Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Куликов, Вик. С. Куликов, Общие накрытия плоскости с A - D - E -особенностями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 6, 65–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/im312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:46:46

УДК 512.7+515.1

В. С. Куликов, Вик. С. Куликов

Общие накрытия плоскости с A - D - E -особенностями

Изучаются представления алгебраической поверхности X с A - D - E -особенностями в виде общего накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, т.е. конечного морфизма, который вне особых точек имеет лишь складки и сборки, в окрестности особых точек изоморфен проекции поверхности $z^2 = h(x, y)$ на плоскость x, y , а кривая ветвления которого $B \subset \mathbb{P}^2$, кроме особенностей, произошедших из особенностей X , имеет лишь ноуды и простые каспы. Считается, что классики доказали, что так устроена общая проекция неособой поверхности $X \subset \mathbb{P}^r$. В работе этот результат доказывается для вложения поверхности X с A - D - E -особенностями, являющегося композицией исходного и вложения Веронезе. Обобщаются результаты работы [6], в которой исследуется гипотеза Кизини о том, что f однозначно восстанавливается по кривой B . Для этого изучаются расслоенные произведения общих накрытий. Выводится основное неравенство, ограничивающее степень накрытия в случае существования двух неэквивалентных накрытий с кривой ветвления B . Это неравенство применяется для доказательства гипотезы Кизини для m -канонических накрытий поверхностей основного типа при $m \geq 5$.

Библиография: 8 наименований.

Введение

Пусть $S \subset \mathbb{P}^r$ – неособая проективная поверхность, $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – ее общая проекция на плоскость, $B \subset \mathbb{P}^2$ – кривая ветвления, которую мы будем называть *дискриминантной кривой*. Считается, что классики доказали (см. [8, с. 104]), что:

- (i) f – конечное накрытие, которое имеет в качестве особенностей лишь двойные точки (складки), либо особые точки каспидального типа (сборки);
- (ii) при этом $f^*(B) = 2R + C$, где двойная кривая R неособа и неприводима, а кривая C приведена;
- (iii) кривая B является каспидальной, т.е. имеет лишь ноуды и простые каспы; над ноудами лежат по две двойные точки, а над каспами – по одной точке каспидального типа;
- (iv) ограничение f на R имеет степень 1.

Произвольный конечный морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ называется *общим* (или *простым*) *накрытием*, если он устроен так же, как общая проекция, т.е. обладает перечисленными свойствами. Два накрытия плоскости (S_1, f_1) и (S_2, f_2) называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

В данной работе мы рассматриваем обобщение понятия общего накрытия на случай поверхностей с A - D - E -особенностями. Прежде всего мы объясним, зачем нужно такое обобщение. Представление алгебраического многообразия в виде

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-01133), INTAS-OPEN-97-2072 и NWO-RFBR 047-008-005.

конечного накрытия проективного пространства является одним из эффективных способов изучения как самого многообразия, так и его модулей. Для сравнения напомним, что такой подход дает в случае кривых. Для кривой C рода g общее накрытие $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ – это накрытие, которое в каждом слое имеет не более чем одну точку ветвления, являющуюся двойной точкой (или особой точкой типа A_1 для f). Пусть $B \subset \mathbb{P}^1$ – множество точек ветвления, а $d = \deg B = \sharp(B)$. Тогда по формуле Гурвица $d = 2N + 2g - 2$, где $N = \deg f$. Если $N \geq g + 1$, то любую кривую рода g можно представить в виде простого накрытия степени N над $\mathbb{P}^1$. Множество всех общих накрытий (с точностью до эквивалентности) $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени N с d точками ветвления параметризуется многообразием Гурвица $H = H^{N,d}$. Пусть $\mathbb{P}^d \setminus \Delta$ (Δ – дискриминант) – проективное пространство, параметризующее наборы d различных точек в $\mathbb{P}^1$, а M_g – многообразие модулей кривых рода g . Мы имеем два отображения: отображение $h: H \rightarrow \mathbb{P}^d \setminus \Delta$, сопоставляющее f множество точек ветвления $B \subset \mathbb{P}^1$, и отображение $\mu: H \rightarrow M_g$, сопоставляющее накрытию f класс изоморфности кривой C . Многообразие H было введено и исследовано Гурвицем в 1891 г. Он показал, что многообразие H является связным, а h – конечным неразветвленным накрытием. На современном функториальном языке этот вопрос рассмотрен также У. Фултоном в 1969 г. Отображение μ является отображением “на” (и имеет слои размерности $N + (N - g + 1)$). Отсюда следует неприводимость многообразия модулей M_g .

В случае поверхностей мы также можем рассмотреть аналог многообразия Гурвица H всех общих накрытий (с точностью до эквивалентности) $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени N и дискриминантными кривыми B степени d и с данным числом n ноудов и данным числом s каспов. Пусть $\mathbb{P}^\nu$, $\nu = \frac{d(d+3)}{2}$, – проективное пространство, параметризующее кривые степени d , а $h: H \rightarrow \mathbb{P}^\nu$ – отображение, сопоставляющее накрытию f его дискриминантную кривую B . В [6] изучается гипотеза Кизини, которая утверждает, что если B – дискриминантная кривая общего накрытия f степени $N \geq 5$, то f однозначно с точностью до эквивалентности определяется по кривой B . Другими словами, это означает, что отображение h является инъективным (и, кроме того, $N = \deg f$ определяется по B). В [6] доказано, что гипотеза Кизини верна для почти всех общих накрытий. В частности, она верна для общих накрытий, заданных кратным каноническим классом. Для построения пространства модулей поверхностей основного типа используются их кратно-канонические вложения. Как известно [3], если S – минимальная поверхность основного типа, то при $m \geq 5$ линейная система $|mK_S|$ стягивает лишь (-2) -кривые и дает бирациональное отображение S на поверхность $X \subset \mathbb{P}^r$ (каноническую модель), имеющую лишь A - D - E -особенности (в другой терминологии, рациональные двойные точки, дювалевские особенности, простые особенности Арнольда и т.д.). Отсюда возникает необходимость обобщить понятие общего накрытия на случай поверхностей с A - D - E -особенностями.

В данной работе мы обобщаем классический результат об особенностях общей проекции неособой поверхности на случай поверхности с A - D - E -особенностями. Доказывается, что если поверхность $X \subset \mathbb{P}^r$ имеет лишь A - D - E -особенности, то, быть может после подкрутки, для общей проекции $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ дискриминантная кривая B также имеет лишь A - D - E -особенности. Это вытекает из следующей чуть более общей теоремы.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^r$ – поверхность, имеющая лишь изолированные особенности вида $z^2 = h(x, y)$ (“двойные плоскости”), $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – ограничение на X общей проекции $\mathbb{P}^r \setminus L \rightarrow \mathbb{P}^2$ из общего линейного подпространства L , $\dim L = r - 3$. Тогда:

- (i) f является конечным накрытием;
- (ii) в неособых точках поверхности X накрытие f имеет в качестве особенностей либо двойные точки (складки), либо особые точки каспидального типа (сборки); в окрестности этих точек f эквивалентно проекции поверхности $x = z^2$, соответственно $y = z^3 + xz$ на плоскость x, y ;
- (iii) в окрестности точек $s \in \text{Sing } X$ накрытие f аналитически эквивалентно проекции поверхности $z^2 = h(x, y)$ на плоскость x, y ; из (ii) и (iii) следует, что дивизор ветвления R приведен, т.е. $f^*(B) = 2R + C$, где $B = f(R)$, а R и C – приведенные кривые;
- (iv) вне особых точек $f(\text{Sing } X)$ дискриминантная кривая B является каспидальной;
- (v) ограничение f на R имеет степень 1.

На самом деле основная трудность в доказательстве этой теоремы лежит в классическом случае, когда поверхность X неособа. К сожалению, авторам неизвестно полное (и современное) доказательство этой теоремы, и, по-видимому, такого доказательства просто не существует. Поэтому ее доказательство даже в случае неособой поверхности представляет интерес. В статье мы доказываем ослабленный вариант теоремы 0.1, в котором исходное вложение “подкручено” на вложение Веронезе. Этого вполне достаточно для целей, описанных выше.

Таким образом, кривая B имеет, во-первых, “такие же” особенности, как и поверхность X (или кривая R), которые локально задаются уравнением $h(x, y) = 0$ и которые мы будем называть s -особенностями, в том числе s -ноудами и s -каспами, а, кроме того, на B могут быть ноуды и каспы, произошедшие из особенностей отображения f , которые мы будем называть p -ноудами и p -каспами. Над p -ноудом имеются две двойные точки накрытия f , в которых f локально задается как проекция поверхностей $z_1 = x^2$ и $z_2 = y^2$ на плоскость (x, y) .

Если S – поверхность с $A-D-E$ -особенностями, то накрытие $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ называется *общим*, если оно удовлетворяет свойствам теоремы 0.1.

Во-вторых, мы обобщим центральный результат работы [6] на случай поверхностей с $A-D-E$ -особенностями. Там доказано, что если общее накрытие $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ неособой поверхности S с дискриминантной кривой B имеет достаточно большую степень $\deg f = N$, именно при условии

$$N > \frac{4(3\bar{d} + g - 1)}{2(3\bar{d} + g - 1) - c}, \quad (1)$$

где $2\bar{d} = \deg B$, g – геометрический род кривой B , а c – число каспов, то B является дискриминантной кривой единственного общего накрытия (гипотеза Кизини для кривой B верна).

В случае особых поверхностей мы не можем ожидать аналогичного результата, так как для кривой B четной степени с $A-D-E$ -особенностями всегда существует двулистное накрытие, которое является общим. Однако если два общих накрытия

с данной дискриминантной кривой B имеют достаточно большие степени, то они эквивалентны. Более точно, мы докажем следующую теорему. Пусть имеются два общих накрытия $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ поверхностей с A - D - E -особенностями и одной и той же дискриминантной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$. Пусть $f_i^*(B) = 2R_i + C_i$, $i = 1, 2$. По отношению к паре накрытий f_1 и f_2 ноуды и каспы на B подразделяются на четыре типа: ss -, sp -, ps - и pp -ноуды и каспы. Например, sp -ноуд $b \in B$ – это ноуд, который является s -ноудом для f_1 и p -ноудом для f_2 . Число sp -ноудов обозначается n_{sp} . Тогда $n = n_{ss} + n_{sp} + n_{ps} + n_{pp}$. Аналогичная терминология применяется для каспов.

ТЕОРЕМА 0.2. Если f_1 и f_2 – два неэквивалентных общих накрытия, то

$$\deg f_2 \leq \frac{4(3\bar{d} + g_1 - 1)}{2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1}, \quad (2)$$

где $g_1 = p_a(R_1)$ – арифметический род кривой R_1 , а $\iota_1 = 2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp}$.

Мы применяем основное неравенство (2) для доказательства гипотезы Кизини в случае общих кратно-канонических накрытий. Пусть S – минимальная модель поверхности основного типа. По теореме Бомбьери [3] если $m \geq 5$, то m -каноническое отображение $\varphi_m: S \rightarrow \mathbb{P}^{pm-1}$, определенное полной линейной системой, численно эквивалентной $|mK_S|$, является бирациональным изоморфизмом, стягивающим лишь (-2) -кривые на S . Тогда каноническая модель $X = \varphi_m(S)$ имеет лишь A - D - E -особенности. Общую проекцию $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ назовем *общим m -каноническим накрытием для S* . Мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть S_1 и S_2 – минимальные модели поверхностей основного типа с одинаковыми (K_S^2) и $\chi(S)$, и пусть $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общие m -канонические накрытия с одной и той же дискриминантной кривой. Тогда при $m \geq 5$ накрытия f_1 и f_2 эквивалентны.

Рассмотрим подмногообразие $\mathcal{H} \subset \text{Hilb} \times \text{Gr}$, параметризующее m -канонические накрытия. Здесь Hilb – это подсхема схемы Гильберта, параметризующая численно m -канонические вложения $X \subset \mathbb{P}^M$ поверхностей с A - D - E -особенностями с фиксированными (K_S^2) и $\chi(S)$, Gr – грассманово многообразие центров проекций из $\mathbb{P}^M$ на $\mathbb{P}^2$, а $\mathcal{H}$ состоит из пар $(X \subset \mathbb{P}^M, L)$ таких, что ограничение проекции с центром в L на X является общим накрытием. В силу теоремы 0.1 имеется взаимно однозначное соответствие между множеством неприводимых (соответственно связных) компонент в Hilb и в $\mathcal{H}$. Пусть $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}^\nu$ – отображение, сопоставляющее накрытию его дискриминантную кривую. Обозначим $\mathcal{D}$ многообразие плоских кривых степени d с A - D - E -особенностями, у которых число ноудов $\geq n_p$, а число каспов $\geq c_p$, где d, n_p, c_p определяются инвариантами поверхности S (см. § 6). Из теоремы 0.1 вытекает (см. [6, § 5])

СЛЕДСТВИЕ. Отображение, индуцированное отображением h , из множества неприводимых (соответственно связных) компонент многообразия $\mathcal{H}$ во множество неприводимых (соответственно связных) компонент многообразия $\mathcal{D}$ является инъективным.

Доказательство основного неравенства (2) в [6] в случае неособых поверхностей проводится следующим образом. Для сравнения накрытий f_1 и f_2 рассматривается нормализация X расслоенного произведения $X_1 \times_{\mathbb{P}^2} X_2$. Пусть $g_i: X \rightarrow X_i$,

$i = 1, 2$, – соответствующие отображения на сомножители. Прообраз $g_1^{-1}(R_1) = R + C$ распадается на две части: R – это кривая, которая отображается с помощью g_2 на R_2 , а C – на C_2 . Если f_1 и f_2 не эквивалентны, то поверхность X неприводима, а если X_i неособы, то X тоже неособа. Основное неравенство получается, если применить теорему Ходжа об индексе для пары дивизоров R и C на X . Мы используем ту же идею и в случае поверхностей с A - D - E -особенностями. Для этого мы проводим локальный анализ нормализации расслоенного произведения X в случае общих накрытий поверхностей с A - D - E -особенностями.

В § 1 мы обобщаем теорему об общей проекции на случай поверхностей с A - D - E -особенностями. В § 2 проводится локальный анализ нормализации расслоенного произведения X . В § 3 мы исследуем канонический цикл A - D - E -особенности, с помощью которого в § 4 мы вычисляем числовые инварианты общего накрытия на минимальном разрешении S поверхности X . В § 5 доказывается основное неравенство (2). Наконец, в § 6 доказывается гипотеза Кизини для m -канонических накрытий поверхностей основного типа.

§ 1. Особенности общей проекции поверхности с A - D - E -особенностями

В этом параграфе мы приведем доказательство теоремы 0.1.

1.1. Общая проекция в $\mathbb{P}^3$. Пусть $X \subset \mathbb{P}^r$ – поверхность степени $\deg X = N$, имеющая лишь изолированные гиперповерхностные особенности $x_1, \dots, x_k$, т.е. такие, для которых размерность касательного пространства $\dim T_{X, x_i} = 3$. Обозначим $\pi_L: \mathbb{P}^r \setminus L \rightarrow \mathbb{P}^{e-1}$ проекцию из линейного подпространства L коразмерности e . Ее можно получить как композицию проекций из точки. Теорема 0.1 о проекции X на плоскость ($e = 3$) есть одна из серии теорем об общих проекциях для различных e , начиная с проекции из точки ($e = r$) и кончая проекцией на прямую ($e = 2$), т.е. пучками Лефшеца.

Классический результат состоит в том, что если $r > 5$ ($= 2 \dim X + 1$), то проекция из общей точки дает изоморфное вложение X в $\mathbb{P}^{r-1}$. Отсюда следует, что если $e \geq 6$, то проекция из общего пространства L дает изоморфное вложение X в $\mathbb{P}^{e-1}$. В частности, поверхность X общей проекцией вкладывается в $\mathbb{P}^5$. При проекции в $\mathbb{P}^4$, $e = 5$, на $\pi_L(X)$ появляются изолированные особенности, которые нетрудно описать. Для доказательства теоремы 0.1 мы собираемся рассмотреть общую проекцию X в $\mathbb{P}^3$, $e = 4$, и воспользоваться следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $X \subset \mathbb{P}^r$ – поверхность, имеющая лишь изолированные гиперповерхностные особенности x_i , то для общего подпространства $L \subset \mathbb{P}^r$ коразмерности 4 ограничение проекции $\pi_L: \mathbb{P}^r \setminus L \rightarrow \mathbb{P}^3$ дает бирациональное отображение X на поверхность $Y \subset \mathbb{P}^3$, которое является изоморфизмом вне двойной кривой $D \subset X$, не проходящей через точки x_i , а Y имеет, кроме точек $\pi_L(x_i)$, лишь обыкновенные особенности – двойную кривую $\Delta = \pi_L(D)$, на которой лежит конечное множество тройных точек и конечное множество пинчей. В окрестностях этих точек в подходящих локальных аналитических координатах Y имеет следующие нормальные формы: $uv = 0$ для обыкновенных двойных точек, $uvw = 0$ для обыкновенных тройных точек, $u^2 - vw^2 = 0$ для пинчей (или “зонтиков Уитни”).*

Современное доказательство этой теоремы можно найти в [5, т. 2, с. 651–660]. Наличие особых точек x_i не добавляет особых хлопот: мы должны только позаботиться о том, чтобы центр проекции L не пересекался с касательными пространствами T_{X,x_i} , $\dim T_{X,x_i} = 3$. Доказательство этой теоремы можно найти также в [7].

Мы хотим доказать, что для общей точки $\xi \in \mathbb{P}^3$ композиция проекций π_L и $\pi_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{P}^2$, т.е. проекция $\mathbb{P}^3 \setminus \pi_L^{-1}(\xi) \rightarrow \mathbb{P}^2$ с центром в $\pi_L^{-1}(\xi)$, при ограничении на X , $f = \pi_\xi \circ \pi_L|_X: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, дает накрытие, удовлетворяющее свойствам, сформулированным в теореме 0.1.

1.2. Расположение прямых по отношению к поверхности в $\mathbb{P}^3$. Для описания проекции π_ξ нам нужно исследовать расположение прямых $l \subset \mathbb{P}^3$ по отношению к поверхности Y . Прямая l называется *трансверсальной* к Y в точке y , если она трансверсальна к касательному конусу к Y в этой точке. Это значит, что $(l \cdot Y)_y = 1$, если $y \notin \text{Sing } Y$, $(l \cdot Y)_y = 2$, если $y \in \Delta \setminus \Delta_t$, и $(l \cdot Y)_y = 3$, если $y \in \Delta_t$. Мы обозначаем через Δ_t и Δ_p множество тройных точек и множество пинчей. Если l не трансверсальна к Y в точке y , то мы скажем, что она касается Y в этой точке. Прямая l называется *простой касательной* к Y в точке y , если $y \notin \text{Sing } Y$ и $(l \cdot Y)_y = 2$, либо если $y \in \Delta \setminus (\Delta_t \cup \Delta_p)$ и $(l \cdot Y)_y = 3$, т.е. $(l \cdot Y)_y = 2$ для одной из двух ветвей Y_i в точке y . Прямая l называется *стационарной*, соответственно *простой стационарной* касательной к Y в точке y , если $y \notin \text{Sing } Y$ и $(l \cdot Y)_y \geq 3$, соответственно $(l \cdot Y)_y = 3$. Прямая l называется *простой касательной*, соответственно *простой стационарной касательной* к Y , если l трансверсальна к Y во всех точках, кроме одной, в которой l является простой касательной, соответственно простой стационарной касательной, а остальные точки пересечения $l \cap Y$ неособы на Y . Наконец, l называется *простой бикасательной*, если l трансверсальна к Y во всех точках, кроме двух, в которых имеется простое касание, в этих точках касательные плоскости к Y не совпадают, а $l \cap \text{Sing } Y = \emptyset$. Мы хотим доказать, что для общей точки $\xi \in \mathbb{P}^3$ все прямые $l \ni \xi$ являются по отношению к Y не хуже чем простыми бикасательными и простыми стационарными касательными.

Для исследования расположения прямых $l \subset \mathbb{P}^3$ по отношению к Y мы рассмотрим грасманово многообразие $G = G(1, 3)$ и многообразие флагов $\mathbb{F} = \{(\xi, l) \in \mathbb{P}^3 \times G \mid \xi \in l\}$. Имеем две проекции $\text{pr}_1: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{P}^3$ и $\text{pr}_2: \mathbb{F} \rightarrow G$, которые являются $\mathbb{P}^2$ - и $\mathbb{P}^1$ -расслоениями соответственно; $\dim \mathbb{F} = 5$, а $\dim G = 4$. В дальнейшем мы рассматриваем точки $\xi \in \mathbb{P}^3$ как центры проектирований $\pi_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{P}^2$. Слой $\text{pr}_1^{-1}(\xi) \simeq \mathbb{P}^2$ проекцией pr_2 изоморфно отображается на $\mathbb{P}_\xi^2 \subset G$. Для $\xi \in \mathbb{P}^3$ имеем сечение $s_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{F}$ проекции pr_1 , $y \mapsto (y, \overline{\xi y})$. Тогда π_ξ совпадает с ограничением проекции pr_2 на $s_\xi(\mathbb{P}^3 \setminus \xi)$.

Мы рассмотрим сначала случай, когда поверхность Y неособа, а затем опишем необходимые изменения и дополнения в случае, когда на Y имеются двойная кривая Δ и изолированные особенности s_i .

Рассмотрим фильтрацию многообразия $\mathbb{F}$ подмногообразиями

$$Z_k = \{(\xi, l) \in \mathbb{F} \mid (l \cdot Y)_\xi \geq k\}.$$

Тогда $Z_1 = \text{pr}_1^{-1}(Y)$, $\dim Z_1 = 4$. Над общей точкой $l \in G$ отображение $\varphi = \text{pr}_2|_{Z_1}: Z_1 \rightarrow G$ есть неразветвленное накрытие степени N . Если на Y не лежат прямые, то φ – конечное накрытие и Z_2 есть дивизор ветвления этого накрытия.

Рассмотрим теперь ограничения проекции pr_1 . Многообразие Z_2 изоморфно проективизированному касательному расслоению, $Z_2 \simeq \mathbb{P}(\Theta_Y)$, и $Z_2 \rightarrow Y$ есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение, $\dim Z_2 = 3$. В общей точке $y \in Y$ в $T_{Y,y}$ есть два асимптотических направления l_1 и l_2 , для которых $(l_1 \cdot Y)_y \geq 3$ и $(l_2 \cdot Y)_y \geq 3$. Поэтому над общей точкой ограничение pr_1 на Z_3 , $\psi: Z_3 \rightarrow Y$, есть двулистное накрытие, кривая ветвления которого $P \subset Y$ — это параболическая кривая, состоящая из точек, в которых асимптотические направления совпадают. Несколько слоев проекции pr_1 являются исключительными кривыми отображения ψ . Их проекции на Y — это точки y , в которых ограничение второго дифференциала локального уравнения Y на касательную плоскость $T_{Y,y}$ есть нуль. Такие точки y мы назовем *точками утолщения* поверхности Y . Кривая $H = \psi(Z_4) \subset Y$ состоит из точек y , в которых хотя бы одно из чисел $(l_i \cdot Y)_y \geq 4$. (H — кривая, если поверхность Y не квадрика.)

1.3. Отсутствие не простых стационарных касательных. Рассмотрим произведение $Y \times \mathbb{F} \subset Y \times \mathbb{P}^3 \times G$ и проекции pr'_1 и pr'_2 на $Y \times \mathbb{P}^3$ и $Y \times G$. Мы можем рассматривать многообразия Z_k как подмногообразия в $Y \times G \subset \mathbb{P}^3 \times G$. Рассмотрим многообразие

$$I_4 = \{(y; \xi, l) \in Y \times \mathbb{F} \mid (l \cdot Y)_y \geq 4\} = (\text{pr}'_2)^{-1}(Z_4).$$

Проекция $\text{pr}'_2 = \text{id}_Y \times \text{pr}_2$ так же, как и $\text{pr}_2: \mathbb{F} \rightarrow G$, является $\mathbb{P}^1$ -расслоением. Поэтому $\dim I_4 = 2$ и $\dim \Sigma_4 \leq 2$, где $\Sigma_4 = p_2(I_4)$, а p_2 — проекция $Y \times \mathbb{P}^3 \times G$ на $\mathbb{P}^3$. Тогда если $\xi \in \mathbb{P}^3 \setminus \Sigma_4$, то для любой прямой $l \ni \xi$ в любой точке $y \in Y$ имеем $(l \cdot Y)_y \leq 3$.

1.4. Отсутствие не простых бикасательных. Рассмотрим многообразие $\Sigma_{2,3} \subset \mathbb{P}^3$, заматаемое не простыми бикасательными, и покажем, что $\Sigma_{2,3} \leq 2$. Рассмотрим произведение $Y \times Y \times \mathbb{F} \subset Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$ и подмногообразия $I_{i,j}$, которые являются замыканиями

$$I_{i,j}^0 = \{(y_1, y_2; \xi, l) \in Y \times Y \times \mathbb{F} \mid (Y \cdot l)_{y_1} \geq i, (Y \cdot l)_{y_2} \geq j, y_1 \neq y_2\}.$$

Обозначим pr_2'' проекцию $Y \times Y \times \mathbb{F}$ на $Y \times Y \times G$, и пусть $\text{pr}_2''(I_{i,j}) = \tilde{I}_{i,j}$. Проекция pr_2'' и ее ограничения на $I_{i,j}$, $I_{i,j} \rightarrow \tilde{I}_{i,j}$, являются $\mathbb{P}^1$ -расслоениями.

ЛЕММА 1.1. *Имеем $\dim I_{2,3} \leq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подмногообразия

$$Y \times Y \times G \supset \tilde{I}_{1,1} \supset \tilde{I}_{2,1} \supset \tilde{I}_{2,2} \supset \tilde{I}_{2,3},$$

и пусть q_1 обозначает проекцию на первый сомножитель. Очевидно, что $\tilde{I}_{1,1}$ — неприводимое многообразие размерности $\dim \tilde{I}_{1,1} = 4$, бирационально изоморфное $Y \times Y$. Проекция $q_1: \tilde{I}_{2,1} \rightarrow Y$ есть расслоение на кривые $q_1^{-1}(y) \simeq C_y$, где $C_y = Y \cap T_{Y,y}$. Кривая C_y имеет особенность в точке y , которая является ноудом для общей точки y .

Ограничение проекции на $\tilde{I}_{2,2}$, $q_1: \tilde{I}_{2,2} \rightarrow Y$, есть также отображение “на”, и его слой над точкой $y \in Y$ есть

$$q_1^{-1}(y) = \{(y, y', l) \mid l \subset T_{Y,y} \text{ и } l \text{ касается } C_y \text{ в точке } y'\}.$$

Мы хотим доказать, что $q_1(\tilde{I}_{2,3})$ есть не все Y , т.е. вложение $Y \subset \mathbb{P}^3$ обладает следующим свойством:

(L₁) существует точка $y \in Y$ такая, что все прямые $l \subset T_{Y,y}$, проходящие через y , имеют с $C_y \setminus \{y\}$ лишь простые касательные.

Это будет доказано ниже, в п. 1.6 (предложение 1.2), в предположении, что вложение $Y \subset \mathbb{P}^3$ получено проекцией из вложения, “подправленного” вложением Веронезе v_k , $k \geq 2$.

Таким образом, $\dim q_1(\tilde{I}_{2,3}) \leq 1$. Общий слой отображения $q_1: \tilde{I}_{2,3} \rightarrow Y$ нульмерен (если он одномерен, то Y – линейчатая поверхность, и мы получаем противоречие со свойством (L₁)), поэтому $\dim \tilde{I}_{2,3} \leq 1$ и, следовательно, $\dim I_{2,3} \leq 2$.

Обозначим $\Sigma_{2,3} = p_3(I_{2,3})$, где p_3 – проекция $Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$ на $\mathbb{P}^3$. Из леммы 1.1 следует, что $\dim \Sigma_{2,3} \leq 2$. Если $\xi \notin \Sigma_{2,3}$, то любая прямая $l \ni \xi$, которая касается Y в двух точках y_1 и y_2 , имеет в этих точках простое касание.

1.5. Отсутствие 3-касательных. Рассмотрим произведение $Y \times Y \times Y \times \mathbb{F} \subset Y \times Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$ и подмногообразия $I_{i,j,k}$, которые являются замыканиями подмногообразий

$$I_{i,j,k}^0 = \{(y_1, y_2, y_3; \xi, l) \in Y \times Y \times Y \times \mathbb{F} \mid (Y \cdot l)_{y_1} \geq i, (Y \cdot l)_{y_2} \geq j, (Y \cdot l)_{y_3} \geq k\},$$

где $y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_1$. Обозначим $\text{pr}_2^{(3)}$ проекцию $Y \times Y \times Y \times \mathbb{F}$ на $Y \times Y \times Y \times G$, и пусть $\tilde{I}_{i,j,k} = \text{pr}_2^{(3)}(I_{i,j,k}^0)$. Как и выше, ясно, что $\dim \tilde{I}_{1,1,1} = 4$, а так как $\text{pr}_1^{(3)}$ есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение, то $\dim I_{1,1,1} = 5$.

ЛЕММА 1.2. Имеем $\dim I_{2,2,2} \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять рассмотрим проекции $Y \times Y \times Y \times G$ и его подмногообразий

$$Y \times Y \times Y \times G \supset \tilde{I}_{1,1,1} \supset \tilde{I}_{2,1,1} \supset \tilde{I}_{2,2,1} \supset \tilde{I}_{2,2,2}$$

на первый множитель. Рассмотрим $q_1: \tilde{I}_{2,2,2} \rightarrow Y$. Прообраз точки $y \in Y$ суть $q_1^{-1}(y) = \{(y, y_2, y_3; l) \mid l \subset T_{Y,y}, l \text{ касается } C_y \text{ в точках } y_2, y_3 \in l\}$. Как и в лемме 1, достаточно доказать, что $q_1(\tilde{I}_{2,2,2})$ не совпадает со всем Y . Это значит, что существует точка $y \in Y$, которая обладает следующим свойством:

(L₂) ни одна прямая $l \subset T_{Y,y}$, проходящая через y , не является бикасательной, т.е. не может касаться $C_y \setminus \{y\}$ в двух различных точках.

Это будет доказано в следующем п. 1.6 (предложение 1.2) в предположении, что вложение $Y \subset \mathbb{P}^3$ получено проекцией из вложения, “подправленного” вложением Веронезе v_k .

Обозначим $\Sigma_{2,2,2} = p_4(I_{2,2,2})$, где p_4 – проекция $Y \times Y \times Y \times \mathbb{P}^3 \times G$ на $\mathbb{P}^3$. Тогда $\dim \Sigma_{2,2,2} \leq 2$, и если $\xi \notin \Sigma_{2,2,2}$, то любая прямая $l \ni \xi$ касается Y не более чем в двух точках.

1.6. Вложения со свойством Лефшеца. Свойства (L₁) и (L₂) означают, что существует точка $y \in Y$, для которой проектирование π_y кривой $C_y \setminus \{y\} \subset T_{Y,y} \simeq \mathbb{P}^2$ из точки y является пучком Лефшеца. Таким образом, для доказательства лемм 1 и 2 нам необходимо доказать существование точки $y \in Y$ со следующим “свойством Лефшеца” (L) относительно вложения в $\mathbb{P}^3$. Мы его сформулируем для поверхности X в проективном пространстве произвольной размерности.

Пусть имеется вложение $X \subset \mathbb{P}^r$ поверхности в проективное пространство. Мы скажем, что *гиперплоскость* $L_1 \subset \mathbb{P}^r$ *обладает свойством* (L), если кривая $X \cap L_1$ имеет единственный нод, т.е. L_1 касается X в единственной точке x , в которой кривая $X \cap L_1$ имеет обыкновенную квадратичную особенность. Другими словами, точка $[L_1] \in \check{\mathbb{P}}^r$, соответствующая L_1 , есть неособая точка двойственного многообразия $X^\vee$. Мы скажем, что *пара* (L_1, L_3) , где $L_3 \subset L_1$ – линейное подпространство размерности $r-3$, *обладает свойством* (L), если: L_1 обладает свойством (L), $x \in L_3$ и проекция кривой $X \cap L_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ из центра L_3 является пучком Лефшеца, т.е. каждый слой этого (рационального) отображения содержит не более одной особой точки и эта точка может быть лишь квадратичной (имеет кратность 2). Мы скажем, что *вложение* $X \subset \mathbb{P}^r$ *обладает свойством* (L), если $\exists x \in X$, для которой $L_1 = T_{X,x}$ обладает свойством (L) и L_1 можно дополнить до пары (L_1, L_3) со свойством (L).

Ясно, что если пара (L_1, L_3) обладает свойством (L) и $Y \subset \mathbb{P}^3$ получена из X проектированием из центра $L_4 \subset L_3$, $\dim L_4 = r-4$, то вложение $Y \subset \mathbb{P}^3$ обладает свойством (L).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если $S \subset \mathbb{P}^q$ – вложение неособой поверхности, а $X = X_k \subset \mathbb{P}^{r_k}$ – ее композиция с вложением Веронезе v_k , $k \geq 2$, заданным многочленами степени k , то вложение $X \subset \mathbb{P}^{r_k}$ обладает свойством (L).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гиперплоскость L_1 , соответствующую точке $[L_1] \in X^\vee \setminus \text{Sing } X^\vee$. Тогда кривая $C = X \cap L_1$ содержит единственную особую точку – нод $x \in C$. Пусть $i: C \rightarrow X$ – вложение. Рассмотрим проекцию $\pi_{k,x}: \mathbb{P}^{r_k} \setminus x \rightarrow \mathbb{P}^{r_k-1}$ из точки x . Для доказательства предложения 1.1 достаточно показать, что образ $\pi_{k,x}(C)$ является неособой кривой в $\mathbb{P}^{r_k-1}$. Тогда если L'_3 , $\dim L'_3 = r_k - 3$, – центр проекции $\mathbb{P}^{r_k-1} \setminus L'_3 \rightarrow \mathbb{P}^1$, являющейся пучком Лефшеца для $\pi_{k,x}(C)$, то, очевидно, пара (L_1, L_3) , где $L_3 = \pi_{k,x}^{-1}(L'_3) \cap L_1$, обладает свойством (L).

Пусть I_x – пучок идеалов точки x на S и $\mathcal{O}_S(1)$ – пучок гиперплоских сечений. При отождествлении $v_k: S \simeq X$ отображение $\pi_{k,x}$ задается сечениями $H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x)$. Пусть $k = 2$, и пусть $\sigma: \bar{S} \rightarrow S$ – σ -процесс с центром в точке x . Мы можем считать, что $\bar{S}$ вложено в $\mathbb{P}^{r_2-1}$, где $r_2 - 1 = (q+3)/2$, и рациональное отображение $\sigma^{-1}: S \rightarrow \bar{S}$ задано сечениями $H^0(S, \mathcal{O}_S(2) \otimes I_x)$, т.е. совпадает с $\pi_{2,x}$. Отсюда следует предложение 1.1 в случае $k = 2$, так как собственный прообраз $\bar{C} = \sigma^{-1}(C) \subset \bar{S}$ является неособой кривой. Кроме того, отметим, что сечения, поднятые на $\bar{C}$, $i^*(H^0(S, \mathcal{O}_S(2) \otimes I_x))$, задают вложение $\bar{C}$ в $\mathbb{P}^{r_2-1}$. Следовательно, и при $k > 2$ сечения $i^*(H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x))$ также задают регулярное вложение $\bar{C}$ в $\mathbb{P}^{r_k-1}$, так как имеет место естественное вложение

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(k-2)) \otimes H^0(S, \mathcal{O}_S(2) \otimes I_x) \subset H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x),$$

и сечения $H^0(S, \mathcal{O}_S(k-2))$ не имеют базисных точек и неподвижных компонент. Поэтому сечения, поднятые на $\bar{C}$, $i^*(H^0(S, \mathcal{O}_S(k) \otimes I_x))$, разделяют точки и касательные направления кривой $\bar{C}$.

Скажем, что *линейное подпространство* L_4 размерности $r-4$ *обладает свойством* (L) *относительно вложения* $X \subset \mathbb{P}^r$, если проекция π_{L_4} на $\mathbb{P}^3$ из центра L_4 отображает X на поверхность $Y = \pi_{L_4}(X)$ с обыкновенными особенностями.

Как известно (см. [5]), в грассманиане $G_4 = \text{Gr}(r-4, r)$ имеется открытое подмножество U , точки которого соответствуют линейным подпространствам со свойством (L).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если вложение $X \subset \mathbb{P}^r$ обладает свойством (L), то существует линейное подпространство L_4 со свойством (L), которое можно дополнить до флага $L_1 \supset L_3 \supset L_4$ такого, что пара (L_1, L_3) обладает свойством (L). Другими словами, существует проекция на $\mathbb{P}^3$, для которой вложение $Y \subset \mathbb{P}^3$, где Y – образ поверхности X , обладает свойством (L).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $G_1 = \check{\mathbb{P}}^r$ двойственное пространство к $\mathbb{P}^r$, $G_3 = \text{Gr}(r-3, r)$ – грассманово многообразие линейных подпространств L_3 размерности $r-3$, а $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{1,3,4} \subset \check{\mathbb{P}}^r \times G_3 \times G_4$ – многообразие флагов $L_1 \supset L_3 \supset L_4$. Пусть $X^\vee$ – двойственное многообразие, $W \subset X \times X^\vee \subset \mathbb{P}^r \times \check{\mathbb{P}}^r$ – замкнутое подмногообразие, $W = \{(x, L_1) : L_1 \supset T_{X,x}\}$. Тогда проекция $W \rightarrow X^\vee$ является изоморфизмом над $X_0^\vee = X^\vee \setminus \text{Sing } X^\vee$, $W_0 \simeq X_0^\vee$.

Обозначим $Z \subset X \times \mathbb{F}$ замкнутое подмногообразие

$$Z = \{(x; L_1 \supset L_3 \supset L_4) : (x, L_1) \in W, L_3 \ni x\},$$

а $Z_0 \subset Z$ – открытое подмножество: $(x, L_1) \in W_0$. Тогда Z – неприводимое многообразие. Рассмотрим проекцию $Z_0 \rightarrow W_0$. Ее слои не пусты в силу предыдущего предложения, и в каждом слое содержится открытое множество точек z , для которых (L_1, L_3) обладает свойством (L) (так как центры проекций для пучков Лефшеца составляют открытое множество). Поэтому в Z содержится открытое множество Z_L , для точек которого пара (L_1, L_3) обладает свойством Лефшеца.

Очевидно, что $Z \rightarrow G_4$ – сюръективное отображение. Поэтому $p_4^{-1}(U)$, где p_4 – проекция Z на G_4 , не пустое открытое по Зарискому множество. Тогда $Z_L \cap p_4^{-1}(U)$ непусто, и если $(x; L_1 \supset L_3 \supset L_4)$ – точка из этого множества, то L_4 обладает нужными свойствами.

1.7. Проектирование в окрестности общей точки двойной кривой Δ .

Пусть теперь $Y \subset \mathbb{P}^3$ имеет обыкновенные особенности вдоль двойной кривой Δ и изолированные особенности $s_i \in Y \setminus \Delta$, $i = 1, \dots, k$, которые являются двойными плоскостями. Подмногообразия инцидентности, определенные в предыдущих пунктах, мы понимаем как замыкания соответствующих многообразий, определенных первоначально для открытой поверхности $Y \setminus \text{Sing } Y$.

Рассмотрим $Y \times \mathbb{F}$. В дополнение к обозначениям п. 1.3 пусть q_1 и q_2 обозначают проекции $Y \times G$ на Y и G . Рассмотрим пересечение $\tilde{A} = (\Delta \times G) \cap Z_3$. Тогда ограничение проекции $Y \times G \rightarrow Y$ на $\tilde{A}$, $\tilde{A} \rightarrow \Delta$, над общей точкой есть накрытие степени 4: точке $y \in \Delta$ соответствуют по две асимптотические прямые к каждой из двух ветвей Y в точке y . Поэтому $\tilde{A}$ – кривая. Пусть $A = (\text{pr}'_2)^{-1}(\tilde{A})$. Это есть линейчатая поверхность. Пусть $\Sigma_\Delta = p_2(A)$. Тогда если $\xi \notin \Sigma_\Delta$, то в общей точке $y \in \Delta$ прямые $l \ni \xi$ имеют с ветвями Y не хуже чем простые касания.

Обозначим Σ_0 объединение плоскостей в $\mathbb{P}^3$, входящих в касательные конусы в оставшихся точках Δ , в том числе в тройных точках и пинчах, а также в особых точках $s_i \in Y$.

1.8. Проектирование в окрестности тройных точек.

Если $\xi \notin \Sigma_0$, то в окрестности точки $y \in \Delta_t$ все прямые $l \ni \xi$ трансверсальны всем трем ветвям Y в точке y , и поэтому локально эти ветви отображаются на $\mathbb{P}^2$ изоморфно.

1.9. Проектирование в окрестности пинчей. В окрестности пинча $y \in Y$ имеются аналитические координаты, в которых Y локально задается уравнением $u^2 = vw^2$. Двойная кривая $\Delta \subset Y$ — это прямая $u = w = 0$, а касательный конус $C_{Y,y}$ к Y в точке y имеет уравнение $u = 0$. Нормализация $\mathbb{C}^2 \rightarrow Y$ в окрестности пинча задается формулами $u = tw$, $v = v$, $w = w$. Поскольку X неособа и π_L — конечное отображение, мы можем считать, что проекция π_L и является нормализацией. Если точка ξ не принадлежит касательному конусу $C_{Y,y}$, то локально проекция π_ξ есть отображение степени 2. Проекция $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ в окрестности прообраза пинча есть двулистное накрытие неособых многообразий и поэтому локально задается уравнениями $v = t^2$, $w = w$. Таким образом, кривая $\bar{R} \subset Y$ проходит через пинчи, и при общей проекции пинчи проектируются в неособые точки дискриминантной кривой B .

1.10. Нормальные формы общей проекции в точках кривой ветвления.

ЛЕММА 1.3 [1]. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ — неособая поверхность, а $(\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ — гладкий морфизм, ограничение которого $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ есть конечный морфизм степени μ . Тогда можно выбрать локальные координаты x, y в $\mathbb{C}^2$ и x, y, z в $\mathbb{C}^3$ так, что X задается уравнением

$$y = z^\mu + \lambda_1(x)z^{\mu-2} + \cdots + \lambda_{\mu-2}(x)z,$$

а f есть проекция вдоль оси z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это есть лемма 1 из [1]. Она получается, если накрытие f рассмотреть как двухпараметрическое семейство 0-мерных гиперповерхностных особенностей кратности μ , которое, следовательно, индуцируется из миниверсальной деформации особенности $A_{\mu-1}$.

Мы доказали, что в общей точке P кривой ветвления проекция $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ имеет степень $\mu = 2$, а в отдельных точках — степень $\mu = 3$. Из леммы 1.3 при $\mu = 2$ получаем, что в общей точке кривой ветвления проекция f эквивалентна проекции поверхности $X: x = z^2$ на (x, y) -плоскость, т.е. является складкой. При $\mu = 3$ мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Для неособой поверхности X конечное накрытие $X \rightarrow \mathbb{C}^2$ степени 3 локально является проекцией на (x, y) -плоскость одной из поверхностей

$$y = z^3 + x^k z, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{или} \quad y = z^3 \quad (k = \infty).$$

В случае $k \neq \infty$ кривая ветвления C приведена и имеет в локальных координатах x, z на X уравнение $3z^2 + x^k = 0$. Кривая C неособа только при $k = 1$. Дискриминантная кривая B имеет уравнение $4x^{3k} + 27y^2 = 0$, т.е. является каспом. Это обыкновенный касп только при $k = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.3 имеем, что X задается уравнением $y = z^3 + \lambda_1(x)z$. Получаем указанную нормальную форму накрытия f , где k — порядок нуля функции $\lambda_1(x)$ в точке $x = 0$. Кривая ветвления C имеет уравнение $J = 0$, где $J = 3z^2 + x^k$ — якобиан отображения f . Дискриминантная кривая B определяется идеалом Фиттинга $F_0(f_*\mathcal{O}_C)$ пучка $f_*\mathcal{O}_C$. Чтобы найти уравнение B — образующую идеала Фиттинга, нужно взять представление $f_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{J} f_*\mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_C \rightarrow 0$

пучка $f_*\mathcal{O}_C$, где $(f_*\mathcal{O}_X)_0 = \mathbb{C}\{x, z\} = \mathbb{C}\{x, y\} \cdot 1 \oplus \mathbb{C}\{x, y\}z \oplus \mathbb{C}\{x, y\}z^2$, и вычислить определитель $\mathbb{C}\{x, y\}$ -линейного отображения J , совпадающего с умножением на якобиан J .

Теперь покажем, что для общей проекции дискриминантная кривая B имеет лишь обыкновенные ноуды и каспы. Пусть точка $b \in B$ соответствует бикасательной l при проектировании $\pi_\xi: \mathbb{P}^3 \setminus \xi \rightarrow \mathbb{P}^2$ из точки ξ . Пусть l касается Y в точках P_1 и P_2 , которым соответствуют ветви B_1 и B_2 дискриминантной кривой B в точке b . Нам нужно показать, что для общей проекции точка b является ноудом, т.е. ветви B_1 и B_2 имеют различные касательные. Выясним, где могут лежать центры ξ “плохих” проекций. Пусть прямая $\lambda \subset \mathbb{P}^2$ является общей касательной к ветвям B_1 и B_2 в точке b . Тогда плоскость $\pi_\xi^{-1}(\lambda)$ является бикасательной – она касается поверхности Y в точках P_1 и P_2 . Рассмотрим двойственную поверхность $Y^\vee \subset \mathbb{P}^3$. Тогда $[\pi_\xi^{-1}(\lambda)] \in \text{Sing } Y^\vee = \gamma^\vee$. Пусть $\gamma = \tau^{-1}(\gamma^\vee)$, где $\tau: Y \rightarrow Y^\vee$ – отображение Гаусса. Пусть $\Sigma_u \subset \mathbb{P}^3$ – линейчатая поверхность, заметаемая прямыми P_1P_2 , где $P_1, P_2 \in \gamma$, $\tau(P_1) = \tau(P_2) = [\pi_\xi^{-1}(\lambda)]$. Тогда если $\xi \notin \Sigma_u$, то в точках b , соответствующих бикасательным l , кривая B имеет лишь ноуды.

Пусть теперь точка $b \in B$ соответствует стационарной касательной l в точке $P \in Y$. Как было отмечено выше, в окрестности точки P проекция π_ξ эквивалентна проекции на (x, y) -плоскость поверхности $y = z^3 + x^k z$. Нам нужно показать, что для общей проекции $k = 1$. Дело в том, что если $k > 1$, то точка P есть точка уплощения поверхности Y . Исключая из центров проектирования точки ξ , лежащие в касательных плоскостях к Y в точках уплощения, мы получим, что в окрестности точки с $\mu = 3$ проекция f эквивалентна проекции на (x, y) -плоскость поверхности $y = z^3 + xz$, т.е. является сборкой.

1.11. Проектирование в окрестности изолированных особенностей двойных плоскостей.

ЛЕММА 1.4. Если $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ – (изолированная) особенность двойной плоскости $z^2 = h(x, y)$, $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ – проекция из любой точки $p \in \mathbb{C}^3$, не лежащей в касательном конусе $z = 0$, то кривая ветвления π на X приведена, а дискриминант $B \subset \mathbb{C}^2$ локально аналитически изоморфен особенности $h(x, y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кратность особенности $(X, 0)$ равна 2. Поэтому π является накрытием степени 2 и, следовательно, локально является проекцией двойной плоскости $w^2 = g(u, v)$ на плоскость (u, v) . Таким образом, ростки особенностей $f(x, y)$ и $g(u, v)$ стабильно изоморфны, поэтому они изоморфны [2, ч. 1, с. 146].

§ 2. Локальное устройство расслоенных произведений

2.1. Локальное устройство общего накрытия. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общее накрытие плоскости поверхностью X с A - D - E -особенностями, а $B \subset \mathbb{P}^2$ – дискриминантная кривая, $f^*(B) = 2R + C$. Особые точки $o \in \text{Sing } X$ мы будем называть s -точками поверхности X (от слова singularity). В окрестности s -точки o накрытие f эквивалентно проекции на (x, y) -плоскость поверхности $z^2 = h(x, y)$, где $h(x, y)$ имеет одну из A - D - E -особенностей. Точке o соответствует особая точка кривой B такого же типа, как и точка o . По отношению к f неособые точки

X подразделяются на r -точки (от слова regular), в которых морфизм f является этальным, и p -точки (от singularity of projection) – это точки кривой ветвления R ; p -точки являются либо складками (или p -точками типа A_1), в окрестности которых $f: (x, z) \mapsto (x, y)$, $y = z^2$, либо сборками $o \in R \cap C$ (или p -точками типа A_2), в окрестности которых $f: (x, z) \mapsto (x, y)$, $y = z^3 + xz$ (подробней об этом см. ниже, в п. 2.4).

На кривой B , кроме особых точек, произошедших из особых точек $\text{Sing } X$, которые мы будем называть s -точками, имеются еще дополнительные особые точки типа A_1 (ноуды) и A_2 (каспы), которые мы будем называть p -ноудами и p -каспами. Над общей точкой $b \in B$ лежит одна складка и $N - 2$ r -точки; над p -ноудом лежит две складки и $N - 4$ r -точки; над p -каспом лежит одна сборка и $N - 3$ r -точки; над s -ноудом и s -каспом так же, как и над любой s -точкой $b \in B$, лежит одна особая точка X и $N - 2$ r -точки.

2.2. Типы точек на расслоенном произведении. По отношению к паре общих накрытий $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ с одной и той же дискриминантной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$ ноуды и каспы на B подразделяются уже на 4 типа: ss -, sp -, ps - и pp -ноуды и каспы. Например, ps -ноуд – это ноуд $b \in B$ такой, что на X_1 над b имеются две складки, а на X_2 над b имеется особая точка типа A_1 . Аналогичная терминология будет использоваться для классификации точек $\bar{x} = (x_1, x_2)$ на расслоенном произведении $X^\times = X_1 \times_{\mathbb{P}^2} X_2$: мы будем говорить об rs -точках, ss -точках, sp -точках и т.д. Например, мы говорим, что $\bar{x}$ есть ps -точка типа A_2 , если $x_1 \in X_1$ есть p -точка типа A_2 , а $x_2 \in \text{Sing } X_2$ есть особая s -точка типа A_2 .

В этом параграфе мы опишем устройство нормализации $\nu: X = (X^\times)^{(\nu)} \rightarrow X^\times$ расслоенного произведения $X^\times$. Обозначим g_1, g_2 и f морфизмы X на X_1, X_2 и $\mathbb{P}^2$. Поскольку нормализация определяется локально, мы можем заменить $\mathbb{P}^2$ на окрестность точки $0 \in \mathbb{C}^2$ и считать, что X_1 и X_2 – это окрестности точек $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. Переходим к перебору всех возможных типов точек $\bar{x} = (x_1, x_2) \in X^\times$. В дальнейшем перебор идет с точностью до перестановки сомножителей X_1 и X_2 .

Сначала рассмотрим совсем тривиальные случаи.

2.2.1. Если $\bar{x}$ есть r *-точка (где $*$ = r, s, p), то $X^\times$ в точке $\bar{x}$ локально устроено так же, как X_2 в точке x_2 , а $f^\times: X^\times \rightarrow \mathbb{C}^2$ устроено так же, как $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$.

2.2.2. Если $\bar{x}$ есть (2×2) -точка, т.е. x_1 и x_2 есть точки “двойных плоскостей”, $z_1^2 = h(x, y)$, $z_2^2 = h(x, y)$, то $X^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_2$ в окрестности точки $\bar{x} = (x_1, x_2)$ – это поверхность в $\mathbb{C}^4 \ni (x, y, z_1, z_2)$, задаваемая уравнениями $z_1^2 = h(x, y)$, $z_2^2 = h(x, y)$. Отсюда $z_1^2 = z_2^2$, и поэтому $X^\times = X_1^\times \cup X_2^\times$, где $X_1^\times: z_1^2 = h(x, y)$, $z_2 = z_1$, $X_2^\times: z_2^2 = h(x, y)$, $z_1 = -z_2$. Поверхности $X_1^\times$ и $X_2^\times$ пересекаются по кривой $z_1 = z_2 = 0$, $h(x, y) = 0$. Мы получаем, что нормализация $X = \tilde{X}^\times = X_1^\times \sqcup X_2^\times$ локально состоит из двух несвязных компонент $X_1^\times$ и $X_2^\times$, изоморфных X_1 и X_2 (см. рис. 1).

В частности, мы получаем описание нормализации в окрестности pp -точки $(x_1, x_2) \in X^\times$, лежащей над неособой точкой кривой B , $B: x = 0$, $g_1^*(R_1) = R' + R''$, $g_2^*(R_2) = R' + R''$.

Каждая ss -точка является (2×2) -точкой. Таким образом, нормализация в окрестности ss -точки устроена так же, как в случае pp -точки: X локально состоит из двух несвязных компонент, изоморфных X_1 и X_2 .

Остается разобрать менее тривиальные случаи, когда $\bar{x}$ есть pp - или sp -точка типа A_1 или A_2 . Этому посвящены следующие два подпункта.

Рис. 1

2.3. О расслоенном произведении двойных плоскостей.

2.3.1. Обыкновенную квадратичную особенность – особенность типа A_1 на поверхности $X_0: z^2 = xy$ – можно рассматривать как двулистное накрытие плоскости $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$, разветвленное в ноде $B: xy = 0$. Как известно, саму особенность X_0 можно рассматривать как факторособенность по действию циклической группы $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, $X_0 = X/\mathbb{Z}_2$, где $X = \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2)$, а образующая $\mathbb{Z}_2$ действует по правилу: $z_1 \mapsto -z_1$, $z_2 \mapsto -z_2$. Морфизм факторизации $g_0: X \rightarrow X_0$ задается формулами

$$x = z_1^2, \quad y = z_2^2, \quad z = z_1 z_2.$$

Получаем четырехлистное накрытие $f = f_0 \circ g_0: X \rightarrow \mathbb{C}^2$, которое можно рассматривать как отображение факторизации по действию группы $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ на X . При этом факторизация g_0 соответствует подгруппе второго порядка $\mathbb{Z}_2 = G_0 = \{(1, 1), (-1, -1)\}$, вложенной в G диагонально. В G имеются еще две подгруппы второго порядка $G_1 = \{1\} \times \mathbb{Z}_2$ и $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \{1\}$. Рассматривая $X_1 = \mathbb{C}_2/G_1 \simeq \mathbb{C}_2$ и $X_2 = \mathbb{C}_2/G_2 \simeq \mathbb{C}_2$, мы получаем еще два разложения f и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X = \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) & & \\
 & \swarrow g_1 & \downarrow g_0 & \searrow g_2 & \\
 (z_1, y) \in \mathbb{C}^2 = X_1 & & X_0 & & X_2 = \mathbb{C}^2 \ni (x, z_2) \\
 & \searrow f_1 & \downarrow f_0 & \swarrow f_2 & \\
 & & (x, y) \in \mathbb{C}^2 & &
 \end{array} \quad (*)_2$$

где $g_1: y = z_2^2$, $f_1: x = z_1^2$, $g_2: x = z_1^2$, $f_2: y = z_2^2$. Обозначим $B_1: x = 0$, $B_2: y = 0$ ветви кривой $B: xy = 0$, а $R': z_1 = 0$, $R'': z_2 = 0$ – ветви их прообраза

$z_1 z_2 = 0$ на X . Диаграмма $(*_2)$ показывает, что мы можем рассматривать X как нормализацию в трех случаях:

2.3.2. X есть нормализация в окрестности ps -точки типа A_1 , $\bar{x} \in X_1^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_0$ (см. рис. 2),

$$\begin{aligned} f_1^*(B_1) &= 2R_1, & f_1^*(B_2) &= C_1, & g_1^*(R_1) &= R', & g_1^*(C_1) &= 2R'', \\ f_0^*(B) &= 2R_2 = 2(R'_2 + R''_2), & g_0^*(R'_2) &= R', & g_0^*(R''_2) &= R'' \end{aligned}$$

(g_0 неразветвлено вне точки $0 \in X_0$).

Рис. 2

2.3.3. X есть нормализация в окрестности sp -точки типа A_1 , $\bar{x} \in X_2^\times = X_0 \times_{\mathbb{C}^2} X_2$ (случай, симметричный 2.3.2).

2.3.4. X есть нормализация в окрестности pp -точки типа A_1 , $\bar{x} \in X^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_2$, которая не является (2×2) -точкой, $f_1: x = z_1^2$, $f_2: y = z_2^2$ (см. рис. 3),

$$\begin{aligned} f_1^*(B) &= 2R_1 + C_1, & g_1^*(R_1) &= R', & g_1^*(C_1) &= 2R'', \\ f_2^*(B) &= 2R_2 + C_2, & g_2^*(R_2) &= R'', & g_2^*(C_2) &= 2R'. \end{aligned}$$

Используя 2.3.2–2.3.4, мы можем теперь описать нормализацию X над окрестностью ноода $b \in B$.

Рис. 3

2.3.5. Над окрестностью ps -ноуда $b \in B$ (также sr -ноуда) нормализация $X^\times$ в окрестности ps -точек устроена так (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} g_1^*(R'_1) &= R'^{\prime\prime}, & g_1^*(C'_1) &= 2R'^{\prime\prime}, & g_1^*(R''_1) &= R''^{\prime\prime}, & g_1^*(C''_1) &= 2R''^{\prime\prime}, \\ g_2^*(R'_2) &= R'^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime}, & g_2^*(R''_2) &= R'^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime}. \end{aligned}$$

Рис. 4

На рис. 4 не изображены еще нормализации окрестностей pr -, rs - и rr -точек $X^\times$.

2.3.6. Над окрестностью pp -ноуда $b \in B$ нормализация $X^\times$ в окрестности pp -точек устроена так (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} g_1^*(R'_1) &= R'^{\prime\prime} + R'^{\prime\prime\prime} + C'^{\prime\prime}, & g_1^*(R''_1) &= R''^{\prime\prime} + R''^{\prime\prime\prime} + C''^{\prime\prime}, \\ g_2(R'^{\prime\prime}) &= R'_2, & g_2(R'^{\prime\prime\prime}) &= R'_2, & g_2(R''^{\prime\prime}) &= R''_2, & g_2(R''^{\prime\prime\prime}) &= R''_2, \\ g_2(C'^{\prime\prime}) &= C'_2, & g_2(C''^{\prime\prime}) &= C'_2, & g_1(C'^{\prime\prime\prime}) &= C'_1, & (g_1(C''^{\prime\prime\prime}) &= C'_1). \end{aligned}$$

Рис. 5

2.4. О накрытиях $\mathbb{C}^2$, не разветвленных вне каспа $B: y^2 = x^3$. Для того чтобы описать нормализацию расслоенного произведения в окрестностях sr - и pp -точек типа A_2 в естественном контексте, мы начнем с напоминания небольшого сюжета из теории особенностей.

2.4.1. **Каспидальная особенность отображения (сборка) и миниверсальная деформация особенности A_2 .** Касп $(B, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ определяется ростком функции $x^3 - y^2$, стабильно эквивалентным ростку функции x^3 . Это – простая особенность типа A_2 . Интересно, что касп (особенность типа A_2) получается также на дискриминанте в базе миниверсальной деформации все той же особенности A_2 .

Рис. 6

Как известно, миниверсальная разветка функции $t = z^3$ устроена так:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, \quad (z, a_2, a_3) \mapsto (z^3 + a_2z + a_3, a_2, a_3).$$

Ограничение этого отображения над $\{0\} \times \mathbb{C}^2$ дает миниверсальную деформацию F нульмерной особенности $z^3 = 0$, $\mathbb{C}^3 \supset X \xrightarrow{F} \mathbb{C}^2$. Здесь X – поверхность $z^3 + a_2z + a_3 = 0$, а F индуцирована проекцией на (a_2, a_3) . Поверхность X является графиком функции $-a_3 = z^3 + a_2z$; z и a_2 – локальные координаты на X ,

$$\begin{array}{ccc} (a_2, z) \in \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\sim} & X \subset \mathbb{C}^3 \\ & \searrow G & \downarrow F \\ & & (a_2, a_3) \in \mathbb{C}^2 \end{array}, \quad G := \begin{cases} a_2 = a_2, \\ -a_3 = z^3 + a_2z. \end{cases}$$

Мы получаем трехлистное накрытие $G: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, кривая ветвления которого R задается уравнением $3z^2 + a_2 = 0$, а дискриминантная кривая $B = G(R)$ имеет уравнение $4a_2^3 + 27a_3^2 = 0$. Для того чтобы привести уравнение кривой B к виду $y^2 = x^3$, мы сделаем замену

$$a_2 = -3x, \quad a_3 = 2y,$$

и обозначим $\mathbb{C}^2 \simeq X$ через X_3 , а G – через f_3 (см. рис. 6). Мы получаем трехлистное накрытие $f_3: X_3 \rightarrow \mathbb{C}^2$,

$$f_3: x = x, \quad y = -\frac{1}{2}(z^3 - 3xz).$$

При этом $x^3 - y^2 = x^3 - \frac{1}{4}(z^3 - 3xz)^2 = (x - z^2)^2(x - \frac{1}{4}z^2)$ и, следовательно,

$$f_3^*(B) = 2R + C,$$

где $R: x = z^2$ – кривая ветвления, а $C: x = \frac{1}{4}z^2$. Отметим, что C и R имеют касание второго порядка, $(C \cdot R) = 2$.

В силу леммы 1.3 особая точка накрытия f_3 однозначно характеризуется как особая точка трехлистного накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ неособой поверхностью X , дискриминантная кривая которого имеет обыкновенный касп.

2.4.2. *Отображение Виета f_6 .* Мы предъявим хорошо известное регулярное накрытие $\mathbb{C}^2$ с группой S_3 , разветвленное в каспе $B: y^2 = x^3$, которое окажется нормализацией расслоенного произведения в окрестности sp -точки типа A_2 . Это накрытие естественным образом появляется в теории особенностей.

Профакторизуем пространство $\mathbb{C}^3$ по действию группы перестановок S_3 . Получим отображение Виета

$$v: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad (z_1, z_2, z_3) \mapsto (a_1, a_2, a_3),$$

где $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$, т.е.

$$a_1 = -(z_1 + z_2 + z_3), \quad a_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \quad a_3 = -z_1z_2z_3.$$

Отображение v – это отображение шестой степени, не разветвленное вне $\Delta = \bigcup_{i \neq j} \{z_i = z_j\}$, а $v(\Delta) = D$ определяется дискриминантом многочлена третьей степени.

Действие группы S_3 на $\mathbb{C}^3$ приводимо: $\mathbb{C}^3$ разлагается в прямую сумму: $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$, инвариантных подпространств – прямой $\mathbb{C} = \{z_1 = z_2 = z_3\}$ и плоскости $\mathbb{C}^2 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$. Рассмотрим ограничение v на эту плоскость $\mathbb{C}^2$:

$$(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \supset \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} = \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 = \{a_1 = 0\} \subset \mathbb{C}^3 \ni (a_1, a_2, a_3).$$

Обозначим $\mathbb{C}^2 \cap \Delta = L$, $\mathbb{C}^2 \cap D = B$. Тогда L состоит из трех прямых:

$$L = L_1 + L_2 + L_3, \quad \text{где } L_i|z_j = z_k, \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

а кривая $B: 4a_2^3 + 27a_3^2 = 0$ определяется дискриминантом многочлена $z^3 + a_2z + a_3$. Так как $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus L) = \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus \Delta)$, $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B) = \pi_1(\mathbb{C}^3 \setminus D) = \text{Br}_3$, мы получаем накрытие $v: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ степени 6, неразветвленное вне B . Обозначим это отображение f_6 . В координатах x, y , где $a_2 = -3x$, $a_3 = 2y$, это отображение

$$\mathbb{C}^2 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} = X_6 \xrightarrow{f_6} \mathbb{C}^2 \ni (x, y)$$

задается формулами

$$f_6: x = -\frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1), \quad y = -\frac{1}{2}z_1z_2z_3,$$

дискриминант B имеет уравнение $y^2 = x^3$, а $f^*(B) = 2L = 2L_1 + 2L_2 + 2L_3$ (легко видеть, что $x^3 - y^2 = \frac{1}{4 \cdot 27}(z_2 - z_1)^2(z_3 - z_2)^2(z_1 - z_3)^2$ при условии $z_1 + z_2 + z_3 = 0$).

Рассмотрим двулистное накрытие, не разветвленное вне B ,

$$(x, y, w) \in \mathbb{C}^3 \supset X_2 \xrightarrow{f_2} \mathbb{C}^2 \ni (x, y),$$

где X_2 определяется уравнением $w^2 = x^3 - y^2$, а f_2 индуцировано проекцией. Так устроено общее накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ в окрестности s -точки типа A_2 .

ЛЕММА 2.1 [4]. *Если $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ – конечное накрытие неприводимой нормальной поверхностью X , не разветвленное вне каспа $B \subset \mathbb{C}^2$, кривая ветвления которого приведена, т.е. $f^*(B) = 2R + C$ (R и C – приведенные кривые), то f эквивалентно одному из накрытий f_2 , f_3 и f_6 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается изучением возможных гомоморфизмов $\rho: \pi_1 \rightarrow S_N$, где $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B) = \text{Gr}$ – фундаментальная группа каспидальной особенности, а N – степень накрытия.

Мы получаем еще одну характеристику накрытия f_3 как конечного накрытия $f: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ неприводимой нормальной поверхностью, не разветвленного вне каспа B , кривая ветвления которого R приведена и неособа.

2.4.3. *Описание нормализации расслоенного произведения в окрестности sp -точки типа A_2 .* Отображение f_6 пропускается через отображения f_2 и f_3 , и мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 & X_6 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} & \\
 g_3 \swarrow & & \searrow g_2 \\
 \{w^2 = x^3 - y^2\} = X_2 & & X_3 = \{z^3 - 3xz + 2y = 0\} \\
 f_2 \searrow & f_6 \downarrow & \nearrow f_3 \\
 & (x, y) \in \mathbb{C}^2 \supset B: y^2 = x^3 &
 \end{array} \quad (*_3)$$

где g_2 и g_3 определяются формулами: x и y определяются теми же формулами, что и f_6 , а $z = z_1$ для g_2 и $w = \frac{1}{6\sqrt{3}}(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 - z_3)$ для g_3 . Легко видеть, что g_3 есть факторизация по циклической подгруппе $\mathbb{Z}_3 = \mathcal{A}_3 \subset S_3$, $X_2 = X_6/\mathcal{A}_3$, а g_2 есть факторизация по циклической группе второго порядка $\mathbb{Z}_2 \simeq S_2 = \{(1), (2, 3)\} \subset S_3$.

Из универсального свойства расслоенных произведений имеем морфизм $X_6 \rightarrow X_2 \times_{\mathbb{C}^2} X_3$. Расслоенное произведение $X_2 \times_{\mathbb{C}^2} X_3$ неприводимо, так как каждая его компонента Z должна отображаться на X_2 и X_3 , и поэтому степень накрытия $Z \rightarrow \mathbb{C}^2$ должна делиться на 2 и 3, т.е. должна быть равна 6. Таким образом, X_6 есть нормализация $X_2 \times_{\mathbb{C}^2} X_3$, а диаграмма $(*_3)$ описывает нормализацию расслоенного произведения в окрестности sp -точки типа A_2 .

Диаграмму $(*_3)$ наглядно-схематически можно изобразить так, как показано на рис. 7.

Рис. 7

Непосредственные вычисления показывают, что $x - z^2 = \frac{1}{3}(z_2 - z_1)(z_1 - z_3)$, а $x - \frac{1}{4}z^2 = \frac{1}{12}(z_3 - z_2)^2$, т.е.

$$g_2^*(R) = L_2 + L_3, \quad g_2^*(C) = 2L_1,$$

и, кроме того, $g_3^*(R_1) = L_1 + L_2 + L_3$.

2.4.4. Описание нормализации расслоенного произведения в окрестности pp -точки типа A_2 . Пусть $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ — p -точки типа A_2 для f_1 и f_2 , $f_1^*(B) = 2R_1 + C_1$, $f_2^*(B) = 2R_2 + C_2$ (см. рис. 8). В этом случае трехлистные накрытия f_1 и f_2 одинаковы (эквивалентны), а гомоморфизмы монодромии $\varphi_1, \varphi_2: \pi_1 = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus B, y_0) \rightarrow S_3$ являются эпиморфизмами. Слой $(f^\times)^{-1}(y_0)$ 9-листного накрытия $f^\times: X^\times = X_1 \times_{\mathbb{C}^2} X_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ состоит из пар $f_1^{-1}(y_0) \times f_2^{-1}(y_0) = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 3\}$, а гомоморфизм монодромии является (эквивалентен) диагональному гомоморфизму $\varphi: \pi_1 \rightarrow S_3 \times S_3 \subset S_9$. Так как φ_i — эпиморфизмы, то слой $(f^\times)^{-1}(y_0)$ состоит из двух орбит относительно действия π_1 : орбиты точки $(1, 1)$, которая состоит из трех элементов, и орбиты точки $(1, 2)$, которая состоит из шести элементов. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что в окрестности точки $\bar{x} = (x_1, x_2)$ нормализация X произведения $X^\times$ состоит из двух несвязных компонент, $X = X_3 \sqcup X_6$, причем на X_3 морфизм $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ совпадает с f_3 , морфизмы g_1 и g_2 являются изоморфизмами, а на X_6 морфизм $f = f_6$, морфизмы g_1 и g_2 устроены так же, как g_2 в диаграмме $(*_3)$.

Рис. 8

На $X^\times$ имеются четыре кривые: $C_1 \times_B C_2$, $R_1 \times_B C_2$, $C_1 \times_B R_2$ и $R_1 \times_B R_2$, прообразы которых на нормализации X – это C_3 , L_2 , L_1 и L_3 , R_3 . При такой нумерации прямых L_i имеем

$$\begin{aligned} g_1^*(R_1) &= R_3 + L_2 + L_3, & g_1^*(C_1) &= C_3 + 2L_1, \\ g_2^*(R_2) &= R_3 + L_1 + L_3, & g_2^*(C_2) &= C_3 + 2L_2. \end{aligned}$$

2.4.5. *Подъем диаграммы $(*_3)$.* Рассмотрим диаграмму $(*_3)$. Для вычислений индексов пересечений в § 5 нам потребуется разрешить особую точку типа A_2 поверхности X_2 и “развести” кривые L_2 и L_3 на X . Разрешение особой точки типа A_2 , как и всякой “двойной плоскости”, можно получить, если сначала взять разрешение $\sigma: \bar{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ вложения кривой ветвления $B \subset \mathbb{C}^2$, а затем рассмотреть нормализацию $X_2 \times_{\mathbb{C}^2} \bar{\mathbb{C}}^2$.

На самом деле мы сделаем больше: мы поднимем всю диаграмму $(*_3)$ на $\bar{\mathbb{C}}^2$.

1) Особая точка кривой B разрешается одним σ -процессом σ_1 . Этого достаточно для того, чтобы разрешить особую точку на X_2 , но для того, чтобы разрешить полный прообраз B до дивизора с нормальными пересечениями, нужно сделать еще два σ -процесса. Изобразим схематически процесс разрешения, “рисуя” полный прообраз кривой B (см. рис. 9). Обозначим E_i кривую, вклеиваемую при i -м σ -процессе, а также ее собственный прообраз при следующих σ -процессах. У каждой кривой указаны два числа: отрицательное – индекс самопересечения, положительное – кратность в полном прообразе кривой B .

Рис. 9

2) Обозначим $\sigma: \bar{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ композицию $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$. Мы построим диаграмму $(*_3)$ над $\bar{\mathbb{C}}^2$ и получим следующую коммутативную диаграмму, в которой все морфизмы на правой грани – конечные накрытия:

Правый квадрат диаграммы $(*)$ получается как нормализация расслоенного произведения $(*_3) \times_{\mathbb{C}^2} \overline{\mathbb{C}^2}$, т.е. $\overline{X}_i$ – это нормализация $X_i \times_{\mathbb{C}^2} \overline{\mathbb{C}^2}$, а морфизмы индуцированы морфизмами диаграммы $(*_3)$ и проекциями. Мы опишем, как можно построить диаграмму $(*)$ не сразу (как нормализацию подъема), а постепенно. Чтобы легче было следить за описанием, приведем сразу ответ. Нарисуем правый квадрат диаграммы $(*)$, заменяя многообразия в его вершинах полными прообразами кривой B :

Рис. 10

Принцип обозначения таков. На $\overline{\mathbb{C}^2}$ исключительные кривые E_1, E_2, E_3 уже обозначены. При двойной нумерации $E_{i,j}$ первый индекс показывает на каком многообразии X_i лежит кривая, а второй индекс – в какую кривую E_j она отображается на $\overline{\mathbb{C}^2}$.

3) Начнем описание диаграммы $(*)$ с $\overline{X}_6$ (“сверху”). Для того чтобы развести прямые L_i , сделаем σ -процесс с центром в точке $0 \in X_6 = \mathbb{C}^2 = \{z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$. При этом вклеится прямая $E_{6,3} = \mathbb{P}^1 = \{t_1 + t_2 + t_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^2 \ni (t_1 : t_2 : t_3)$ и получится многообразие X'_6 . Действие S_3 на X_6 продолжается на X'_6 и, в частности, на $\mathbb{P}^1$. На $\mathbb{P}^1$ имеются восемь исключительных точек, составляющих исключительные орбиты:

$$\begin{aligned} p_1 &= E_{6,3} \cap L_1 = (-2 : 1 : 1), & p_2 &= E_{6,3} \cap L_2 = (1 : -2 : 1), \\ p_3 &= E_{6,3} \cap L_3 = (1 : 1 : -2); \\ P_1 &= (0 : 1 : -1), & P_2 &= (1 : 0 : -1), & P_3 &= (1 : -1 : 0); \\ Q_1 &= (1 : \zeta : \zeta^2), & Q_2 &= (1 : \bar{\zeta} : \bar{\zeta}^2), \end{aligned}$$

где $\zeta = \sqrt[3]{1}$ – примитивный корень, а $\bar{\zeta} = \zeta^2$. Обозначим $\xi = (123)$ образующую циклической группы третьего порядка $\mathbb{Z}_3 = \mathcal{A}_3 = \{(1), (123), (132)\} \subset S_3$, а $\varepsilon = (23)$ – образующую циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2 = S_2 = \{(1), (23)\} \subset S_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi(p_1) &= p_2, & \xi(p_2) &= p_3, & \xi(p_3) &= p_1; \\ \xi(P_1) &= P_2, & \xi(P_2) &= P_3, & \xi(P_3) &= P_1; \\ \xi(Q_1) &= (\zeta^2 : 1 : \zeta) = (1 : \zeta : \zeta^2) = Q_1, & \xi(Q_2) &= (\zeta : 1 : \zeta^2) = (1 : \zeta^2 : \zeta) = Q_2; \\ \varepsilon(p_1) &= p_1, & \varepsilon(p_2) &= p_3, & \varepsilon(p_3) &= p_2; \\ \varepsilon(P_1) &= P_1, & \varepsilon(P_2) &= P_3, & \varepsilon(P_3) &= P_2; & \varepsilon(Q_1) &= Q_2. \end{aligned}$$

Если профакторизовать X'_6 по группе $\mathbb{Z}_3 = \mathcal{A}_3$, то неподвижные точки Q_1 и Q_2 дадут на $X'_2 = X'_6/\mathcal{A}_3$ две циклические фактосособенности, при разрешении которых $X'_2 \rightarrow X'_6$ вклеиваются кривые $E'_{2,1}$ и $E''_{2,1}$ с $(E'_{2,1}) = -3$, $(E''_{2,1}) = -3$. Чтобы поднять $X'_6 \rightarrow X'_2$ на X''_2 , мы должны раздуть точки Q_1 и Q_2 , $X''_6 \rightarrow X'_6$, и при этом получим $X''_6 \rightarrow X''_2$:

Рис. 11

4) Отображение f_2 – это факторизация по циклической группе $\mathbb{Z}_2 = S_2$. Это действие продолжается на X''_2 . Неподвижная точка на $E_{2,3}$ – образ точки P_1 на $E_{6,3}$ дает на $X''_2/\mathbb{Z}_2 (= \bar{\mathbb{C}}'^2)$ особую точку типа A_2 . При ее разрешении вклеивается (-2) -кривая E_2 и получается $\bar{\mathbb{C}}^2$. Чтобы поднять $X''_2 \rightarrow X''_2/\mathbb{Z}_2$ на разрешение $\bar{\mathbb{C}}^2$, мы должны раздуть точку на X''_2 . При этом вклеивается (-1) -кривая $E_{2,2}$ и получается $\bar{X}_2$. Чтобы получить $\bar{g}_3: \bar{X}_6 \rightarrow \bar{X}_2$, мы должны сделать три σ -процесса с центрами в точках P_1, P_2, P_3 на X''_6 , при которых вклеиваются три прямые $E'_{6,2}, E''_{6,2}$ и $E'''_{6,2}$. Мы получаем левую часть $\bar{g}_3$ и $\bar{f}_2$ правого квадрата диаграммы (*), изображенной на рис. 10. Отметим, что отображение $\bar{g}_3$ ветвится вдоль кривых $E'_{6,1}$ и $E''_{6,1}$, а отображение $\bar{f}_2$ ветвится вдоль кривых $E_{2,2}$ и R_1 .

На поверхности $\bar{X}_2$ можно стянуть сначала (-1) -кривую $E_{2,2}$, а затем (-1) -кривую $E_{2,3}$. При этом получается минимальное разрешение особой точки типа A_2 на X_2 :

Рис. 12

5) Отображение $\bar{g}_2$ – это факторизация по группе $\mathbb{Z}_2 = S_2 = \{(1), (23)\}$. Получается поверхность $\bar{X}_3 = \bar{X}_6/S_2$, $\bar{g}_2: \bar{X}_6 \rightarrow \bar{X}_3$. Отображение $\bar{g}_2$ ветвится вдоль кривых $E'_{6,2}$ и L_1 , которые отображаются на $E'_{3,2}$ и C соответственно. Диаграмма замыкается отображением $\bar{f}_3: \bar{X}_3 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Поверхность $\bar{X}_3$ получается из $X_3 = \mathbb{C}^2$, если раздуть сначала точку касания кривых C и R , при этом вклеится $E'_{3,2}$; затем раздуть точку пересечения C и R , при этом вклеится $E_{3,3}$; наконец, на $E_{3,3}$ надо раздуть еще две точки:

Рис. 13

§ 3. Канонический цикл дювалевской особенности

Для вывода основного неравенства для общих накрытий X плоскости $\mathbb{P}^2$ с A - D - E -особенностями мы собираемся применить теорему Ходжа об индексе. Поэтому нам потребуется теория пересечений и, следовательно, разрешение особенностей X . В этом параграфе мы исследуем локальную ситуацию и выясним, как при разрешении меняются канонический класс и кривая ветвления.

3.1. Определение канонического цикла. Пусть (X, x) – двумерная A - D - E -особенность. Пусть $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – ее минимальное разрешение, $L = \pi^{-1}(x)$ – исключительная кривая. Как известно, канонический класс $K_{\bar{X}}$ тривиален в окрестности L , т.е. мы можем выбрать дивизор в $K_{\bar{X}}$, носитель которого с L не пересекается. Другими словами, на $\bar{X}$ имеется дифференциальная форма ω , не имеющая ни полюсов, ни нулей в окрестности L . Такую форму можно, например, получить так. Как известно, (X, x) является факторособенностью, $X = \mathbb{C}^2/G$, где $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Форма $du \wedge dv$ на $\mathbb{C}^2 \ni (u, v)$ инвариантна относительно G и определяет форму на X ($\varphi^*(\omega) = du \wedge dv$, где $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow X$). Поэтому дивизор $(\omega) = \sum k_i L_i$. А так как L_i есть (-2) -кривые, $(L_i \cdot (\omega)) = 0$, мы получаем, что $(\omega) = 0$.

С другой стороны, (X, x) можно рассматривать как двойную плоскость, т.е. как двулистное накрытие $X \xrightarrow{f} Y$ плоскости $Y = \mathbb{C}^2$ (локально). Пусть $z^2 = h(x, y)$ – уравнение (X, x) , $B: h(x, y) = 0$ – дискриминантная кривая, $f^{-1}(B) = R$ – кривая ветвления, определенная уравнением $z = 0$. На X мы можем рассмотреть дифференциальную форму $\omega = f^*(dx \wedge dy)$, поднятую снизу. Тогда на $\bar{X}$ дивизор $(\omega) = (z) = \bar{R} + Z$, где $\bar{R} \subset \bar{X}$ – собственный прообраз R , $Z = \sum \gamma_i L_i$ – цикл на $L = \pi^{-1}(x)$. Дивизор Z мы будем называть *каноническим циклом* двумерной A - D - E -особенности. Таким образом, $-Z$ – это цикл на исключительной кривой L , эквивалентный кривой ветвления $\bar{R}$ в окрестности L . Вычислим канонический цикл для всех A - D - E -особенностей.

3.2. О разрешении особенностей двойных плоскостей. Разрешение A - D - E -особенности, как и всякой двойной плоскости, можно получить с помощью разрешения особенности дискриминантной кривой $B \subset Y = \mathbb{C}^2$. Пусть $\sigma: \bar{Y} \rightarrow Y$ – композиция σ -процессов такая, что полный прообраз кривой B есть

дивизор с нормальными пересечениями. Пусть $\sigma^*(B) = \bar{B} + \sum_{i=1}^r \alpha_i l_i$, где $\bar{B}$ – собственный прообраз B , а $l_i \simeq \mathbb{P}^1$, $i = 1, \dots, r$, обозначают исключительные кривые, а также их собственные прообразы, вклеиваемые при σ -процессах. Пусть $\bar{X}$ – нормализация $\bar{Y} \times_Y X$, а $\bar{f}$ и π индуцированы проекциями,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(x) = L = L_1 \cup \dots \cup L_r \subset \bar{X} & \xrightarrow{\pi} & X \supset R \ni x, \quad R: z = 0 \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow f \\ \sigma^*(B) = \bar{B} + \sum_{i=1}^r \alpha_i l_i \subset \bar{Y} & \xrightarrow{\sigma} & Y \supset B \end{array} \quad (\#)$$

Обозначим $\bar{f}^{-1}(l_i) = L_i$. Кривая L_i либо неприводима, либо состоит из двух компонент: $L_i = L'_i + L''_i$, где $L'_i \simeq \mathbb{P}^1$, $L''_i \simeq \mathbb{P}^1$. Отображение $\bar{f}$ – двулистное накрытие, разветвленное в кривой $\bar{B} + \sum_{\alpha_i \text{ нечет.}} l_i$. Кривые l_i , для которых α_i нечетно, мы для большей наглядности будем обозначать также $\bar{l}_i$, а L_i – соответственно $\bar{L}_i$. Поверхность $\bar{X}$ имеет особенности типа A_1 над нодами кривой ветвления $\bar{B} + \sum \bar{l}_i$. Если эта кривая неособа, т.е. является несвязным объединением компонент (этого можно добиться, делая по одному σ -процессу в каждом нуде), то $\bar{X}$ неособа и является разрешением особенности (X, x) . Пусть $\bar{R}$ – собственный прообраз R относительно π (собственный прообраз $\bar{B}$ относительно $\bar{f}$). Имеем $\bar{f}^*(\bar{l}_i) = 2\bar{L}_i$, если α_i нечетное, и $\bar{f}^*(l_i) = L_i$, если α_i четное. Поэтому

$$((\sigma \circ \bar{f})^* h(x, y)) = (z^2) = 2\bar{R} + \sum_{\alpha_i \text{ нечет.}} 2\alpha_i \bar{L}_i + \sum_{\alpha_i \text{ чет.}} \alpha_i L_i$$

и, следовательно, $(z) = \bar{R} + Z$, где

$$Z = \sum_{\alpha_i \text{ нечет.}} \alpha_i \bar{L}_i + \sum_{\alpha_i \text{ чет.}} \frac{1}{2} \alpha_i L_i.$$

Вычислим цикл Z для каждого из типов A - D - E -особенностей (несмотря на обилие работ, посвященных дювалевским особенностям, авторам неизвестно ни одной из них, в которых бы цикл Z вычислялся; поэтому нам придется провести эти вычисления).

3.3. Вычисление канонического цикла. Рассмотрим минимальное разрешение для каждого из типов A - D - E -особенностей, описанное выше. Результаты вычисления $\sigma^*(B)$, исключительной кривой $\pi^{-1}(x) = E$ и канонического цикла Z содержатся в следующей лемме.

ЛЕММА 3.1. *Ниже схематически изображен полный прообраз $\sigma^*(B) = \bar{B} + \sum_{i=1}^r \alpha_i l_i$ (около каждой кривой l_i указано положительное число α_i и отрицательное число (l_i^2)), над ним изображена кривая $\pi^{-1}(R)$, состоящая из $\bar{R}$ и (-2) -кривых, а также выписаны канонические циклы Z :*

1) особенность A_{2k-1} : $y^2 = x^{2k}$, $k \geq 1$,

2) особенность A_{2k} : $y^2 = x^{2k+1}$, $k \geq 1$,

3) особенность D_{2k+2} : $x(y^2 + x^{2k})$, $k \geq 1$,

$$Z = 3L_1 + 5L_2 + \cdots + (2k+1)L_k + 2L_{k+1} + 4L_{k+2} + \cdots + 2kL_{2k} \\ + (k+1)L_{2k+1} + (k+1)L_{2k+2};$$

4) особенность D_{2k+3} : $x(y^2 + x^{2k+1})$, $k \geq 1$,

$$Z = 3L_1 + 5L_2 + \cdots + (2k+1)L_k + 2L_{k+1} + 4L_{k+2} + \cdots + 2kL_{2k} \\ + (2k+2)L_{2k+2} + (k+1)L_{2k+1},$$

$$\text{где } L_{2k+1} = L'_{2k+1} + L''_{2k+1};$$

6) особенность $E_6: x^3 + y^4$,

$$Z = 3L_1 + 2L_2 + 4L_3 + 6L_4;$$

7) особенность $E_7: x(x^2 + y^3)$,

$$Z = 3L_1 + 5L_2 + 9L_3 + 6L_4 + 5L_5 + 8L_6 + 3L_7;$$

8) особенность E_8 : $x^3 + y^5$,

$$Z = 3L_1 + 5L_2 + 9L_3 + 15L_4 + 10L_5 + 8L_6 + 12L_7 + 6L_8.$$

3.4. Дефект особенности. Определим дефект δ A - D - E -особенности формулой

$$\delta = \frac{1}{2}(\bar{R} \cdot Z).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для различных A - D - E -особенностей дефект равен

$$\delta = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor & \text{для типа } A_n; \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{для типа } D_n; \\ \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor & \text{для типов } E_n, \quad n = 6, 7, 8. \end{cases}$$

В частности, для типов A_1 (ноудов) и A_2 (каспов) $\delta = 1$.

Можно показать, что на самом деле дефект δ – это δ -инвариант (род) одномерной особенности.

§ 4. Числовые инварианты общего накрытия

Рассмотрим теперь глобальную ситуацию. Пусть поверхность X имеет лишь A - D - E -особенности,

$$\text{Sing } X = \sum_{k \geq 1} a_k A_k + \sum_{k \geq 4} d_k D_k + \sum_{k=6,7,8} e_k E_k,$$

что означает, что X имеет a_k особенностей типа A_k , d_k – типа D_k и e_k – типа E_k . Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общее накрытие степени N , а $B \subset \mathbb{P}^2$ – дискриминантная кривая. Пусть $\deg B = d$, и пусть B имеет n ноудов и s каспов, из которых $n_s = a_1$ и $c_s = a_2$ происходят из $\text{Sing } X$, а n_p и c_p являются p -ноудами и p -каспами. Пусть $R \subset X$ – кривая ветвления, $f^*(B) = 2R + C$, а $L \subset X$ – прообраз общей прямой $l \subset \mathbb{P}^2$. Пусть $\pi: S \rightarrow X$ – минимальное разрешение особенностей X , а $\bar{f} = f \circ \pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$. Обозначим $\bar{R}$ и $\bar{L}$ собственные прообразы R и L на S . Тогда $\bar{R}$ есть нормализация кривой R , а $\bar{L} \simeq L$.

4.1. Канонический класс K_S и канонический цикл Z . Пусть

$$Z = \sum_{x \in \text{Sing } X} Z_x$$

– канонический цикл поверхности S , где Z_x – канонические циклы особенностей $x \in \text{Sing } X$. Из п. 3.2 следует, что

$$K_S = (f \circ \pi)^* K_{\mathbb{P}^2} + \bar{R} + Z = -3\bar{L} + \bar{R} + Z. \quad (4.1)$$

Кроме того, поверхность X горенштейнова, дивизор R локально главный и

$$\pi^*(R) = \bar{R} + Z. \quad (4.2)$$

4.2. Индексы пересечений.

ЛЕММА 4.1. Для дивизоров $\bar{L}$, $\bar{R}$ и Z на S индексы пересечений равны

$$(\bar{L}^2) = N, \quad \bar{L} \cdot \bar{R} = d, \quad \bar{L} \cdot Z = 0, \quad \bar{R} \cdot Z = 2\delta_X, \quad (Z^2) = -2\delta_X, \quad (4.3)$$

где

$$\delta_X = \sum_{x \in \text{Sing } X} \delta_x = \sum a_k \left[\frac{k+1}{2} \right] + \sum d_k \left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) + \sum e_k \left[\frac{k+1}{2} \right] \quad (4.4)$$

– дефект поверхности X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеем $(\bar{L}^2) = \deg f = N$, а $\bar{L} \cdot \bar{R} = \deg B = d$. В силу 3.4 имеем $\bar{R} \cdot Z = 2\delta_X$. Так как дивизор Z исключительный, $\pi(Z) = \text{Sing } X$, $\dim \pi(Z) = 0$, а $\bar{L} = \pi^*(L)$, $\bar{R} + Z = \pi^*(R)$, то $\bar{L} \cdot Z = 0$ и $(\bar{R} + Z) \cdot Z = 0$, а следовательно, $(Z^2) = -(\bar{R} \cdot Z)$.

Остается вычислить $(\bar{R}^2)$.

4.3. Четность степени $\deg B = d = 2\bar{d}$. Ограничение $\bar{f}$ на $\bar{L}$, $\bar{L} \rightarrow l \simeq \mathbb{P}^1$, есть накрытие степени N , которое имеет ветвление второго порядка в точках пересечения $\bar{L}$ и $\bar{R}$. Так как $\bar{L} \cdot \bar{R} = d$, то из формулы Гурвица получаем $2g(\bar{L}) - 2 = -2N + d$. Отсюда следует, что $\deg B = d$ четна. Пусть $d = 2\bar{d}$. Кроме того, так как

$$g(\bar{L}) = \frac{1}{2}d + 1 - N \geq 0,$$

мы получаем ограничение на степень накрытия: $N \leq \bar{d} + 1$.

4.4. Индекс самопересечения $(\bar{R}^2)$ и арифметический род кривой R . Обозначим δ дефект кривой B ,

$$\delta = \delta_B = \sum_{s \in \text{Sing } B} \delta_s = n + c + \delta_0, \quad (4.5)$$

где

$$\delta_0 = \sum_{x \in \text{Sing } B, x \text{ не } A_1 \text{ и } A_2} \delta_x. \quad (4.6)$$

Числа δ и δ_0 – это предельные значения дефектов δ_X поверхностей X с данной дискриминантной кривой B : δ_0 соответствует поверхности X , для которой все ноуды и каспы являются p -ноудами и p -каспами, $n = n_p$, $c = c_p$, а δ соответствует поверхности X (например, двулистному накрытию), у которой все ноуды и каспы являются s -ноудами и s -каспами, $n = n_s$, $c = c_s$.

Сначала мы покажем, как геометрический род кривой B , $g = g(B) = g(\bar{R})$, связан с дефектом δ . Для этого мы рассмотрим поверхность X , которая является двулистным накрытием плоскости $\mathbb{P}^2$ с дискриминантной кривой B . В этом случае $(Z^2) = -(\bar{R} \cdot Z) = -2\delta$, а $f^*(B) = 2R$ и, следовательно, $d \cdot \bar{L} \sim 2\bar{R} + 2Z$, так как $B \sim d \cdot l$. Из (4.1) и формулы присоединения $g(\bar{R}) = \frac{(\bar{R}, \bar{R} + K_{\bar{X}})}{2} + 1$ получаем

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta. \quad (4.7)$$

Отметим, что если известно, что дефект δ совпадает с δ -инвариантом одномерной особенности, то эта формула совпадает с известной формулой для геометрического рода $g(R) \stackrel{\text{df}}{=} g(\bar{R})$ особой кривой R , $g(R) = p_a(R) - \sum_{x \in \text{Sing } R} \delta_x$.

Вернемся к общему накрытию X степени N , $n = n_s + n_p$, $c = c_s + c_p$. Тогда

$$\delta_X = n_s + c_s + \delta_0 = \delta - n_p - c_p. \quad (4.8)$$

ЛЕММА 4.2. *Индекс самопересечения собственного прообраза кривой ветвления $\bar{R} \subset S$ равен*

$$(\bar{R}^2) = 3\bar{d} + g - 1 - \delta_X, \quad (4.9)$$

а

$$(\bar{R} + Z)^2 = 3\bar{d} + g - 1 + \delta_X = 3\bar{d} + p_a(R) - 1, \quad (4.10)$$

где

$$p_a(R) = g + \delta_X = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n_p - c_p \quad (4.11)$$

– арифметический род кривой R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.1) и формулы присоединения $2g(\bar{R}) - 2 = (\bar{R}, \bar{R} + K_S) = (\bar{R}, -3\bar{L} + 2\bar{R} + Z)$ получаем $(\bar{R}^2) = \frac{3}{2}(\bar{R} \cdot \bar{L}) + g - 1 - \frac{1}{2}(\bar{R} \cdot Z)$. Применяя формулы (4.3), получаем доказательство.

Из формул (4.1), (4.3) и (4.9) получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Имеем*

$$(K_S^2) = 9N - 9\bar{d} + p_a(R) - 1, \quad (4.12)$$

или же, подставляя $p_a(R)$ из (4.11),

$$(K_S^2) = 9N + \frac{1}{2}d(d-12) - n_p - c_p. \quad (4.12')$$

4.5. Ограничение на степень накрытия.

ЛЕММА 4.3. *Для общего накрытия степени N с дискриминантной кривой степени $d = 2\bar{d}$ рода g , имеем*

$$N \leq \frac{4\bar{d}^2}{3\bar{d} + g - 1 + \delta_X}, \quad (4.13)$$

где δ_X – дефект особенностей поверхности X , причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $\bar{L} \equiv tK_S$ при некотором $t \in \mathbb{Q}^*$, либо $tK_S \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему Ходжа об индексе к дивизорам $\bar{L}$ и $\pi^*(R) = \bar{R} + Z$ на S . Получим

$$\begin{vmatrix} \bar{L}^2 & (\bar{L}, \bar{R} + Z) \\ (\bar{L}, \bar{R} + Z) & (\bar{R} + Z)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N & d \\ d & 3\bar{d} + g - 1 + \delta_X \end{vmatrix} \leq 0,$$

а это и есть требуемое неравенство. При этом равенство возможно, только если $\bar{L}$ и $\bar{R} + Z$ линейно зависимы в группе Нерона–Севери $\text{NS}(\bar{X}) \otimes \mathbb{Q}$. Так как $K_S = -3\bar{L} + \bar{R} + Z$, получаем утверждение о возможном равенстве.

4.6. Эйлерова характеристика $e(S)$.

ЛЕММА 4.4. *Эйлерова характеристика поверхности S , полученная при минимальном разрешении особенностей поверхности X , связана с дефектом δ_X и инвариантами общего накрытия f соотношением*

$$e(S) = 3N + 2g - 2 + 2\delta_X - c_p, \quad (4.14)$$

где $N = \deg f$, а c_p – число p -каспов на B (или число сборок f).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается точно так же, как и в случае неособой поверхности X [6, § 1, лемма 7] при рассмотрении общего пучка прямых на $\mathbb{P}^2$ и соответствующего пучка гиперплоских сечений на S и подъема морфизма $\bar{f}: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ до морфизма расслоений на кривые над $\mathbb{P}^1$. Доказательство можно получить и непосредственными вычислениями, если найти сначала $e(X) = 3N - e(B) - n_p - c_p$, рассматривая конечное накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, стратификацию $\mathbb{P}^2 = (\mathbb{P}^2 \setminus B) \cup (B \setminus \text{Sing } B) \cup \text{Sing } B$ и применяя свойство аддитивности эйлеровой характеристики.

Из формулы Нётера $(K_S^2) + e(S) = 12p_a$ и формул (4.12) и (4.14) имеем $12p_a = 12N - 9\bar{d} + 3p_a(R) - 3 - c_p$. Подставляя $p_a(R)$ из (4.11), получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Эйлерова характеристика структурного пучка $\mathcal{O}_S$ равна*

$$p_a = 1 - q + p_g = N + \frac{\bar{d}(\bar{d} - 3)}{2} - \frac{n_p}{4} - \frac{c_p}{3}. \quad (4.15)$$

Таким образом, как и в случае неособой поверхности X , получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Имеем $n_p \equiv 0 \pmod{4}$, $c_p \equiv 0 \pmod{3}$.*

§ 5. Доказательство основного неравенства

5.1. Расслоенное произведение двух накрытий. Пусть кривая B является общей дискриминантной кривой для двух общих накрытий $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ степеней $\deg f_1 = N_1$ и $\deg f_2 = N_2$. Пусть

$$\text{Sing } B = nA_1 + cA_2 + \sum_{k>2} a_k A_k + \sum_{k\geq 4} d_k D_k + \sum_{k=6,7,8} e_k E_k.$$

По отношению к паре накрытий f_1 и f_2 ноуды и каспы на B подразделяются на четыре типа:

$$n = n_{ss} + n_{sp} + n_{ps} + n_{pp}, \quad c = c_{ss} + c_{sp} + c_{ps} + c_{pp}, \quad (5.1)$$

где $n_{b\sharp}$ и $c_{b\sharp}$ — число $b\sharp$ -ноудов и $b\sharp$ -каспов на B . В частности, $n_{ss} + n_{sp} = a_1$ — число особенностей типа A_1 , а $c_{ss} + c_{sp} = a_2$ — число особенностей типа A_2 на поверхности X_1 .

Рассмотрим нормализацию X расслоенного произведения $X^\times = X_1 \times_{\mathbb{P}^2} X_2$ и соответствующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X \supset g_1^{-1}(R_1) = R + C & & \\ & g_1 \swarrow & & \searrow g_2 & \\ f_1^*(B) = 2R_1 + C_1 \subset X_1 & & & & X_2 \supset f_2^*(B) = 2R_2 + C_2 \\ & \searrow f_1 & & \swarrow f_2 & \\ & & B \subset \mathbb{P}^2 & & \end{array} \quad (*_1)$$

Поверхность X является $N_1 N_2$ -листным накрытием $\mathbb{P}^2$ и имеет лишь A - D - E -особенности, которые лежат над $\text{Sing } B$.

ЛЕММА 5.1. *Если накрытия f_1 и f_2 неэквивалентны, то поверхность X неприводима.*

Доказательство дословно такое же, как в случае общих накрытий неособых поверхностей [6, предложение 2].

Обозначим

$$g_1^{-1}(R_1) = R + C, \quad (5.2)$$

где R — это часть, которая отображается на R_2 , $g_2(R) = R_2$, а C — это часть, которая отображается на C_2 , $g_2(C) = C_2$. Нас будут интересовать индексы пересечений R и C после разрешения особенностей X в окрестности кривой $R + C$.

Рассмотрим ограничение $R + C \rightarrow R_1$ накрытия g_1 над кривой R_1 . Как следует из пп. 2.2.1 и 2.2.2, над общей точкой $x_1 \in R_1$ это есть этальное накрытие степени N_2 , причем $R \rightarrow R_1$ — двулистное, а $C \rightarrow R_1$ — $(N_2 - 2)$ -листное накрытия. Точно так же обстоит дело над точкой $x_1 \in R_1$, которая является s -точкой на X_1 , лежащей над ss -точкой кривой B .

Обозначим $\tilde{\pi}: S \rightarrow X$ минимальное разрешение особых точек поверхности X , а $\tilde{R}$ и $\tilde{C}$ — собственные прообразы R и C на S . Наша цель — вычислить индексы пересечений $(\tilde{R}^2)$, $(\tilde{R} \cdot \tilde{C})$ и $(\tilde{C}^2)$, а также аналогичные индексы пересечений для дивизоров $\tilde{\pi}^{-1}(R) = \tilde{R} + Z_R$ и $\tilde{\pi}^{-1}(C) = \tilde{C} + Z_C$, где Z_R и Z_C — суммы канонических циклов, соответствующих особым точкам $x \in \text{Sing } X$ и лежащих на R и C соответственно.

5.2. Устройство расслоенного произведения над окрестностью особой точки дискриминантной кривой. Пусть $U \subset \mathbb{P}^2$ — достаточно маленькая окрестность (в комплексной топологии) точки $b \in \text{Sing } B$. Прообраз $f_1^{-1}(U)$ является несвязным объединением двух частей, $f_1^{-1}(U) = V_1 \sqcup V'_1$, где V_1 — это часть, содержащая кривую ветвления R_1 , а V'_1 — часть, не содержащая R_1 и этально отображаемая на U . Аналогично, $f_2^{-1}(U) = V_2 \sqcup V'_2$. Тогда $f^{-1}(U)$ является несвязным объединением четырех открытых множеств: нормализаций расслоенных произведений $W = \overline{V_1 \times_U V_2}$, $W' = \overline{V_1 \times_U V'_2}$, $\overline{V'_1 \times_U V_2}$, $\overline{V'_1 \times_U V'_2}$. При этом только W и W' пересекаются с интересующей нас кривой $g_1^{-1}(R_1)$. Открытые множества $W \subset X$ детально изучены в § 2. Поверхность X в окрестности W неособа, за исключением случая ss -точек b . Открытое множество W' состоит из $N_2 - k$ компонент ($k = 2, 3, 4$ в зависимости от типа особой точки b), изоморфно отображаемых на V_1 . При этом W' не пересекается с R , а $W' \cap C$ состоит из $N_2 - k$ компонент, изоморфных $V_1 \cap R_1$.

Из изучения в § 2 локальных свойств поверхности X следует, что X и кривые R и C имеют следующее устройство над окрестностями особых точек $b \in \text{Sing } B$ различных типов.

1) Над ss -точкой b окрестность W имеет две, а W' имеет $N_2 - 2$ компоненты, изоморфно отображаемые на V_1 с помощью отображения g_1 . Соответственно $R \cap W$ состоит из двух, а $C \cap W'$ — из $N_2 - 2$ компонент, изоморфных $R_1 \cap V_1$.

2) Над sp -точкой $b \in B$ типа A_1 окрестность W' состоит из $N_2 - 4$ компонент, изоморфных V_1 и имеющих особую точку типа A_1 . Соответственно C состоит из $N_2 - 4$ кривых с нодальной особой точкой. Окрестность W состоит из двух компонент: см. рис. 4, на котором

$$R = R'^{\cdot'} + R''^{\cdot'}, \quad C = R'^{\cdot''} + R''^{\cdot''}$$

(на рис. 4 левую и правую части надо поменять местами, g_1 — это g_2 , а g_2 — это g_1). Мы видим, что в окрестности W кривые R и C неособы и трансверсально пересекаются в двух точках.

3) Над ps -точкой b типа A_1 окрестность $V_1 \subset X_1$ состоит из двух компонент, на каждой из которых отображение f_1 имеет складку. Окрестность W' состоит из несвязного объединения $N_2 - 2$ кусков, изоморфных V_1 . Окрестность W состоит из двух компонент: см. рис. 4, на котором

$$R = R'^{\cdot'} + R''^{\cdot'}, \quad C = \emptyset.$$

Мы видим, что в W кривая R неособа и не пересекается с C .

4) Над pp -точкой b типа A_1 окрестность $V_1 \subset X_1$ состоит из двух неприводимых компонент, на каждой из которых f_1 имеет складку. Окрестность W' неособа и состоит из $N_2 - 4$ компонент, изоморфных V_1 . Окрестность W изображена на рис. 5, на котором

$$R = R'^{\cdot'} + R''^{\cdot''} + R''^{\cdot'} + R''^{\cdot''}, \quad C = C'^{\cdot'} + C''^{\cdot'}.$$

Мы видим, что кривые R и C неособы и не пересекаются.

5) Над sp -точкой b типа A_2 окрестность V_1 имеет особую точку типа A_2 , а W' состоит из $N_2 - 3$ компонент, изоморфных V_1 . Окрестность W изображена на рис. 7, на котором

$$R = L_2 + L_3, \quad C = L_1.$$

Мы видим, что R имеет двойную точку, C неособа и трансверсально пересекает каждую из ветвей R в точке их пересечения и, следовательно, $(R \cdot C) = 2$.

6) Над ps -точкой b типа A_2 окрестность V_1 неособа, а W' состоит из $N_2 - 2$ компонент, изоморфных V_1 . Окрестность W изображена на рис. 7 (на котором левую и правую части надо поменять местами, g_1 — это g_2 , а g_2 — это g_3), где

$$R = L_2 + L_3, \quad C = \emptyset.$$

Мы видим, что R имеет двойную точку и с C не пересекается.

7) Над pp -точкой b типа A_2 окрестность W' состоит из $N_2 - 3$ компонент, изоморфных V_1 . Окрестность W изображена на рис. 8, на котором

$$R = R_3 + L_3, \quad C = L_2.$$

Мы видим, что кривая R неособа и пересекается с C трансверсально в одной точке.

Из полученного локального описания следует, что в точках пересечения R и C поверхность X неособа и пересечение не пусто лишь над точками $b \in B$ типов: sp -точками типа A_1 , где $(R \cdot C) = 2$, sp -точками типа A_2 , где $(R \cdot C) = 2$, и над pp -точками типа A_2 , где $(R \cdot C) = 1$. Поэтому

$$(\tilde{R} \cdot \tilde{C}) = 2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp}. \quad (5.3)$$

5.3. Подъем расслоенного произведения на разрешение дискриминантной кривой. Для вычисления индексов пересечения на S мы сначала рассмотрим вспомогательную поверхность $\bar{X}$, которая является неминимальным разрешением поверхности X , а затем “спустимся” на S . Пусть $\sigma: \bar{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ — композиция σ -процессов, разрешающая кривую B и необходимая для получения минимального разрешения двойной плоскости с кривой ветвления B (см. § 3), и, кроме того, пусть σ включает по два дополнительных σ -процесса в каждом каспе, не являющемся ss -каспом, как в п. 2.4.5. Рассмотрим подъем диаграммы $(*_1)$ на $\bar{\mathbb{P}}^2$,

именно рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S & & \\
 & \swarrow \tilde{\pi} & & \searrow \bar{\pi} & \\
 X & \xleftarrow{\pi} & \bar{X} & & \\
 \swarrow g_1 & & \searrow \bar{g}_1 & & \\
 X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & \bar{X}_1 & & \\
 \swarrow f_1 & & \searrow \bar{f}_1 & & \\
 \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{\sigma} & \mathbb{P}^2 & & \\
 & \nwarrow f_2 & \nearrow \bar{f}_2 & & \\
 & X_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \bar{X}_2 &
 \end{array}
 \quad (5.4)$$

в которой $\bar{X}_i$ и $\bar{X}$ – нормализации $X_i \times_{\mathbb{P}^2} \bar{\mathbb{P}}^2$ и $X \times_{\mathbb{P}^2} \bar{\mathbb{P}}^2$. Тогда морфизмы “на правой стенке” диаграммы (5.4) являются конечными накрытиями. Поверхность $\bar{X}$ неособа, а $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow S$ стягивает “лишние” исключительные кривые первого рода. Пусть $\bar{R}_1$ – собственный прообраз R_1 на $\bar{X}_1$, а $\bar{R}$ и $\bar{C}$ (соответственно $\tilde{R}$ и $\tilde{C}$) – собственные прообразы R и C на $\bar{X}$ (соответственно на S). Тогда $\bar{g}_1^*(\bar{R}_1) = \bar{R} + \bar{C}$, а $\bar{R} \rightarrow \bar{R}_1$ и $\bar{C} \rightarrow \bar{R}_1$ – конечные накрытия степени 2 и $N_2 - 2$ соответственно, и $\bar{R}$ и $\bar{C}$ не пересекаются. Поэтому

$$(\bar{R}^2) = 2(\bar{R}_1^2), \quad (\bar{C}^2) = (N_2 - 2)(\bar{R}_1^2), \quad \bar{R} \cdot \bar{C} = 0. \quad (5.5)$$

На самом деле из пп. 3) и 4) видно, что над ps - и pp -ноудами b в окрестности $R + C$ поверхность X неособа, кривые R и C неособы и не пересекаются. Поэтому можно считать, что ps - и pp -ноуды на кривой B и не раздувались (а на поверхности S остались особые точки, которые лежат над этими ноудами).

5.4. Вычисление индексов пересечений. Сначала найдем $(\bar{R}_1^2)$. Напомним, что в силу (4.9) на минимальном разрешении $\tilde{X}_1$ поверхности X_1 имеем

$$(\tilde{R}_1^2) = 3\bar{d} + g - 1 - \delta_1, \quad (5.6)$$

где $\delta_1 = \delta_{X_1} = n_s + c_s + \delta_0$, а $n_s = n_{ss} + n_{sp}$ и $c_s = c_{ss} + c_{sp}$ – числа особых точек типа A_1 и A_2 на поверхности X_1 .

Пусть $\pi_1 = \tilde{\pi}_1 \circ \bar{\pi}_1$, где $\tilde{\pi}_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ – минимальное разрешение, а $\bar{\pi}_1: \bar{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_1$ – стягивание “лишних” исключительных кривых. Поверхность $\bar{X}_1$ отличается от поверхности $\tilde{X}_1$ лишь над каспами кривой B , которые не являются ss -каспами. Пусть $\bar{U} = \sigma^{-1}(U)$, а $\bar{V}_1 = \pi_1^{-1}(V_1)$, $\tilde{V}_1 = \tilde{\pi}_1^{-1}(V_1)$ – окрестности $\bar{X}_1$ и $\tilde{X}_1$, лежащие над $\bar{U}$ и содержащие собственный прообраз R_1 . Аналогично определяются $\bar{V}'_1$ и $\tilde{V}'_1$.

Для sp -каска $b \in B$ стягивание $\bar{V}_1 \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \tilde{V}_1$ изображено на рис. 12. Мы видим, что $\bar{\pi}$ включает один σ -процесс с центром на R_1 . Для ps - и pp -каспов $b \in B$ стягивание

$\bar{V}_1 \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \tilde{V}_1$ изображено на рис. 13 (где R – это R_1 , а C – это C_1). Мы видим, что для разведения ветвей R_1 и C_1 требуются два σ -процесса с центрами в R_1 . Поэтому

$$(\bar{R}_1^2) = (\tilde{R}_1^2) - c_{sp} - 2c_{ps} - 2c_{pp}. \quad (5.7)$$

Теперь мы посмотрим, как меняются индексы пересечения $(\bar{R}^2)$ и $(\bar{C}^2)$ при стягивании $\bar{\pi}$. Для окрестности $U \subset \mathbb{P}^2$ точки $b \in \text{Sing } B$ обозначим $\bar{W} = \pi^{-1}(W)$, $\bar{W}' = \pi^{-1}(W')$, $\tilde{W} = \tilde{\pi}^{-1}(W)$, $\tilde{W}' = \tilde{\pi}^{-1}(W')$. Тогда $\bar{g}_1^{-1}(\bar{V}_1) = \bar{W} \sqcup \bar{W}'$. Мы последовательно проследим за стягиванием $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow S$ в окрестностях $\bar{W} \sqcup \bar{W}' \subset \bar{X}$ по отдельности для различных типов особых точек $b \in \text{Sing } B$ (нумерация случаев соответствует нумерации случаев в п. 5.2).

2) Для sp -точки b типа A_1 окрестность $\bar{W}'$ является несвязным объединением $N_2 - 4$ открытых множеств, изоморфных $\bar{V}_1$, – минимальному разрешению особых точек типа A_1 . Окрестность W изображена на рис. 4, а $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow W$ – это раздутие двух точек $R'' \cap R'''$ и $R''' \cap R''''$. Поэтому стягивание $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow W \simeq W$ увеличивает $(\bar{R}^2)$ и $(\bar{C}^2)$ на 2 для одной точки b и, следовательно, на $2n_{sp}$ для всех точек этого типа.

5) Для sp -точки b типа A_2 окрестность $\bar{W}$ изображена в верхней части рис. 10. Она получается из окрестности W , изображенной на рис. 7, раздутием точки пересечения прямых L_1, L_2 и L_3 , а затем раздутием пяти точек на вклеенной прямой $E_{6,3}$, не лежащих на собственных прообразах этих прямых. Стягивание $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow \bar{W} \simeq W$ – это обратная процедура, т.е. стягивание пяти исключительных кривых первого рода, а затем стягивание кривой $E_{6,3}$. В этом случае $R = L_2 + L_3$, а $C = L_1$. Так как $(R^2) = (L_2^2) + 2(L_2 \cdot L_3) + (L_3^2)$ и $(L_2^2), (L_3^2)$ уменьшаются на 1, а L_2 и L_3 перестают пересекаться после σ -процесса с центром в точке $L_2 \cap L_3$, то стягивание $\bar{\pi}$ увеличивает $(\bar{R}^2)$ на 4 для одной точки b и на $4c_{sp}$ для всех точек этого типа.

Окрестность $\bar{W}'$ состоит из $N_2 - 3$ компонент, изоморфных $\bar{V}_1$, для каждой из которых $\bar{\pi}$ изображено на рис. 12. Как и выше для $(\bar{R}_1^2)$, мы видим, что стягивание $\bar{\pi}$ увеличивает $(\bar{C}^2)$ на $(N_2 - 3) + 1$ (с учетом окрестности $\bar{W}$) для одной точки b и на $(N_2 - 2)c_{sp}$ для всех точек этого типа.

6) Для ps -точки b типа A_2 окрестность $\bar{W}$ и стягивание $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow \tilde{W} \simeq W$ такие же, как в 5), но в этом случае $R = L_2 + L_3$, а $C \cap W = \emptyset$. Поэтому, как и в 5), мы получаем, что стягивание $\bar{\pi}$ увеличивает $(\bar{R}^2)$ на $4c_{ps}$.

Окрестность $\bar{W}'$ состоит из $N_2 - 2$ компонент, изоморфных $\bar{V}_1$, для каждой из которых $\bar{\pi}$ изображено на рис. 13. Как и выше для $(\bar{R}_1^2)$, мы видим, что стягивание $\bar{\pi}$ увеличивает $(\bar{C}^2)$ на $2(N_2 - 2)$ для одной точки b и на $2(N_2 - 2)c_{ps}$ для всех точек этого типа.

7) Для pp -точки b типа A_2 окрестность $\bar{W}$ состоит из двух компонент: одной такой же, как в 5), и другой – такой же, как $\bar{V}_1'$, и изображенной на рис. 13 слева. Так как на W , изображенной на рис. 8, $R = R_3 + L_3$, а $C = L_2$, мы получаем, что стягивание $\bar{\pi}: \bar{W} \rightarrow \tilde{W} \simeq W$ увеличивает $(\bar{R}^2)$ на $1 + 2 = 3$ для одной точки b и на $3c_{pp}$ для всех точек этого типа. Кроме того, $(\bar{C}^2)$ увеличивается на c_{pp} .

Окрестность $\bar{W}'$ состоит из $N_2 - 3$ компонент, изоморфных $\bar{V}_1'$ и изображенных на рис. 13 (на котором C – это R). Поэтому, с учетом окрестности $\bar{W}$, стягивание $\bar{\pi}$ увеличивает $(\bar{C}^2)$ на $2(N_2 - 3)c_{pp} + c_{pp} = (2N_2 - 5)c_{pp}$.

Суммируя все изменения $(\bar{R}^2)$ и $(\bar{C}^2)$, получаем

$$(\tilde{R}^2) = (\bar{R}^2) + 2n_{sp} + 4c_{sp} + 4c_{ps} + 3c_{pp}, \quad (5.8)$$

$$(\tilde{C}^2) = (\bar{C}^2) + 2n_{sp} + (N_2 - 2)c_{sp} + 2(N_2 - 2)c_{ps} + (2N_2 - 5)c_{pp}. \quad (5.9)$$

Применяя (5.5) и подставляя $(\bar{R}_1^2)$ из (5.7), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{R}^2) &= 2((\tilde{R}_1^2) - c_{sp} - 2c_{ps} - 2c_{pp}) + 2n_{sp} + 4c_{sp} + 4c_{ps} + 3c_{pp} \\ &= 2(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} + 2c_{sp} - c_{pp}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{C}^2) &= (N_2 - 2)((\tilde{R}_1^2) - c_{sp} - 2c_{ps} - 2c_{pp}) + 2n_{sp} \\ &\quad + (N_2 - 2)c_{sp} + 2(N_2 - 2)c_{ps} + (2N_2 - 5)c_{pp} \\ &= (N_2 - 2)(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} - c_{pp}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.5. Вычисление индексов пересечений (продолжение). Теперь найдем $(\tilde{R} + Z_R)^2$, $(\tilde{C} + Z_C)^2$ и $(\tilde{R} + Z_R) \cdot (\tilde{C} + Z_C)$, где дивизор Z_R , соответственно Z_C , равен $\sum Z_x$, где Z_x — канонический цикл точки $x \in \text{Sing } X$, а суммирование ведется по $x \in R$, соответственно $x \in C$. Аналогичные суммы $\sum \delta_x$ обозначим δ_R и δ_C соответственно. В силу п. 4.2 имеем

$$(\tilde{R} \cdot Z_R) = -(Z_R^2) = 2\delta_R, \quad (\tilde{C} \cdot Z_C) = -(Z_C^2) = 2\delta_C.$$

Очевидно, что

$$(\tilde{R} + Z_R) \cdot (\tilde{C} + Z_C) = \tilde{R} \cdot \tilde{C}, \quad (5.12)$$

а

$$(\tilde{R} + Z_R)^2 = (\tilde{R}^2) + 2(\tilde{R} \cdot Z_R) + (Z_R^2) = (\tilde{R}^2) + 2\delta_R. \quad (5.13)$$

Аналогично, $(\tilde{R}_C + Z_C)^2 = (\tilde{C}^2) + 2\delta_C$.

Остается указать, сколько особых точек $x \in \text{Sing } X$ лежит на R , соответственно на C . Из п. 5.2 следует, что над каждой ss -точкой на R лежит 2, а на C лежит $N_2 - 2$ особые точки. На R других особых точек нет. На C имеются еще следующие особые точки: над sp -точкой типа A_1 имеется $N_2 - 4$ особые точки типа A_1 , над sp -точкой типа A_2 имеется $N_2 - 3$ особые точки типа A_2 . Мы получаем

$$\begin{aligned} \delta_R &= 2(\delta_0 + n_{ss} + c_{ss}) = 2(\delta_1 - n_{sp} - c_{sp}), \\ \delta_C &= (N_2 - 2)(\delta_0 + n_{ss} + c_{ss}) + (N_2 - 4)n_{sp} + (N_2 - 3)c_{sp} \\ &= (N_2 - 2)\delta_1 - 2n_{sp} - c_{sp}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Подставляя $(\tilde{R}^2)$ из (5.10) и δ_R из (5.14) в (5.13), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + Z_R)^2 &= 2(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} + 2c_{sp} - c_{pp} + 4(\delta_1 - n_{sp} - c_{sp}) \\ &= 2((\tilde{R}_1^2) + 2\delta_1) - 2n_{sp} - 2c_{sp} - c_{pp}. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_C + Z_C)^2 &= (N_2 - 2)(\tilde{R}_1^2) + 2n_{sp} - c_{pp} + 2(N_2 - 2)\delta_1 - 4n_{sp} - 2c_{sp} \\ &= (N_2 - 2)((\tilde{R}_1^2) + 2\delta_1) - 2n_{sp} - 2c_{sp} - c_{pp}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp} = \iota_1, \quad (5.15)$$

и пусть

$$g_1 = p_a(R_1) = g + \delta_1 \quad (5.16)$$

– арифметический род кривой R_1 . Так как в силу (5.6) $(\tilde{R}_1^2) + 2\delta_1 = 3\bar{d} + g - 1 + \delta_1 = 3\bar{d} + g_1 - 1$, то окончательно получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + Z_R)^2 &= 2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1, \\ (\tilde{C} + Z_C)^2 &= (N_2 - 2)(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1, \quad (\tilde{R} + Z_R) \cdot (\tilde{C} + Z_C) = \iota_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.7. Индекс самопересечения дивизора $\tilde{R} + Z_R$ больше нуля.

ЛЕММА 5.2. *Имеем*

$$(\tilde{R} + Z_R)^2 > 0. \quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $2\bar{d} = d = \deg B$, а $\delta_1 = \delta_0 + n_{sp} + c_{sp}$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + Z_R)^2 &= 2(3\bar{d} + g - 1 + \delta_1) - 2n_{sp} - 2c_{sp} - c_{pp} \\ &= d + (2d + 2g - 2) + 2\delta_0 - c_{pp}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Теперь мы применим формулу Гурвица для общей проекции $\varphi: B \rightarrow \mathbb{P}^1$ кривой B из точки $P \in \mathbb{P}^2$ на прямую $\mathbb{P}^1$, точнее, для накрытия $\bar{\varphi}: \bar{B} \rightarrow \mathbb{P}^1$, где $\bar{\varphi} = \varphi \circ n$, а $n: \bar{B} \rightarrow B$ – нормализация кривой B . Очевидно, что накрытие $\bar{\varphi}$ ветвится в следующих точках. Во-первых, $\bar{\varphi}$ имеет ветвление второго порядка в точках $\bar{b} \in \bar{B}$, которые соответствуют неособым точкам $b \in B$, для которых прямая $\overline{Pb}$ касается B . Число таких точек $\hat{d} = \deg \hat{B}$, где $\hat{B}$ – двойственная к B кривая. Во-вторых, $\bar{\varphi}$ имеет ветвление порядка m_k в точках $\bar{b}$, которые соответствуют ветвям B_k кривой B в особых точках b . Здесь m_k – это кратность (порядок) соответствующей ветви. Обозначим

$$\nu = \sum_k (m_k - 1), \quad (5.20)$$

где суммирование ведется по всем ветвям кривой (в особых точках). Накрытие $\bar{\varphi}$ имеет степень $d = \deg B$. По формуле Гурвица получаем

$$2g - 2 = -2d + \hat{d} + \nu. \quad (5.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. На самом деле мы вывели одну из формул Плюккера

$$\hat{d} = 2d + (2g - 2) - \nu$$

для плоской кривой с особенностями.

Очевидно, что для A - D - E -особенностей число ν равно:

$$\begin{aligned} \nu(A_{2k-1}) &= \nu(D_{2k+2}) = 0, \quad \nu(A_{2k}) = \nu(D_{2k+3}) = \nu(E_7) = 1, \\ \nu(E_6) &= \nu(E_8) = 2. \end{aligned}$$

Поэтому для кривой B число $\nu = \nu(B)$ равно

$$\nu = c + \nu', \quad \text{где } \nu' = \sum_{k>1} a_{2k} + \sum d_{2k+3} + 2e_6 + e_7 + 2e_8. \quad (5.22)$$

Возвращаясь к доказательству неравенства, из (5.19), (5.21) и (5.22) получаем

$$(\tilde{R} + Z_R)^2 = d + (\hat{d} + \nu) + 2\delta_0 - c_{pp} = d + \hat{d} + 2\delta_0 + \nu' + (c - c_{pp}) > 0. \quad (5.23)$$

5.8. Вывод основного неравенства. Применяя теорему Ходжа об индексе к дивизорам $\tilde{R} + Z_R$ и $\tilde{C} + Z_C$ на поверхности S , получаем

$$\left| \begin{array}{cc} 2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1 & \iota_1 \\ \iota_1 & (N_2 - 2)(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1 \end{array} \right| \leq 0.$$

Поэтому

$$2(N_2 - 2)(3\bar{d} + g_1 - 1)^2 - N_2(3\bar{d} + g_1 - 1)\iota_1 \leq 0$$

или

$$N_2[2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1] \leq 4(3\bar{d} + g_1 - 1). \quad (5.24)$$

Таким образом, если имеются два неэквивалентных общих накрытия f_1 и f_2 , то

$$N_2 \leq \frac{4(3\bar{d} + g_1 - 1)}{2(3\bar{d} + g_1 - 1) - \iota_1}. \quad (5.25)$$

§ 6. Доказательство гипотезы Кизини для кратноканонических вложений поверхностей основного типа

6.1. Числовые инварианты в случае m -канонического вложения.

Пусть S – минимальная модель поверхности основного типа с числовыми инвариантами $(K_S^2) = k$ и $e(S) = e$. Пусть X – каноническая модель поверхности S и $\pi: S \rightarrow X$ – стягивание (-2) -кривых. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общее m -каноническое накрытие, т.е. f является общей проекцией на $\mathbb{P}^2$ поверхности $X = \varphi_m(S)$, где $\varphi_m: S \rightarrow \mathbb{P}^{p_m-1}$ – m -каноническое отображение, определенное полной линейной системой $|mK_S|$, $p_m = \frac{1}{2}m(m-1)k + \chi(S)$. Как хорошо известно [3], по теореме Бомбьери $\varphi_m(S) \simeq X$ при $m \geq 5$ и φ_m совпадает с π .

Пусть $B \subset \mathbb{P}^2$ – дискриминантная кривая. Мы сохраняем обозначения § 4. Тогда

$$\bar{L} = mK_S, \quad K_S \cdot Z = 0, \quad \bar{R} = (3m+1)K_S - Z. \quad (6.1)$$

Из формулы (4.3) получаем

$$N = m^2k, \quad d = m(3m+1)k. \quad (6.2)$$

Из формулы (4.10) находим

$$3\bar{d} + p_a(R) - 1 = (3m+1)^2k, \quad (6.3)$$

$$p_a(R) - 1 = \frac{1}{2}(3m+1)(3m+2)k. \quad (6.4)$$

6.2. Инварианты поверхности и дискриминантной кривой определяют инварианты накрытия. Пусть теперь S_1 и S_2 – две поверхности основного типа с числовыми инвариантами k и e . Пусть $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, – их общие m_i -канонические накрытия, имеющие одну и ту же дискриминантную кривую $B \subset \mathbb{P}^2$. Тогда из второй формулы (6.2) следует, что $m_1 = m_2 = m$. Тогда и $\deg f_1 = \deg f_2 = N$. Покажем, что и остальные числовые инварианты накрытий f_1 и f_2 одинаковые.

Из формулы (6.4) следует, что $p_a(R_1) = p_a(R_2)$, а так как $p_a(R) = g + \delta_X$, то и $\delta_{X_1} = \delta_{X_2}$.

Из формул (4.14) и (4.11) следует, что число p -каспов c_p и число p -ноудов n_p для обоих накрытий одинаково. Тогда $n_p = n_{pp} + n_{ps} = n_{pp} + n_{sp}$, $c_p = c_{pp} + c_{ps} = c_{pp} + c_{sp}$ и, следовательно, $n_{ps} = n_{sp}$ и $c_{ps} = c_{sp}$.

6.3. Основное неравенство в случае поверхностей основного типа. В силу (5.24) для того, чтобы показать, что m -канонические проекции f_1 и f_2 эквивалентны, достаточно показать, что выполняется неравенство (здесь R – это R_1)

$$N(2(3\bar{d} + p_a(R) - 1) - \iota) > 4(3\bar{d} + p_a(R) - 1) \quad (6.5)$$

или

$$(N - 2)(3d + 2p_a(R) - 2) - N \cdot \iota > 0, \quad (6.6)$$

где

$$\iota = 2n_{sp} + 2c_{sp} + c_{pp} = 2n_{sp} + c_{sp} + c_p. \quad (6.7)$$

Получим оценку для числа ι . Мы можем выразить c_p из формулы (4.14):

$$c_p = 3N + 2p_a(R) - 2 - e. \quad (6.8)$$

Для оценки $2n_{sp} + c_{sp}$ мы воспользуемся неравенством Хирцебруха–Мияока [3, с. 215]: если на минимальной модели поверхности основного типа S лежат s не пересекающихся (-2) -кривых, то

$$s \leq \frac{2}{9}(3e(S) - (K_S^2)). \quad (6.9)$$

Так как для каждой из A_1 и A_2 точек на X мы можем взять по одной (-2) -кривой, то

$$n_s + c_s \leq \frac{2}{9}(3e - k). \quad (6.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Вместо неравенства Хирцебруха–Мияока можно использовать оценку $2n_{sp} + c_{sp} \leq 2(h^{1,1} - 1) = 2(e - 2 + 4q - 2p_g - 1)$ и неравенства $p_g \geq q$, $p_g \leq \frac{1}{2}(K_S^2) + 2$ (неравенство Нётера).

Из (6.7), (6.8) и (6.10) получаем оценку

$$\iota \leq \frac{4}{9}(3e - k) + 3N + 2p_a(R) - 2 - e = \frac{1}{3}e - \frac{4}{9}k + 3N + 2p_a(R) - 2.$$

Применяя неравенство Нётера [3, с. 211]

$$e \leq 5k + 36, \quad (6.11)$$

получаем

$$\iota \leq \frac{11}{9}k + 12 + 3N + 2p_a(R) - 2. \quad (6.12)$$

Соединяя (6.12) и (6.6), получаем как следствие следующую лемму.

ЛЕММА 6.1. Если выполняется неравенство

$$3N(d - N) - 6d - 4(p_a(R) - 1) - \left(\frac{11}{9}k + 12\right)N > 0, \quad (6.13)$$

то общая m -каноническая проекция поверхности основного типа S с заданными k и e единственна.

6.4. Доказательство теоремы 0.3. Выразим неравенство (6.13) в терминах m . Подставим N и d из (6.2) и $p_a(R) - 1$ из (6.4) в (6.13). Получим

$$3m^3(2m + 1)k^2 - 6m(3m + 1)k - 2(3m + 1)(3m + 2)k - \left(\frac{11}{9}k + 12\right)km^2 > 0,$$

т.е.

$$3m^3(2m + 1)k - 4(3m + 1)^2 - \left(\frac{11}{9}k + 12\right)m^2 > 0.$$

Деля на m^2 , получаем

$$3m(2m + 1)k - \left(\frac{11}{9}k + 12\right) - 4\left(3 + \frac{1}{m}\right)^2 > 0,$$

или, деля на k , получаем

$$3m(2m + 1) > \frac{11}{9} + \frac{1}{k}\left(12 + 4\left(3 + \frac{1}{m}\right)^2\right). \quad (6.14)$$

Правая часть неравенства убывает при возрастании k и m . Это неравенство выполняется при всех $k \in \mathbb{N}$, если оно выполняется при $k = 1$. При $k = 1$ и $m = 3$ правая часть равна $\frac{11}{9} + 12 + 4 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{173}{3} < 9 \cdot 7 = 63$. Таким образом, неравенство (6.14), а следовательно, и неравенство (6.6) выполняются при $m \geq 3$ и при любом k , и теорема 0.3 доказана.

Дополнительно можно отметить, что при $m = 2$ неравенство (6.14) выполняется, если $k > 2$, а при $m = 1$ — если $k > 9$.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проекции гладких поверхностей // УМН. 1979. Т. 34. №2. С. 3–38.
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
3. Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces. Berlin: Springer, 1984.
4. Catanese F. On a Problem of Chisini // Duke Math. J. 1986. V. 53. № 1. P. 33–42.
5. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
6. Куликов Вик. С. О гипотезе Кизини // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №6. С. 83–116.
7. Moishezon B. Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes. LNM 603. Springer, 1977.
8. Zariski O. Algebraic surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

Московский государственный университет печати,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: valentin@masha.ips.ras.ru,
victor@olya.ips.ras.ru

Поступило в редакцию
27.VII.1999