Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Лаптев, Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 6, 107–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/im313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:15:47

УДК 517.9

Г. Г. Лаптев

Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах

Пусть K – конус в пространстве $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. В работе устанавливаются условия отсутствия глобальных неотрицательных нетривиальных решений полулинейных эллиптических неравенств и систем неравенств вида

$$-\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) \geq |x|^\beta u^q, \quad u|_{\partial K} = 0.$$

Найден критический показатель q^* , разделяющий области существования и отсутствия указанных решений. Доказано отсутствие решения в предельном случае $q = q^*$. Для исследования задачи применяется метод умножения на специальный множитель с последующим интегрированием.

Библиография: 18 наименований.

Введение

В настоящее время большой интерес вызывают вопросы отсутствия глобальных неотрицательных (нетривиальных) решений квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств. При этом основное внимание уделяется изучению уравнений и неравенств во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ (см. [1]–[8]) и в конических областях (конусах) (см. [9]–[14] и литературу там). Напомним, что *конусом* называется множество $K \in \mathbb{R}^N$, содержащее вместе с любой своей точкой $x \in K$ также все точки вида λx , где $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ($\lambda > 0$). Под глобальным понимается решение, определенное для всех $x \in \mathbb{R}^N$ ($x \in K$), но не обязательно интегрируемое или ограниченное на всем $\mathbb{R}^N(K)$.

Классическим примером является задача

$$-\Delta u \geq u^q, \quad u \geq 0, \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2, \quad (0.1)$$

где Δ – оператор Лапласа. Это неравенство не имеет глобального, отличного от нулевого решения [2], [5], [6], если $1 < q \leq \frac{N}{N-2}$. Однако для $q > \frac{N}{N-2}$ требуемым решением служит функция

$$u(x) = \frac{\varepsilon}{(1 + |x|^2)^{1/(q-1)}}$$

при малых $\varepsilon > 0$.

Аналогичный результат для конусов [9], [11] будет приведен в § 2, где рассматривается соответствующая модельная задача.

В данной работе исследуется отсутствие локально ограниченных глобальных неотрицательных решений в конусах неравенств (§ 3) вида

$$-\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) \geq |x|^\beta u^q, \quad \beta \geq \alpha \geq 0, \quad (0.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 96-1060) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект 96-15-96102).

а также систем (§ 4)

$$\begin{cases} -\Delta u \geq v^q \\ -\Delta v \geq u^p. \end{cases}$$

Результаты § 4 могут быть обобщены на системы неравенств типа (0.2).

Предлагаемый подход не предполагает радиальности решений и не использует принципа сравнения и других утверждений, характерных для теории эллиптических уравнений и неравенств второго порядка. Важной особенностью является относительная простота доказательства отсутствия решения для предельного показателя роста нелинейного члена u^q .

Частично идеи доказательств заимствованы из теории емкости [15]–[17] и ее приложений к изучению отсутствия решений во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ [2]–[6], [18].

§ 1. Основные обозначения

Пусть K_ω – область на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, с достаточно гладкой границей ∂K_ω . *Конусом* K называется множество

$$K = \{x = x(r, \omega) : 0 < r < +\infty, \omega \in K_\omega\},$$

где (r, ω) – сферические координаты точки x в $\mathbb{R}^N$. Боковую поверхность конуса обозначаем ∂K .

В проводимых оценках через c и C обозначаются константы, точные значения которых для нас несущественны.

Под $L_{q,\text{loc}}(K)$, $q \geq 1$, понимается пространство определенных на K измеримых функций, суммируемых со степенью q по любому (измеримому) ограниченному подмножеству $\Omega \subset K$; под $L_{\infty,\text{loc}}(K)$ – пространство локально существенно ограниченных функций. Для описания дифференциальных свойств применяются пространства Соболева

$$\begin{aligned} W_{q,\text{loc}}^1(K) &\equiv \{u \in L_{q,\text{loc}}(K) : |Du| \in L_{q,\text{loc}}(K)\}, \\ W_{q,\text{loc}}^2(K) &\equiv \{u \in L_{q,\text{loc}}(K) : |D^2u| \in L_{q,\text{loc}}(K)\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad i = \overline{1, N}; & |Du| &= \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}; \\ D^2u &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad i, j = \overline{1, N}; & |D^2u| &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Если $u \in W_{q,\text{loc}}^1(K)$, $\varphi \in W_{q',\text{loc}}^1(K)$ и $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, то через $Du D\varphi$ обозначается сумма $\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Выражение $\text{supp } \varphi$ обозначает носитель функции φ , т.е. множество $\{x \in K : \varphi(x) \neq 0\}$.

Напомним, что оператор Лапласа Δ в сферических координатах (r, ω) имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega,$$

где Δ_ω – оператор Бельтрами–Лапласа на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

В дальнейшем постоянно используются наименьшее собственное значение $\lambda_\omega \equiv \lambda_1(K_\omega) > 0$ и соответствующая собственная функция $\Phi(\omega)$ оператора Δ_ω , являющиеся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_\omega \Phi + \lambda \Phi = 0 & \text{в } K_\omega \\ \Phi|_{\partial K_\omega} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Хорошо известно, что $\Phi(\omega) > 0$ для $\omega \in K_\omega$. Предполагается, что $\Phi(\omega) \leq 1$.

Собственное значение λ_ω наряду с размерностью N является основным параметром, определяющим существование или отсутствие решений в конусе K .

§ 2. Модельная задача

Рассмотрим проблему отсутствия нетривиальных неотрицательных слабых решений задачи

$$\begin{cases} -\Delta u \geq u^q & \text{в } K \\ u|_{\partial K} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $u(x) \in W_{2,\text{loc}}^1(K) \cap L_{\infty,\text{loc}}(K)$, $u|_{\partial K} = 0$, называется *слабым решением* задачи (2.1), если для любой неотрицательной функции $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \omega) \in W_2^1(K)$, $\varphi|_{\partial K} = 0$, финитной по переменной r , выполнено интегральное неравенство

$$\int_K Du D\varphi dx \geq \int_K u^q \varphi dx.$$

Цель данного параграфа состоит в нахождении степени $q^* > 1$ такой, что при $1 < q \leq q^*$ не существует неотрицательного нетривиального глобального слабого решения задачи (2.1).

Приведем пример решения задачи (2.1) при некоторых значениях q . Его отличием от известных аналогичных примеров для уравнений [9], [11] является ограниченность функции $u(x)$ и ее производных в нуле.

ЛЕММА 2.1. *Функция*

$$u(x) \equiv u(r, \omega) = \frac{\varepsilon}{(1 + r^2)^{1/(q-1)}} \Phi(\omega)$$

служит решением задачи (2.1) при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(q) > 0$ для любого

$$q > q^* = 1 + \frac{2}{s^*}.$$

Здесь

$$s^* = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}, \quad (2.2)$$

$\Phi(\omega)$ – решение задачи (1.1), λ_ω – соответствующее наименьшее собственное значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$R(r) = \frac{\varepsilon}{(1 + |r|^2)^{1/(q-1)}}.$$

Тогда $u = R(r)\Phi(\omega)$. Используя выражение для оператора Лапласа в сферических координатах и учитывая, что $\Delta_\omega \Phi = -\lambda_\omega \Phi$, получим

$$-\Delta u = -\left(R''\Phi + \frac{N-1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Delta_\omega \Phi\right) = -\Phi\left(R'' + \frac{N-1}{r}R' - \frac{\lambda_\omega}{r^2}R\right).$$

Подставляем R , R' и R'' , имеем

$$-\Delta u = \frac{\varepsilon\Phi(\omega)}{(1+r^2)^{1/(q-1)+1}} \left\{ \frac{2N}{q-1} - \frac{4}{q-1} \left(\frac{1}{q-1} + 1 \right) \frac{r^2}{1+r^2} + \lambda_\omega \frac{1+r^2}{r^2} \right\}.$$

Легко проверить, что для всех $r > 0$ выражение в фигурных скобках равномерно положительно:

$$\frac{2N}{q-1} - \frac{4q}{(q-1)^2} \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{\lambda_\omega}{r^2} + \lambda_\omega > \frac{2N}{q-1} - \frac{4q}{(q-1)^2} + \lambda_\omega > \delta(q) > 0$$

для фиксированного $q > 1 + \frac{2}{s^*}$.

Отсюда с учетом приведенного выше выражения для $-\Delta u$ получаем

$$-\Delta u > \frac{\varepsilon\Phi(\omega)}{(1+r^2)^{q/(q-1)}} \delta(q) \geq \frac{\varepsilon^q \Phi^q(\omega)}{(1+r^2)^{q/(q-1)}} = R^q(r)\Phi^q(\omega) = u^q,$$

т.е.

$$-\Delta u \geq u^q.$$

Здесь использовано условие $\Phi(\omega) \leq 1$, так что $\Phi(\omega) \geq \Phi^q(\omega)$, и выбрано число $\varepsilon = \delta^{1/(q-1)}(q) > 0$. Как видно, введенная функция $u(x) \in C^2(K) \cap L_\infty(K)$ и удовлетворяет неравенству (2.1) почти всюду в K . Достаточно очевидно, что всякое такое решение этого неравенства одновременно является слабым решением. Лемма доказана.

Основным утверждением настоящего параграфа является

ТЕОРЕМА 2.1. *При*

$$1 < q \leq q^* = 1 + \frac{2}{s^*}$$

задача (2.1) не имеет нетривиального неотрицательного глобального слабого решения. Здесь s^ определено в (2.2).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для случая уравнения аналоги этой теоремы имеются в работах [9], [11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используется традиционный метод умножения неравенства (2.1) на специальный множитель с последующим интегрированием. Например, в работах [6], [2] для исследования задачи во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ в качестве такого множителя берется функция $\frac{\varphi(x)}{u^\alpha(x)}$, где $u(x)$ – искомое решение, $\alpha > 0$, $\varphi(x)$ – неотрицательная срезающая функция в $\mathbb{R}^N$: $\varphi(x) \equiv 1$ при $|x| \leq \rho$, $\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| \geq 2\rho$, $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, ρ – некоторое число. В указанных работах задача сводится к вычислению $2q'$ -емкости пространства $\mathbb{R}^N$.

В случае, когда областью является конус, этот подход сталкивается с существенными трудностями, поэтому предлагается другой метод. В настоящей работе в качестве упомянутого множителя берется специальным образом выбранная функция $\varphi(x)$ без множителя $\frac{1}{u^\alpha(x)}$, после чего с помощью интегрирования по частям оператор Δ переносится с решения $u(x)$ на функцию $\varphi(x)$.

Далее основное внимание уделяется оценке интегралов вида

$$\int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx,$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\text{supp } |\Delta\varphi|$ – носитель $|\Delta\varphi|$.

Для этого явно строится последовательность функций $\varphi_\rho \in W_1^2(K)$, $\rho \rightarrow \infty$, удовлетворяющих некоторым дополнительным требованиям. После чего находятся условия на q , при которых указанные выше интегралы стремятся к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. Эти условия и определяют отсутствие нетривиального глобального решения.

Итак, пусть $u \in W_{2,\text{loc}}^1(K) \cap L_{\infty,\text{loc}}(K)$ – слабое решение задачи (2.1) с $1 < q \leq q^*$. Наша цель – показать, что тогда $u \equiv 0$. Согласно определению 2.1 слабого решения для любой неотрицательной функции $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \omega) \in W_2^1(K)$, $\varphi|_{\partial K} = 0$, финитной по переменной r , справедливо соотношение

$$\int_K u^q \varphi dx \leq \int_K Du D\varphi dx. \quad (2.3)$$

Предположим дополнительно, что функция $\varphi \in W_1^2(K) \cap W_2^1(K)$. Тогда, интегрируя правую часть (2.3) по частям, с учетом условия $u|_{\partial K} = 0$ получаем

$$\int_K Du D\varphi dx = - \int_K u \Delta\varphi dx,$$

вследствие чего неравенство (2.3) принимает вид

$$\int_K u^q \varphi dx \leq - \int_K u \Delta\varphi dx. \quad (2.4)$$

Для оценки правой части применим неравенство Юнга с параметром:

$$\begin{aligned} - \int_K u \Delta\varphi dx &= - \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} u \Delta\varphi dx = - \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} u \varphi^{1/q} \frac{\Delta\varphi}{\varphi^{1/q}} dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} u^q \varphi dx + \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx, \end{aligned}$$

откуда при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ получим

$$\int_{\text{supp } \varphi} u^q \varphi dx \leq c_0 \int_{\text{supp } |\Delta\varphi|} \frac{|\Delta\varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx, \quad (2.5)$$

где $c_0 = 2^{q'}$ – не зависящая от u и φ постоянная.

Теперь необходимо построить последовательность функций φ_ρ , $\rho \rightarrow \infty$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\varphi_\rho \xrightarrow{\text{п.в.}} \varphi_\infty > 0$ п.в. в K ; $\varphi_\rho = \varphi_\infty$ при $0 < r < \rho$;
- 2) $\varphi_\rho|_{\partial K} = 0$;
- 3) $\int_{\text{supp } |\Delta\varphi_\rho|} \frac{|\Delta\varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$.

Здесь $\varphi_\infty \in W_{1,\text{loc}}^2(K) \cap W_{2,\text{loc}}^1(K)$ – некоторая фиксированная функция.

Тогда, подставляя в (2.5) $\varphi = \varphi_\rho$, будем иметь

$$\int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} u^q \varphi_\infty dx \leq \int_{\text{supp } \varphi_\rho} u^q \varphi_\rho dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty,$$

откуда в пределе получаем

$$\int_K u^q \varphi_\infty dx = 0,$$

что в силу неравенства $\varphi_\infty > 0$ п.в. в K означает $u \equiv 0$ в K , т.е. отсутствие глобального неотрицательного нетривиального решения.

Переведем доказательство теоремы 2.1 с целью построения последовательности φ_ρ с указанными свойствами.

Пусть заданы числа $s > 0$, $p > 1$. Рассмотрим семейство функций

$$\varphi_\rho(r, \omega) = R_\rho(r) \Phi(\omega), \quad (2.6)$$

где $\Phi(\omega)$ – решение задачи (1.1), а функция $R_\rho(r)$ задается равенствами

$$R_\rho(r) = \begin{cases} r^s, & 0 \leq r \leq \rho; \\ \psi^{2p}(r), & \rho < r < 2\rho; \\ 0, & r \geq 2\rho. \end{cases}$$

Здесь

$$\psi(r) = -\left(\frac{s}{2p} + 1\right) \rho^{\frac{s}{2p}-2} r^2 + \left(3\frac{s}{2p} + 2\right) \rho^{\frac{s}{2p}-1} r - 2\frac{s}{2p} \rho^{\frac{s}{2p}}.$$

Отметим, что $\varphi_\rho|_{\partial K} = 0$ (для всех $0 < r < 2\rho$) за счет множителя $\Phi(\omega)$.

Докажем некоторые свойства функции φ_ρ . Поскольку последующие действия носят чисто технический характер, будем опускать промежуточные выкладки.

ЛЕММА 2.2. *Функция φ_ρ принадлежит $W_1^2(K) \cap W_2^1(K)$, $\varphi_\rho = \varphi_\infty > 0$ п.в. для $0 < r < \rho$, где $\varphi_\infty = r^s \Phi(\omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $R_\rho(r)$ является гладкой в интервалах $0 < r < \rho$ и $\rho < r < 2\rho$. Функция $\psi(r)$ введена для того, чтобы на участке $\rho < r < 2\rho$ функция $r^s \Phi(\omega)$ срезалась гладким образом ($\varphi_\rho \in W_1^2(K)$), достигая финитности по переменной r . Конкретный многочлен $\psi(r)$ приведен с целью наиболее наглядного и явного вычисления получающихся интегралов.

Убедимся, что функции $R_\rho(r)$ и $R'_\rho(r)$ непрерывны в точках стыка $r = \rho$ и $r = 2\rho$. Это приводит к системе равенств:

$$\begin{cases} \psi^{2p}(\rho) = \rho^s \\ 2p\psi^{2p-1}(\rho)\psi'(\rho) = s\rho^{s-1} \\ \psi^{2p}(2\rho) = 0 \\ 2p\psi^{2p-1}(2\rho)\psi'(2\rho) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi(\rho) = \rho^{\frac{s}{2p}} \\ \psi'(\rho) = \frac{s}{2p}\rho^{\frac{s}{2p}-1} \\ \psi(2\rho) = 0. \end{cases}$$

Справедливость данных равенств для введенной функции $\psi(r)$ проверяется прямой подстановкой. Собственно говоря, функция $\psi(r)$ подбиралась так, чтобы выполнялись указанные соотношения.

Отметим, что $R'_\rho = sr^{s-1}$ и $R''_\rho = s(s-1)r^{s-2}$ для $0 < r < \rho$, и так как $s > 0$, то отсюда следует

$$\varphi_\rho \in W_1^2(K \cap \{0 < r < 1\}) \cap W_2^1(K \cap \{0 < r < 1\}).$$

ЛЕММА 2.3. Для всех $\rho > 1$ выполняется неравенство

$$\int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{2p-s-N}},$$

где постоянная C не зависит от ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая оператор Лапласа в сферической системе координат, для функции $\varphi_\rho = \psi^{2p}(r)\Phi(\omega)$ в интервале $\rho < r < 2\rho$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |\Delta \varphi_\rho| &= \left| \frac{\partial^2 \varphi_\rho}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega \varphi_\rho \right| \\ &= \left| (\psi^{2p})'' \Phi + \frac{N-1}{r} (\psi^{2p})' \Phi - \lambda_\omega \frac{\psi^{2p}}{r^2} \Phi \right| \\ &= \Phi(\omega) \left| 2p\psi^{2p-1}(r)\psi''(r) + 2p(2p-1)\psi^{2p-2}(r)(\psi'(r))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{N-1}{r} 2p\psi^{2p-1}(r)\psi'(r) - \frac{\lambda_\omega}{r^2} \psi^{2p}(r) \right| \\ &\leq c_1 \Phi(\omega) \psi^{2p-2}(r) \left\{ \psi(r)|\psi''(r)| + |\psi'(r)|^2 + \frac{\psi(r)|\psi'(r)|}{r} + \frac{\psi^2(r)}{r^2} \right\}, \end{aligned}$$

где c_1 зависит от p , N и λ_ω , но не зависит от r и ρ .

Из явного вида функции $\psi(r)$ для $\rho < r < 2\rho$ получаем

$$|\psi(r)| \leq c_2 \rho^{\frac{s}{2p}}, \quad |\psi'(r)| \leq c_2 \rho^{\frac{s}{2p}-1}, \quad |\psi''(r)| \leq c_2 \rho^{\frac{s}{2p}-2},$$

где c_2 не зависит от r и ρ .

Учитывая, что $r > \rho$, можем закончить оценку $|\Delta \varphi_\rho|$:

$$|\Delta \varphi_\rho| \leq c_3 \Phi(\omega) \psi^{2p-2}(r) \rho^{\frac{s}{p}-2} = c_3 \rho^{\frac{s}{p}-2} R_\rho^{1-\frac{1}{p}}(r) \Phi(\omega),$$

где c_3 не зависит от r и ρ .

Итак, для интеграла из формулировки леммы имеем

$$\begin{aligned} \int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} dx &\leq \int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} \frac{c_3^p \rho^{s-2p} R_\rho^{p-1}(r) \Phi^p(\omega)}{R_\rho^{p-1}(r) \Phi^{p-1}(\omega)} dx \\ &= c_3^p \rho^{s-2p} \int_{K_\omega} \Phi(\omega) d\omega \int_\rho^{2\rho} r^{N-1} dr \leq \frac{C}{\rho^{2p-s-N}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Основная идея построения семейства φ_ρ заключается в том, что при некотором значении $s = s_*$ функция φ_ρ на множестве $K \cap \{0 < r < \rho\}$ предполагается гармонической, т.е. удовлетворяющей уравнению $\Delta \varphi_\rho = 0$. Это приводит к множителю $R_\rho(r) = r^s$. В следующем утверждении определяется конкретное значение s_* .

ЛЕММА 2.4. Функция φ_ρ при

$$s = s_* = -\frac{N-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}$$

является гармонической на множестве $K \cap \{0 < r < \rho\}$. В частности, $\text{supp } |\Delta \varphi_\rho| = K \cap \{\rho < r < 2\rho\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая оператор Лапласа в сферической системе координат и учитывая, что для $0 < r < \rho$ по определению $\varphi_\rho = r^s \Phi(\omega)$, получим

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_\rho &= \frac{\partial^2 \varphi_\rho}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega \varphi_\rho \\ &= (r^s)'' \Phi + \frac{N-1}{r} (r^s)' \Phi + \frac{1}{r^2} r^s \Delta_\omega \Phi \\ &= s(s-1)r^{s-2} \Phi + \frac{N-1}{r} s r^{s-1} \Phi - \lambda_\omega r^{s-2} \Phi \\ &= r^{s-2} \Phi(\omega) \{s(s-1) + s(N-1) - \lambda_\omega\} \equiv 0,\end{aligned}$$

поскольку выражение в скобках обращается в нуль при $s = s_*$, как показывает непосредственное вычисление (использующее определение числа s_*).

Продолжим доказательство теоремы 1. Обратимся к неравенству (2.5), справедливому, в частности, и для построенных выше функций φ_ρ , $\rho \rightarrow \infty$ (2.6). Положим в определении функции φ_ρ степень $s = s_*$ (s_* задано в лемме 2.4). Для $\varphi = \varphi_\rho$ из (2.5) получим в соответствии с леммой 2.3

$$\begin{aligned}\int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} u^q \varphi_\infty dx &\leq \int_{\text{supp } \varphi_\rho} u^q \varphi_\rho dx \\ &\leq c_0 \int_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx \leq \frac{c_0 C}{\rho^{2q'-s_*-N}}.\end{aligned}$$

Введем показатель

$$q^* = 1 + \frac{2}{s_*},$$

где $s^* = s_* + N - 2$ определяется формулой (2.2). Легко видеть, что для $1 < q < q^*$ показатель $2q' - s_* - N > 0$, поэтому выполняется предельное соотношение

$$\int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} u^q \varphi_\infty dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty.$$

Для $q = q^*$ имеем $2q' - s_* - N = 0$, поэтому справедливо неравенство

$$\int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} u^q \varphi_\infty dx \leq C \quad \text{для всех } \rho \rightarrow \infty.$$

Напомним, что постоянная C здесь не зависит от ρ , так как взята из леммы 2.3.

Поскольку в левых частях последних двух соотношений от ρ зависит только область интегрирования, можем перейти к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, что дает

$$\begin{aligned}\int_K u^q \varphi_\infty dx &= 0 \quad \text{при } 1 < q < q^*, \\ \int_K u^q \varphi_\infty dx &\leq C \quad \text{при } q = q^*.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Первое равенство (поскольку $\varphi_\infty = r^{s_*} \Phi(\omega) > 0$ п.в. в K) означает, что $u \equiv 0$. Это доказывает отсутствие глобального неотрицательного нетривиального решения для $q < q^*$.

В предельном случае $q = q^*$ неравенство (2.7) гарантирует лишь глобальную суммируемость функции $u^q \varphi_\infty$ в K . Для доказательства отсутствия нетривиальных решений вернемся к оценке (2.4), но применим в ней вместо неравенства Юнга неравенство Гёльдера. Получим (для $\varphi = \varphi_\rho$)

$$\begin{aligned} \int_K u^q \varphi_\rho dx &\leq - \int_K u \Delta \varphi_\rho dx \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} u^q \varphi_\rho dx \right)^{1/q} \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx \right)^{1/q'}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $q = q^*$.

Используя явный вид функции φ_ρ , получаем оценку $\varphi_\rho(r, \omega) \leq c_4 \varphi_\infty(r, \omega)$ для всех $0 < r < +\infty$ и всех $\rho \rightarrow \infty$ с постоянной c_4 , не зависящей от ρ , откуда

$$\int_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} u^q \varphi_\rho dx \leq c_4 \int_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} u^q \varphi_\infty dx \leq c_4 \int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} u^q \varphi_\infty dx.$$

В то же время согласно (2.7) интеграл от $u^q \varphi_\infty$ по всему конусу K ограничен, поэтому из общей теории интеграла по бесконечной мере следует соотношение

$$\int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} u^q \varphi_\infty dx = \varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty.$$

Тогда из неравенства (2.8) получим

$$\int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} u^q \varphi_\infty dx \leq \varepsilon^{1/q}(\rho) C^{1/q'} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty,$$

т.е. в пределе

$$\int_K u^q \varphi_\infty dx = 0.$$

Так как $\varphi_\infty > 0$ п.в. в K , то отсюда следует, что $u \equiv 0$. Это доказывает отсутствие глобального нетривиального решения и в случае $q = q^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В данной теореме, как и во всей работе, рассматриваются только локально ограниченные в конусе K решения неравенств. В частности, не допускается неограниченная особенность решения в нуле. Покажем, как ограниченность влияет на существование и отсутствие решений для случая всего пространства $\mathbb{R}^N$. Напомним некоторые утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [2], [6]. *Неравенство*

$$-\Delta u \geq u^q, \quad u > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

не имеет глобального классического решения при $q \leq \frac{N}{N-2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [7]. *Уравнение*

$$-\Delta u = u^q, \quad u > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

не имеет глобального классического решения при $q < \frac{N+2}{N-2}$.

Как видно, критические показатели для уравнений и неравенств в случае классических решений не совпадают. В то же время, если допустить сингулярность решения в одной точке, можно высказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Функция*

$$u(x) = \frac{\varepsilon}{|x|^s}, \quad \text{где } s = \frac{2}{q-1}, \quad \varepsilon = (s(N-s-2))^{1/(q-1)},$$

является решением из $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ уравнения $-\Delta u = u^q$, $u > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, при $q > \frac{N}{N-2}$.

Таким образом, критический показатель отсутствия решений, допускающих сингулярность в нуле, не превосходит критического показателя отсутствия классических решений соответствующего неравенства.

Аналогичный факт справедлив и для задач в конусах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 [9]. *Уравнение*

$$-\Delta u = u^q, \quad u \geq 0, \quad x \in K \subset \mathbb{R}^N,$$

не имеет глобального нетривиального решения из $C^2(K) \cap C(\overline{K} \setminus \{0\})$, если

$$1 < q < 1 + \frac{2}{s^*},$$

где s^* определяется по формуле (2.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 [9]. *Функция*

$$u(r, \omega) = \frac{1}{r^{2/(q-1)}} \alpha(\omega),$$

где $\alpha(\omega)$ – решение уравнения

$$\Delta_\omega \alpha(\omega) - \frac{2}{q-1} \left(N - 2 - \frac{2}{q-1} \right) \alpha(\omega) + \alpha^q(\omega) = 0, \quad \omega \in K_\omega, \quad \alpha(\omega)|_{\partial K_\omega} = 0,$$

является глобальным решением из $C^2(K) \cap C(\overline{K} \setminus \{0\})$ уравнения

$$-\Delta u = u^q, \quad u \geq 0, \quad x \in K,$$

при

$$1 + \frac{2}{s^*} < q < \begin{cases} +\infty, & N = 2, 3, \\ \frac{N+1}{N-3}, & N > 3. \end{cases}$$

Сравнение этого предложения с теоремой 2.1 и леммой 2.1 показывает, что критические показатели для уравнений и неравенств совпадают, если допустить сингулярность решения уравнения в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Предлагаемый подход применим и к доказательству отсутствия локально ограниченных решений во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. При этом нужно брать $\Phi(\omega) \equiv 1$ и соответствующее $\lambda_\omega = 0$. Тогда $s_* = 0$ и получающаяся функция $\varphi_\rho(x)$ сходна со срезающей функцией из работ [5], [2].

Необходимо уточнить, что непосредственное использование теоремы 2.1 в “предельном” случае $K_\omega \rightarrow S^{N-1}$ не приводит к условиям, установленным для всего $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим подробнее случай $N = 2$. Тогда $K_\omega = (0, l)$ – интервал (дуга окружности). В предельном случае окружности $l = 2\pi$ задача (1.1) принимает вид

$$\frac{d^2 \Phi}{d\omega^2} + \lambda \Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi) = 0.$$

Ее неотрицательным решением является функция $\Phi(\omega) = \sin \frac{\omega}{2}$, что соответствует наименьшему собственному значению $\lambda_\omega = \frac{1}{4}$.

Тогда по теореме 2.1 критический показатель равен

$$q^* = 1 + \frac{2}{s^*} = 1 + \frac{2}{\sqrt{\lambda_\omega}} = 5,$$

в то время как аналогичный показатель, найденный из предложения 2.1, есть ∞ .

§ 3. Неравенство общего вида

Применим описанный в предыдущем параграфе метод к исследованию отсутствия неотрицательных нетривиальных слабых решений задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) \geq |x|^\beta u^q, & 0 \leq \alpha \leq \beta, \\ u|_{\partial K} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $u(x) \in W_{2,\text{loc}}^1(K) \cap L_{\infty,\text{loc}}(K)$, $u|_{\partial K} = 0$, называется *слабым решением* задачи (3.1), если для любой неотрицательной функции $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \omega) \in W_2^1(K)$, $\varphi|_{\partial K} = 0$, финитной по переменной r , выполнено интегральное неравенство

$$\int_K |x|^\alpha Du D\varphi dx \geq \int_K |x|^\beta u^q \varphi dx.$$

Для упрощения последующих выкладок введем оператор

$$A_\alpha \varphi = \operatorname{div}(|x|^\alpha D\varphi). \quad (3.2)$$

При $\alpha = 0$ имеем $A_0 \varphi = \Delta \varphi$.

Рассмотрим семейство функций φ_ρ , определенных формулами (2.6). Установим аналоги лемм 2.3 и 2.4, соответствующие задаче (3.1).

ЛЕММА 3.1. Для всех $\rho > 1$ выполняется неравенство

$$\int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} \frac{|A_\alpha \varphi_\rho|^p}{|x|^{\beta(p-1)} \varphi_\rho^{p-1}} dx \leq \frac{C}{\rho^{(2+\beta-\alpha)p-s-\beta-N}},$$

где постоянная C не зависит от ρ ; оператор A_α определен формулой (3.2). Здесь $p > 1$, $s > 0$ – заданные числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем оператор $A_\alpha \varphi$ в сферической системе координат:

$$A_\alpha \varphi_\rho \equiv \operatorname{div}(|x|^\alpha D\varphi_\rho) = r^\alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi_\rho}{\partial r^2} + \frac{\alpha + N - 1}{r} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega \varphi_\rho \right).$$

Далее, как и в лемме 2.3, для $\rho < r < 2\rho$ с учетом явного вида функции φ_ρ получаем оценку

$$|A_\alpha \varphi_\rho| \leq c_3 r^\alpha \rho^{\frac{s}{p}-2} R_\rho^{1-\frac{1}{p}}(r) \Phi(\omega) \quad \text{для } \rho < r < 2\rho,$$

где c_3 не зависит от r и ρ . Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} \frac{|A_\alpha \varphi_\rho|^p}{|x|^{\beta(p-1)} \varphi_\rho^{p-1}} dx &\leq \int_{K \cap \{\rho < r < 2\rho\}} \frac{c_3^p r^{\alpha p} \rho^{s-2p} R_\rho^{p-1}(r) \Phi^p(\omega)}{r^{\beta(p-1)} R_\rho^{p-1}(r) \Phi^{p-1}(\omega)} dx \\ &= c_3^p \rho^{s-2p} \int_{K_\omega} \Phi(\omega) d\omega \int_\rho^{2\rho} r^{\alpha p - \beta(p-1) + N - 1} dr \leq \frac{C}{\rho^{(2+\beta-\alpha)p-s-\beta-N}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство следующего утверждения проводится в полной аналогии с доказательством леммы 2.4.

ЛЕММА 3.2. Функция φ_ρ для

$$s = s_{*\alpha} = -\frac{\alpha + N - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + N - 2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}$$

является решением уравнения $A_\alpha \varphi_\rho = 0$ на множестве $K \cap \{0 < r < \rho\}$. В частности, $\text{supp } |A_\alpha \varphi_\rho| = K \cap \{\rho < r < 2\rho\}$. Здесь оператор $A_\alpha \varphi$ определен формулой (3.2).

Условия отсутствия глобальных неотрицательных решений задачи (3.1) дает

ТЕОРЕМА 3.1. При

$$1 < q \leq q_{\alpha\beta}^* = 1 + \frac{2 + \beta - \alpha}{s_\alpha^*},$$

где

$$s_\alpha^* = \frac{\alpha + N - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + N - 2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega} = s_{*\alpha} + \alpha + N - 2, \quad (3.3)$$

задача (3.1) не имеет глобального неотрицательного нетривиального слабого решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует схеме доказательства теоремы 2.1.

Пусть $u(x)$ – слабое решение задачи (3.1). Тогда для любой финитной по переменной r функции $\varphi(r, \omega) \in W_1^2(K) \cap W_2^1(K)$, $\varphi|_{\partial K} = 0$, с помощью интегрирования по частям из определения обобщенного решения получим

$$\int_K |x|^\beta u^q \varphi dx \leq - \int_K u A_\alpha \varphi dx,$$

где $A_\alpha \varphi$ определен формулой (3.2). Применяя для оценки правой части неравенство Юнга с параметром, после приведения подобных членов будем иметь

$$\int_{\text{supp } \varphi} |x|^\beta u^q \varphi dx \leq c_0 \int_{\text{supp } |A_\alpha \varphi|} \frac{|A_\alpha \varphi|^{q'}}{|x|^{\beta(q'-1)} \varphi^{q'-1}} dx,$$

где c_0 не зависит от u и φ .

Для $\varphi = \varphi_\rho$ отсюда в соответствии с леммой 3.1 получаем

$$\int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} |x|^\beta u^q \varphi_\infty dx \leq \int_{\text{supp } \varphi_\rho} |x|^\beta u^q \varphi_\rho dx \leq \frac{c_0 C}{\rho^{(2+\beta-\alpha)q' - s_{*\alpha} - \beta - N}}.$$

Введем параметр

$$q_{\alpha\beta}^* = 1 + \frac{2 + \beta - \alpha}{s_\alpha^*},$$

где $s_\alpha^* = s_{*\alpha} + \alpha + N - 2$ определено в формулировке теоремы, и перейдем в этом неравенстве при $1 < q \leq q_{\alpha\beta}^*$ к пределу по $\rho \rightarrow \infty$, что даст

$$\begin{aligned} \int_K |x|^\beta u^q \varphi_\infty dx &= 0 \quad \text{при } q < q_{\alpha\beta}^*, \\ \int_K |x|^\beta u^q \varphi_\infty dx &\leq C \quad \text{при } q = q_{\alpha\beta}^*. \end{aligned}$$

Эти соотношения означают, как в доказательстве теоремы 2.1, отсутствие неотрицательных нетривиальных решений. Теорема доказана.

Результат теоремы 3.1 точен. Функция

$$u(r, \omega) = \frac{\varepsilon}{(1+r^2)^\gamma} \Phi(\omega), \quad \gamma = \frac{\beta - \alpha + 2}{2(q-1)}, \quad (3.4)$$

служит решением задачи (3.1) при малом $\varepsilon = \varepsilon(q) > 0$ для любого

$$q > q_{\alpha\beta}^* = 1 + \frac{2 + \beta - \alpha}{s_\alpha^*},$$

где s_α^* определяется формулой (3.3).

Чтобы убедиться в этом, запишем оператор $-A_\alpha u = -\operatorname{div}(|x|^\alpha Du)$ в сферической системе координат. Аналогично доказательству леммы 2.1 для определенной формулой (3.4) функции $u(r, \omega)$ будем иметь

$$-\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) = \varepsilon \frac{r^\alpha}{(1+r^2)^{\gamma+1}} \Phi(\omega) \left\{ 2\gamma(\alpha + N) - 4\gamma(\gamma + 1) \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{\lambda_\omega}{r^2} + \lambda_\omega \right\}.$$

Легко проверить, что выражение в фигурных скобках равномерно положительно:

$$2\gamma(\alpha + N) - 4\gamma(\gamma + 1) \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{\lambda_\omega}{r^2} + \lambda_\omega > 2\gamma(\alpha + N) - 4\gamma(\gamma + 1) + \lambda_\omega > \delta(q) > 0,$$

для фиксированного $q > q_{\alpha\beta}^*$ (при γ , определенном в (3.4)).

Отсюда при $q > q_{\alpha\beta}^*$ с учетом неравенства $r^{\beta-\alpha} \leq (1+r^2)^{(\beta-\alpha)/2}$ получим

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) &\geq \varepsilon \Phi(\omega) \frac{r^\alpha}{(1+r^2)^{\gamma+1}} \delta(q) \\ &= \varepsilon \Phi(\omega) \frac{r^\beta}{(1+r^2)^{\gamma+1} r^{\beta-\alpha}} \delta(q) \geq \varepsilon \Phi(\omega) \frac{r^\beta}{(1+r^2)^{\gamma+1+(\beta-\alpha)/2}} \delta(q). \end{aligned}$$

Подставляя конкретное значение γ из (3.4) и используя оценку $\Phi(\omega) \geq \Phi^q(\omega)$, окончательно приходим к неравенству

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) &\geq \varepsilon \Phi(\omega) \frac{r^\beta}{(1+r^2)^{\gamma q}} \delta(q) \geq r^\beta \frac{\varepsilon \delta(q)}{(1+r^2)^{\gamma q}} \Phi^q(\omega) \\ &= r^\beta \left(\frac{\varepsilon}{(1+r^2)^\gamma} \right)^q \Phi^q(\omega) = |x|^\beta u^q, \end{aligned}$$

если положить $\varepsilon = \delta(q)^{1/(q-1)}$. Тем самым показано, что функция $u(x)$ является решением задачи (3.1) при $q > q_{\alpha\beta}^*$.

Сравним критический показатель теоремы 3.1 с одним из результатов статьи [11] для уравнения

$$-\Delta u - \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = |x|^\sigma u^q, \quad u|_{\partial K \setminus \{0\}} = 0.$$

В наших обозначениях теорема 3.1 из [11] утверждает, что если

$$|a_i(x)| \leq \frac{c}{|x|^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то эта задача не имеет неотрицательного нетривиального решения для

$$1 < q < q_M = 1 + \frac{2 + \sigma}{s^*},$$

где s^* определено формулой (2.2).

Так как

$$\operatorname{div}(|x|^\alpha Du) = |x|^\alpha \left(\Delta u + \alpha \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{|x|^2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

то неравенство (3.1) для случая дважды дифференцируемых решений можно переписать в виде

$$-\Delta u - \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq |x|^{\beta-\alpha} u^q,$$

где

$$a_i(x) = \alpha \frac{x_i}{|x|^2}, \quad |a_i(x)| \leq \frac{c}{|x|}.$$

По теореме 3.1 критический показатель равен

$$q_{\alpha\beta}^* = 1 + \frac{2 + \beta - \alpha}{s_\alpha^*} < q_M = 1 + \frac{2 + \beta - \alpha}{s^*},$$

где s_α^* определено в (3.3) и $s_\alpha^* > s^*$.

Из приведенного сравнения очевидно, что незначительное изменение поведения функций $a_i(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ приводит к резкому отличию критических показателей. В частности, на них начинают влиять постоянные, входящие множителями в коэффициенты при младших производных.

§ 4. Система неравенств

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -\Delta u \geq v^q \\ -\Delta v \geq u^p \end{cases} \quad \text{в } K, \quad (4.1)$$

$$u|_{\partial K} = 0, \quad v|_{\partial K} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пара функций $u, v \in W_{2,\text{loc}}^1(K) \cap L_{\infty,\text{loc}}(K)$, $u|_{\partial K} = 0$, $v|_{\partial K} = 0$, называется *слабым решением* задачи (4.1), если для любой неотрицательной функции $\varphi(x) \equiv \varphi(r, \omega) \in W_2^1(K)$, $\varphi|_{\partial K} = 0$, финитной по переменной r , выполнены интегральные неравенства

$$\begin{aligned} \int_K Du D\varphi dx &\geq \int_K v^q \varphi dx, \\ \int_K Dv D\varphi dx &\geq \int_K u^p \varphi dx. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Задача (4.1) не имеет глобального неотрицательного не-тривиального слабого решения, если*

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{s^*}{2},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{q+1}{pq-1}, \quad \gamma_2 = \frac{p+1}{pq-1},$$

s^* определяется формулой (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u, v – слабое решение задачи (4.1). Для любой финитной по переменной r функции $\varphi \in W_1^2(K) \cap W_2^1(K)$, $\varphi|_{\partial K} = 0$, из определения слабого решения с помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \int_K v^q \varphi \, dx &\leq - \int_K u \Delta \varphi \, dx, \\ \int_K u^p \varphi \, dx &\leq - \int_K v \Delta \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Для оценки интегралов справа применим неравенство Гёльдера (как в предельном случае $q = q^*$ § 2):

$$\begin{aligned} \int_K v^q \varphi \, dx &\leq - \int_K u \Delta \varphi \, dx = - \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} u \varphi^{1/p} \frac{\Delta \varphi}{\varphi^{1/p}} \, dx \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} u^p \varphi \, dx \right)^{1/p} \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}} \, dx \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} u^p \varphi \, dx \right)^{1/p} J_{p'}^{1/p'}, \\ \int_K u^p \varphi \, dx &\leq - \int_K v \Delta \varphi \, dx = - \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} v \varphi^{1/q} \frac{\Delta \varphi}{\varphi^{1/q}} \, dx \\ &\leq \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} v^q \varphi \, dx \right)^{1/q} \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx \right)^{1/q'} \\ &= \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} v^q \varphi \, dx \right)^{1/q} J_{q'}^{1/q'}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$J_{p'} = \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{p'}}{\varphi^{p'-1}} \, dx, \quad J_{q'} = \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} \frac{|\Delta \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx.$$

Подставим второе неравенство из (4.2) в правую часть первого, что даст

$$\begin{aligned} \int_K v^q \varphi \, dx &\leq \left\{ \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} v^q \varphi \, dx \right)^{1/q} J_{q'}^{1/q'} \right\}^{1/p} J_{p'}^{1/p'} \\ &= \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} v^q \varphi \, dx \right)^{1/qp} J_{q'}^{1/q'p} J_{p'}^{1/p'}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Далее используем неравенство Юнга:

$$\int_K v^q \varphi dx \leq \varepsilon \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} v^q \varphi dx + \frac{1}{\varepsilon^{1/(pq-1)}} \left(J_{q'}^{1/q'p} J_{p'}^{1/p'} \right)^{pq/(pq-1)},$$

откуда получаем

$$\int_K v^q \varphi dx \leq c_0 \left(J_{q'}^{1/q'} J_{p'}^{p-1} \right)^{q/(pq-1)}.$$

Аналогично подставляем первое неравенство из (4.2) в правую часть второго:

$$\begin{aligned} \int_K u^p \varphi dx &\leq \left\{ \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} u^p \varphi dx \right)^{1/p} J_{p'}^{1/p'} \right\}^{1/q} J_{q'}^{1/q'} \\ &= \left(\int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} u^p \varphi dx \right)^{1/qp} J_{p'}^{1/p'q} J_{q'}^{1/q'}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

откуда по неравенству Юнга находим

$$\int_K u^p \varphi dx \leq \varepsilon \int_{\text{supp } |\Delta \varphi|} u^p \varphi dx + \frac{1}{\varepsilon^{1/(pq-1)}} \left(J_{p'}^{1/p'q} J_{q'}^{1/q'} \right)^{pq/(pq-1)},$$

так что

$$\int_K u^p \varphi dx \leq c_0 \left(J_{p'}^{1/p'} J_{q'}^{q-1} \right)^{p/(pq-1)}.$$

При $\varphi = \varphi_\rho$, где φ_ρ определяется по формуле (2.6) с $s = s_*$, для $J_{q'}$ и $J_{p'}$ согласно лемме 2.3 имеем

$$J_{p'} \leq \frac{C}{\rho^{2p'-s^*-N}} = \frac{C}{\rho^{2p'-s^*-2}}, \quad J_{q'} \leq \frac{C}{\rho^{2q'-s^*-N}} = \frac{C}{\rho^{2q'-s^*-2}}.$$

Подставим эти оценки в полученные выше неравенства. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} v^q \varphi_\infty dx &\leq \int_K v^q \varphi_\rho dx \leq \frac{c_5}{\rho^{k_1 q/(pq-1)}}, \\ \int_{K \cap \{0 < r < \rho\}} u^p \varphi_\infty dx &\leq \int_K u^p \varphi_\rho dx \leq \frac{c_5}{\rho^{k_2 p/(pq-1)}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$k_1 = \frac{2q' - s^* - 2}{q'} + (2p' - s^* - 2)(p-1), \quad k_2 = \frac{2p' - s^* - 2}{p'} + (2q' - s^* - 2)(q-1),$$

c_5 не зависит от ρ .

Соотношения (4.3)–(4.5) полностью аналогичны соответствующим оценкам для случая одного неравенства из § 2.

Следовательно, из оценок (4.5) вытекает, что если $k_1 \geq 0$, то $v(x) \equiv 0$, если же $k_2 \geq 0$, то $u(x) \equiv 0$. Заметим, что если хотя бы одна из функций $u(x)$ или $v(x)$ тождественно равна нулю, то равна нулю и другая. Действительно, если $v(x) \equiv 0$, то второе неравенство в определении обобщенного решения примет вид

$$0 \geq \int_K u^p \varphi dx,$$

откуда $u(x) \equiv 0$, и наоборот.

Таким образом, условие отсутствия неотрицательного нетривиального решения задачи (4.1) имеет вид $\max\{k_1, k_2\} \geq 0$. После упрощения приходим к условию из формулировки

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{s^*}{2}.$$

Теорема доказана.

Сравним теорему 4.1 и теорему 2.1. Пусть в задаче (4.1) $q = p$. Тогда

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{q+1}{q^2-1} = \frac{1}{q-1}$$

и условие отсутствия нетривиальных решений теоремы 4.1 принимает вид

$$\frac{1}{q-1} \geq \frac{s^*}{2},$$

т.е. $q \leq 1 + \frac{2}{s^*}$, что совпадает с аналогичным условием теоремы 2.1.

Точность результата теоремы 4.1 покажем на примере функций

$$u(r, \omega) = \frac{\varepsilon_1}{(1+r^2)^{\gamma_1}} \Phi(\omega), \quad v(r, \omega) = \frac{\varepsilon_2}{(1+r^2)^{\gamma_2}} \Phi(\omega),$$

где γ_1 и γ_2 определены в формулировке теоремы 4.1, $\varepsilon_1(q, p), \varepsilon_2(q, p) > 0$ малы.

По аналогии с леммой 2.1 имеем

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{\varepsilon_1 \Phi(\omega)}{(1+r^2)^{\gamma_1+1}} \left\{ 2\gamma_1 N - 4\gamma_1(\gamma_1+1) \frac{r^2}{1+r^2} + \lambda_\omega \frac{1+r^2}{r^2} \right\} \\ &\geq \frac{\varepsilon_1 \Phi(\omega)}{(1+r^2)^{\gamma_1+1}} \delta_1(q, p), \\ -\Delta v &= \frac{\varepsilon_2 \Phi(\omega)}{(1+r^2)^{\gamma_2+1}} \left\{ 2\gamma_2 N - 4\gamma_2(\gamma_2+1) \frac{r^2}{1+r^2} + \lambda_\omega \frac{1+r^2}{r^2} \right\} \\ &\geq \frac{\varepsilon_2 \Phi(\omega)}{(1+r^2)^{\gamma_2+1}} \delta_2(q, p), \end{aligned}$$

где $\delta_1(q, p) > 0$, $\delta_2(q, p) > 0$, если $\gamma_1 < s^*/2$ и $\gamma_2 < s^*/2$, поскольку в этом случае выражения в фигурных скобках равномерно по $r > 0$ положительны.

Далее, поскольку $\gamma_1 + 1 = \gamma_2 q$ и $\gamma_2 + 1 = \gamma_1 p$, а также учитывая неравенства $\Phi(\omega) \geq \Phi^q(\omega)$ и $\Phi(\omega) \geq \Phi^p(\omega)$, получаем

$$\begin{aligned} -\Delta u &\geq \frac{\varepsilon_1}{(1+r^2)^{\gamma_2 q}} \Phi^q(\omega) \delta_1(q, p) = v^q, \\ -\Delta v &\geq \frac{\varepsilon_2}{(1+r^2)^{\gamma_1 p}} \Phi^p(\omega) \delta_2(q, p) = u^p, \end{aligned}$$

если $\varepsilon_1 = \delta_1^{1/(q-1)}(q, p)$, $\varepsilon_2 = \delta_2^{1/(p-1)}(q, p)$.

Таким образом, пара заданных так функций $u(x)$ и $v(x)$ является решением задачи (4.1), если $\gamma_1 < s^*/2$ и $\gamma_2 < s^*/2$, т.е.

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} < \frac{s^*}{2}.$$

В заключение автор выражает благодарность С.И. Похожаеву за постановку задачи и полезное обсуждение результатов, а также В.В. Курте за постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. *Kuzin I., Pohozaev S.* Entire solutions of semilinear elliptic equations. Basel: Birkhäuser, 1997.
2. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 456–460.
3. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Отсутствие положительных решений для систем квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств в $\mathbb{R}^N$ // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 1. С. 13–17.
4. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Отсутствие положительных решений квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 192–222.
5. *Курта В.В.* К вопросу об отсутствии целых положительных решений у полулинейных эллиптических уравнений // УМН. 1995. Т. 50. № 4(304). С. 127.
6. *Курта В.В.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Дис. . . доктора физ.-мат. наук. М.: МИАН, 1994.
7. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 525–598.
8. *Berestycki H., Capuzzo Dolcetta J., Nirenberg L.* Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1995. V. 4. P. 59–78.
9. *Bandle C., Essen M.* On positive solutions of Emden equations in cone-like domains // Arch. Rational Mech. Anal. 1990. V. 112. № 4. P. 319–338.
10. *Egnell H.* Positive solutions of semilinear equations in cones // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 330. № 1. P. 191–201.
11. *Нгуен Мань Хунг.* Об отсутствии положительных решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в конических областях // Дифференц. уравн. 1998. Т. 34. № 4. С. 533–539.
12. *Bandle C.* Positive solutions of Emden equations in a cone-like domains // Progress in Nonlinear Differential Equations and their applications. 1992. V. 7. P. 71–75.
13. *Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д.* Положительные решения квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 4. С. 427–428.
14. *Нгуен Мин Чи.* Положительные решения уравнения Эмдена–Фоулера в конусе // Дифференц. уравн. 1994. Т. 30. № 4. С. 659–664.
15. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
16. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
17. *Миклюков В.М.* Емкостные методы в задачах нелинейного анализа. Дис. . . доктора физ.-мат. наук. Тюмень: Тюменск. ГУ, 1980.
18. *Похожаев С.И.* Существенно нелинейные емкости, индуцированные парой дифференциальных операторов // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 5. С. 592–594.

Поступило в редакцию
18.V.1999