}},$$

а постоянная в знаке O абсолютная.

Прежде чем приступить к доказательству этих утверждений, отметим два обстоятельства. Во-первых, задавшись некоторым $0 < \delta < \frac{1}{16}$ и целым $\rho \geq 1$, утверждение теоремы 2 достаточно доказать для случая $2\delta < \beta - \alpha < 1 - 2\delta$, поскольку при $0 < \beta - \alpha \leq 2\delta$

$$K(\alpha, \beta) = K(\alpha, \alpha + 1 - 2\delta) - K(\beta, \alpha + 1 - 2\delta),$$

а при $1 - 2\delta \leq \beta - \alpha < 1$

$$K(\alpha, \beta) = K\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}\right) + K\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta\right).$$

Во-вторых, из леммы 7 следует, что обе теоремы будут доказаны (первая – для случая $2\delta < \beta - \alpha < 1 - 2\delta$), если будет получена соответствующая асимптотика для суммы

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{an^* + bn}{m}\right),$$

где $\psi(x)$ – “стаканчик” Виноградова, построенный по заданным δ , ρ , α и β (лемма 6). Поэтому мы объединим доказательства обоих утверждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $r_0 = (\lg m)^{36}$, $\delta = r_0^{-1/2}$, $\rho = [r_0^{1/4}]$ и будем считать, что $2\delta < \beta - \alpha < 1 - 2\delta$. Пользуясь леммой 6, построим “стаканчик” Виноградова $\psi(x)$, отвечающий выбранным δ , ρ , α и β , и рассмотрим сумму $U(\alpha, \beta)$. Разлагая ψ в ряд Фурье, получим для $U(\alpha, \beta)$ выражение

$$U(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)N + R,$$

где

$$R = \sum_{r \neq 0} g(r)S_r, \quad S_r = \sum'_{n \leq x} \exp\left(2\pi i r \frac{an^* + bn}{m}\right).$$

Оценим величину R . Прежде всего заметим, что

$$R \ll \sum_{r=1}^{+\infty} c(r)|S_r|,$$

где величины $c(r)$ определены в (12). Далее, сумму по r разобьем на две, так что

$$R \ll \left(\sum_{r \leq r_0} + \sum_{r > r_0} \right) c(r)|S_r| = R_1 + R_2,$$

и оценим каждую из этих сумм по-своему. Если $r \leq r_0$, то $d = (ar, m) \leq r \leq r_0$. Оценивая S_r с помощью теоремы 1, получим

$$|S_r| \leq x(\Delta_1 + \Delta_2),$$

причем

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= r_0^{\frac{1}{2k_1s_1}} (\lg m)^{-5} \leq r_0^{\frac{1}{18}} (\lg m)^{-5} = (\lg m)^{-3}, \\ \Delta_2 &= 4(\lg x)^{-\frac{5}{24}} (\lg m)^{\frac{1}{6}} (\lg \lg m)^{\frac{25}{24}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta_1 < \Delta_2$, то $|S_r| \ll x\Delta_2$. Поэтому

$$R_1 \ll \sum_{r \leq r_0} c(r)x\Delta_2 \ll x\Delta_2 \sum_{r \leq r_0} \frac{1}{r} \ll x\Delta_2 \lg r_0 \ll x\Delta_2 \lg \lg m \ll x\Delta,$$

где $\Delta = (\lg x)^{-\frac{5}{24}} (\lg m)^{\frac{1}{6}} (\lg \lg m)^{\frac{49}{24}}$.

Сумму R_2 оценим тривиально:

$$R_2 \leq \sum_{r > r_0} \frac{1}{\pi r} \left(\frac{\rho}{r\delta} \right)^\rho x \ll \frac{x}{r_0} \left(\frac{\rho}{r_0\delta} \right)^\rho \ll \frac{x}{r_0} r_0^{-\frac{\rho}{4}} \ll x\Delta.$$

Таким образом, $R \ll x\Delta$, и

$$U(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)N + O(x\Delta).$$

Пользуясь леммой 7 и замечая, что

$$N\delta \ll x(\lg m)^{-18} \ll x\Delta,$$

получаем утверждения теорем 2 и 3.

В заключение выясним, когда асимптотические формулы для величин $K(\alpha, \beta)$ и $S = \sum'_{n \leq x} \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\}$ нетривиальны, т.е. когда остаточный член будет меньше главного. Для этого необходимо оценить величину N . Имеем

$$\begin{aligned} N &= \sum'_{n \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} \sum_{d|(n, m)} \mu(d) = \sum_{\substack{d|m \\ d \leq x}} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] = \sum_{d|m} \mu(d) \left[\frac{x}{d} \right] \\ &= x \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d|m} \mu(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} = \frac{\varphi(m)}{m} x + \theta \cdot \tau(m), \end{aligned}$$

где $|\theta| \leq 1$. Далее, как известно,

$$c_1 (\lg \lg m)^{-1} \leq \frac{\varphi(m)}{m} < 1,$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная. Поэтому

$$N \geq \frac{c_1 x}{\lg \lg m} - \tau(m).$$

Пусть m таково, что $\tau(m)$ мало, т.е. для $\tau(m)$ выполнено неравенство

$$\tau(m) \leq \frac{c_1 x}{2 \lg \lg m}$$

(это выполнено, например, когда $m = p$ – простое число). Тогда

$$N \geq \frac{c_1 x}{2 \lg \lg m}.$$

Асимптотическая формула для S будет нетривиальной, если

$$x\Delta \ll x(\lg \lg m)^{-1},$$

т.е. если выполнено неравенство

$$\lg x \gg (\lg m)^{\frac{4}{5}} (\lg \lg m)^{\frac{73}{5}}.$$

При выполнении этого условия будет нетривиальной и асимптотика для величины $K(\alpha, \beta)$, если только α и β – фиксированные числа. В общем же случае ввиду соотношения

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \lg \tau(m) \frac{\lg \lg m}{\lg m} = \lg 2$$

асимптотические формулы для S и $K(\alpha, \beta)$ будут нетривиальны, вообще говоря, лишь при

$$x \geq \exp \left(c_2 \frac{\lg m}{\lg \lg m} \right),$$

где $c_2 > \lg 2$.

Список литературы

1. Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta Math. 1926. V. 49. P. 407–464.
2. Salie H. Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v, q)$ // Math. Z. 1931. T. 34. S. 91–109.
3. Weil A. On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1948. V. 34. P. 204–207.
4. Carlitz L., Uchiyama S. Bounds for exponential sums // Duke Math. J. 1957. V. 24. P. 37–41.
5. Карацуба А. А. Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 2. С. 138–139.
6. Карацуба А. А. Дробные доли специального вида функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 61–80.
7. Карацуба А. А. Аналоги сумм Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 5. С. 93–102.
8. Карацуба А. А. Суммы дробных долей специального вида функций // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 3. С. 302.
9. Карацуба А. А. Аналоги неполных сумм Клоостермана и их приложения // Tatra Mountains Math. Publ. 1997. V. 11. P. 89–120.
10. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
11. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.

Поступило в редакцию
11.IV.2000