Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Матвеев, Явная нижняя оценка однородной рациональной линейной формы от логарифмов алгебраических чисел. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 6, 125–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/im314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:12:16

УДК 511

Е. М. Матвеев

Явная нижняя оценка однородной рациональной линейной формы от логарифмов алгебраических чисел. II

В работе доказана показательная по количеству слагаемых оценка модуля указанной в заглавии линейной формы.

Библиография: 23 наименования.

§ 1. Введение

В данной работе получено существенное усиление результатов первой части (см. [1]). Изложение практически независимо от первой части работы, более того, некоторым темам, обсуждающимся и в [1], дан более развернутый комментарий.

Как и в [1], мы будем рассматривать только однородный рациональный случай линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, т.е. выражения вида

$$\Lambda = b_1 \ln \alpha_1 + \dots + b_n \ln \alpha_n, \quad (1.1)$$

где $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$, а $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$ – ненулевые числа алгебраического поля $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ с некоторыми ненулевыми фиксированными значениями $\ln \alpha_j$.

Теория линейных форм от логарифмов имеет достаточно длинную историю. В последнее время здесь был достигнут ряд существенных успехов. Практически установилась зависимость оценки от A_j – логарифмических высот чисел α_j , от $|b_j|$, от степени поля $\mathbb{K}$ (более подробно об обозначениях будет сказано в следующих параграфах). Все последние опубликованные оценки вполне явные, позволяющие получать многочисленные приложения к другим задачам теории чисел.

Таким образом, интерес сместился к уточнению формы вхождения n в оценку Λ . До недавнего времени главный член здесь имел вид n^{2n} (впервые это было сделано в [2]). При этом было замечено, что в случае так называемой сильной независимости чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ можно получать оценки с главным членом n^n , и еще один множитель $n!$ появляется при переходе к общему случаю. В данной работе под *условием сильной независимости* мы понимаем следующее равенство:

$$[\mathbb{K}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n}) : \mathbb{K}] = 2^n. \quad (1.2)$$

Полезное уточнение можно сделать для случая сильной независимости чисел α_j относительно параметра, обычно обозначаемого через B . Здесь можно считать (см. [3])

$$B = \max\{1, \max\{|b_j| A_j / A_n : 1 \leq j \leq n\}\}, \quad (1.3)$$

Работа выполнена при поддержке ИНТАС–РФФИ (грант № IR 97-1904).

в то время как в общем случае

$$B^* = \max\{|b_1|, \dots, |b_n|\}. \quad (1.4)$$

Для растущего A_n формула (1.3) дает заметное усиление оценки Λ . В ряде работ вводятся различные модификации выражения (1.3).

В работе [1] для случая сильной независимости была получена оценка без множителя n^n , а общий случай не рассматривался.

Итак, основными результатами данной статьи являются следующие.

1. Оценка линейной формы не содержит множитель n^n во всех случаях, т.е. (1.2) устранено без ухудшения точности. В этом новизна статьи. Интересно, что ранее общий случай давал ухудшение оценки линейной формы при сведении его к случаю сильной независимости. В данной же работе получилось, что имеет место противоположная ситуация, а именно случай выполнения условия (1.2) является в некотором смысле наилучшим.

2. Из оценки Λ удален множитель типа $\ln(A_1 \dots A_{n-1})$, который присутствовал в работе [1]. Это достигнуто средствами, аналогичными приему работы [4].

3. Так же, как и в работе [1], в основной теореме отсутствуют индивидуальные нижние ограничения на числа A_j . Только в той работе условия теоремы включали нижнее ограничение на Ω – произведение чисел A_j . Теперь же имеется работа [5], где доказана приемлемая нижняя оценка для Ω , что позволило снять указанное ограничение.

4. Так же, как и в [1], [3], под числом B понимается (1.3), и этот параметр сохраняется для общего случая.

Выше указаны усиления предшествующей статьи. Вместе с тем данная работа содержит и некоторые ухудшения, вызванные стремлением автора сделать более прозрачным основной результат и уменьшить громоздкость изложения. Отличиями в худшую сторону от [1] являются следующие.

5. Из формулировок удален ряд параметров, позволяющих получать более точные оценки в частных случаях. Оставлен только минимальный набор основных параметров.

6. Упрощена схема арифметико-аналитического продолжения, но за счет уменьшения точности получаемых констант. Так что в случае выполнения условия (1.2) зависимость от n в [1] лучше, чем в данной статье. Все же полученные константы вполне явные и лучше приведенных ранее (например, в [4]).

После устранения множителя n^n в линейной форме Λ основной зависимостью от n становится показательная величина C^n , и вряд ли стоит рассчитывать, что такая зависимость может быть удалена. Так что зависимость полученных оценок от учтенных параметров, по-видимому, окончательная. В то же время, как будет видно из доказательства, появляются новые возможности усиления результатов.

§ 2. Формулировка результатов

На протяжении всей статьи мы сохраняем следующие обозначения: $\mathbb{K}$ – алгебраическое поле степени D над $\mathbb{Q}$, вложенное в $\mathbb{C}$. Если $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, то положим $\varkappa = 1$, иначе $\varkappa = 2$. Даны числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$, имеющие абсолютные логарифмичес-

кие высоты $h(\alpha_j)$, $1 \leq j \leq n$ (определение см. в § 5), $\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n$ – произвольные фиксированные ненулевые значения логарифмов. Пусть

$$A_j \geq \max\{D h(\alpha_j), |\ln \alpha_j|\}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.1)$$

В частности, допускается $\alpha_j = 1$, где $h(\alpha_j) = 0$.

Рассматриваются линейная форма (1.1) с $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ и параметром B из (1.3). Положим для краткости

$$\begin{aligned} \Omega &= A_1 \dots A_n, \\ C(n) &= C(n, \varkappa) = \frac{16}{n! \varkappa} e^n (2n + 1 + 2\varkappa)(n + 2)(4(n + 1))^{n+1} \left(\frac{1}{2}en\right)^\varkappa, \\ C_0 &= \ln(e^{4.4n+7} n^{5.5} D^2 \ln(eD)), \quad W_0 = \ln(1.5eBD \ln(eD)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.1 (основная). *Если $\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$ и $b_n \neq 0$, то*

$$\ln |\Lambda| > -C(n)C_0W_0D^2\Omega. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть при некотором r ($1 \leq r \leq n$) $\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_r$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$; при $j \leq r$ имеем (2.1), при $j > r$ положим*

$$A_j \geq \max\{D h(\alpha_j), |\ln \alpha_j|, 0.16\}, \quad (2.4)$$

если $b_n = 0$, то для $j = n$ также положим (2.4).

Тогда если $\Lambda \neq 0$, то

$$\ln |\Lambda| > -C(n) \max\{1, n/6\} C_0 W_0 D^2 \Omega. \quad (2.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Если $\Lambda \neq 0$, A_j из (2.4), B из (1.3), то*

$$\begin{aligned} \ln |\Lambda| &> -C_1(n) D^2 \Omega \ln(eD) \ln(eB), \\ C_1(n) &= C_1(n, \varkappa) = \min \left\{ \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{1}{2}en\right)^\varkappa 30^{n+3} n^{3.5}, 2^{6n+20} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

при этом B может быть заменено на B^ из (1.4).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Мы включили множитель D в определение A_j . Обычно его выносят за скобки, придавая выражению сходство с абсолютной высотой, а множитель D появляется в оценке линейной формы Λ . Но поскольку при вынесении D за скобки зависимость в A_j от D появляется в виде $\frac{1}{D} |\ln \alpha_j|$, то не видно большого смысла в выделении D , и во всех выкладках мы реально имеем дело с A_j вида (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Фиксированная нижняя граница в (2.4) для A_j достаточна для всех известных алгебраических чисел, кроме корней из 1, которые могут давать малое значение величины A . Также отметим, что при отсутствии информации о линейной независимости логарифмов нижние границы для A_j необходимы. Иначе, например, расщепление компоненты $b_j \ln \alpha_j$ с малым A_j на несколько слагаемых может привести к неверному усилению оценки.

Теорема 2.2 оставляет возможность некоторым из значений A_j быть малыми. Более того, если в поле есть корень из единицы α_0 высокой степени ($\alpha_0 \neq \alpha_j$, $j \geq 1$), то его можно формально добавить к линейной форме с $b_0 = 0$. Это только улучшит оценку линейной формы. Эффект усиления оценок для полей, содержащих корни из 1, в свое время обнаружил Фельдман (см. [6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Следствие 2.3 приведено для более простого применения результатов статьи в грубых случаях и для облегчения сравнения с предшествующими работами. Для $n = 2$ известны существенно более хорошие оценки.

§ 3. Некоторые обозначения и соглашения

Мы придерживаемся векторных обозначений, введенных в работе [1]. Далее будут встречаться векторы с различными способами нумерации координат. Для некоторых из них зафиксируем обозначения:

- 1) $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ – с помощью знака $\bar{}$;
- 2) $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$ – с помощью знака $\tilde{}$;
- 3) $\bar{u}' = (u_0, \dots, u_n)$ – с помощью знаков $\bar{}'$;
- 4) $\tilde{u}' = (u_0, \dots, u_{n-1})$ – с помощью знаков $\tilde{}'$.

В случаях, когда нумерация координат иная или не имеет значения, будем обозначать векторы жирным шрифтом, объясняя при необходимости способ нумерации (как правило, будут использоваться индексы $j = 1, \dots, J$). Координаты векторов будут обозначаться той же буквой, что и сам вектор.

Для действительных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ условие $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ (или $\mathbf{u} > \mathbf{v}$) означает соответствующее неравенство для каждой координаты.

Если у нас есть скалярная функция $f(x)$ одной скалярной переменной (она может зависеть от других числовых аргументов), то мы определим вектор $f(\mathbf{u})$ для $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_J)$ следующим образом:

$$f(\mathbf{u}) = (f(u_1), \dots, f(u_J));$$

например,

$$\ln \bar{\alpha} = (\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n), \quad \tilde{m}! = (m_1!, \dots, m_{n-1}!).$$

Для скалярной функции $f(x, y)$ и векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ положим

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \prod_{j=1}^J f(u_j, v_j);$$

например,

$$\bar{\alpha}^{\bar{l}} = \prod_{j=1}^n \alpha_j^{l_j}.$$

Будем здесь говорить, что $\bar{l}$ – *мультистепень* $\bar{\alpha}$.

Если мы хотим получить не вектор $f(\mathbf{u})$, а произведение соответствующих элементов, то следует писать

$$f(\mathbf{u})^1 = \prod_{j=1}^J f(u_j)^1,$$

вводя вектор $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Будем считать $0^0 = 1$.

Версии следующей очевидной леммы традиционно используются в схеме Бейкера.

ЛЕММА 3.1. Пусть даны наборы многочленов $f(z, m)$, $g(z, m)$ (по z); $\deg_z f = \deg_z g = m$, $m = 0, 1, \dots$. Тогда многочлены $f(\mathbf{z}, \mathbf{m})$ линейно выражаются через $g(\mathbf{z}, \mathbf{t})$, $\mathbf{t} \leq \mathbf{m}$, и наоборот.

Следуя современным обозначениям (см. [4]), введем для функций $f(\bar{Y}') = f(Y_0, \dots, Y_n)$ операторы дифференцирования

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial Y_0}, \quad \partial_j = b_n Y_j \frac{\partial}{\partial Y_j} - b_j Y_n \frac{\partial}{\partial Y_n}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.1)$$

где b_j – те же, что и в линейной форме Λ (см. (1.1)). Производные высших порядков можно записывать с помощью мультистепеней, например

$$\tilde{\partial}^{\bar{m}} = \partial_1^{m_1} \dots \partial_{n-1}^{m_{n-1}}.$$

С указанными операторами связано следующее обозначение:

$$\tilde{\chi}(\bar{u}) = (\chi_1, \dots, \chi_{n-1}), \quad \chi_j = u_j b_n - u_n b_j, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

где обязательно $\bar{u}$ – вектор первого типа и при этом получается, что $\tilde{\chi}$ – вектор второго типа. Связь задается формулой

$$\tilde{\partial}^{\bar{m}}(\bar{Y}^{\bar{u}}) = (\tilde{\chi}(\bar{u}))^{\bar{m}} \bar{Y}^{\bar{u}}.$$

Множество натуральных (целых положительных) чисел будем обозначать через $\mathbb{N}$, а множество неотрицательных целых чисел – через $\mathbb{N}_0$; $|\mathcal{L}|$ – количество элементов во множестве $\mathcal{L}$.

До §21 статья посвящена доказательству теоремы 2.1. В ее формулировку числа $A_1, \dots, A_{n-1}$ входят симметрично, поэтому без ограничения общности будем считать, что $A_1 \leq \dots \leq A_{n-1}$.

В случае $\varkappa = 1$ мы имеем $|\alpha| = \pm \alpha \in \mathbb{K}$, поэтому, положив $\alpha'_j = |\alpha_j|$ и взяв действительное значение $\ln \alpha'_j$, $A'_j = A_j$, имеем

$$|\Lambda| \geq |\Lambda'| = |b_1 \ln \alpha'_1 + \dots + b_n \ln \alpha'_n|,$$

и поэтому здесь можно считать $\alpha_j > 0$ и $\ln \alpha_j \in \mathbb{R}$. Дополнительно следует рассмотреть случай $\alpha_j = \pm 1$ с ненулевым значением $\ln \alpha_j$, поскольку здесь $\ln \alpha'_j = 0$, что не предусмотрено условиями теоремы 2.1. Но с учетом того, что здесь $A_j \geq \pi$, соответствующее слагаемое можно просто отбросить с улучшением оценки, а случай $\alpha_n = \pm 1$ рассматривается аналогично случаю $b_n = 0$ в доказательстве теоремы 2.2.

В дальнейшем у нас будут встречаться выражения, зависящие от ранее введенных параметров. Для краткости мы будем при необходимости указывать только те из них, которые нужны в данный момент, например, писать C_0 , $C_0(n)$ или $C_0(n, D)$.

§ 4. Решетки

Приведем необходимые факты из основ геометрии чисел (см., например, [7] и [8]).

Пусть дано векторное пространство $\mathcal{V}$ над $\mathbb{R}$ с нормой $\|\cdot\|$. Тогда *решеткой* называется дискретная подгруппа $M \subseteq \mathcal{V}$ (дискретность понимается в том смысле, что для любого R условию $\|\mathbf{v}\| \leq R$ удовлетворяет только конечное число векторов $\mathbf{v} \in M$). У решетки есть базис, через него целочисленно выражаются все векторы решетки. Количество векторов в базисе называется *рангом* решетки ($\text{rank } M$); ввиду дискретности имеем $\text{rank}_{\mathbb{Z}} M = \text{rank}_{\mathbb{R}} M$.

Для набора векторов $\mathcal{U}$ и для множества $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ через $\langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{B}}$ мы будем обозначать множество линейных комбинаций (с конечным числом слагаемых) векторов из $\mathcal{U}$ с коэффициентами из $\mathcal{B}$. Чтобы конечно порожденная аддитивная подгруппа M являлась решеткой, должно быть $\text{rank } M = \dim \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$. Если $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{V}$, то говорят, что решетка *полная*. В [7] изучаются только полные решетки, но очевидно, что любая решетка M полна в $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$.

Для заданной нормы $\|\cdot\|$ через $\mathcal{W}(\|\cdot\|)$ будем обозначать единичный шар нормы, т.е. множество векторов $\|\mathbf{v}\| \leq 1$. Число λ_k является *k-м последовательным минимумом* множества M относительно нормирования $\|\cdot\|$, если это точная нижняя грань тех $\lambda > 0$, для которых существуют k линейно независимых векторов из $\lambda \mathcal{W}(\|\cdot\|) \cap M$. У решетки ввиду ее дискретности существуют ненулевые последовательные минимумы, достигающиеся на некоторых векторах. Последовательные минимумы не убывают, и их число равно $\text{rank } M$.

Если пространство евклидово, то скалярное произведение в нем задает m -мерные объемы, индуцированные формулой

$$\text{Vol}_m \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle_{[0;1]} = (\det(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{i,j=1,\dots,m})^{1/2},$$

где $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle_{[0;1]}$ – параллелепипед, построенный на линейно независимых векторах $\mathbf{v}_j$.

Отметим, что наряду с евклидовой нормой в $\mathcal{V}$ можно одновременно работать и с другими нормами. Кроме того, евклидову метрику, задающую объемы, также можно задавать различными способами. Обычно в координатном пространстве по умолчанию берется стандартная метрика, но далее мы будем пользоваться и иными евклидовыми нормами. Если в какой-либо системе координат матрица евклидовой нормы равна Q , V – матрица строк координат векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, то

$$\text{Vol}_m \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle_{[0;1]} = (\det(VQV^T))^{1/2}.$$

Тело $\Pi \subseteq \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ называют *фундаментальной областью* решетки M , если множества $\Pi + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in M$, дают разбиение пространства $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$. Так, $\Pi(M) = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{[0;1]}$, где $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – базис решетки M , называют *фундаментальным параллелепипедом* решетки. Все фундаментальные области имеют одинаковый объем, называемый *объемом решетки* ($\text{Vol}_n M = \text{Vol}_n \Pi(M)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 (теорема Минковского о последовательных минимумах [7, гл. 8, теорема 5]). Пусть в евклидовом пространстве даны норма $\|\cdot\|$ и решетка M_n ранга n ; ее последовательные минимумы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ достигаются

на векторах $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$: $M'_n = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$; $[M_n : M'_n]$ – индекс M_n относительно M'_n . Тогда

$$\frac{1}{n!} 2^n [M_n : M'_n] \text{Vol}_n M_n \leq \lambda_1 \dots \lambda_n \text{Vol}_n \mathcal{W}(\|\cdot\|) \leq 2^n \text{Vol}_n M_n.$$

Неприятный момент заключается в том, что минимальные векторы не всегда можно достроить до базиса, они порождают более разреженную решетку, что проявляется во множителе $[M_n : M'_n]$.

ЛЕММА 4.2 (Малера [7, гл. 5, лемма 8]). В условиях предложения 4.1 найдется такой базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ решетки M_n , что

$$\|\mathbf{e}_1\| \dots \|\mathbf{e}_n\| \text{Vol}_n \mathcal{W}(\|\cdot\|) \leq 2^{1-n} n! \text{Vol}_n M_n.$$

Проясним также роль множителя $[M_n : M'_n]$. Пусть даны некоторая решетка M и произвольные векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in M$. Положим

$$M'_n = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad M_n = M \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{R}};$$

тогда M_n состоит из векторов $\mathbf{v} \in M$, линейно зависящих над $\mathbb{Z}$ с векторами $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$:

$$m_0 \mathbf{v} = m_1 \mathbf{v}_1 + \dots + m_n \mathbf{v}_n, \quad m_0, \dots, m_n \in \mathbb{Z}, \quad m_0 \neq 0.$$

Из теории групп известно, что $[M_n : M'_n] \mathbf{v} \in M_n$, т.е. в приведенной формуле можно положить $m_0 = [M_n : M'_n]$. Кроме того, пусть $\text{rank } M_n = \text{rank } M'_n = \nu > 0$; тогда

$$[M_n : M'_n] = \frac{\text{Vol}_{\nu} M'_n}{\text{Vol}_{\nu} M_n}.$$

Если $\nu = n$, то соотношение между векторами единственно с точностью до целочисленного множителя, и так же можно оценивать все m_j . Приведем обобщение соответствующего утверждения.

ЛЕММА 4.3 [8, теорема 2]. Пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{V}$ даны норма $\|\cdot\|$ и векторы $\mathbf{v}_j$, $0 < \|\mathbf{v}_j\| \leq A_j$, $1 \leq j \leq n$, $M = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ – решетка ранга $r < n$. Тогда между векторами имеется $n - r$ независимых целочисленных соотношений ($m_{i,j} \in \mathbb{Z}$)

$$m_{i,1} \mathbf{v}_1 + \dots + m_{i,n} \mathbf{v}_n = 0, \quad 1 \leq i \leq n - r,$$

удовлетворяющих неравенству

$$\prod_{i=1}^{n-r} \max_j \{|m_{i,j}| A_j\} \leq \binom{n}{r}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{B}(\|\cdot\|, r)}{\text{Vol}_r M} A_1 \dots A_n, \quad (4.1)$$

а если $r = n - 1$, то неравенству (считаем $m_{1,j} = m_j$)

$$|m_j|A_j \leq \frac{\mathcal{B}(\|\cdot\|, r)}{\text{Vol}_r M} A_1 \dots A_n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.2)$$

где

$$\mathcal{B}(\|\cdot\|, r) = \sup\{\text{Vol}_r \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \rangle_{[0;1]} : \mathbf{e}_j \in \mathcal{V}, \|\mathbf{e}_j\| \leq 1, 1 \leq j \leq r\}.$$

Отметим, что в неравенстве (4.2) множитель A_j сокращается, т.е. оценка для $|m_j|$ не зависит от $\|\mathbf{v}_j\|$.

Неравенство (4.2) побуждает рассматривать в пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов $(m_1, \dots, m_n)$ тах-норму с весовыми коэффициентами

$$|\mathbf{m}|_A = \max\{|m_j|A_j : 1 \leq j \leq n\}; \quad (4.3)$$

тогда (4.2) дает оценку $|\mathbf{m}|_A$. Нормы с весовыми коэффициентами будут полезны и в ряде других случаев.

Линейные формы будем записывать как векторы, при этом значение линейной формы $\mathbf{a}$ на векторе $\mathbf{x}$ обозначим как

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

Если в векторном пространстве задана норма $\|\cdot\|$, то для пространства линейных форм определена *сопряженная норма* $\|\cdot\|^*$, для которой выполняется наилучшаемое неравенство

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}| \leq \|\mathbf{a}\|^* \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Сопряженной для тах-нормы является сум-норма (и наоборот)

$$\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|;$$

евклидова норма самосопряжена. Если в таких нормах присутствует набор весовых коэффициентов $\mathcal{A}$, то в сопряженной норме набор весовых коэффициентов $\mathcal{A}'$ составлен из обратных величин.

Далее, если явно не оговорено противное, под $|\cdot|$ понимается тах-норма, а под $\|\cdot\|$ – сум-норма, и если весовые коэффициенты не указаны, то считаем их равными единице.

Пусть даны линейно независимые над $\mathbb{Z}$ векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, тогда векторы $\mathbf{v}_i = m_{i,1}\mathbf{e}_1 + \dots + m_{i,n}\mathbf{e}_n$, $i = 1, \dots, \nu \leq n$ ($m_{i,j} \in \mathbb{Z}$), можно дополнить до базиса в $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$, только в том случае, когда набор векторов $\mathbf{m}_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, \nu$, *примитивен*, т.е. в матрице $(m_{i,j})$ все миноры размера $\nu \times \nu$ в совокупности взаимно просты.

Следующая лемма является уточненным вариантом оценки (4.2).

ЛЕММА 4.4. Пусть даны весовые коэффициенты $A_1, \dots, A_n > 0$, $A_1 \leq \dots \leq A_{n-1}$, линейно независимые векторы $\mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}^n$, $\|\mathbf{x}_i\|_A \leq X_i$ ($i = 1, \dots, \nu \leq n$), и вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$, $b_n \neq 0$, линейно зависимый с ними над $\mathbb{Z}$. Тогда имеется нетривиальное соотношение вида

$$m_0 \mathbf{b} = m_1 \mathbf{x}_1 + \dots + m_\nu \mathbf{x}_\nu, \quad m_0, \dots, m_\nu \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяющее условиям

$$|m_0| \leq \frac{X_1 \dots X_\nu}{A_1 \dots A_{\nu-1} A_n},$$

$$|m_j| X_j \leq \nu |\mathbf{b}|_A \cdot \frac{X_1 \dots X_\nu}{A_1 \dots A_{\nu-1} A_n}, \quad 1 \leq j \leq \nu.$$

Если для тах-нормы выполняется $|\mathbf{x}_i|_A \leq X_i$, $1 \leq i \leq r$, то в обоих неравенствах следует поставить справа множитель $\nu^{\nu/2}$, а во втором при этом убрать множитель ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку векторы $\mathbf{x}_i$ линейно независимы, то коэффициенты m_i можно найти следующим образом. В матрице координат $(x_{i,j})$ выберем ненулевой минор размера $\nu \times \nu$ (пусть в него входят $j \in \mathcal{J}$); тогда получаем систему уравнений

$$m_1 x_{1,j} + \dots + m_\nu x_{\nu,j} = m_0 b_j, \quad j \in \mathcal{J},$$

которую можно решить по правилу Крамера и получить

$$m_0 = \Delta, \quad m_i = \Delta_i, \quad i = 1, \dots, \nu,$$

при этом $\Delta, \Delta_j \in \mathbb{Z}$, $\Delta \neq 0$. Оценим сверху $|\Delta_i|$, для чего умножим столбец j на A_j , вынесем из k -й строки множитель $\nu |\mathbf{b}|_A$ при $k = i$ и множитель X_k при $k \neq i$. Тогда в строках останутся элементы, сумма модулей которых не превосходит 1, а такой определитель не превосходит 1. Аналогично оценивается $|\Delta|$. В случае тах-нормы следует применить неравенство Адамара.

Для завершения доказательства отметим, что ввиду $b_n \neq 0$ среди n -х координат векторов $\mathbf{x}_j$ есть ненулевые. Поэтому индекс n можно включить в $\mathcal{J}$, откуда следует утверждение леммы.

В заключение параграфа отметим, что для тах-нормы множество $\mathcal{W}(\|\cdot\|)$ является кубом, для sum-нормы – октаэдром с известными формулами для объема, а для евклидовой нормы – обычным шаром,

$$\text{Vol}_r \mathcal{W}(\|\cdot\|_2) = \frac{\pi^{r/2}}{(r/2)!},$$

где $(x)! = \Gamma(x+1)$ обозначает гамма-функцию.

§ 5. Высоты

Общеизвестные факты данного параграфа взяты из [9], [10], а нижние оценки логарифмических высот – из [5], [11].

Пусть $\mathbb{K}^{(\sigma)}$ – вложения поля $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}$, $1 \leq \sigma \leq D$, соответственно имеются D архимедовских нормирований поля $\mathbb{K}$:

$$|\alpha|_\sigma = |\alpha^{(\sigma)}|, \quad 1 \leq \sigma \leq D.$$

Для комплексно-сопряженных вложений соответствующие нормирования равны, но для удобства будем учитывать их оба. Пронумеруем простые идеалы поля $\mathbb{K}$ индексами $\sigma > D$ и определим неархимедовские нормирования $\mathbb{K}$ по формуле

$$|\alpha|_\sigma = (\text{Norm } \mathfrak{p})^{-k}, \quad k = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha), \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\sigma, \quad \sigma > D, \quad \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

Тогда имеет место формула произведения

$$\prod_{\sigma=1}^{\infty} |\alpha|_\sigma = 1, \quad \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

Отметим, что $|\alpha|_\sigma \neq 1$ только для конечного количества σ .

Нумерация нормирований удобна при суммировании по всем σ . При изучении линейной формы от логарифмов мы будем работать с индексами $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$, отвечающими паре комплексно-сопряженных полей. Будем опускать индекс $\sigma = 1$, отождествляя $\mathbb{K}$ с $\mathbb{K}^{(1)}$.

При изучении мультипликативной группы $\mathbb{K}^*$ мы всегда будем предполагать $\alpha \neq 0$, не оговаривая этого в дальнейшем особо.

Рассмотрим логарифмическое отображение мультипликативной группы $\mathbb{K}^*$ в бесконечномерное пространство $\mathbb{R}^\infty$ векторов $\mathbf{x} = (x_\sigma \in \mathbb{R} : 1 \leq \sigma < \infty)$, задаваемое формулой

$$x_\sigma = x_\sigma(\alpha) = \ln |\alpha|_\sigma, \quad 1 \leq \sigma < \infty.$$

Очевидно, это гомоморфизм, а образ $\mathbb{K}^*$ лежит в подпространстве $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{R}^\infty$, определяемом условиями: $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$, если

- а) почти все x_σ равны нулю;
 - б) $x_\sigma = x_\tau$ для комплексно-сопряженных σ и τ ;
 - с) выполняется аддитивный аналог формулы произведения: $\sum_{\sigma=1}^{\infty} x_\sigma = 0$.
- Будем называть $\mathcal{E}$ *логарифмическим пространством*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обычно комплексно-сопряженные пары $x_\sigma = x_\tau$ заменяют одним числом $2x_\sigma$, но нам кажется удобнее учитывать все σ . Далее, пространство $\mathcal{E}$ бесконечномерно, но это только формальная конструкция. Реально всегда приходится работать только в некотором конечномерном координатном подпространстве, конкретно в данной работе можно обойтись только всеми архимедовскими координатами и теми p -адическими координатами, где хотя бы для одного из чисел α_j имеем $|\alpha_j|_\sigma \neq 1$.

Отметим, что для логарифмических образов $\mathbf{x}(\alpha)$ выполняется

$$x_\sigma \in \ln(\text{Norm } \mathfrak{p}_\sigma)\mathbb{Z}, \quad \sigma > D.$$

Абсолютную логарифмическую высоту числа $\alpha \in \mathbb{K}$ зададим формулой

$$h(\alpha) = \frac{1}{D} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \max\{0, \ln |\alpha|_{\sigma}\} = \frac{1}{2D} \sum_{\sigma=1}^{\infty} |\ln |\alpha|_{\sigma}|$$

(последнее равенство верно вследствие формулы произведения). Она задает норму в логарифмическом пространстве. С точностью до множителя это – sup -норма в $\mathcal{E}$, т.е. $h(\alpha) = (2D)^{-1} \|\mathbf{x}(\alpha)\|$. Абсолютной высотой названа потому, что она не зависит от поля, в котором можно разместить число α . Для $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq 0$, имеем $h(\alpha) = \ln |\alpha|$.

По теореме Кронекера ядром логарифмического отображения является группа корней из 1 поля $\mathbb{K}$; эта группа конечна, циклична; образ $\mathbb{K}^*$ является решеткой в $\mathcal{E}$.

Теперь построим конструкцию, которую назовем *расширенным логарифмическим пространством*. Она была детально и с большей степенью общности описана в [5]. Для этого в прежнем пространстве $\mathbb{R}^{\infty}$, содержащем $\mathcal{E}$, заменим $\mathbb{R}$ -компоненты, соответствующие координатам $\sigma = 1, \varkappa$, на $\mathbb{C}$ -компоненты. Соответствующие координаты будут $z_{\sigma} = x_{\sigma} + iy_{\sigma}$. Для координат x_{σ} сохраняются прежние условия (а)–(с), а для y_{σ} должно быть:

d) $y_{\sigma} = -y_{\tau}$, если σ и τ комплексно-сопряжены.

Полученное пространство назовем *расширенным логарифмическим пространством* $\mathcal{E}_{\varkappa} = \mathcal{E}_{\varkappa}(\mathbb{K})$. Можно считать, что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{\varkappa}$, относя к $\mathcal{E}$ векторы, имеющие все $y_{\sigma} = 0$. Имеется естественное отображение $\mathcal{E}_{\varkappa}$ в $\mathcal{E}$ – проекция, аннулирующая все y_{σ} .

Теперь опишем, как связана группа $\mathbb{K}^*$ с пространством $\mathcal{E}_{\varkappa}$. Для этого координаты x_{σ} зададим прежним образом, а координаты y_{σ} определим как $y_{\sigma} = \text{Arg } \alpha^{(\sigma)}$. Другими словами, $z_{\sigma} = \text{Ln } \alpha^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, \varkappa$. При этом, строя соответствующую решетку в $\mathcal{E}_{\varkappa}$, будем брать все возможные значения логарифма. Полученное множество точек в $\mathcal{E}_{\varkappa}$ обозначим через $M_{\varkappa}(\mathbb{K})$. Тогда для $\mathbf{x} \in M_{\varkappa}(\mathbb{K})$ с некоторым $\alpha \in \mathbb{K}^*$ выполняется

$$\begin{cases} \exp(x_{\sigma}) = |\alpha|_{\sigma}, & \sigma > \varkappa, \\ \exp(z_{\sigma}) = \alpha^{(\sigma)}, & \sigma \leq \varkappa, \end{cases}$$

что позволяет восстанавливать α по его образу. Таким образом, теперь само расширенное логарифмическое отображение неоднозначно, но существует однозначное обратное отображение $M_{\varkappa}(\mathbb{K})$ на $\mathbb{K}^*$, определяемое по указанным формулам.

Как отмечалось в § 3, если $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, то для доказательства теорем достаточно ограничиться рассмотрением только положительных чисел α ; с действительными значениями логарифмов. Будем обозначать соответствующие объекты как $\mathbb{K}^+$, $\mathcal{E}_{\varkappa}(\mathbb{K}^+)$, $M_{\varkappa}(\mathbb{K}^+)$. В то же время вспомогательные леммы будут доказываться и для общего случая, для которого утверждения могут отличаться от случая $\mathbb{K}^+$.

Для изучения множества $M_{\varkappa}(\mathbb{K})$ в [5] были рассмотрены несколько норм в пространстве $\mathcal{E}_{\varkappa}$, одна из которых имела следующий вид. Для $\vartheta > 0$ положим

$$H_{\vartheta}^*(\mathbf{x}) = \max \left\{ \max_{\sigma \leq \varkappa} |z_{\sigma}|, \frac{\vartheta}{2\varkappa} \sum_{\sigma > \varkappa} |x_{\sigma}| \right\};$$

тогда $H_{\vartheta}^*(\alpha) = H_{\vartheta}^*(\mathbf{x})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha) \in \mathcal{E}_{\varkappa}$ является некоторым логарифмическим образом числа α . Упростим это выражение, суммируя по всем $\sigma \geq 1$. Получим

$$H_{\vartheta}(\alpha) = H_{\vartheta}(\mathbf{x}) = \max \left\{ \frac{D\vartheta}{\varkappa} h(\alpha), \max_{\sigma \leq \varkappa} |\ln \alpha^{(\sigma)}| \right\}.$$

Назовем $H_{\vartheta}(\alpha)$ *расширенной логарифмической высотой* α (с весовым коэффициентом ϑ). Отметим, что в случае $\mathbb{K}^+$ мы имеем просто $H_{\varkappa}(\alpha) = D h(\alpha)$.

В [5] рассматривался общий случай, когда $\varkappa$ принимает значения $1 \leq \varkappa \leq D$, а ϑ меняется в диапазоне от нуля до бесконечности. В данной работе для простоты изложения мы рассматриваем только $\varkappa \in \{1, 2\}$, поэтому $\max\{|\ln \alpha^{(\sigma)}| : \sigma \leq \varkappa\} = |\ln \alpha|$.

В ряде предшествующих работ рассматривался параметр

$$\frac{1}{E} = \max_j \left\{ \frac{1}{H_{\varkappa}(\alpha_j)} \max_{\sigma \leq \varkappa} |\ln \alpha_j^{(\sigma)}| \right\},$$

по порядку соответствующий ϑ . Чем больше E , тем лучше получаются оценки линейных форм. Однако зависимость нормы $H_{\vartheta}(\alpha)$ от ϑ оказалась полезной, поскольку для этой нормы удалось доказать нетривиальную оценку для последовательных минимумов решетки $M_{\varkappa}(\mathbb{K})$, причем в виде, необходимом для оценок линейных форм от логарифмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 [5, теорема 6.2]. Пусть $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ — линейно независимые векторы из $M_{\varkappa}(\mathbb{K})$. Положим

$$M_n = M_{\varkappa}(\mathbb{K}) \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{R}}, \quad M'_n = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad N = [M_n : M'_n].$$

Тогда

$$H_{\vartheta}^*(\mathbf{v}_1) \dots H_{\vartheta}^*(\mathbf{v}_n) \xi_0^* \max \left\{ 6, n-1, \frac{D}{\varkappa} \ln \left(4.64 \frac{D}{\varkappa} \right) \right\} > N,$$

$$\xi_0^* = \left(2 + \frac{1}{2\vartheta} \right)^n (e^{n/(1+4\vartheta)} n)^{\varkappa}.$$

Для согласования с обозначениями (2.1) считаем в дальнейшем $\vartheta = \varkappa$ и $H_{\vartheta}(\alpha) = H_{\varkappa}(\alpha)$. Упростим формулу для ξ_0^* с учетом $\varkappa \leq 2$ и запишем оценку предложения 5.1 в виде, достаточном для наших приложений (случай $n = 1$ см. далее):

$$A_1 \dots A_n \xi_0(n) \frac{D}{N} \ln(e^{4+n} D) > 1, \tag{5.1}$$

$$\xi_0(0) = 1, \quad \xi_0(1) = 1.5, \quad \xi_0(\nu) = 3.1^{\nu} \nu^{\varkappa} / \varkappa, \quad \nu \geq 2$$

(для линейно независимых над $\mathbb{Z}$ чисел $\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n$). Неравенство (5.1) можно использовать и для оценки $A_1 \dots A_{\nu}$ ($1 \leq \nu \leq n$), если заменить N на 1 и n на ν :

$$A_1 \dots A_{\nu} \xi_0(\nu) D \ln(e^{4+\nu} D) > 1. \tag{5.2}$$

Отметим также, что в (5.1), (5.2) величину $\ln(e^{4+n} D)$ можно заменить на $C_0/2$ или $W_0/2$ из (2.2) (по поводу W_0 см. (6.3)).

Случай $n = 1$ был рассмотрен ранее в [11], где была получена несколько более точная оценка [11, следствие 4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. При $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\deg \alpha = d > 1$, выполняется

$$\max\{dh(\alpha), |\ln \alpha|\} \geq \frac{8}{9d \ln(2.2d)}.$$

Перепишем неравенство из предложения 5.2 в виде

$$\frac{1}{A_j} \leq 1.5D \ln(eD), \quad (5.3)$$

верном и при $D = 1$, так как здесь либо $h(\alpha) \geq \ln 2$, либо $\alpha = \pm 1$. Этим обусловлено значение $\xi_0(1) = 1.5$.

В 1933 г. Лемером было найдено число $\alpha = 1.176 \dots$ степени $d = 10$, являющееся корнем уравнения

$$x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1 = 0,$$

и имеющее наименьшую известную логарифмическую высоту $dh(\alpha) = 0.162 \dots$ среди алгебраических чисел, отличных от корней из 1. Этим обусловлен выбор константы 0.16 в условии (2.4).

В лемме 4.2 приведено утверждение для решеток и норм общего вида, где оставлены параметры $\mathcal{B}(\|\cdot\|, r)$, $\text{Vol}_r M$. При этом важно лишь их отношение, и, кроме того, мы можем сами выбирать евклидову норму, определяющую объемы. Укажем оценки $\mathcal{B}(\|\cdot\|, r)$, $\text{Vol}_r M$ для решеток в $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathbb{K})$, использующиеся в дальнейшем. При этом в качестве евклидовой нормы возьмем

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 = \sum^{(*)} y_{\sigma}^2 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} x_{\sigma}^2, \quad (5.4)$$

где в сумме $\sum^{(*)}$ из пары комплексно-сопряженных координат берем только одну (для $\mathbb{K}^+$ эта составляющая отсутствует).

ЛЕММА 5.3. В $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(\mathbb{K})$ для нормы $\|\cdot\| = H_{\mathcal{K}}(\cdot)$ и скалярного произведения, индуцированного нормой (5.4) с k слагаемыми y_{σ}^2 в $\sum^{(*)}$, имеет место оценка

$$\mathcal{B}(\|\cdot\|, r) \leq (k+2)^{r/2}.$$

Для любой r -мерной решетки $M \subseteq M_{\mathcal{K}}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$, выполняется

$$\text{Vol}_r M \geq \frac{\pi^{r/2}}{(r/2)!} \left(\frac{9}{8} D^{3/2} \ln(eD) \right)^{-r}. \quad (5.5)$$

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ выполняется

$$\text{Vol}_r M \geq P_1 \dots P_r, \quad (5.6)$$

$P_1 = \ln 2$, $P_2 = \ln 3$, $\dots$, $P_9 = \ln 23$, $P_{10} = \pi$, $P_{11} = \ln 29$, $\dots$ (перебираются логарифмы простых чисел), а в случае $\mathbb{Q}^+$ следует удалить из последовательности число π .

В случае $\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$, $k \leq 1$, а также в случае $\mathbb{Q}^+$, $k = 0$, выполняется неравенство

$$\frac{\mathcal{B}(\|\cdot\|, r)}{\text{Vol}_r M} \leq 2.2 \left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{3}{\pi}\right)^{r/2} \left(\frac{9}{8} D^{3/2} \ln(eD)\right)^r. \quad (5.7)$$

Отметим, что (5.7) отличается от (5.5) множителем 2.2, который добавлен только для того, чтобы при $D = 1$ правая часть (5.6) была меньше правой части (5.5) и в случае $r < 4$.

Доказательство приводится в § 22.

Теперь напомним понятие высоты в векторных $\mathbb{K}$ -пространствах. *Локальные и абсолютно логарифмические высоты* набора чисел $\{\beta_j \in \mathbb{K} : j \in \mathcal{J}\}$ определяются следующим образом:

$$h^{(\sigma)}(\{\beta_j\}) = \ln \max\{|\beta_j|_\sigma : j \in \mathcal{J}\}, \quad \sigma \geq 1,$$

$$h(\{\beta_j\}) = \frac{1}{D} \sum_{\sigma=1}^{\infty} h^{(\sigma)}(\{\beta_j\}).$$

Высота $h(\cdot)$ проективна, т.е. для $\lambda \in \mathbb{K}^*$ имеем $h(\{\lambda\beta_j\}) = h(\{\beta_j\})$, что следует из формулы произведения.

В дальнейшем нам придется рассматривать значения многочленов от многих переменных в точке $\bar{\alpha}$. Здесь набор $\{\beta_j\}$ будет сформирован из чисел вида $\bar{\alpha}^{\bar{l}}$, где $\bar{l}$ принадлежит некоторому множеству мультистепеней $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$. Для удобства оценок в этом случае введем следующие обозначения. Для заданного вектора $\bar{\alpha} \in (\mathbb{K}^*)^n$ и множества $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ положим

$$h^{(\sigma)}(\bar{\alpha}, \mathcal{W}) = \sup\{\bar{w} \cdot \ln |\bar{\alpha}|_\sigma : \bar{w} \in \mathcal{W}\}, \quad \sigma \geq 1,$$

$$h(\bar{\alpha}, \mathcal{W}) = \frac{1}{D} \sum_{\sigma=1}^{\infty} h^{(\sigma)}(\bar{\alpha}, \mathcal{W}).$$

ЛЕММА 5.4 [1, лемма 3.2]. *Высота $h(\bar{\alpha}, \mathcal{W})$ обладает следующими свойствами:*

- (i) если $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, то $h(\bar{\alpha}, \mathcal{V}) \leq h(\bar{\alpha}, \mathcal{W})$;
- (ii) $h(\bar{\alpha}, r\mathcal{W}) = r h(\bar{\alpha}, \mathcal{W})$, $r > 0$;
- (iii) $h(\bar{\alpha}, \mathcal{V} + \mathcal{W}) = h(\bar{\alpha}, \mathcal{V}) + h(\bar{\alpha}, \mathcal{W})$;
- (iv) $h(\bar{\alpha}, \{\bar{v}\}) = 0$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$;
- (v) $h(\bar{\alpha}, \mathcal{W} + \bar{v}) = h(\bar{\alpha}, \mathcal{W})$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$;
- (vi) $h(\bar{\alpha}, \mathcal{W})$ не зависит от выбора поля, содержащего числа α_j .

§ 6. Неравенство Лиувилля

В данном параграфе будет доказано, что теорема 2.1 верна при $n = 1$, а также при сравнительно небольших значениях B .

В теории диофантовых приближений неравенства, непосредственно получающиеся из формулы произведения, обычно называют *лиувиллевыми*. Оказывается, параметр B вида (1.3) очень удобен для записи подобного рода оценок.

ЛЕММА 6.1 [1, лемма 13.1]. Пусть в обозначениях теоремы 2.1 $\Lambda \notin 2\pi i\mathbb{Z}$. Тогда

$$|e^\Lambda - 1| \geq 2^{1-D} e^{-nBA_n}.$$

Ввиду отсутствия формальных нижних границ для учитываемых параметров в оценке Λ некоторые прежде очевидные утверждения требуют проверки.

ЛЕММА 6.2. Теорема 2.1 верна при $|\Lambda| \geq 0.001$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.2) имеем $\xi_0(n)D\Omega C_0 \geq 1$, поэтому в правой части (2.3) остается еще достаточно большой множитель, что доказывает утверждение леммы.

Таким образом, далее можно считать $|\Lambda| < 0.001$. Лемма 6.1 в этом случае приводит к неравенству

$$|\Lambda| \geq \frac{1}{2} |e^\Lambda - 1| \geq \exp(-D \ln 2 - nBA_n).$$

Теперь рассмотрим случай, когда лиувиллева оценка хуже, чем (2.3). Тогда

$$-D \ln 2 - nBA_n \leq -C(n)D^2\Omega C_0 W_0,$$

или с учетом (5.2)

$$nBA_n \geq C(n)D^2\Omega C_0 W_0 - D \ln 2 \geq 0.99C(n)D^2\Omega C_0 W_0.$$

После сокращения на nA_n получаем

$$B \geq 0.99 \frac{1}{n} C(n) D^2 A_1 \dots A_{n-1} C_0 W_0. \quad (6.1)$$

При этом показательная часть $C(n)$ имеет вид $(4e^2)^n$. В частности, применяя оценку (5.2) для множителя $DA_1 \dots A_{n-1}C_0/2$, получаем $B \geq e^{2n+8}D$. Это позволяет использовать неравенства (5.1), (5.2) с величиной $W_0/2$ вместо $\ln(e^{4+\nu}D)$. Поэтому из (6.1) следует

$$B \geq 1.98C(n)C_0D/n\xi_0(n-1), \quad (6.2)$$

а для W_0 имеем неравенство

$$W_0 \geq 2.25n + 1.5 \ln n + 13 + 2 \ln D, \quad (6.3)$$

непосредственно проверяемое при малых n и получающееся асимптотически для больших n , поскольку для основания показательной зависимости от n в (6.2) имеем $\ln(4e^2/3.1) > 2.25$.

Кроме того, из (6.1) следует также оценка

$$A_1 \dots A_{n-1} \leq B \left(0.99 \frac{1}{n} C(n) D^2 C_0 W_0 \right)^{-1}. \quad (6.4)$$

Таким образом, в дальнейшем можно считать неравенство (6.1) выполненным (иначе теорема 2.1 верна в силу лиувиллевой оценки), значит, выполнены также неравенства (6.2)–(6.4).

ЛЕММА 6.3. *Теорема 2.1 верна при $n = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ имеем

$$|\Lambda| = |b_n \ln \alpha_n| \geq |\ln \alpha_n|,$$

так что здесь можно считать $B = 1$, и поэтому теорема 2.1 следует из лиувиллевой оценки.

В заключение параграфа отметим, что в приведенных вычислениях, а также в следующих далее оценках степенная зависимость от D оптимальна. Впервые подобная зависимость была установлена для произвольного n в [2].

§ 7. Индуктивное предположение

Вся статья, кроме § 21, 22, будет посвящена доказательству теоремы 2.1. Мы будем доказывать ее индукцией по n – числу логарифмов в линейной форме Λ , предполагая ее доказанной для меньшего числа логарифмов. Основание индукции ($n = 1$) было доказано в § 6, так что далее считаем $n \geq 2$.

Ясно также, что мы можем считать набор чисел b_j примитивным, иначе, сократив их на общий множитель, мы уменьшим B и улучшим оценку линейной формы.

Объясним еще одно допущение, вводимое в данном параграфе. Пользуясь свойствами логарифмической функции, можно уменьшить количество логарифмов в линейной форме Λ :

$$\Lambda = b_1 \ln \alpha_1 + \dots + b_n \ln \alpha_n = (m_1 \ln \vartheta_1 + \dots + m_r \ln \vartheta_r) / m_0, \quad (7.1)$$

например записать $\Lambda = \ln \vartheta$, $\vartheta = \bar{\alpha}^{\bar{b}}$. Обычно это сопровождается увеличением высот чисел ϑ_i и только ухудшает оценку. Однако если увеличение высот невелико, то теорему можно непосредственно доказать из индуктивного предположения для $r < n$. Опишем эту ситуацию, принимая за основу рассуждения из [4].

Напомним, что в теореме 2.1 числа $\ln \alpha_j$ предполагаются линейно независимыми над $\mathbb{Z}$. Пусть теперь при некотором r ($1 \leq r < n$) существует набор векторов

$$\bar{Z}_i = (z_{i,1}, \dots, z_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n, \quad 1 \leq i \leq r,$$

удовлетворяющих условиям:

- (i) $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_r$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$;
- (ii) с некоторым примитивным набором $m_0, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$, $m_0 \neq 0$, выполняется

$$m_0 \bar{b} = m_1 \bar{Z}_1 + \dots + m_r \bar{Z}_r; \quad (7.2)$$

- (iii) для сум-нормы с весовыми коэффициентами A_j из условий теоремы 2.1 выполняется

$$\|\bar{Z}_1\|_A \dots \|\bar{Z}_r\|_A \leq \frac{1}{2} (4e^2)^{n-r} A_1 \dots A_n. \quad (7.3)$$

ЛЕММА 7.1. *При выполнении условий (i)–(iii) справедливость теоремы 2.1 для n следует из ее справедливости для $r < n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим алгебраические числа ϑ_i и их логарифмы по формулам

$$\ln \vartheta_i = \bar{Z}_i \cdot \ln \bar{\alpha} = z_{i,1} \ln \alpha_1 + \dots + z_{i,n} \ln \alpha_n, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Тогда, очевидно, равенство (7.1) выполнено с коэффициентами m_i из (7.2), и при этом логарифмы $\ln \vartheta_i$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$.

Из определения чисел A_j и свойств высоты имеем

$$H_{\kappa}(\vartheta_i) \leq A'_i = \|\bar{Z}_i\|_A, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Поскольку $b_n \neq 0$, среди чисел $z_{i,n}$, $1 \leq i \leq r$, есть ненулевое с соответствующим $m_i \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $z_{r,n} \neq 0$, $m_r \neq 0$. Тогда $A'_r \geq |z_{r,n}| A_n \geq A_n$.

Положим теперь по аналогии с обозначениями §2

$$B' = \max\{|m_i| A'_i / A'_r : 1 \leq i \leq r\}, \quad \Omega' = A'_1 \dots A'_r,$$

и оценим с помощью леммы 4.3 и неравенства (7.3) число B' . Имеем

$$B' A'_r = \max\{|m_i| A'_i : 1 \leq i \leq r\} \leq \frac{r B \Omega'}{A_1 \dots A_{r-1}} \leq \frac{1}{2} r B (4e^2)^{n-r} \frac{A_1 \dots A_n}{A_1 \dots A_{r-1}}.$$

Сокращая на $A'_r \geq A_n$ и применяя к $1/(A_1 \dots A_{r-1})$ неравенство (5.2), получаем с учетом (6.4), что

$$B' \leq \frac{1}{2} r B (4e^2)^{n-r} \xi_0(r-1) D \ln(e^{n+4} D) \frac{2nB}{C(n) D^2 C_0 W_0} \leq B^2.$$

Аналогично, с помощью леммы 4.3 и неравенств (7.3), (5.2), (6.4) оценивается m_0 :

$$\begin{aligned} |m_0| &\leq \|\bar{Z}_1\|_A \dots \|\bar{Z}_r\|_A \frac{1}{A_1 \dots A_{r-1} A_n} \\ &\leq \frac{1}{2} (4e^2)^{n-r} A_1 \dots A_{n-1} \xi_0(r-1) D \ln(e^{n+4} D) \\ &\leq \frac{1}{2} (4e^2)^{n-r} \frac{2nB}{C(n) D^2 C_0 W_0} \xi_0(r-1) D \ln(e^{n+4} D) \leq B. \end{aligned}$$

Применим теперь теорему 2.1 к форме $m_0 \Lambda$ из (7.1) с числами ϑ_i и m_i и получим (опять с учетом (7.3))

$$\begin{aligned} -\ln |\Lambda| &\leq \ln |m_0| + C(r) D^2 \Omega' C_0 \ln(1.5e B' D \ln(eD)) \\ &\leq \ln B + C(r) \frac{1}{2} (4e^2)^{n-r} D^2 \Omega C_0 \ln(1.5e B^2 D \ln(eD)) \\ &\leq W_0 + 4e^2 C(n-1) D^2 \Omega C_0 W_0 \leq C(n) D^2 \Omega C_0 W_0, \end{aligned}$$

что доказывает теорему 2.1 в рассматриваемом случае при заданном n . Здесь мы использовали легко проверяемое неравенство

$$\frac{C(n)}{C(n-1)} > 4e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} > 4e^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Итак, в дальнейшем считаем, что условия леммы 7.1 не выполнены, т.е. не существуют r ($1 \leq r \leq n$) и векторы $\bar{Z}_i$ с условиями (i)–(iii). Этим наша индуктивная схема несколько отличается от схемы Бейкера–Вюстхольца, которые максимально редуцировали линейную форму Λ и далее работали с укороченной формой. Предлагаемая нами схема экономит обозначения.

Отметим, что это одно из мест в доказательстве, где за счет применения весовых коэффициентов удалось сохранить зависимость оценки Λ от числа B из (1.3), не переходя к B^* из (1.4).

Индуктивное предположение понадобится нам только в конце доказательства в § 20.

Отметим также, что идея редукции была предложена в статье [12] в 1949 г. для перехода от $n = 3$ к $r = 2$. Конечно, если линейная форма Λ допускает понижение числа переменных, то это имеет смысл сделать. Главная трудность состоит в том, как использовать информацию о том, что форма не упрощается. Недавно выяснилось, что это условие является ключевым в теореме об оценках кратностей нулей (см. § 19).

§ 8. Обобщенные биномиальные многочлены

Данный параграф является вспомогательным. В нем приводятся сведения о базисных многочленах, обладающих нужными арифметическими свойствами. Положим

$$\Delta(z, 0) = 1, \quad \Delta(z, k) = \frac{1}{k!} z(z+1) \dots (z+k-1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и для фиксированного $H \in \mathbb{N}$ определим

$$\Delta(z, l, H) = (\Delta(z, H))^\lambda \Delta(z, h), \quad l = \lambda H + h, \quad 0 \leq h \leq H, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Будем называть $\Delta(z, l, H)$ *обобщенными биномиальными многочленами*.

Отметим, что для степеней $l > 0$, делящихся на H , возможно двоякое представление $l = \lambda H + h = (\lambda + 1)H$, однако легко видеть, что $\Delta(z, l, H)$ не зависит от способа представления l . В оценках выгоднее брать первую запись с меньшим значением λ . Очевидно, $\deg \Delta(z, l, H) = l$. Эти многочлены являются модификацией аналогичных многочленов, ранее введенных Фельдманом и Бейкером. Под $\Delta^{(m)}(cz, l, H)$ будем понимать производную $\Delta(cz, l, H)$ по параметру z .

В [13] доказано следующее свойство многочленов $\Delta(z, l, H)$.

ЛЕММА 8.1. Пусть $H, L_0 \in \mathbb{N}$; $m_0, L' \in \mathbb{N}_0$; $L_0 = L'H + H_1$, $0 \leq H_1 \leq H$; $d_0(m_0)$ – наименьший общий знаменатель чисел

$$\frac{1}{m!} \Delta^{(m)}(x, l, H), \quad x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq l \leq L_0, \quad 0 \leq m \leq m_0.$$

Тогда

$$d_0(m_0) \leq H^{L'} H_1! \left(2.8361 e \frac{m_0 + L' + 1}{L_0} \right)^{L_0}, \quad (8.1)$$

а также

$$d_0(m_0) \leq \exp(1.03883 H m_0). \quad (8.2)$$

Отметим, что оценка (8.1) фельдмановского типа, степенная по m_0 , несколько точнее, чем оценка бейкеровского типа (8.2). Для простоты мы будем использовать оценку (8.2), лучше приспособленную к оценкам остальных компонент.

В дальнейшем мы будем брать значения $x \in \frac{1}{K}\mathbb{Z}$, $K = 2^t$. Для избежания дробных значений многочленов мы будем заранее брать $\Delta(Kx, l, H)$. Это полезно тем, что здесь не надо еще домножать $\Delta^{(m)}(x, l, H)$ на

$$\Pi(K, l) = \prod_{p|K} p^{[l/(p-1)]}$$

(p – простое число). Отметим, что при $K = 2^t$ выполнено $\Pi(K, l) = 2^l$.

Кроме леммы 8.1 в [13] была доказана оценка модуля $|\Delta^{(m)}(z, l, H)|$. Здесь мы получим усиление оценки модуля.

ЛЕММА 8.2. Пусть $H \in \mathbb{N}$, $z, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau! m!} c^{-m} \Delta^{(m+\tau)}(cz, l, H) \right| &= \delta(l, m, \tau) \left(e \left(1 + |c| \frac{|z| + 1}{H} \right) \right)^l, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m+\tau \leq l} \delta(l, m, \tau) &\leq \frac{e}{e-1} e^{H/e}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

величины $\delta(\cdot)$ также зависят от c, z, H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полиномиальная составляющая в левой части первой строки (8.3) не превосходит $(|cz| + H - 1)^{l'} |c|^\tau$, где $l' = l - m - \tau$. Возникающие при дифференцировании факториалы и количество слагаемых оцениваются сверху как $\frac{(m+\tau)!}{m! \tau!} \binom{l}{m+\tau}$. Суммирование по $m + \tau \leq l$ (т.е. $m + \tau + l' = l$) дает

$$\sum_{m+\tau+l'=l} \frac{l!}{m! \tau! l'!} (|cz| + H - 1)^{l'} |c|^\tau 1^m = ((|cz| + H - 1) + |c| + 1)^l.$$

После вынесения за скобки множителя $(H/e)^l$ получаем первую строку (8.3).

Суммирование по $l = H\lambda + h \geq 0$ (или по $\lambda \geq 0$, $0 \leq h < H$) с учетом определения многочленов $\Delta(z, l, H)$ приводит к неравенству

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{H}{e} \right)^l \frac{1}{H!^\lambda} \frac{1}{h!} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{1}{H!} \left(\frac{H}{e} \right)^H \right)^\lambda \sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{h!} \left(\frac{H}{e} \right)^h \leq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^\lambda e^{H/e},$$

откуда следует вторая строка (8.3).

Докажем техническую оценку, не выделенную в [1] в самостоятельное утверждение.

ЛЕММА 8.3. Пусть даны $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^J$, $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^J$, $\|\mathbf{m}\| \leq M \leq \mu$, $\mu \geq 1$, а также $\gamma_0 \geq \|\mathbf{m}\| + \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| > 0$. Тогда

$$\mathcal{D} = \sum_{\mathbf{t}} \frac{1}{\mathbf{t}! \mathbf{1}} |\mathbf{x}^{\mathbf{t}}| \cdot |\Delta(\mathbf{y}, \mathbf{m})| \leq \frac{1}{M!} \gamma_0^M, \quad \left(\frac{\gamma_0}{\mu} \right)^{\mu-M} \mathcal{D} \leq \frac{1.1}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{e\gamma_0}{\mu} \right)^\mu \quad (8.4)$$

(суммирование ведется по наборам $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^J$, $\|\mathbf{t}\| = M - \|\mathbf{m}\|$; $\|\cdot\|$ обозначает sum-норму; $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^J$; обозначения $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}$, $\Delta(\mathbf{y}, \mathbf{m})$ см. в § 3).

В частности, оценка верна при фиксированных $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left(\frac{\gamma_0}{\mu} \right)^{\mu-M} |\Delta(\mathbf{y}, \mathbf{m})| \leq \frac{1.1}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{e\gamma_0}{\mu} \right)^\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя x_j, y_j на $|x_j|, |y_j|$, можно для краткости считать $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Тогда, рассматривая суммирование по $\mathbf{n}$, $\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{m}\|$ (среди слагаемых есть и наше $\mathbf{m}$), получаем

$$\mathcal{D} \leq \frac{1}{M!} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{t}} \frac{M!}{\mathbf{n}! \mathbf{1} \mathbf{t}! \mathbf{1}} \mathbf{x}^{\mathbf{t}} (\mathbf{y} + \mathbf{m})^{\mathbf{n}} = \frac{1}{M!} (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{m}\|)^M,$$

что дает первое неравенство в (8.4).

Для доказательства второго неравенства (8.4) надо установить, что

$$f(\mu) = \frac{1}{2} \ln(2\pi\mu) + M \ln(\mu) - \mu - \ln(M!) < \ln(1.1). \quad (8.5)$$

При $M = 0$ легко получаем, что худшее значение μ равно 1, и здесь (8.5) выполнено. Дифференцируя функцию $f(\mu)$, получаем, что для $M \geq 1$ максимум достигается при $\mu = M + 0.5$. В этом случае

$$\begin{aligned} f\left(M + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \ln(2\pi M) + M \ln(M) - M - \ln(M!) + f_1(M), \\ f_1(M) &= \left(M + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{2M}\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f_1(M)$ убывает, наименьшее значение она принимает при $M = 1$. Кроме того, из неравенства Стирлинга:

$$x^x e^{-x} (2\pi x)^{1/2} < (x)! < x^x e^{-x} (2\pi x)^{1/2} e^{1/(12x)}, \quad x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad x > 0,$$

получаем, что (8.5) достаточно проверить при $M = 1, 2$. Непосредственный подсчет подтверждает требуемое неравенство.

§ 9. Общий вид вспомогательных функций

Будем записывать вспомогательные функции в современном виде, пригодном для применения введенных ранее, в (3.1), дифференциальных операторов ∂_j и для оценки кратностей нулей (см. § 19):

$$\mathcal{F}_s(\bar{Y}') = \mathcal{F}_s(Y_0, \dots, Y_n) = \sum^{(s)} P_s(Y_0, \bar{l}) \bar{Y}^{\bar{l}}, \quad s = 0, 1, \dots, S, \quad (9.1)$$

где суммирование идет по значениям $\bar{l}$ из некоторого набора мультистепеней $\mathcal{L}_s$, а $P_s(Y_0, \bar{l})$ – некоторые многочлены от Y_0 . Запишем их в базисе обобщенных биномиальных многочленов

$$P_s(z, \bar{l}) = \sum_{l_0=0}^{L_0} p(\bar{l}') \Delta(2^{S-s} z, l_0, H)$$

с неопределенными коэффициентами $p(\bar{l}') = p(l_0, \dots, l_n) \in \mathbb{K}$ и с некоторым H . Тогда

$$\deg_{Y_0} \mathcal{F}_s(Y_0, \dots, Y_n) \leq L_0.$$

С ростом s наборы мультистепеней будут определенным образом прореживаться, при этом будет

$$\mathcal{L}_S \subseteq 2^{-1} \mathcal{L}_{S-1} \subseteq \dots \subseteq 2^{1-S} \mathcal{L}_1 \subseteq 2^{-S} \mathcal{L}_0, \quad (9.2)$$

что позволяет не перенумеровывать $p(\bar{l}')$ в зависимости от s . Подробнее строение множества $\mathcal{L}_s$ описано далее, в § 10.

В [1] были использованы несколько иные обозначения. Их связь с вышеуказанными функциями (9.1) следующая:

$$F_s(x, \tilde{m}') = \tilde{\partial}'^{\tilde{m}'} \mathcal{F}_s(x, \alpha_1^x, \dots, \alpha_n^x) = \sum^{(s)} P_s^{(m_0)}(x, \bar{l}) \tilde{\chi}^{\tilde{m}}(\bar{l}) \tilde{\alpha}^{\bar{l}x}. \quad (9.3)$$

Мотивировкой для рассмотрения подобного рода функций и операторов служит следующее соображение. Предполагая малость линейной формы от логарифмов и делая в выражении $\mathcal{F}_s(z, \alpha_1^z, \dots, \alpha_n^z)$, $z \in \mathbb{C}$, замену с небольшим поправочным членом

$$\alpha_n^{l_n z} \approx \exp(-(\tilde{b} \cdot \ln \tilde{\alpha}) z l_n / b_n), \quad (9.4)$$

мы получаем аналитическую функцию

$$\mathcal{G}_s(z) = \sum^{(s)} P_s(z, \bar{l}) \prod_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{(l_j b_n - l_n b_j) z / b_n} = \sum^{(s)} P_s(z, \bar{l}) \tilde{\alpha}^{\tilde{\chi}(\bar{l}) z / b_n}.$$

При ее дифференцировании и возникают вышеприведенные выражения. Компоненты в (9.3) будем называть соответственно: $P_s(x, \bar{l})$ – *полиномиальной частью*, $\tilde{\chi}^{\tilde{m}}(\bar{l})$ – *дифференциальной частью* и $\tilde{\alpha}^{\bar{l}x}$ – *показательной частью*.

Основная часть доказательства заключается в построении нетривиального набора функций, удовлетворяющих соотношениям

$$F_s(x, \tilde{m}') = 0, \quad x \in \mathcal{X}_s, \quad \|\tilde{m}'\| \leq M_s, \quad s = 0, 1, \dots, S, \quad (9.5)$$

для некоторых чисел (кратностей) M_s и конечных множеств (нулей) $\mathcal{X}_s \subseteq \mathbb{Z}$, которые будут определены в следующих параграфах.

Отметим, какие преобразования можно применять к этим функциям. Показатели l_j , $1 \leq j \leq n$, могут принимать отрицательные значения. Умножая $\mathcal{F}$ на подходящую степень $\bar{Y}^{\bar{l}}$, мы можем сдвинуть все показатели в положительную область. Это обстоятельство, позволяющее превратить $\mathcal{F}$ в многочлен, потребуется нам в конце доказательства. Степени по Y_j будут определяться в зависимости от изменения l_j . Такое домножение на $\bar{Y}^{\bar{l}}$ не влияет на систему уравнений (9.5).

Далее, и в этом новизна доказательства, показатели l_j будут допускать дробные значения, точнее, иметь вид

$$\bar{l} = \bar{v}_s + \bar{\lambda} \in \mathcal{L}_s, \quad \bar{\lambda} \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n. \quad (9.6)$$

Тогда после сдвига на $\bar{v}_s$ и замены переменных $\bar{Z} = \bar{Y}^{1/N}$ получаем целочисленные показатели. Это также понадобится в конце доказательства для перехода к многочленам. При такой замене степень может вырасти в N раз.

Отметим также, что аналитические свойства функций не зависят от арифметической природы векторов $\bar{v}_s$, а в алгебраических рассуждениях мы можем вынести соответствующий множитель за скобки, оставляя внутри только корректно определенные алгебраические выражения.

Линейная замена переменной x позволяет преобразовать нули из (9.5), образующие арифметическую прогрессию, к виду $x = 0, \dots, X'$, что также оказывается востребованным в конце доказательства для применения оценки кратностей нулей.

Все эти преобразования несколько влияют на коэффициенты функций, но принципиально не портят систему (9.5).

Приведем уравнения (9.5) к более удобному для решения виду. Заменим в функциях F_s из (9.3) дифференциальную часть $\tilde{\chi}(\bar{l})^{\tilde{m}}$ на $\Delta(2^s N \tilde{\chi}(\bar{l} - \bar{w}_s), \tilde{m})$ (которую мы также будем называть *дифференциальной частью*) с некоторым вектором $\bar{w}_s$, выбор которого определяется соотношениями

$$\bar{l} - \bar{w}_s \in (2^s N)^{-1}\mathbb{Z}^n, \quad \bar{l} \in \mathcal{L}_s, \quad |w_{s,j}| \leq 2^{-1-s}N^{-1}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (9.7)$$

Затем, умножив F_s на $\frac{1}{m_0!} \bar{\alpha}^{-\bar{v}_s x} d_0(m_0) 2^{-(S-s)m_0}$ (d_0 из леммы 8.1), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_s(x, \tilde{m}') &= \sum^{(s)} \sum_{l_0=0}^{L_0} a_s(\bar{l}'; x, \tilde{m}') p(\bar{l}'), \\ a_s(\bar{l}'; x, \tilde{m}') &= d_0(m_0) 2^{-(S-s)m_0} \frac{1}{m_0!} \Delta^{(m_0)}(2^{S-s}x, l_0, H) \\ &\quad \times \Delta(2^s N \tilde{\chi}(\bar{l} - \bar{w}_s), \tilde{m}) \bar{\alpha}^{\bar{\lambda} x}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Согласно лемме 3.1 системы уравнений (9.5) при каждом s эквивалентны соответствующим системам:

$$\Phi_s(x, \tilde{m}') = 0, \quad x \in \mathcal{X}_s, \quad \|\tilde{m}'\| \leq M_s, \quad s = 0, 1, \dots, S. \quad (9.9)$$

Соответственно после замены (9.4) вместо функции $\mathcal{G}_s(z)$ мы получаем функции вида

$$\begin{aligned} \Psi_s(z, \tilde{m}') &= \sum_{l_0=0}^{(s)} p(\bar{l}') 2^{-(S-s)m_0} \frac{1}{m_0!} \Delta^{(m_0)}(2^{S-s}x, l_0, H) \\ &\times d_0(m_0) \Delta(2^s N \tilde{\chi}(\bar{l} - \bar{w}_s), \tilde{m}) \tilde{\alpha}^{\tilde{\chi}(\bar{\lambda})z/b_n}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

§ 10. Описание набора мультистепеней

Основным приемом, позволившим в [1] убрать из оценок линейных форм множитель n^n для случая сильной независимости, было усовершенствование в выборе набора мультистепеней $\mathcal{L}_0$. Этот же прием был использован в более простой ситуации в работе [5]. Устранение второго множителя n^n в данной работе обязано еще одному усовершенствованию в конструкции мультистепеней.

Теперь приступим к построению множества $\mathcal{L}_0$.

Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ – векторы в расширенном логарифмическом пространстве $\mathcal{E}_\mathcal{X}$, соответствующие числам $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с выбранными значениями логарифмов (координаты векторов пронумерованы индексами $\sigma \geq 1$). Тогда числу $\bar{\alpha}^{\bar{l}}$ соответствует вектор $l_1 \mathbf{a}_1 + \dots + l_n \mathbf{a}_n$ из $\mathcal{E}_\mathcal{X}$. Рассмотрим в $\mathcal{E}_\mathcal{X}$ решетки

$$\mathbf{M}'_n = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad \mathbf{M}_n = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle_{\mathbb{R}} \cap \mathbf{M}_\mathcal{X}(\mathbb{K}).$$

Решетке $\mathbf{M}'_n$ отвечает в пространстве мультистепеней $\bar{l}$ решетка $\mathcal{M}'_n = \mathbb{Z}^n$. Этому соответствует обычный выбор множества $\mathcal{L}_0$ в предшествующих работах. Но в расширенном логарифмическом пространстве решетка $\mathbf{M}_n$ может содержать и другие точки. Иными словами, условию $\bar{\alpha}^{\bar{l}} \in \mathbb{K}$ могут удовлетворять не только целые, но и дробные мультистепени. Именно это обстоятельство позволяет перейти без потерь точности к общему случаю. Пусть $\mathcal{M}_n$ – решетка в пространстве мультистепеней $\mathbb{R}^n$, соответствующая решетке $\mathbf{M}_n$. Положим

$$N = [\mathbf{M}_n : \mathbf{M}'_n] = [\mathcal{M}_n : \mathcal{M}'_n];$$

тогда

$$\text{Vol}_n \mathcal{M}_n = \frac{1}{N} \text{Vol}_n \mathcal{M}'_n = \frac{1}{N}.$$

Укажем строение решетки $\mathcal{M}_n$, чтобы воспользоваться этим в дальнейшем для описания остальных множеств $\mathcal{L}_s$. Выберем в $\mathbf{M}_n$ какой-либо базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, и пусть $\mathcal{A}$ – матрица строк координат (целочисленных) векторов $\mathbf{a}_i$ в этом базисе; тогда $N = |\det \mathcal{A}|$, а векторы $\mathbf{e}_j$ выражаются через векторы $\mathbf{a}_i$ с помощью обратной матрицы $\mathcal{A}^{-1}$, где $\bar{u}_j$ – строки матрицы $\mathcal{A}^{-1}$ – состоят из координат векторов

$\mathbf{e}_j$ в базисе $\{\mathbf{a}_i\}$. Так что если $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ – координаты какого-либо вектора $\mathbf{v} \in M_n$ в базисе $\{\mathbf{e}_j\}$, то его координаты в базисе $\{\mathbf{a}_i\}$ равны

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\bar{\mu}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mu_1 \bar{u}_1 + \dots + \mu_n \bar{u}_n = \bar{\mu} \mathcal{A}^{-1}. \quad (10.1)$$

Из определения числа N следует, что $N\bar{\lambda}(\bar{\mu}) \in \mathbb{Z}^n$.

Теперь определим область, в которой будут лежать рассматриваемые векторы. Возьмем некоторое $L > 0$ и зададим тело $\mathcal{W}$ условиями

$$|w_j| \leq \frac{L}{2A_j}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (10.2)$$

Именно индивидуальные границы для каждой координаты позволили Бейкеру в [14] получить оценку линейной формы в зависимости от Ω . Отметим, что с учетом обозначений для A_j

$$\sup\{|\bar{w} \cdot \ln \bar{\alpha}| : \bar{w} \in \mathcal{W}\} \leq \eta_0^{-1} L, \quad \eta_0 = 2/n.$$

Основная идея устранения множителя n^n в [1] заключается в том, чтобы придумительно уменьшить границу для $|\bar{w} \cdot \ln \bar{\alpha}|$. В данной работе мы положим

$$|\bar{w} \cdot \ln \bar{\alpha}| \leq \eta^{-1} L, \quad \eta = e^{1+(n+0.53)/\varkappa}, \quad (10.3)$$

и определим тело $\mathcal{W}_0$ условиями (10.2), (10.3). В [1, лемма 5.1] было показано, что

$$\text{Vol}_n \mathcal{W}_0 \geq \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{-\varkappa} \text{Vol}_n \mathcal{W} = \left(\frac{1}{2} n \eta\right)^{-\varkappa} \frac{1}{\Omega} L^n.$$

В [1] вместо $\varkappa$ в показателе был более точный параметр

$$\rho = \text{rank}_{\mathbb{C}}\{\ln \alpha_1, \dots, \ln \alpha_n\} \leq \varkappa,$$

который мы в данной работе не учитываем (при $\varkappa = 1$ имеем $\rho = 1$, поскольку значения логарифмов здесь предполагаются действительными).

Небольшая проблема состоит в том, что если просто брать целочисленные точки, то их количество не обязательно соответствует объему тела. Воспользуемся теоремой Бlichфельда (см. [7, гл. 3, теорема 1]), согласно которой найдется вектор $\bar{v}_0$ такой, что

$$|\mathcal{W}_0 \cap (\mathcal{M}_n + \bar{v}_0)| > \frac{\text{Vol}_n \mathcal{W}_0}{\text{Vol}_n \mathcal{M}_n} \geq \left(\frac{1}{2} n \eta\right)^{-\varkappa} \frac{N}{\Omega} L^n.$$

Именно эти точки мы и выберем в качестве набора $\mathcal{L}_0$, при этом, отбрасывая в случае необходимости лишние точки, можно считать

$$|\mathcal{L}_0| = \left\lceil \left(\frac{1}{2} n \eta\right)^{-\varkappa} \frac{N}{\Omega} L^n \right\rceil + 1. \quad (10.4)$$

Кроме того, можно считать, что $\bar{v}_0 \in \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{W}_0$.

Теперь положим

$$\begin{aligned}\bar{v}_s &= 2^{-s}\bar{v}_0, \quad s \geq 0, \\ \mathcal{L}_s &= 2^{-s}\mathcal{L}_0 \cap (\mathcal{M}_n + \bar{v}_s), \quad 0 \leq s \leq S,\end{aligned}\tag{10.5}$$

и отметим, что при $s = 0$ получаем $\mathcal{L}_0$ и что $\bar{v}_s \in \mathcal{L}_s \cap 2^{-s}\mathcal{W}_0$, а точки $\mathcal{L}_s$ сравнимы по модулю решетки $\mathcal{M}_n$. Кроме того, выполнено и условие (9.2), поскольку

$$2\mathcal{L}_{s+1} \subseteq 2^{-s}\mathcal{L}_0 \cap (2\mathcal{M}_n + 2\bar{v}_{s+1}) \subseteq 2^{-s}\mathcal{L}_0 \cap (\mathcal{M}_n + \bar{v}_s) = \mathcal{L}_s.$$

Очевидно, построенные в (10.5) множества согласуются с условиями (9.6). Отметим, что в данной статье мы работаем со сдвинутыми множествами, отдавая предпочтение их центрированности, а не арифметическим свойствам. Это создает определенные удобства и позволяет упростить выкладки. При изучении арифметических выражений множитель $\bar{\alpha}^{\bar{v}}$ выносится за скобки.

§ 11. Схема арифметико-аналитического продолжения

Доказательства в методах, восходящих к работам Гельфонда, основаны на построении вспомогательной функции, имеющей достаточно большое число нулей с учетом их кратностей (это делается с помощью оценки, обычно называемой леммой Зигеля, см. § 13–15), а затем с помощью интерполяционной техники и в предположении малости линейной формы соотношение между нулями и их кратностями изменяется (см. § 16–18) так, чтобы их число стало больше допустимого (теорема об оценке кратности нулей; § 19). Полученное противоречие нашему предположению и доказывает оценку линейной формы.

В схеме Бейкера увеличение числа нулей происходит за счет уменьшения кратности. В то же время увеличение числа нулей ухудшает оценку линейной формы, поэтому проводить его надо максимально экономно.

Важным нововведением в работе [15] было использование теории Куммера и принципа деления аргумента, позволяющего расщеплять вспомогательную функцию на части, что равноценно уменьшению ее степени. Это позволяет применять теорему об оценке кратностей нулей, уменьшая количество итераций. В [4], [1] и в данной работе на каждом шаге происходит уменьшение степени в два раза. Это позволяет наиболее экономно проводить деление аргумента.

Арифметико-аналитическое продолжение будет организовано индуктивно по s – числу делений аргумента. Основание индукции ($s = 0$) будет построено в § 15. Шаг индукции будет состоять в применении принципа деления аргумента (см. § 18) для получения равенств (9.5), пока степень вспомогательной функции не понизится до требуемой величины.

Однако прежде чем применять деление аргумента, необходимо сначала увеличить количество нулей примерно в 2^n раз (также за счет некоторой потери кратности). В [1] была предложена довольно экономная, но технически трудная схема плавного понижения кратности с ростом x – количества узлов интерполяции. В данной работе этот этап доказательства упрощен, что ухудшает оценку на множитель порядка e^n и в абсолютной константе. Процесс предварительного размножения нулей разбит на n частей и также происходит индуктивно по $\nu = 0, \dots, n$ при

фиксированном s . В качестве основания ($\nu = 0$) берутся нули с кратностями, полученными на очередном шаге по s . Далее число нулей каждый раз удваивается, а кратность понижается на T_s ; еще T_s кратностей теряется при делении аргумента. Такая схема позволит получить константы, соответствующие результату [3].

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ – некоторая константа, а $C_0\xi\omega$ – некоторое (не маленькое) выражение, которые будут определены в следующем параграфе. Положим

$$\begin{aligned} c_1 &= 2(n+1)(1+\varepsilon_0), \quad M_0 = [C_0\xi\omega], \quad T_s = \left\lfloor \frac{2^{-s}C_0\xi\omega}{c_1} \right\rfloor, \\ M_{s,\nu} &= M_s - \nu T_s, \quad \nu = 0, \dots, n, \\ M_{s+1} &= M_s - (n+1)T_s, \quad s = 0, \dots, S. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Оценим кратность $M_{S,n}$:

$$\begin{aligned} M_{S,n} &= M_0 - \sum_{s=0}^S (n+1)T_s + T_S \\ &\geq C_0\xi\omega + T_S - 1 - \sum_s^* 2^{-s} \frac{C_0\xi\omega}{2(1+\varepsilon_0)} \geq \frac{\varepsilon_0 C_0\xi\omega}{1+\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (11.2)$$

(в последней сумме $\sum^{(*)}$ берутся слагаемые по s , большие, чем $n+1$, поэтому 1 можно заменить остатком геометрической прогрессии). Параметр ε_0 позволяет регулировать остающуюся кратность.

Теперь опишем строение наборов узлов интерполяции. Выбирая некоторое (большое) значение $G > 0$, положим

$$X_s = \left\lfloor \frac{2DG}{T_s + 1} \right\rfloor, \quad s \geq 0 \quad (11.3)$$

($\lceil x \rceil$ означает наименьшее целое число $\geq x$).

Наконец, определим множества $\mathcal{X}_{s,\nu}$ для (9.5) условиями

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{0,0} &= \mathcal{X}_0 = \{0, \pm 1, \dots, \pm X_0\}, \\ \mathcal{X}_{s,0} &= \mathcal{X}_s = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2X_s - 1)\}, \quad s > 0, \\ \mathcal{X}_{s,\nu} &= \{0, \pm 1, \dots, \pm 2^\nu X_s\}, \quad 1 \leq \nu \leq n, \quad s \geq 0, \end{aligned} \quad (11.4)$$

Такой способ задания T_s , $\mathcal{X}_{s,\nu}$ обеспечивает выполнение двустороннего неравенства

$$2^{\nu+2}DG \leq |\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1) \leq 2^\nu(4DG + 3T_s + 3). \quad (11.5)$$

Таким образом, мы будем доказывать равенства, включающие при $\nu = 0$ условия (9.5):

$$F_s(x, \tilde{m}') = 0, \quad x \in \mathcal{X}_{s,\nu}, \quad \|\tilde{m}'\| \leq M_{s,\nu}, \quad (11.6)$$

с помощью двойной индукции, переходя от (s, ν) к $(s, \nu+1)$ при $\nu < n$ (см. § 17) и от (s, n) к $(s+1, 0)$ (см. § 18), теряя каждый раз кратность T_s . В конце доказательства нам понадобятся только условия (11.6) при $(s, \nu) = (S, n)$.

Следует заметить, что устранение индивидуальных нижних оценок для A_j осуществлено в [1] именно благодаря аккуратной организации арифметико-аналитического продолжения. Хотя все зафиксировано в обозначениях, но рассуждения содержат некоторые тонкие моменты. Здесь мы приводим более развернутые комментарии.

Как уже отмечалось, вспомогательную функцию можно преобразовать к многочлену, имеющему степени NL/A_j по переменным Y_j . В обычной ситуации деление на A_j уменьшает степень и упрощает рассуждения. Если же числа A_j малы, то степень увеличивается. Тем же недостатком обладает и новый множитель N . Это препятствует применению теорем об оценках кратностей нулей. В обычной схеме арифметико-аналитического продолжения это создает непреодолимые трудности, но деление аргумента позволяет, сделав несколько дополнительных шагов индукции по s , каждый раз уменьшающих степень вдвое, удалить этот лишний множитель.

Кроме того, в рассуждениях есть еще один тонкий момент. Ключевую роль в доказательстве и в получаемой оценке играет степень интерполяционного многочлена $|\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1)$ (см. § 16). Из (11.3) видно, что эта степень на каждом шаге почти не меняется, а из (11.1) – что при $T_s \gg 1$ (в предшествующих работах при всех s было именно так) кратность уменьшается примерно в два раза, соответственно число точек удваивается. Теперь же возможен случай $T_s = 0$, требующий иного подхода: как только мы получим $T_s = 0$, то далее $|\mathcal{X}_{s,\nu}|$ не меняется (увеличение $|\mathcal{X}_{s,\nu}|$ вело бы к резкому ухудшению оценки линейной формы от логарифмов), соответственно сохраняется степень интерполяционного многочлена. Именно это отражено в формулах (11.3), (11.4).

§ 12. Выбор параметров

В данном параграфе приводятся формульные значения параметров, необходимых для доказательства основной теоремы, но не участвующих в ее формулировке. Смысл этих параметров был разъяснен в предыдущих параграфах. Для полноты и компактности напомним некоторые из ранее приведенных формул. Также проведем предварительную оценку указанных выражений.

Как отмечалось, далее можно считать $n \geq 2$.

В расширенном логарифмическом пространстве рассматриваются линейно независимые векторы $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}(\alpha_j)$, соответствующие выбранным значениям $\ln \alpha_j$. В предложении 5.1 были приведены выражения

$$M_n = M_\infty(\mathbb{K}) \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{R}}, \quad M'_n = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad N = [M_n : M'_n],$$

удовлетворяющие неравенствам (5.1), (5.2).

Введем следующие параметры:

$$\eta = e^{1+(n+0.53)/\varkappa}, \quad \xi = \frac{8}{n!}(n+2.1)(2(n+1))^{n+1} \left(\frac{1}{2} n \eta \right)^\varkappa,$$

$$\varepsilon_0 = 3n^3/\xi, \quad \varepsilon_1 = \xi_0(n)/(2\xi), \quad \varepsilon_2 = (4(n+1)(2.25n + 1.5 \ln n + 13))^{-1}.$$

Положим

$$C_0 = \ln(e^{4.4n+7} n^{5.5} N D^2 \ln(eD)), \quad W_0 = \ln(1.5e B N D \ln(eD))$$

(по сравнению с (2.2) в C_0, W_0 добавлено N , так что C_0, W_0 из (2.2) получаются, если положить здесь $N = 1$).

Пусть, далее,

$$\gamma = \frac{C_0(1)W_0(1)}{C_0(N)W_0(N)}N, \quad \omega = \frac{\gamma}{N}D\Omega = \frac{\gamma}{N}DA_1 \dots A_n.$$

Отметим, что такой выбор числа γ дает

$$C_0(N)W_0(N)\omega(N, \gamma) = C_0(1)W_0(1)\omega(1, 1),$$

и мы можем просто писать $C_0W_0\omega$, устраняя параметры N, γ из оценок линейных форм. Так что в дальнейшем мы будем считать C_0, W_0 зависящими от параметра N , как это определено в данном параграфе, но обычно в записи C_0, W_0 будем его опускать.

Пусть

$$S = \lceil \log_2(0.5e^{-3}n^2\xi ND \ln(eD)) \rceil, \quad G = C_0W_0\xi\omega, \quad c_1 = 2(n+1)(1+\varepsilon_0)$$

(см. (11.1)),

$$M_0 = [C_0\xi\omega], \quad T_s = \left[\frac{1}{c_1}2^{-s}C_0\xi\omega \right], \quad X_s = \left[\frac{2DG}{T_s + 1} \right], \quad s \geq 0$$

(см. (11.3)),

$$L = \frac{1}{c_1}C_0\xi\omega, \quad L_0 = [W_0\xi\omega], \quad H = [0.96 \ln(1.5BND \ln(eD))]$$

(см. § 8), а параметры K, c в леммах 8.1, 8.2 будут равны 2^{S-s} .

Укажем простейшие оценки введенных выше параметров. Поскольку выражение $C_0(N)W_0(N)$ с ростом N , очевидно, растет, а $C_0(N)W_0(N)/N$ убывает, то имеем $1 \leq \gamma \leq N$. Выбор ε_1 дает ввиду (5.1) неравенство

$$\varepsilon_1\xi\omega \min\{C_0, W_0\} \geq 1.$$

Из (6.2) видно, что можно считать $W_0 > C_0/2$, а для ε_2 мы имеем $2c_1W_0\varepsilon_2 > 1$.

Таким образом, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ являются оценками относительной погрешности при замене M_0, L_0, X_0 на их правые части из соответствующих формул без округления.

Проведем также предварительную оценку параметров, чтобы в дальнейшем можно было упрощать рассматриваемые выражения. С ростом n имеем

$$\begin{aligned} \xi &= (2e^2)^n n^{\varkappa+1.5} O(1) > 1.2 \cdot 10^5, \quad M_0 \geq 2\xi/\xi_0(n) > 1.3 \cdot 10^4, \\ NL/A_j &\geq 2\xi/(2(n+1)\xi_0(n-1)) > 2.8 \cdot 10^4, \\ \varepsilon_0 &= (2e^2)^{-n} n^{1.5-\varkappa} O(1) < 2 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_1 &= (2e^2/3.1)^{-n} n^{-1.5} O(1) < 10^{-4}, \\ \varepsilon_2 &= O(n^{-2}) < 5 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Таким образом, параметры $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ экспоненциально малы, а $M_0, L_0, L, NL/A_j$ экспоненциально растут с ростом n . Малым оказывается также параметр ε_2 . Экспоненциальный рост $M_0, L_0, L, NL/A_j$ ухудшает оценку линейной формы, но упрощает доказательство, поскольку позволяет взять значения параметров ε_i малыми. Сразу отметим, что вклад параметров ε_i во всех последующих оценках будет лишь увеличивать множители не более чем на 0.1; так, например, в дальнейшем мы используем округления:

$$2(n+2)\left(\frac{2n+1}{\varkappa} + 2\right) > e^{0.53}(n+2.1)\left(\frac{2n+1}{\varkappa} + 2 + \frac{1}{\eta} + n\varepsilon_1\right)(1+2\varepsilon_2), \quad (12.1)$$

$$n+2.1 > (1+2\varepsilon_2)((1+\varepsilon_0)(1+n\varepsilon_1))^{n+1}(n+2+2n\varepsilon_2+3n\varepsilon_1),$$

проверяемые непосредственно при малых n и верные для больших n вследствие асимптотического поведения ε_i .

На шаге индукции (s, ν) комплексная переменная z будет меняться в диапазоне $|z| \leq R_{s,\nu}$, где

$$R_{s,\nu} = 2^s \eta |\mathcal{X}_{s,\nu}| (T_s + 1) / L.$$

Для линейной формы предполагаем выполненной оценку

$$\ln |\Lambda| < -2^{n+1} \left(\frac{2n+1}{\varkappa} + 2 + \frac{1}{\eta} + n\varepsilon_1 \right) \xi D \omega C_0 W_0, \quad (12.2)$$

ввиду (12.1) противоположную (2.3), так что для доказательства теоремы 2.1 достаточно привести (12.2) к противоречию.

На примере верхней оценки M_0 покажем, как мы будем оценивать различные выражения. Для этого расщепим формулу для M_0 на две составляющие: часть, оцениваемую числом $\exp(aC_0)$ с соответствующим значением a за счет выбора C_0 , и часть x , включающую все остальное, для которой применим неравенство $x \leq e^{x/e}$. В итоге с учетом (5.1) и формулы для ε_1 имеем

$$M_0 + n \leq ((1+n\varepsilon_1)\xi)(C_0\omega) \leq e^{0.7C_0} e^{C_0\omega/e} \leq e^{0.7C_0\varepsilon_1\xi\omega W_0} e^{C_0\omega/e} \leq e^{\varepsilon_1 G}.$$

Аналогичным образом оцениваются сверху $L_0, L, L/A_j, G, X_0, 2^S$ и другие подобные выражения.

Наконец, мы можем считать $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, так как при увеличении степени поля оценка линейной формы ухудшается.

§ 13. Лемма Зигеля

В теории чисел результаты о том, что неполная система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение со сравнительно небольшими значениями неизвестных, обычно называют леммой Зигеля. В случае алгебраических линейных уравнений современная оценка решений была получена в [15]. Мы используем ее уточненный вариант [8], учитывающий весовые коэффициенты. Для этого предварительно введем некоторые обозначения.

Для изучения векторов и линейных форм над $\mathbb{K}$ в [8] были введены понятия соответствующих (евклидовых) длин.

Пусть дан набор положительных чисел (весовых коэффициентов)

$$\mathcal{Q} = \{q_{j,\sigma} : 1 \leq j \leq J; \sigma \geq 1\}.$$

Будем считать, что $q_{j,\sigma} = q_{j,\tau}$ для комплексно-сопряженных σ, τ , а при $\sigma > D$ выполняется $q_{j,\sigma} = (\text{Norm } \mathbf{p}_\sigma)^{l_{j,\sigma}}$ с некоторыми $l_{j,\sigma} \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $q_{j,\sigma} = 1$ для почти всех σ .

Через $\mathcal{Q}'$ будем обозначать набор обратных к $\mathcal{Q}$ величин.

Определим *локальные* и *абсолютную* длины вектора

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_J) \in \mathbb{K}^J$$

с весовыми коэффициентами $\mathcal{Q}'$ с помощью равенств

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{Q}'}^{(\sigma)} &= \left(\sum_{j=1}^J |a_j|_\sigma^2 / q_{j,\sigma}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq \sigma \leq D, \\ \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{Q}'}^{(\sigma)} &= \max\{|a_j|_\sigma / q_{j,\sigma} : 1 \leq j \leq J\}, \quad \sigma > D, \\ \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{Q}'} &= \left(\prod_{\sigma=1}^\infty \|\mathbf{a}\|_{\mathcal{Q}'}^{(\sigma)} \right)^{1/D} \end{aligned}$$

(мы пишем индекс $\mathcal{Q}'$, чтобы согласовать форму вхождения весовых коэффициентов в норму с формулой (4.3) и с обозначениями работы [8]). Обозначение $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}'}$ будет зарезервировано именно для вышеуказанных норм.

ЛЕММА 13.1 [8, теорема 3]. Пусть даны векторы $\mathbf{a}_i \in \mathbb{K}^J$, $1 \leq i \leq I$, и набор $\mathcal{Q}$ весовых коэффициентов. Положим

$$q_j = \left(\prod_{\sigma=1}^\infty q_{j,\sigma} \right)^{1/D}, \quad 1 \leq j \leq J, \quad q = (q_1 \dots q_J)^{1/J}.$$

Тогда система линейных уравнений ранга $r \leq I < J$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} = 0, \quad 1 \leq i \leq I,$$

имеет ненулевое решение $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^J$, удовлетворяющее условию

$$\|\mathbf{p}\|_{\mathcal{Q}} \leq \gamma \left(q^{-J} \prod_{i=1}^I \max\{q, \|\mathbf{a}_i\|_{\mathcal{Q}'}\} \right)^{1/(J-I)}, \quad (13.1)$$

где в случае $r = 0$ или $r = I = J - 1$ можно взять $\gamma = 1$, при $r = I < J - 1$ можно взять

$$\gamma = 2\rho_{(J-I)D} |\Delta(\mathbb{K})|^{1/(2D)} / \sqrt{D},$$

здесь ρ_m обозначает радиус m -мерного шара единичного объема, а $\Delta(\mathbb{K})$ — дискриминант поля $\mathbb{K}$, и всегда можно взять

$$\gamma = \sqrt{J} |\Delta(\mathbb{K})|^{1/(2D)}. \quad (13.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13.1. В [8] прототип формулы (13.2) содержал коэффициент 0.5 для случая $J > 4$. В подтверждение этому в доказательстве приводилось неравенство, основанное на формуле Стирлинга для факториала, присутствующего в ρ , верное асимптотически и проверяемое численно для малых J . Повторная проверка показала, что 0.5 можно ставить только при $J > 68$, а выражение (13.2) (без множителя 0.5) верно для любых J .

ЗАМЕЧАНИЕ 13.2. Хотя в данной работе это не понадобится, отметим, что в [8] при доказательстве леммы Зигеля были оценены также и локальные длины решения $\mathbf{p}$. При $\sigma > D$ получалось $\|\mathbf{p}\|_{\mathfrak{Q}}^{(\sigma)} \leq 1$. Для $q_{j,\sigma} = 1$, $\sigma > D$, это означает, что $\mathbf{p}$ имеет целые алгебраические коэффициенты.

Для изучения компонент рассматриваемых в дальнейшем векторов приведем простую лемму с учетом понятий, введенных в § 5.

ЛЕММА 13.2. Если компоненты некоторого набора $\{\gamma_j\}$ разлагаются в поле $\mathbb{K}$ на сомножители $\gamma_j = \delta_j \varepsilon_j$, то

$$\begin{aligned} \|\{\gamma_j\}\|_{\mathfrak{Q}'}^{(\sigma)} &\leq \exp(h^{(\sigma)}(\{\delta_j\})) \|\{\varepsilon_j\}\|_{\mathfrak{Q}'}^{(\sigma)}, \quad \sigma \geq 1, \\ \|\{\gamma_j\}\|_{\mathfrak{Q}'} &\leq \exp(h(\{\delta_j\})) \|\{\varepsilon_j\}\|_{\mathfrak{Q}'} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство означает, что из рассматриваемых норм можно выносить за скобки максимальный элемент, отвечающий $h^{(\sigma)}(\{\delta_j\})$. Второе неравенство получается путем взятия произведения по σ первых неравенств.

Эта лемма позволяет изучать нормы векторов, расщепляя их координаты на компоненты, причем ясно, что можно выделять не только два, но и большее число сомножителей.

Напомним также, что для $\mathbf{a}, \mathbf{p} \in \mathbb{K}^J$ выполнено

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}|_{\sigma} \leq \|\mathbf{a}\|_{\mathfrak{Q}'}^{(\sigma)} \cdot \|\mathbf{p}\|_{\mathfrak{Q}'}^{(\sigma)}. \quad (13.3)$$

§ 14. Дискриминант

Для оценки модуля дискриминанта $\Delta(\mathbb{K})$, участвующего в лемме Зигеля, понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 14.1 [1, лемма 6.2]. Пусть даны алгебраические $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Тогда

$$\ln |\Delta(\mathbb{K})| \leq D \ln D + 2D(D-1) \max\{h(\alpha_j) : 1 \leq j \leq n\}.$$

Отметим, что результаты статьи [1] были доложены на конференциях в Венгрии (г. Эгер, 29.07–2.08.1996 г.) и в Беларуси (г. Минск, 1–8.09.1996 г.). Эта же лемма приводится в [17] со ссылкой на письмо Массера Вюстхольцу, датированное 08.12.1990 г.

В оценке $|\Delta(\mathbb{K})|$ отсутствует параметр N , что не только препятствует его включению в формулировку теорем, но и создает определенную трудность в доказательстве, которая будет обойдена в данном параграфе и для чего ранее, в § 12, был введен параметр γ .

ЛЕММА 14.2. В принятых обозначениях имеет место оценка

$$\frac{1}{2D} \ln |\Delta(\mathbb{K})| \leq 0.3\varepsilon_1 G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (5.1), (5.2), оценок для C_0 , W_0 и определения ε_1 имеем

$$\begin{aligned} 0.3\varepsilon_1 G &= 0.3\varepsilon_1 \xi C_0(N) W_0(N) \omega(N, \gamma) = 0.3\varepsilon_1 \xi C_0(1) W_0(1) \omega(1, 1) \\ &\geq (0.25 + 0.05) \frac{1}{2} 3.1^n n^{\asymp} \frac{D}{\asymp} \Omega C_0 W_0 \geq \frac{1}{2} \ln D + \max A_j. \end{aligned}$$

Теперь лемма сразу получается из леммы 14.1.

В заключение параграфа заметим, что техника доказательства оценок линейных форм от логарифмов с помощью интерполяционных определителей (см. [18]) не использует дискриминанта $\Delta(\mathbb{K})$ и поэтому, по-видимому, позволит улучшить оценки в данном аспекте.

§ 15. Построение исходной вспомогательной функции

Основной целью данного параграфа является построение с помощью леммы Зигеля ненулевого набора небольших коэффициентов $p(\bar{l}') \in \mathbb{K}$ для решения системы (9.9) при $s = 0$ с оценкой полученного решения.

В этой системе индексу переменных $p(\bar{l}')$ соответствует мультииндекс $\bar{l}' = (l_0, \bar{l}) = (l_0, l_1, \dots, l_n)$, где $0 \leq l_0 \leq L_0$, а $\bar{l} \in \mathcal{L}_0$. Количество переменных при $s = 0$ равно $J = (L_0 + 1)|\mathcal{L}_0|$.

Уравнениям соответствует набор $(x, \tilde{m}') = (x, m_0, \dots, m_{n-1})$, где $x \in \mathcal{X}_0$, $\|\tilde{m}'\| \leq M_0$. Количество уравнений (9.9) при $s = 0$ равно

$$I = (2X_0 + 1) \binom{M_0 + n}{n}.$$

Набор коэффициентов $a_s(\bar{l}'; x, \tilde{m}')$ из (9.8) будем обозначать как вектор $\mathbf{a}_s(x, \tilde{m}')$.

Кроме того, зададим для леммы 13.1 весовые коэффициенты по формуле

$$\begin{aligned} q_\sigma(\bar{l}') &= q(\bar{l}') = e^{C_0(L_0 - l_0)}, \quad 1 \leq \sigma \leq D, \\ q_\sigma(\bar{l}') &= 1, \quad \sigma > D. \end{aligned} \quad (15.1)$$

Тогда параметр q из леммы 13.1 равен

$$q = \exp \left(\sum_{l_0=0}^{L_0} \sum^{(0)} C_0 \frac{L_0 - l_0}{J} \right) = \exp \left(C_0 \sum_{l_0=0}^{L_0} \frac{L_0 - l_0}{L_0 + 1} \right) = e^{C_0 L_0 / 2}. \quad (15.2)$$

Прделаем еще предварительную работу, необходимую также и для следующих параграфов. Мы будем применять лемму 8.3, взяв

$$\mu = C_0 \xi \omega, \quad \gamma_0 = C_0 \xi \omega B N 1.5 D \ln(eD), \quad (15.3)$$

и векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, имеющие координаты

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{b_n}(b_n l_j - b_j l_n) \ln \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ y_j &= 2^s N(b_n(l_j - w_{s,j}) - b_j(l_n - w_{s,n})) \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Оценим $\|\mathbf{x}\|$, принимая во внимание обозначения для A_j , B , а также условия (10.2). Имеем

$$|x_j| \leq \frac{1}{|b_n|}(|b_n l_j| + |b_j l_n|) |\ln \alpha_j| \leq \frac{1}{2} L(1+B).$$

Для оценки $\|\mathbf{y}\|$ надо также воспользоваться (9.7):

$$\begin{aligned} |b_n 2^s N(l_j - w_{s,j})| &\leq \frac{1}{2} |b_n| \left(\frac{NL}{A_j} + 1 \right) \leq \frac{BLN}{2A_j} \left(1 + \frac{1}{NL/A_j} \right), \\ |b_j 2^s N(l_n - w_{s,n})| &\leq \frac{1}{2} |b_j| \left(\frac{NL}{A_n} + 1 \right) \leq \frac{BLN}{2A_j} \left(1 + \frac{1}{NL/A_n} \right), \end{aligned}$$

и с учетом (5.3) имеем

$$\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \leq (n-1)BNL \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.5B} + 1 + \max_j \frac{1}{NL/A_j} \right) 1.5D \ln(eD).$$

Теперь, учитывая величины B , L , NL/A_n , а также формулы для M_0 , L из § 12 и μ , γ_0 из (15.3), получаем

$$M_0 + \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \leq BNC_0 \xi \omega 1.5D \ln(eD) = \gamma_0.$$

Рассмотрим знаменатель $d_0(m_0)$, определенный в лемме 8.1. Здесь $m_0 \leq M_0 - M$, $M = \|\tilde{m}\|$, и из (8.2) и определения чисел H , γ_0 имеем

$$d_0(m_0) \leq e^{1.04H(\mu-M)} \leq (\gamma_0/\mu)^{\mu-M}$$

и также

$$d_0(m_0)(M + \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^M \frac{1}{M!} \leq \frac{1.1}{\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{e\gamma_0}{\mu} \right)^\mu \leq 0.01e^G, \quad (15.4)$$

что вместе с (8.4) позволяет получать необходимые оценки.

ЛЕММА 15.1. При $s \leq S$, $\|\tilde{m}'\| \leq M_0$, $x \in 2^{s-S}\mathbb{Z}$, $|x| \leq R_{s,\nu}$, имеем

$$\|\mathbf{a}_s(x, \tilde{m}')\|_{\mathfrak{D}'} \leq 0.02 \exp \left(\frac{1}{D} 2^{-s} L n |x| + 2G + n\varepsilon_1 G \right). \quad (15.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем оценивать вклад сомножителей, входящих в компоненты векторов $\mathbf{a}$, по отдельности.

Для оценки вклада показательной части $\bar{\alpha}^{\bar{\lambda}x}$, $\bar{\lambda} \in \mathcal{L}_s - \bar{v}_s \subseteq \mathcal{M}_n$, учтем способ построения в § 10 множеств $\mathcal{L}_s$, $\mathcal{W}_0(L)$. Тогда, принимая во внимание обозначения § 5 и лемму 5.3, имеем

$$h^{(\sigma)}\{\bar{\alpha}, x(\mathcal{L}_s - \bar{v}_s)\} \leq \sum_{j=1}^n \max_{\pm} \left\{ x \left(\pm \frac{2^{-s}L}{2A_j} - v_{s,j} \right) \ln |\alpha_j|_{\sigma} \right\}. \quad (15.6)$$

Возьмем произведение по всем $\sigma \geq 1$ и извлечем корень степени D , чтобы получить $\|\mathbf{a}\|_{\mathcal{Q}'}$. С учетом определения (2.1) чисел A_j в первом слагаемом мы получим $2^{-s}Ln|x|/D$, а слагаемое $v_{s,j} \ln |\alpha_j|_{\sigma}$ при суммировании по σ исчезнет вследствие формулы произведения.

При анализе дифференциальной части $\Delta(2^s N \tilde{\chi}(\bar{l} - \bar{w}_s), \tilde{m})$ отметим, что первый аргумент целочисленный (ради этого мы заменили сдвиг на $\bar{v}_s$ сдвигом на $\bar{w}_s$ и домножили все на $2^s N$). В результате и биномиальное выражение будет целочисленным (в этом и также в делении на $m!$ заключается смысл перехода от степенных к биномиальным многочленам). Применение леммы 8.3 и (15.4) тогда дает

$$d_0(m_0) |\Delta(2^s N \tilde{\chi}(\bar{l} - \bar{w}_s), \tilde{m})| \leq 0.01e^G.$$

Оценку полиномиальной части проведем совместно с весовым коэффициентом $q(\bar{l}')$ из (15.1) с помощью леммы 8.2 при $\tau = 0$ и с учетом выбора C_0 , а также того, что $|x| \leq R_{s,\nu}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_0!} 2^{-(S-s)m_0} \left| \Delta^{(m_0)}(2^{S-s}x, l_0, H) \right| q(\bar{l}') \\ & \leq \delta(l_0, m_0, 0) \left(e \left(1 + 2^{S-s} \frac{|x| + 1}{H} \right) \right)^{l_0} e^{C_0(L_0 - l_0)} \\ & \leq \delta(l_0, m_0, 0) e^{C_0 L_0} \leq \delta(l_0, m_0, 0) e^G, \end{aligned}$$

где

$$\sum_{l_0=0}^{L_0} \delta(l_0, m_0, 0) \leq 1.6e^{H/e} \leq 1.6e^{0.4\varepsilon_1 G}.$$

Осталось оценить J . С учетом (10.4) имеем

$$\begin{aligned} J &= (L_0 + 1) \left(\left[\left(\frac{1}{2} n \eta \right)^{-\varkappa} \frac{N}{\Omega} L^n \right] + 1 \right) \\ &\leq 2(1 + \varepsilon_1) W_0 \xi \omega \left(\frac{1}{2} n \eta \right)^{-\varkappa} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{C_0 \xi \omega}{c_1} \right)^n \\ &= \left(2(1 + \varepsilon_1) \left(\frac{1}{2} n \eta \right)^{-\varkappa} \frac{\xi}{c_1} \frac{(20n\xi/\xi_0 e)^n}{(2c_1 W_0)^{n-1} \gamma D} \right) \left(\frac{e C_0 W_0 \omega \xi_0}{20n} \right)^n \\ &\leq e^{(n-0.6)C_0} e^{0.1\varepsilon_1 G} \leq e^{(n-0.5)\varepsilon_1 G}. \end{aligned}$$

Показатель $(n - 0.6)C_0$ получен с учетом того, что γD входит в скобку в первой степени, а для зависимости от n неравенство проверяется численно с учетом $2c_1 W_0 > 1/\varepsilon_2$. В итоге получаем

$$J \leq e^{(n-0.5)\varepsilon_1 G}. \quad (15.7)$$

Объединяя полученные оценки и учитывая множитель $\sqrt{J}$ для евклидовой нормы, получаем (15.5).

ЛЕММА 15.2. *Существует ненулевое решение $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^J$ системы уравнений (9.9) для $s = 0$, удовлетворяющее условию*

$$\|\mathbf{p}\|_{\mathcal{Q}} \leq e^{n\varepsilon_1 G}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим сначала I и J . Мы имеем

$$\begin{aligned} I &= |\mathcal{X}_0| \Delta(M_0 + 1, n) \leq (2X_0 + 1) \frac{1}{n!} (C_0(1 + n\varepsilon_1)\xi\omega)^n \\ &\leq 4c_1 D W_0 \left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon_2\right) \frac{1}{n!} (C_0\xi(1 + n\varepsilon_1)\omega)^n, \end{aligned} \quad (15.8)$$

а также

$$\begin{aligned} J &= (L_0 + 1)|\mathcal{L}_0| > W_0 \xi \omega \left(\frac{1}{2}n\eta\right)^{-\varkappa} \frac{N}{\Omega} \left(\frac{C_0\xi\omega}{c_1}\right)^n \\ &= W_0 \gamma D \xi \left(\frac{1}{2}n\eta\right)^{-\varkappa} \left(\frac{C_0\xi\omega}{c_1}\right)^n. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Теперь оценим произведение в (13.1). Отметим, что оценка (15.4) для нормы $\|\mathbf{a}_0(x, \tilde{m}')\|_{\mathcal{Q}'}$ превосходит q из (15.2), так что

$$\begin{aligned} \Pi &= \prod_{i=1}^I \max\{q, \|\mathbf{a}_i\|_{\mathcal{Q}'}\} = \prod_{x=-X_0}^{X_0} \prod_{|\tilde{m}'| \leq M_0} \|\mathbf{a}_0(x, \tilde{m}')\|_{\mathcal{Q}'} \\ &\leq \exp \left\{ InL \frac{X_0(X_0 + 1)}{(2X_0 + 1)D} + (2 + n\varepsilon_1)GI \right\} \\ &\leq \exp \left(IG \left(n + \frac{3}{2}n\varepsilon_2 + 2 + n\varepsilon_1 \right) \right). \end{aligned}$$

Покажем, что $q^J \geq \Pi$. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{\ln \Pi}{J \ln q} \leq \frac{IG(n + 2n\varepsilon_2 + 2 + n\varepsilon_1)}{JC_0 L_0 / 2},$$

в котором подстановка вместо I, J их оценок из (15.8), (15.9), с учетом обозначений из § 12 после сокращений одинаковых членов, дает

$$\frac{\frac{8}{n!}(1 + 2\varepsilon_2)(n + 2n\varepsilon_2 + 2 + n\varepsilon_1)\left(\frac{1}{2}n\eta\right)^{\varkappa}((1 + n\varepsilon_1)c_1)^{n+1}}{\xi\gamma}.$$

Согласно выбору параметра ξ и неравенству (12.1) последняя величина не превосходит единицы. Отсюда следует, что выражение в скобках в (13.1) не больше 1. Таким образом, выполнение условий данного параграфа обеспечено в основном за счет выбора параметра ξ .

Для оценки сверху числа J в (13.1) используем неравенство (15.7), а для оценки $|\Delta(\mathbb{K})|$ — лемму 14.2. Коэффициент при $\varepsilon_1 G$ в показателе неравенства леммы равен $(n - 0.5)/2 + 0.3 < n$. Лемма 15.2 доказана.

Наконец, обозначим вектор из пространства мультистепеней, соответствующий какому-либо ненулевому значению $p(\vec{l}')$, через $\vec{v}_0$.

§ 16. Интерполяционная формула

В данном параграфе приводится количественный вариант интерполяционной формулы, основанной на теореме Коши о вычетах. Подобные леммы являются стандартным элементом техники арифметико-аналитического продолжения. Формулировка леммы взята из [1] с тем упрощением, что рассматриваются узлы только одинаковой кратности.

Пусть дано конечное множество $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}$ (узлов интерполяции) и целое неотрицательное T ($T + 1$ есть кратность узлов). Положим

$$Q(z) = \prod_{x \in \mathcal{X}} (z - x)^{T+1}.$$

Если $f(z)$ — функция, аналитическая в достаточно большом круге, то

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z), \\ f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0, R)} \frac{Q(z)}{Q(\zeta)} \cdot \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \\ f_2(z) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\tau=0}^T \frac{f^{(\tau)}(x)}{2\pi i \tau!} \int_{\Gamma(x, r)} \frac{Q(z)}{Q(\zeta)} \cdot \frac{(\zeta - x)^\tau d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Здесь окружность $\Gamma(x, r)$ с центром в x радиуса r обходит по часовой стрелке и не содержит внутри точку z и остальные точки из $\mathcal{X}$; $\Gamma(0, R)$ обходит против часовой стрелки и охватывает z и все точки из $\mathcal{X}$. Будем называть выражение $Q(z)/Q(\zeta)$ интерполяционной частью.

ЛЕММА 16.1 [1, лемма 9.1]. Пусть даны $T \geq 0$, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{X}$. Точки $\mathcal{X}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\delta > 0$ и расположены симметрично относительно нуля. Положим

$$z_0 = \max \left\{ |z|, \frac{1}{2} \delta |\mathcal{X}| \right\}, \quad r = \frac{1}{2} \min \{ \delta, \min \{ |z - x| : x \in \mathcal{X} \} \}.$$

Тогда для $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > z_0$ выполняется

$$\left| \frac{Q(z)}{Q(\zeta)} \right| \leq \left(\frac{z_0}{|\zeta|} \right)^{|\mathcal{X}|(T+1)}, \quad (16.2)$$

а для $\zeta \in \Gamma(x, r)$, $x \in \mathcal{X}$, выполняется

$$\left| \frac{Q(z)}{Q(\zeta)} \right| \leq \left(\frac{2ez_0}{\delta |\mathcal{X}|} \right)^{|\mathcal{X}|(T+1)}. \quad (16.3)$$

§ 17. Экстраполяция нулей

Целью этого параграфа является доказательство индукционного шага по ν при фиксированном значении s для уравнений (11.6), которые мы преобразуем к виду, аналогичному уравнениям (9.9):

$$\begin{aligned}\Phi_s(x, \tilde{m}') &= 0, \quad x \in \mathcal{X}_{s,\nu}, \quad \|\tilde{m}'\| \leq M_{s,\nu}, \\ \nu &= 0, \dots, n, \quad s = 0, 1, \dots, S,\end{aligned}\tag{17.1}$$

где $\Phi_s(x, \tilde{m}')$ определены в (9.8). Итак, мы считаем выполненными условия (17.1) при каких-либо s и ν ($0 \leq \nu < n$) и хотим доказать, что они выполнены и для $\nu + 1$.

Для доказательства мы воспользуемся формулой произведения: если мы получим, что

$$\prod_{\sigma=1}^{\infty} |\Phi_s(z, \tilde{m}')|_{\sigma} < 1, \quad z \in \mathcal{X}_{s,\nu+1},\tag{17.2}$$

то должно быть $\Phi_s(z, \tilde{m}') = 0$. Отметим, что при $z \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$\Phi_s(z, \tilde{m}') \in \mathbb{K}.$$

При $\sigma > \varkappa$ мы будем оценивать $|\Phi_s(z, \tilde{m}')|_{\sigma}$ тривиально с помощью (13.3), (15.5) и леммы 15.2. При $\sigma = 1$ мы с помощью замены (9.4) перейдем к функциям $\Psi_s(\zeta, \tilde{m}')$ из (9.10) и будем оценивать их, пользуясь интерполяционной техникой § 16 в предположении о малости линейной формы, взяв в качестве множества узлов интерполяции $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{s,\nu}$ с кратностями $T = T_s$. В комплексном случае оценка при $\sigma = 2$ будет такая же, как и при $\sigma = 1$. В качестве функции $f(\zeta)$ из (16.1) возьмем

$$f(\zeta) = \Psi_s(\zeta, \tilde{m}') \bar{\alpha}^{\bar{v}_s z} \prod_{\sigma > \varkappa} |\Phi_s(z, \tilde{m}')|_{\sigma}^{1/\varkappa}.\tag{17.3}$$

При замене (9.4) и переходе от функций Φ к Ψ возникает погрешность

$$\begin{aligned}|\bar{\alpha}^{\bar{l}\zeta} - \tilde{\alpha}^{\tilde{l}} \bar{\alpha}^{\bar{l}\zeta/b_n}| &= |e^{-\Lambda \zeta l_n/b_n} - 1| \cdot |\bar{\alpha}^{\bar{l}\zeta}| \\ &\leq |\bar{\alpha}^{\bar{l}\zeta}| \cdot 1.1 \cdot |\Lambda \zeta l_n| \leq |\bar{\alpha}^{\bar{l}\zeta}| \cdot e^{1.1\varepsilon_1 G} \cdot |\Lambda|,\end{aligned}\tag{17.4}$$

содержащая малый множитель Λ . Здесь мы использовали оценку

$$1.1|\zeta l_n| \leq R_{s,\nu} 2^{-s} L/A_n = \eta |\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1)/A_n,$$

из которой с учетом (5.3), (11.5) получаем $1.1|\zeta l_n| < \exp(1.1\varepsilon_1 G)$. В итоге имеем

$$\prod_{\sigma=1}^{\infty} |\Phi_s(z, \tilde{m}')|_{\sigma}^{1/\varkappa} = f(z) + \Delta_0,$$

где Δ_0 – погрешность, возникающая при замене (9.4).

Далее, применим к $f(z)$ интерполяционную формулу (16.1) и в выражениях для $f_1(z)$, $f_2(z)$ сделаем обратную замену (9.4). В результате получим

$$\prod_{\sigma=1}^{\infty} |\Phi_s(z, \tilde{m}')|_{\sigma}^{1/\varkappa} = J_1 + \Delta_1 + J_2 + \Delta_2 + \Delta_0, \quad (17.5)$$

где J_1 , J_2 – соответствующие выражения в (16.1), а Δ_1 , Δ_2 – погрешности, получающиеся в результате обратной замены (9.4).

В формуле (16.1) для $f_2(z)$ присутствуют производные $f^{(\tau)}$. Для них с учетом (9.10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau!} \Psi_s^{(\tau)}(x, \tilde{m}') &= \sum_{\|\tilde{\tau}'\|=\tau} \sum^{(s)} \sum_{l_0=0}^{L_0} p(\tilde{l}') \tilde{\alpha}^{\tilde{\chi}(\tilde{l})x/b_n} \tilde{\alpha}^{-\tilde{v}_s x} \\ &\times \frac{1}{m_0! \tau_0!} 2^{-(S-s)m_0} \Delta^{(m_0+\tau_0)}(2^{S-s}z, l_0, H) \\ &\times d_0(m_0) \Delta(\tilde{\chi}(\tilde{l} - \bar{w}_s), \tilde{m})(\tilde{\chi}(\tilde{l})/b_n)^{\tilde{\tau}} (\ln \tilde{\alpha})^{\tilde{\tau}} (\tilde{\tau}!)^{-\tilde{1}}. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Отсюда и из леммы 3.1 видно, что $\Psi_s^{(\tau)}(x, \tilde{m}')$ линейно выражаются через $\Psi_s(x, \tilde{t}')$, $\|\tilde{t}'\| \leq \|\tilde{m}'\| + \tau$. То же самое будет и при обратном переходе (9.4) только для функций Φ вместо Ψ . Поэтому по предположению индукции (17.1) в (17.5) будет $J_2 = 0$.

Появление новых членов при дифференцировании полиномиальной части было заранее предусмотрено леммой 8.2 (в § 15 мы пользовались только случаем $\tau = 0$, но при выборе параметра W_0 учли и возможность роста τ). При дифференцировании показательной части появилось выражение последней строки формулы (17.6). Оно предусмотрено леммой 8.3, а (15.4) показывает, что параметр W_0 учитывает все новые компоненты. Поэтому в (17.6) из (8.5), (15.4) имеем

$$d_0(m_0) \sum_{\|\tilde{\tau}\| \leq M_0 - m_0} \left| \Delta(\tilde{\chi}(\tilde{l} - \bar{w}_s), \tilde{m})(\tilde{\chi}(\tilde{l})/b_n)^{\tilde{\tau}} (\ln \tilde{\alpha})^{\tilde{\tau}} (\tilde{\tau}!)^{-\tilde{1}} \right| \leq 0.01e^G.$$

Поскольку в лемме 15.2 для x были предусмотрены границы, охватывающие все встречаемые далее значения z , ζ , то оценка полиномиальной части будет такой же, как в § 15.

В показательной части (15.6) произошли некоторые изменения. Компонента $|\tilde{\alpha}|_{\sigma}^{\tilde{v}_s z}$ при умножении по всем σ за счет формулы произведения исчезнет. Но сейчас мы рассматриваем не абсолютные высоты (извлечение корня степени D), а извлекаем корень степени $\varkappa$. Поскольку тело $\mathcal{W}$ расположено симметрично относительно нуля, то все локальные высоты показательной части неотрицательны, и отсутствие сомножителя при $\sigma = 1$, $\varkappa$ только упрощает ситуацию и позволяет воспользоваться прежней оценкой показательной части:

$$\frac{1}{\varkappa} 2^{-s} L n |z| \leq \frac{1}{\varkappa} 2^{-s} L n 2^{\nu+1} X_s.$$

Кроме того, в J_1 у нас появился показательный сомножитель, содержащий ζ , который из-за условия (10.3) оценивается как $\exp(\eta^{-1}2^{-s}L|\zeta|)$.

Для оценки интерполяционной части $|Q(z)/Q(\zeta)|$ в J_1 мы используем (16.2), при этом для оценки $\deg Q = |\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1)$ имеется двустороннее неравенство (11.5).

Отметим, что для $z \in \mathcal{X}_{s,\nu+1}$ в лемме 16.1 выполняется неравенство $z_0 \leq |\mathcal{X}_{s,\nu}|$. Тогда, собрав оценки для компонент J_1 из лемм 15.1, 15.2 с учетом (13.2), (11.5), а также положив $|\zeta| = R = R_{s,\nu}$, имеем

$$\begin{aligned} \ln(8|J_1|) &\leq \frac{1}{\varkappa}(2^{\nu+1}X_s)(2^{-s}L)n + \frac{D}{\varkappa}(2 + n\varepsilon_1)G \\ &\quad + \eta^{-1}2^{-s}LR_{s,\nu} + |\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1) \ln\left(\frac{|\mathcal{X}_{s,\nu}|}{R_{s,\nu}}\right) \\ &\leq \frac{1}{\varkappa}|\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1)n + \frac{D}{\varkappa}2.1G \\ &\quad - |\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1) \ln\left(e^{(n+0.53)/\varkappa} \frac{(T_s + 1)}{2^{-s}L}\right) \\ &\leq \frac{1}{\varkappa}|\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1) \left(n + \frac{1}{4} \cdot 2.1 - (n + 0.53)\right) < 0, \end{aligned} \quad (17.7)$$

т.е. $|J_1| < 1/8$. А из (17.4), (12.1) находим $|\Delta_1| \leq 2|J_1| < 1/4$. Выполнение этих неравенств в основном обеспечено за счет выбора параметра η из (10.3).

Малость Δ_0, Δ_2 ($< 1/4$) будет обеспечена за счет гипотезы (12.2) о малости $|\Lambda|$ и проверена в следующем параграфе. Здесь $J_2 = 0$. Тогда из формулы (17.5) получаем неравенство (17.2), и тем самым доказываем шаг индукции.

§ 18. Деление аргумента

В данном параграфе будет доказан индукционный шаг по s , т.е. из равенств (11.6) (эквивалентно (17.1)) при (s, n) будут получены такие же равенства при $(s + 1, 0)$.

Сначала мы получаем равенства

$$F_s\left(\frac{x}{2}, \tilde{m}'\right) = 0, \quad \|\tilde{m}'\| \leq M_{s+1}, \quad x \in \mathcal{X}_{s+1,0}, \quad (18.1)$$

а затем с помощью теории Куммера – условия (17.1).

Мы докажем (18.1) в конце параграфа, а пока посмотрим, что из этих равенств следует. Обратимся к способу построения множеств $\mathcal{L}_s$. В расширенном логарифмическом пространстве числам $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ соответствуют векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (согласно условию теоремы 2.1 линейно независимые над $\mathbb{Z}$). По ним построена решетка M_n с базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Этим векторам соответствуют в поле $\mathbb{K}$ числа $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$, обладающие важным алгебраическим свойством.

ЛЕММА 18.1. Пусть $\mathbb{K}$ содержит корень степени p из 1 (p – некоторое простое число). Тогда вышеприведенные $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ удовлетворяют условию

$$[\mathbb{K}(\vartheta_1^{1/p}, \dots, \vartheta_n^{1/p}) : \mathbb{K}] = p^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма практически доказана в работах [15] (см. также [4]), но поскольку явно не сформулирована, мы приведем ее доказательство.

Так как поле $\mathbb{K}$ содержит корень степени p из 1, то для доказательства неважно, какое значение $\vartheta_i^{1/p}$ выбирается. Мы будем считать его согласованным с выбором $\ln \vartheta_i$.

Доказывать будем индукцией по j , рассматривая поля

$$\mathbb{K}_0 = \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n), \quad \mathbb{K}_j = \mathbb{K}(\vartheta_1^{1/p}, \dots, \vartheta_j^{1/p}), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Надо доказать, что $[\mathbb{K}_{j+1} : \mathbb{K}_j] = p$. Если при каком-либо j это не так, то при некоторых $\alpha \in \mathbb{K}$ и $r_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $1 \leq i \leq j$, выполняется

$$\vartheta_{j+1} = \vartheta_1^{r_1} \dots \vartheta_j^{r_j} \alpha^p$$

(см. [15, лемма 3]). Но тогда в расширенном логарифмическом пространстве вектор, соответствующий числу α с естественным выбором ветви логарифма, линейно зависим над $\mathbb{Z}$ с $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, но целочисленно через них не выражается, что противоречит условию о том, что векторы $\mathbf{e}_j$ образуют базис решетки M_n . Это и доказывает лемму.

Мы будем использовать лемму 18.1 при $p = 2$, что согласуется с (1.2) и исключает вопросы о корне из 1 (равном здесь -1).

Вернемся к доказательству теоремы. Координатам в M_n соответствуют мультистепени при соответствующих наборах чисел, при этом согласно (10.1)

$$\bar{\alpha}^{\bar{\lambda}} = \bar{\vartheta}^{\bar{\mu}}, \quad \bar{\lambda} \in \mathcal{M}_n, \quad \bar{\mu} \in \mathbb{Z}^n, \quad \bar{\lambda} = \bar{\mu} \mathcal{A}^{-1}, \quad (18.2)$$

где $\mathcal{A}$ – матрица перехода от базиса $\{\mathbf{a}_i\}$ к базису $\{\mathbf{e}_j\}$.

Теперь положим

$$x = 2y + 1, \quad \bar{\mu} = 2\bar{\tau} + \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} \in \{0, 1\}^n, \quad \bar{\tau} \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда из (18.1) с учетом замены (18.2) и отбрасывания общего множителя $\bar{\alpha}^{\bar{\nu}x/2}$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= F_s \left(\frac{x}{2}, \tilde{m}' \right) = \sum_{\bar{\mu}}^{(s)} P_s^{(m_0)} \left(\frac{x}{2}, \bar{l} \right) \tilde{\chi}^{\tilde{m}}(\bar{l}) \bar{\vartheta}^{\bar{\mu}x/2} \\ &= \sum_{\bar{\delta}} \left(\sum_{\bar{\tau}} P_s^{(m_0)} \left(\frac{x}{2}, \bar{l} \right) \tilde{\chi}^{\tilde{m}}(\bar{l}) \bar{\vartheta}^{\bar{\tau}x + \bar{\delta}y} \right) \bar{\vartheta}^{\bar{\delta}/2}. \end{aligned} \quad (18.3)$$

В этот момент мы используем условие Куммера, согласно которому числа $\bar{\vartheta}^{\bar{\delta}/2}$, $\bar{\delta} \in \{0, 1\}^n$, линейно независимы над $\mathbb{K}$. Множители в (18.3), стоящие перед $\bar{\vartheta}^{\bar{\delta}/2}$, из поля $\mathbb{K}$, значит, все они исчезают, и мы получаем, что в (18.3) слагаемые при каждом значении $\bar{\delta}$ равны нулю, или после обратного перехода с помощью (18.2) к вектору $\bar{\alpha}$, что

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\bar{\tau}}^{(s+1)} P_s^{(m_0)} \left(\frac{x}{2}, \bar{l} \right) \tilde{\chi}^{\tilde{m}}(\bar{l}) \bar{\vartheta}^{\bar{\mu}x/2} \\ &= \sum_{\bar{\tau}}^{(s+1)} P_s^{(m_0)} \left(\frac{x}{2}, \bar{l} \right) \tilde{\chi}^{\tilde{m}}(\bar{l}) \bar{\alpha}^{\bar{\lambda}x/2}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Мы будем работать только с $\bar{\delta}$, соответствующим изначально выбранному значению $\bar{l}$, для которого имеется ненулевое $p(l_0, \bar{l})$. Переобозначив $\bar{\lambda}/2$ и учитывая, что $\bar{\tau}$ выражается через $\bar{\lambda}$, мы можем считать, что суммирование в (18.4) проводится по $\bar{\lambda} \in \mathcal{L}_{s+1}$. Это согласуется с требованиями к $\mathcal{L}_{s+1}$ из §9, 10, поскольку очевидно, $\mathcal{L}_{s+1} \subseteq \mathcal{L}_s/2$ и

$$\frac{1}{2}\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\bar{\mu}\mathcal{A}^{-1} = \bar{\tau}\mathcal{A}^{-1} + \frac{1}{2}\bar{\delta}\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n + \frac{1}{2}\bar{\delta}\mathcal{A}^{-1}.$$

Мы не трогаем индексы $\bar{l}$ в полиномиальной и дифференциальной части, подразумевая, что они выражаются через $\bar{\lambda}$ и $\bar{\delta}$. Теперь снова домножив выражение в (18.4) на $\bar{\alpha}^{\bar{v}x/2}$ и обозначив его через F_{s+1} , мы получаем выполнение условия (11.6) при $s+1$ и $\nu = 0$.

Перейдем теперь к доказательству (18.1), где функции F могут быть заменены на Φ . В отличие от §17 здесь нам приходится работать в поле $\mathbb{K}_n$ степени $2^n D$. Пронумеруем его нормирования индексами σ и будем рассматривать функцию $f(\zeta)$ из (17.3) как определенную над $\mathbb{K}_n$. Параметром z в ней будет

$$z = \frac{1}{2}x, \quad x \in \mathcal{X}_{s+1}, \quad |z| \leq X_{s+1}.$$

Аналогичным образом определяются в (17.5) величины $\Delta_0, J_1, \Delta_1, J_2, \Delta_2$ с $\nu = n$. При этом также выполнено $J_2 = 0$. В лемме 16.1 полагаем $T = T_s$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{s,n}$, $\delta = 1$ (разность прогрессии), $r = 1/4$, $z_0 = |\mathcal{X}_{s,n}|/2$, а радиус $R = R_{s,n}$ определен в §12.

Оценка J_1 получается, как в (17.7), только с учетом новой границы для z ($|z| = |x|/2 \leq X_{s+1}$, см. (11.4)) и степени поля:

$$\begin{aligned} \ln(8|J_1|) &\leq \frac{2^n}{\varkappa} 2^{-s} L n X_{s+1} + \frac{2^n D}{\varkappa} (2 + n\varepsilon_1) G \\ &\quad + \eta^{-1} 2^{-s} L R_{s,n} + |\mathcal{X}_{s,n}| (T_s + 1) \ln(|\mathcal{X}_{s,n}|/2R_{s,n}) \\ &\leq \frac{2^n}{\varkappa} 2^{-s} L n X_{s+1} + \frac{2^n D}{\varkappa} (2 + n\varepsilon_1) G \\ &\quad - |\mathcal{X}_{s,n}| (T_s + 1) \ln \left(e^{(n+0.53)/\varkappa} \frac{(T_s + 1)}{2^{1-s} L} \right) \\ &\leq \frac{D}{\varkappa} 2^{n+2} G \left(n(1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{4}(2 + n\varepsilon_1) - (n + 0.53) \right) < 0, \quad (18.5) \end{aligned}$$

откуда $|J_1| < 1/8$ и $|\Delta_1| < 1/4$ (см. §17). Это также в основном обеспечено за счет выбора параметра η .

Осталось убедиться, что предположение (12.2) обеспечивает $|\Delta_0|, |\Delta_2| < 1/4$. Тогда (17.2) будет выполнено и шаг индукции доказан. Мы будем брать худший случай на всех шагах индукции, получающийся при переходе от s к $s+1$.

Оценка Δ_2 проводится аналогично оценке J_1 . Отличия состоят в следующем. При оценке J_1 нам надо было мажорировать в формуле для $f_1(z)$ из (16.1) величину $|f(\zeta)|$, $|\zeta| \leq R_{s,\nu}$. При оценке Δ_2 нам надо мажорировать $|f^{(\tau)}(x)|$, $|x| \leq 2^n X_s$. Из (17.6) видно, что оценка $|f^{(\tau)}(x)|/\tau!$ такая же, как оценка $|f(\zeta)|$ (это (17.7)

при $\nu < n$ и (18.5) при $\nu = n$), только $R_{s,\nu}$ надо заменить на $2^n X_s$. Далее, при оценке интерполяционной части вместо неравенства (16.2) следует использовать неравенство (16.3), с учетом формулы для z_0 имеющего вид

$$\begin{aligned} \ln |Q(z)/Q(\zeta)| &\leq |\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1) \ln(2e), & \nu < n, \\ \ln |Q(z)/Q(\zeta)| &\leq |\mathcal{X}_{s,\nu}|(T_s + 1) \ln(e), & \nu = n. \end{aligned}$$

Так что во второй строке неравенств (17.7), (18.5) второе слагаемое, соответствующее оценке (16.2), следует заменить на вышеуказанную оценку.

Кроме того, надо добавить в оценку множитель из (17.4):

$$|\Lambda| R_{s,n} 2^{-s} L / A_n < |\Lambda| e^{1.1\varepsilon_1 G}.$$

И, наконец, надо оценить еще сумму в f_2 из (16.1). Ранее этого не требовалось, так как было $J_2 = 0$. Поскольку во всех случаях имеем $r \leq 1/2$, то сумма по τ в (16.1) с учетом наличия в интеграле члена r^τ оценивается числом 2. Так что суммирование в f_2 даст $4|\mathcal{X}| \leq e^{1.1\varepsilon_1 G}$. В итоге, взяв худший случай $\nu = n$, получаем

$$\begin{aligned} \ln(8|\Delta_2|) &\leq \frac{1}{\varkappa} 2^{-s} L n 2^n X_{s+1} + \frac{D}{\varkappa} 2^n (2 + 3n\varepsilon_1) G \\ &\quad + \eta^{-1} 2^{-s} L 2^n X_s + |\mathcal{X}_{s,n}|(T_s + 1) + \ln |\Lambda| \\ &\leq \frac{D}{\varkappa} 2^{n+1} G (1 + 2\varepsilon_2) \left(2n + 1 + 2n\varepsilon_1 + \frac{\varkappa}{\eta} + 2\varkappa \right) + \ln |\Lambda|, \end{aligned}$$

и с учетом (11.5), (12.1) и предположения (12.2) выполнено $\ln |8\Delta_2| < 0$. Аналогично, для Δ_0 можно получить неравенство $|\Delta_0| < 1/2$. Тогда с помощью (17.5), (17.2) завершаются рассуждения, связанные с экстраполяцией нулей, и аналогично доказывается индукционный шаг.

§ 19. Оценка кратностей нулей

В данном параграфе доказывается оценка кратностей нулей для показательного квазимногочлена от многих переменных. Эта теорема представляет собой адаптированную версию результата Вюстхольца [19] специально для случая однородных линейных форм от логарифмов алгебраических чисел. В формулировке учтены нюансы, указанные в работах [4], [17], [20]. Переработке подверглась геометрическая часть рассуждений из работ [19], [4], что позволило улучшить значение константы $\mathcal{C}(\nu)$ (см. предложение 19.2). Для формулировки будем использовать буквенные обозначения, связь которых с параметрами из предыдущих параграфов будет установлена в § 20. Кроме того, для формулировки и доказательства утверждений данного параграфа нам потребуются некоторые понятия об алгебраических группах (см. [19], [20]).

Алгебраические подгруппы в $\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^n$ имеют вид $\mathbb{H} = \mathbb{H}_a \times \mathbb{H}_m$, $\mathbb{H}_a \subseteq \mathbb{G}_a$, $\mathbb{H}_m \subseteq \mathbb{G}_m$, при этом либо $\mathbb{H}_a = \{0\}$, либо $\mathbb{H}_a = \mathbb{G}_a$.

Далее, при $\nu > 0$ связанная группа $\mathbb{H}_m$ ранга ν определяется соотношениями вида $\bar{Y}^{\bar{l}} = 1$, где $\bar{l} \in M$, а $M = \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_\nu \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{Z}^n$ — некоторая решетка ранга ν . Тогда $r = \text{rank } \mathbb{H} = \nu + \varepsilon$, где ε равно 0 или 1 в зависимости от $\mathbb{H}_a$. Положим

$$d(j_1, \dots, j_\nu) = |\det(v_{i,j_k})_{1 \leq i, k \leq \nu}|, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq n,$$

и отметим, что эти выражения не зависят от выбора базиса $\mathbb{M}$.

Наконец, с $\mathbb{H}$ связан многочлен Гильберта, для коэффициентов $\delta(\mathbb{H}; i_1, \dots, i_r)$ которого нам понадобится оценка

$$\begin{aligned}\delta(\mathbb{H}; 0, i_2, \dots, i_r) &\geq d(i_2, \dots, i_r), \quad r = \nu + 1, \\ \delta(\mathbb{H}; i_1, \dots, i_r) &\geq d(i_1, \dots, i_r), \quad r = \nu.\end{aligned}$$

Теперь пусть даны набор чисел $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $b_n \neq 0$, и набор $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ ненулевых алгебраических чисел. В кольце многочленов $\mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_n]$ рассматриваются операторы дифференцирования ∂_j , определенные в (3.1).

Пусть также даны целые числа:

$$\begin{aligned}L'_0, \dots, L'_n &\geq 0 \quad (\text{степени}), \\ X'_0 &\geq \dots \geq X'_n \geq 0, \quad X'_0 + \dots + X'_n \leq X' \quad (\text{нули}), \\ M'_0 &\geq \dots \geq M'_n \geq 0, \quad M'_0 + \dots + M'_n \leq M' \quad (\text{кратности}),\end{aligned}$$

удовлетворяющие дополнительному условию: при всех $0 \leq \nu \leq n$ и при всех $\bar{m}' = (m_0, \dots, m_n) \in \{0, 1\}^{n+1}$, $\|\bar{m}'\| = \nu + 1$ ($\|\cdot\|$ – sum-норма), выполняется неравенство

$$(X'_\nu + 1) \binom{M'_\nu + \nu + 1 - \delta_{\nu,n}}{\nu + 1 - \delta_{\nu,n}} > (\nu + 1)! L_0'^{m_0} \dots L_n'^{m_n}, \quad (19.1)$$

где $\delta_{\nu,n}$ – символ Кронекера и полагается $0^0 = 1$.

Выделим также для рассматриваемой группы $\mathbb{H}$ случаи:

- (i) $\text{Lie } \mathbb{H} \subseteq (\partial_0, \dots, \partial_{n-1})$; тогда положим $\sigma = r - 1$, иначе $\sigma = r$;
- (ii) для некоторого $x \in \{1, \dots, X'\}$ имеем $(x, v_1^x, \dots, v_n^x) \in \mathbb{H}(\overline{\mathbb{Q}})$;

тогда положим $E = 1$, иначе $E = X'_{r-1} + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.1 [19, теорема 1.1]. Пусть в указанных обозначениях имеется многочлен $P \in \mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_n]$, $P \neq 0$, $\deg_{Y_j} P \leq L'_j$, $0 \leq j \leq n$, удовлетворяющий условию

$$\partial_0^{\mu_0} \dots \partial_{n-1}^{\mu_{n-1}} P(x, v_1^x, \dots, v_n^x) = 0 \quad (19.2)$$

для $x = 0, \dots, X'$ и всех $\check{\mu}' \in \mathbb{N}_0^n$ с $\|\check{\mu}'\| \leq M'$.

Тогда найдется связная алгебраическая группа $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^n$ ранга $r \leq n$, для которой при любых $0 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ выполняется

$$\begin{aligned}\delta(\mathbb{H}; i_1, \dots, i_r) &\leq \gamma_r L'_{i_1} \dots L'_{i_r}, \\ \gamma_r &= r! E^{-1} \binom{M'_{r-1} + \sigma}{\sigma}^{-1}.\end{aligned} \quad (19.3)$$

Перейдем к формулировке той оценки кратностей нулей, на которую мы будем опираться для завершения доказательства основной теоремы 2.1. Предварительно введем несколько дополнительных ограничений, естественным образом получающихся из предыдущих параграфов. Все они сужают возможные случаи предложения 19.1.

У нас имеется набор $\bar{A} = (A_1, \dots, A_n)$ положительных чисел и фиксированы значения $\ln \vartheta_1, \dots, \ln \vartheta_n$, при этом логарифмы линейно независимы над $\mathbb{Z}$ и выполняются неравенства

$$|b_1 \ln \vartheta_1 + \dots + b_n \ln \vartheta_n| < \frac{2\pi}{X' + 1}, \quad (19.4)$$

$$M'_0 + 1 > L'_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (19.5)$$

$$n(n+1)L'_0 > M'_n + n. \quad (19.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19.2. При выполнении условий (19.1), (19.2), (19.4)–(19.6) найдутся ν ($1 \leq \nu < n$) и набор независимых векторов $\bar{Z}_i \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq i \leq \nu$, такие, что $\bar{b} \in \langle \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_\nu \rangle_{\mathbb{Q}}$ и для чисел

$$A'_i = \|\bar{Z}_i\|_A = A_1 |Z_{i,1}| + \dots + A_n |Z_{i,n}|, \quad 1 \leq i \leq \nu,$$

выполняется хотя бы одно из двух неравенств:

$$(X'_{\nu-1} + 1) \binom{M'_{\nu-1} + \nu - 1}{\nu - 1} A'_1 \dots A'_\nu \leq \mathcal{C}(\nu) \max\{\bar{A}^{\bar{m}} \bar{L}'^{\bar{m}}\}, \quad (19.7)$$

$$(X'_\nu + 1) \binom{M'_\nu + \nu}{\nu} A'_1 \dots A'_\nu \leq \mathcal{C}(\nu)(\nu + 1)L'_0 \max\{\bar{A}^{\bar{m}} \bar{L}'^{\bar{m}}\}, \quad (19.8)$$

где максимум берется по наборам $\bar{m} \in \{0, 1\}^n$, $\|\bar{m}\| = \nu$, а

$$\mathcal{C}(\nu) = 2^\nu \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{\nu/2} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \nu! \left(\frac{n}{\nu}\right)^{1/2}. \quad (19.9)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. В работе [4] было $\mathcal{C}(\nu) = 2^{1-\nu}(\nu!)^2(n\nu)^\nu$, а также было требование примитивности набора векторов $\bar{Z}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала, как и в [4], исключим некоторые возможности предложения 19.1. В случае (ii) мы имеем соотношения

$$l_1 \ln \vartheta_1 + \dots + l_n \ln \vartheta_n = \frac{2\pi i}{x} l_0, \quad 1 \leq x \leq X', \quad l_0 \in \mathbb{Z}, \quad \bar{l} \in M,$$

где M – решетка ранга $\nu = r$, определяющая группу $\mathbb{H}_m$. Линейная независимость чисел $\ln \vartheta_j$ дает, что должно быть $\nu = 1$ (иначе $2\pi i$ можно исключить) и при этом $l_0 \neq 0$. Вектор $\bar{l}$ можно считать примитивным. Если при этом имеем еще случай (i), то $\bar{b} = m_0 \bar{l}$, $m_0 \in \mathbb{Z}$. Но тогда это противоречит условию (19.4), поэтому случай (i) не выполняется, и мы имеем $\sigma = r = \nu = 1$, $E = 1$, $\gamma_r = (M'_0 + 1)^{-1}$. Но тогда (19.3) противоречит условию (19.5), поскольку для какого-то из индексов мы имеем $\delta(\mathbb{H}; i) \geq 1$, $1 \leq i \leq n$.

Таким образом, случай (ii) полностью исключен и $E = X'_{r-1} + 1$.

Если не выполняется случай (i), то $\sigma = r$ и рассмотрение $\delta(\mathbb{H}; i_1, \dots, i_r) \geq 1$ приводит (19.3) в противоречие с (19.1).

В случае (i) мы имеем $\bar{b} \in \langle M \rangle_{\mathbb{Q}}$, так что $\nu \geq 1$. Если предположить $\nu = n$, то ввиду $\nu \leq r \leq n$ имеем $r = n = \sigma$ и рассмотрение $\delta(\mathbb{H}; 1 \dots, n) \geq 1$ приводит (19.3) в противоречие с (19.1) при $\nu = n$ (с учетом (19.6) и монотонности X'_j, M'_j).

Таким образом, мы нашли нужную решетку $M \subseteq \mathbb{Z}^n$ ранга ν ($1 \leq \nu < n$). Осталось доказать существование независимых векторов $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_\nu \in M$, удовлетворяющих условиям (19.7) или (19.8).

В пространстве $\mathcal{V}_n = \mathbb{R}^n$ у нас есть сум-норма $\|\cdot\|_A$. Ее единичный шар – это октаэдр $\mathcal{W}_n$, задаваемый в стандартных координатах $(x_1, \dots, x_n)$ неравенством $|x_1|A_1 + \dots + |x_n|A_n \leq 1$.

Введем в $\mathcal{V}_n$ новые координаты $x'_j = A_j x_j$, $1 \leq j \leq n$, и будем считать их евклидовыми. Тогда в прежних координатах $\{x_j\}$ матрица соответствующей квадратичной формы будет иметь вид $Q = \text{diag}\{A_1^2, \dots, A_n^2\}$. Обозначим введенную метрику через $|\cdot|_Q$:

$$|\mathbf{v}|_Q^2 = x_1'^2 + \dots + x_n'^2 = (x_1, \dots, x_n)Q(x_1, \dots, x_n)^T.$$

В новых координатах октаэдр $\mathcal{W}_n$ определяется условием $|x'_1| + \dots + |x'_n| \leq 1$, т.е. является правильным. Легко видеть, что Q -евклидов шар $\mathcal{S}$, задаваемый условием

$$|\mathbf{v}|_Q^2 = x_1'^2 + \dots + x_n'^2 \leq R^2,$$

при $R = 1/\sqrt{n}$ будет содержаться в $\mathcal{W}_n$.

Оценим ν -мерный Q -евклидов объем решетки M . Выберем какой-либо базис $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_\nu$ решетки. Пусть V – матрица строк координат базисных векторов: тогда, применяя формулу Бине–Коши, а также (19.3) с $\sigma = r - 1$ (случай (i)), имеем

$$\begin{aligned} \text{Vol}_\nu^2 M &= \det(VQV^T) = \sum A_{j_1}^2 \dots A_{j_\nu}^2 d^2(j_1, \dots, j_\nu) \\ &\leq \sum (A_{j_1} \dots A_{j_\nu} \gamma_r L_0'^\varepsilon L_{j_1}' \dots L_{j_\nu}')^2 \leq \binom{n}{\nu} (\gamma_r L_0'^\varepsilon \max\{\bar{A}^{\bar{m}} \bar{L}'^{\bar{m}}\})^2. \end{aligned}$$

Здесь сумма берется по наборам $1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq n$, а максимум берется по наборам $\bar{m} \in \{0, 1\}^n$, $\|\bar{m}\| = \nu$, ε зависит от $\mathbb{H}_a$.

Теперь применим предложение 4.1 к решетке M , норме $\|\cdot\|_A$ и евклидовой метрике $|\cdot|_Q$. Отметим, что мы действуем в ν -мерном пространстве $\mathcal{V}_\nu = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$. Здесь единичным шаром нормы будет $\mathcal{W}_\nu(\|\cdot\|_A) = \mathcal{W}_n \cap \mathcal{V}_\nu$. Оценим его Q -евклидов объем с помощью неравенства

$$\text{Vol}_\nu \mathcal{W}_\nu(\|\cdot\|_A) \geq \text{Vol}_\nu(\mathcal{S}_R \cap \mathcal{V}_\nu) = R^\nu (\pi/2)^{\nu/2} / (\nu/2)!.$$

Тогда предложение 4.1 дает существование независимых векторов $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_\nu \in M$, удовлетворяющих неравенству

$$\begin{aligned} \|\bar{Z}_1\|_A \dots \|\bar{Z}_\nu\|_A &\leq 2^\nu \frac{\text{Vol}_\nu M}{\text{Vol}_\nu \mathcal{W}_\nu(\|\cdot\|_A)} \\ &\leq 2^\nu \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{\nu/2} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \binom{n}{\nu}^{1/2} \gamma_r L_0'^\varepsilon \max\{\bar{A}^{\bar{m}} \bar{L}'^{\bar{m}}\}. \end{aligned}$$

Неравенства (19.7), (19.8) получаются отсюда соответственно с учетом вида группы $\mathbb{H}$. Если $r = \nu$, то мы имеем (19.7), а если $r = \nu + 1$, то получаем (19.8). Это доказывает предложение 19.2. Отметим, что нам не пришлось пользоваться леммой Малера 4.2.

§ 20. Доказательство основной теоремы

В предыдущих параграфах мы построили, в предположении о малости линейной формы от логарифмов (см. (12.2)), ненулевое решение системы (9.9) для $(s, \nu) = (S, n)$. Далее символ ν в этом контексте не используется. Система (9.9) эквивалентна системе (9.5), т.е. имеет вид (19.2) с многочленом $P = \mathcal{F}_S$ из (9.1).

Как уже отмечалось во введении, в отношении параметров A_j в данной работе получены два усиления оценок линейных форм. Во-первых, сняты нижние ограничения на числа A_j , т.е. они теперь могут быть малыми (усиление работы [4], частично проведенное в [1]). И, во-вторых, множители A_j удалены из параметра C_0 (сделано в [4] с помощью предложения 19.1, но не сделано в [1]). Это разноплановые усиления, поскольку наличие $A_j < 1$ в C_0 только улучшило бы оценку $|\Lambda|$. Так что в этом случае целесообразнее было бы оставить в C_0 такие множители, но для простоты и единообразия изложения мы этого не делаем.

Все же возможная малость Ω создает в применении предложения 19.2 некоторые проблемы, поэтому, прежде чем его исследовать, рассмотрим более простой случай, а именно когда

$$C_0\omega < e^{-3}n^2c_1/3.$$

В этом случае с учетом определения параметра S и оценки (5.3) получаем, что суммирование в $\mathcal{F}_S$ по l_j , $1 \leq j \leq n$, исчезает, поскольку диапазон для изменения этих индексов становится $< 1/N$. Таким образом, $\mathcal{F}_S$ становится просто многочленом от Y_0 .

Из неравенства (11.5) видно, что нулей $\mathcal{F}_S$ с учетом кратностей не меньше чем

$$|\mathcal{X}_{S,n}|(T_S + 1) \geq 2^{n+2}G > L_0,$$

что противоречит условию $\mathcal{F}_S \neq 0$ и тем самым доказывает теорему в случае малого ω . Так что далее считаем

$$C_0\omega \geq e^{-3}n^2c_1/3. \quad (20.1)$$

В случае выполнения (20.1) можно увеличить нижнюю оценку для X_S , а именно

$$X_S \geq 0.5e^{-3}n^2c_1\xi DW_0.$$

При $T_S = 0$ неравенство получается непосредственно из (11.3) и (20.1), а при $T_S \geq 1$ – из определения числа S , поскольку

$$T_S + 1 \leq 2^{1-S}C_0\xi\omega/c_1.$$

Как отмечалось в § 9, линейной заменой переменных можно сделать показатели целыми и неотрицательными, а нули сместить в неотрицательную область и придать им вид $x = 0, \dots, X'$.

Займемся теперь применением предложения 19.2. Для этого установим соответствие параметров § 19 с ранее введенными переменными. Поскольку в функции $\mathcal{F}$ показатели были дробные со знаменателем N , то надо определить числа ϑ_j из

равенств $\ln \vartheta_j = \frac{1}{N} \ln \alpha_j$ (числа остаются алгебраическими, а степень поля в предложении 19.2 не имеет значения). Теперь положим

$$\begin{aligned} X' &= |\mathcal{X}_{S,n}| - 1 \geq 2^{n+1} [0.5e^{-3}n^2\xi c_1 DW_0], \\ X'_\nu &= \left\lfloor \frac{X'}{n+1} \right\rfloor, \quad 0 \leq \nu \leq n, \\ M' &= M_{S,n} \geq \frac{\varepsilon_0 \xi C_0 \omega}{1 + \varepsilon_0} = \frac{6n^3 C_0 \omega (n+1)}{c_1}, \\ M'_\nu &= \left\lfloor \frac{M'}{n+1} \right\rfloor, \quad 0 \leq \nu \leq n, \\ L'_0 &= L_0, \quad L'_j = \left\lfloor 2^{-S} \frac{NL}{A_j} \right\rfloor, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

и оценим введенные выше параметры.

С учетом порядка величин c_1 и ε_0 имеем

$$\begin{aligned} X'_\nu &\geq \frac{X'}{n+1} - 1 \geq \frac{1}{n+1} 2^n e^{-3} n^2 \xi c_1 DW_0 - 1 \geq 2^{n+1} e^{-3} n^2 \xi DW_0, \\ M'_\nu + 1 &\geq \frac{6n^3 C_0 \omega}{c_1}, \quad 0 \leq \nu \leq n. \end{aligned}$$

Из формулы для S и неравенства (5.3) следует, что

$$L'_j \leq 2^{-S} \frac{NL}{A_j} \leq \frac{3e^3}{n^2 c_1} C_0 \omega \min \left\{ 1, \frac{1}{1.5 A_j} \right\}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (20.2)$$

откуда, в частности, $L'_j \leq M'_j$.

Теперь проверим выполнение других условий предложения 19.1.

Поскольку $W_0 > C_0/2$ и ε_0 достаточно мало, то $L'_0 > M' + 1$ и $L'_0 \geq L'_j$, $j \geq 1$. Для упрощения проверки условия (19.1) упорядочим степени L'_j каким-либо образом, например будем считать, что

$$L'_0 \geq L'_1 \geq \dots \geq L'_n.$$

Это позволяет считать в (19.1), что $m_0 = \dots = m_\nu = 1$, $m_{\nu+1} = \dots = m_n = 0$.

Отметим также, что при $L'_j = 0$ можно считать $m_j = 0$, иначе неравенство (19.1) становится тривиальным. Теперь начнем проверку выполнения условия (19.1). В случае $\nu < n$ достаточно проверить неравенство

$$(X'_\nu + 1) \left(\frac{M'}{n+1} \right)^{\nu+1} > ((\nu+1)!)^2 L'_0 L'_1 \dots L'_\nu,$$

или после подстановки оценок для X'_ν , M' , L_0 , L'_j и замены $(\nu+1)!$ на выражение $e^{-\nu}(\nu+1)^{\nu+1.5}$ неравенство

$$\frac{2^{n+1} n^2 \xi DW_0}{e^3} \left(\frac{6n^3 C_0 \omega}{c_1} \right)^{\nu+1} \geq e^{-2\nu} (\nu+1)^{3+2\nu} W_0 \xi \omega \left(\frac{3e^3 C_0 \omega}{n^2 c_1} \right)^\nu.$$

После сокращения одинаковых множителей и логарифмирования остается проверить неравенство

$$\ln\left(\frac{3 \cdot 2^{n+2} n^5 D C_0}{e^3 (\nu+1)^3 c_1}\right) + \nu \ln\left(\frac{6n^5}{3e(\nu+1)^2}\right) \geq 0.$$

Левая сторона выпукла вверх по ν , поэтому неравенство достаточно проверить при $\nu = 0$ и $\nu = n - 1$, что элементарно.

При $\nu = n$ с учетом множителей A_j в (20.2) необходимо проверить, что

$$\frac{2^{n+1} n^2 \xi D W_0}{e^3} \left(\frac{6n^3 C_0 \omega}{c_1}\right)^\nu \geq e^{2-2n} (n+1)^2 n^{2n} W_0 \xi \omega \left(\frac{3e^3 C_0 \omega}{n^2 c_1}\right)^n \frac{1}{1.5^n \Omega}.$$

Тогда после подстановки формулы для ω и сокращения одинаковых членов получаем

$$\frac{2n^2}{e^5 (n+1)^2} \left(\frac{6n^3}{e}\right)^n \geq \frac{\gamma}{N}.$$

Последнее неравенство также верно ввиду того, что $\gamma \leq N$ и $n \geq 2$.

Для проверки условия (19.4) отметим, что

$$X' \leq 2^{n+1} e^{-3} n^3 \xi c_1 D W_0 \leq e^{C_0} e^{W_0/e} \leq e^{2\varepsilon_1 G},$$

и в предположении (12.2) выполнено

$$|b_1 \ln \vartheta_1 + \dots + b_n \ln \vartheta_n| = \frac{1}{N} |\Lambda| < e^{-4\varepsilon_1 G} < \frac{2\pi}{X' + 1}.$$

Так же легко проверяются условия (19.5), (19.6).

Таким образом, условия § 19 выполнены и можно применить предложение 19.2. Если мы покажем, что из любого неравенства (19.7), (19.8) следует (7.3), то получим противоречие с индуктивным предположением § 7 и тем самым докажем теорему 2.1.

Поскольку числа $A_j L'_j$, $j \geq 1$, оцениваются одинаково и не превосходят L'_0 , то мы можем считать, что в (19.7), (19.8)

$$m_1 = \dots = m_\nu = 1, \quad m_{\nu+1} = \dots = m_n = 0.$$

Далее, поскольку все X'_ν равны и равны M'_ν и мы имеем

$$W_0(M'_\nu + \nu)/\nu \leq (\nu+1) C_0 L'_0,$$

то из неравенств (19.7), (19.8) достаточно рассмотреть только (19.8), или

$$\frac{2^{n+1} n^2 \xi D W_0}{e^3} \left(\frac{6n^3 C_0 \omega}{c_1}\right)^\nu A'_1 \dots A'_\nu \geq (\nu+1)! \mathcal{C}(\nu) W_0 \xi \omega \left(\frac{2e^3 C_0 \omega}{n^2 c_1}\right)^\nu.$$

После сокращений одинаковых членов, подстановки (19.9) для $\mathcal{C}(\nu)$ с заменой $\binom{n}{\nu} \leq n^\nu/\nu!$ и $x! \leq e\nu^{\nu+1/2}e^{-\nu}$ получаем

$$A'_1 \dots A'_\nu \leq \frac{\gamma}{N} g(\nu) \Omega, \quad g(\nu) = \frac{e^{11/2}(\nu+1)\nu^{5/4}}{2^{n+3/2}n^2} \left(\frac{4e^2\nu^4}{9\pi n^8} \right)^{\nu/2}. \quad (20.3)$$

При этом легко проверяется, что

$$g(\nu) \leq \frac{1}{2}(4e^2)^{n-\nu}, \quad 1 \leq \nu \leq n.$$

Но тогда из (20.3) следует условие (7.3). Это противоречит индуктивной гипотезе и доказывает теорему.

Отметим еще один элемент новизны в доказательстве теоремы 2.1. Как было видно, числа $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ из леммы 18.1 использовались только для обоснования деления аргумента. В остальном вычисления проводились непосредственно с числами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. В предшествующих работах в той или иной форме осуществлялся переход с помощью леммы 4.2 к ϑ_j , что требовало пересчета высот и коэффициентов линейной формы. Именно на этом этапе и появлялся множитель $n!$, а также происходил переход от B из (1.3) к B^* из (1.4).

§ 21. Доказательство следствий

Докажем теорему 2.2 путем сведения ее к теореме 2.1 за счет исключения зависимых логарифмов. Без ограничения общности можно считать, что r – максимальное число независимых логарифмов.

При $r = 1$ с некоторым $\alpha \in \mathbb{K}^*$ выполнено

$$\ln \alpha_j = \pm m_j \ln \alpha, \quad m_j \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

при этом $A = H_\times(\alpha) \leq \min\{A_j: 1 \leq j \leq n\}$ и $|\Lambda| \geq |\ln \alpha|$. Здесь оценка получается сразу из неравенства Лиувилля, как в § 6,

$$|\Lambda| \geq \exp(-D \ln 2 - A).$$

Так что далее считаем $n \geq r > 1$.

Разберем теперь случай $r = n$, $b_n = 0$. Пусть, например, $b_{n-1} \neq 0$. Здесь можно индуктивно применить оценку (2.3) при $n-1$:

$$\begin{aligned} -\ln |\Lambda| &\leq C(n-1)C_0D^2A_1 \dots A_{n-1} \ln(1.5eB_{n-1}D \ln(eD)), \\ B_{n-1} &= \max\{|b_j|A_j/A_{n-1}: 1 \leq j \leq n-1\} \geq 1 \end{aligned}$$

(так как при $j = n-1$ имеем $|b_{n-1}| \geq 1$).

Теперь, оценивая в B_{n-1} компоненту $1/A_{n-1}$ с помощью (5.3) и переходя к B , получаем

$$-\ln |\Lambda| \leq C(n-1)C_0D^2A_1 \dots A_{n-1} \ln((1.5D \ln(eD))^2 eBA_n). \quad (21.1)$$

Вопрос состоит в том, можно ли добавить в правую часть (21.1) множитель $x = A_n \geq 0.16$ и разделить выражение под знаком логарифма на x . Тогда в правой части (21.1) будет находиться функция вида $f(x) = ax \ln(b/x)$, возрастающая на интервале $1 \leq x \leq b/e$ (включающем A_n), а при $x = 1$ мы просто получим (21.1). Поэтому при $A_n \geq 1$ оценка (2.5) получается из (21.1) за счет мажорирования логарифма величиной $2W_0$ и перехода к $C(n) > 4e^2 C(n-1)$.

При $0.16 \leq A_n \leq 1$ мы, заменяя в (21.1) величину A_n под знаком логарифма на 1 и добавляя лишний множитель A_n при переходе к $C(n)$, тоже получаем (2.5), что полностью доказывает случай $b_n = 0$.

Пусть далее $1 < r < n$. Мы можем также считать $b_i \neq 0$, $i > r$, иначе нулевые слагаемые можно исключить из линейной формы, а из оценки – множители $A_i \geq 0.16$, что компенсируется улучшением оценки при переходе к $C(n')$ с меньшим числом слагаемых n' . Случай $b_n = 0$ здесь аналогичен ситуации, когда $r = n$.

Кроме того, с учетом (2.4) для зависимых логарифмов получаем неравенство

$$A_1 \dots A_n \xi_0(r) 0.16^{r-n} D \ln(e^{n+4} D) \geq 1 \quad (21.2)$$

и аналогичные оценки для меньшего числа сомножителей.

Предварительная часть доказательства проводится, как в § 6, только с использованием (21.2) вместо (5.1), (5.2). Мы также можем считать выполненными условия (6.1)–(6.4) с заменой (ввиду (21.2)) условия (6.2) на условие

$$B \geq 0.99 \frac{1}{n \xi_0(r)} 0.16^{n-r} C(n) C_0 D,$$

или, округляя с учетом $r > 1$, на условие

$$B \geq B_0 = 0.16^n C(n) C_0 D / n. \quad (21.3)$$

Итак, пусть имеются целочисленные соотношения вида

$$\Lambda_i = x_{i,1} \ln \alpha_1 + \dots + x_{i,r} \ln \alpha_r - x_{i,i} \ln \alpha_i = 0, \quad x_{i,i} \neq 0, \quad r < i \leq n.$$

Однако их коэффициенты могут быть не столь малыми, как требуется. Поэтому мы возьмем независимые целочисленные соотношения, удовлетворяющие условиям леммы 4.3:

$$\Lambda'_i = m_{i,1} \ln \alpha_1 + \dots + m_{i,n} \ln \alpha_n = 0, \quad 1 \leq i \leq n-r.$$

Поскольку линейные формы Λ'_i имеют максимальный ранг, то через них выражаются и Λ_i . Отсюда следует, что у матрицы коэффициентов $(m_{i,j})$ минор с индексами $j > r$ ненулевой.

Теперь построим новую линейную форму

$$\begin{aligned} \Lambda' &= z_0 \Lambda = z_0 \Lambda - z_1 \Lambda'_1 - \dots - z_{n-r} \Lambda'_{n-r} \\ &= b'_1 \ln \alpha_1 + \dots + b'_n \ln \alpha_n \neq 0, \quad z_0, \dots, z_{n-r} \in \mathbb{Z}, \quad z_0 \neq 0, \end{aligned}$$

с условием $b'_{r+1} = \dots = b'_n = 0$. Для этого достаточно положить согласно правилу Крамера $z_0 = \Delta$, где Δ – вышеупомянутый ненулевой минор, а z_i получается заменой в миноре i -й строки на строку коэффициентов b_j , $j > r$.

Поскольку $\Lambda' \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $b'_r \neq 0$. Положим

$$B' = |\mathbf{b}'|_A / A_r = \max\{|b_j|_A / A_r : 1 \leq j \leq r\} \geq 1, \\ W'_0 = \ln(1.5eB'D \ln(eD)).$$

ЛЕММА 21.1. *С учетом принятых обозначений и допущений (2.4), (6.1) при $1 < r < n$ выполняется*

$$W'_0 \leq \frac{3}{4}n \ln(1.5eBA_nD \ln(eD)). \quad (21.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством (4.1), леммой 5.3, а также формулой Стирлинга и неравенством $\binom{n}{r} \leq n^r / r!$:

$$\prod_{i=1}^{n-r} |\mathbf{m}_i|_A \leq 2.2 \cdot 3^{r/2} \binom{n}{r}^{1/2} \left(\frac{9}{8} D^{3/2} \ln(eD) \right)^r \frac{(r/2)!}{\pi^{r/2}} A_1 \dots A_n \\ \leq 4\sqrt{n}(nR)^{r/2} A_1 \dots A_n, \quad R = D^3 \ln^2(eD). \quad (21.5)$$

Для оценки коэффициентов z_i из представления формы Λ' применим лемму 4.4 с max-нормой для последних $n - r$ коэффициентов. Тогда

$$|z_0| \leq n^{(n-r)/2} \frac{|\mathbf{m}_1|_A \dots |\mathbf{m}_{n-r}|_A}{A_{r+1} \dots A_n}, \quad (21.6)$$

откуда

$$|z_0 b_j|_A \leq BA_n n^{(n-r)/2} \frac{|\mathbf{m}_1|_A \dots |\mathbf{m}_{n-r}|_A}{A_{r+1} \dots A_n}.$$

Так же оцениваются величины $|z_i m_{i,j}|_A$, $1 \leq i \leq n - r$; $1 \leq j \leq r$. Поэтому

$$B' = |\mathbf{b}'|_A / A_r \leq BA_n n^{1+(n-r)/2} \frac{|\mathbf{m}_1|_A \dots |\mathbf{m}_{n-r}|_A}{A_r A_{r+1} \dots A_n}.$$

Теперь применим неравенство (21.5). При этом один множитель A_n сократится, для множителя $A_1 \dots A_{n-1}$ в числителе применим оценку (6.4), для A_r в знаменателе применим (5.3), а для остальных A_j в знаменателе воспользуемся оценкой $A_j \geq 0.16$ ($r < j < n$). Тогда

$$B' \leq BA_n n^{1+(n-r)/2} 4\sqrt{n}(nR)^{r/2} \frac{A_1 \dots A_{n-1}}{A_r \dots A_{n-1}} \\ \leq 4BA_n n^{(n+3)/2} R^{(n-1)/2} 0.16^{3-n} \frac{1.5D \ln(eD) Bn}{0.99C(n) D^2 C_0 W_0} \\ = f_0(B, A_n, D, n).$$

Для завершения доказательства неравенства (21.4) покажем, что

$$f_1(B, A_n, D, n) = (1.5eBA_nD \ln(eD))^{3n/4} \geq f_0.$$

Заметим, что в f_0 множитель A_n входит в первой степени, а в f_1 – в степени $3n/4 \geq 2$. Поэтому для проверки неравенства $f_1 > f_0$ следует взять минимально возможное $A_n = 0.16$. Аналогично для B тоже надо взять минимально возможное значение, определяемое из условия (21.3), и подставить B_0 в W_0 . После такой подстановки зависимость от D в f_1/f_0 станет равной

$$\frac{(D^2 C_0 \ln(eD))^{3n/4} D^2 C_0 W_0}{(C_0 D)^2 D \ln(eD) (D^3 \ln^2(eD))^{(n-1)/2}},$$

и с учетом $C_0 > \ln(eD)$, $n \geq 3$, вышеприведенное выражение растет с ростом D . Поэтому далее можно считать $D = 1$.

После указанных подстановок B, A_n, D получаем

$$\begin{aligned} f_1/f_0 &\geq (1.5e0.16^{n+1}C(n)C_0/n)^{3n/4-2} \\ &\quad \times 0.99 \frac{1}{4} n^{-(n+5)/2} 0.16^{n-2} C(n) C_0 W_0 \\ &\geq (0.5n^{-2}0.16^n C(n) C_0)^{3n/4-2} \\ &\quad \times 0.24n^{n/4-9/2} 0.16^{n-2} C(n) C_0 W_0 \geq 1, \end{aligned}$$

где каждая строка ≥ 1 за счет роста $C(n)$. Лемма 21.1 доказана.

В Λ' появился дополнительный множитель z_0 , оцениваемый с помощью (21.5), (21.6) аналогично оценке B' :

$$\begin{aligned} |z_0| &\leq n^{(n-r)/2} 4\sqrt{n}(nR)^{r/2} \frac{A_1 \dots A_n}{A_{r+1} \dots A_n} \\ &\leq 4\sqrt{nn}^{n/2} (D^3 \ln^2(eD))^{r/2} 0.16^{r-n} A_1 \dots A_n \\ &\leq e^{2(n-1)C_0} e^{\Omega/e} \leq e^{2n\varepsilon_1 G} \end{aligned}$$

(ε_1, G из § 12).

Применим теперь к Λ' теорему 2.1 с заменой n на r . Тогда с учетом (21.4) и $A_j \geq 0.16$ (при $j > r$) получаем

$$\begin{aligned} -\ln |\Lambda| &\leq \ln |z_0| - \ln |\Lambda'| \leq 2n\varepsilon_1 G + C(r) D^2 A_1 \dots A_r C_0 W'_0 \\ &\leq 2n\varepsilon_1 G + \frac{3}{4} n C(n-1) D^2 A_1 \dots A_{n-1} C_0 \ln(1.5eBA_nD \ln(eD)) \\ &\leq \frac{1}{6} n C(n) D^2 A_1 \dots A_n C_0 \ln(1.5eBD \ln(eD)), \end{aligned}$$

что доказывает (2.5) в случае зависимых логарифмов. Здесь мы поступили с коэффициентом A_n так, как в случае $r = n$, $b_n = 0$, а также применили неравенство

$$2n\varepsilon_1 C(n) + \frac{3}{4 \cdot 0.16} n C(n-1) \leq \frac{1}{6} n C(n).$$

Для доказательства следствия 2.3 заметим, что ввиду (21.3) можно считать $W_0 \leq 2 \ln(eB)$, поэтому достаточно проверить для $n \geq 2$, $\varkappa \leq 2$ неравенство

$$2C(n, \varkappa)C_0(n, D) \min\{1, n/6\} \leq C_1(n, \varkappa) \ln(eD). \quad (21.7)$$

С учетом очевидного неравенства $C_0(n, D) \leq C_0(n, 1) \ln(eD)$ для проверки (21.7) достаточно рассмотреть $D = 1$. Далее, главная зависимость от n в $C(n)$ имеет вид $(4e^2)^n$, при этом $4e^2 = 29.5 \dots < 30$. Значит, (21.7) выполняется для больших n , а при малых n оценка (21.7) проверяется непосредственным вычислением. Это доказывает (2.6).

Чтобы заменить B на B^* из (1.4), достаточно считать (меняя при необходимости местами слагаемые), что A_n – максимальное из A_j (если для всех A_j имеем (2.4), то они становятся равноправными). Тогда $B \leq B^*$, откуда получаем последнее утверждение следствия.

§ 22. Дополнение

В данном параграфе доказываются результаты геометрического характера, относящиеся преимущественно к предшествующим работам автора.

Оценка объема усеченного множества $\mathcal{W}_0$ из § 10 была получена в [1] с помощью теоремы Брунна–Минковского. Также эта теорема была использована в работах автора [5], [8]. Поскольку там применение теоремы было не прямым и не столь очевидным, мы считаем полезным явно сформулировать и доказать соответствующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.1 (теорема Брунна–Минковского [21, теорема 21.1]). *Пусть в $\mathbb{R}^d$ даны компактные выпуклые тела K_1, K_2 . Тогда для любых $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $(\lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ справедливо неравенство*

$$\text{Vol}_d^{1/d}(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) \geq \lambda_1 \text{Vol}_d^{1/d} K_1 + \lambda_2 \text{Vol}_d^{1/d} K_2.$$

Мы использовали следующий результат.

ЛЕММА 22.2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны d -мерное подпространство $\mathcal{V}$ ($1 \leq d < n$) и компактное выпуклое тело $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}^\perp$ – ортогональное дополнение $\mathcal{V}$, $f(\mathbf{v}) = \text{Vol}_d^{1/d}(\mathcal{W} \cap (\mathbf{v} + \mathcal{V}))$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^\perp$. Тогда $f(\mathbf{v})$ – выпуклая вверх функция на множестве $\mathcal{W}''$, являющемся проекцией $\mathcal{W}$ на $\mathcal{V}^\perp$.*

Если $\mathcal{W}$ – $\mathbf{0}$ -симметричное выпуклое тело, то для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^\perp$, $\mathbf{v} \neq 0$, функция $f(t\mathbf{v})$ убывает при $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K(\mathbf{v}) = \mathcal{W} \cap (\mathbf{v} + \mathcal{V})$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^\perp$, K' – проекция K на $\mathcal{V}$. Поскольку проекция сохраняет выпуклость, линейные соотношения между множествами и d -мерные объемы тел, расположенных вдоль $\mathcal{V}$, то по теореме 22.1 для $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{v}_2) &= \lambda_1 \text{Vol}_d^{1/d} K(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 \text{Vol}_d^{1/d} K(\mathbf{v}_2) \\ &= \lambda_1 \text{Vol}_d^{1/d} K'(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 \text{Vol}_d^{1/d} K'(\mathbf{v}_2) \\ &\leq \text{Vol}_d^{1/d}(\lambda_1 K'(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 K'(\mathbf{v}_2)) = \text{Vol}_d^{1/d}(\lambda_1 K(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 K(\mathbf{v}_2)) \\ &\leq \text{Vol}_d^{1/d} K(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) = f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется в силу выпуклости $\mathcal{W}$.

Для симметричного тела $\mathcal{W}$ функция $f(t\mathbf{v})$ выпукла вверх в области $f(t\mathbf{v}) > 0$ и четна по t , откуда следует второе утверждение леммы.

Использование леммы 22.2 в § 10 состояло в том, что при отсечении краев у выпуклого тела $\mathcal{W}$ остается тело $\mathcal{W}_0$ достаточно большого объема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.3. В общем случае из (5.4) имеем

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 \leq \sum^{(*)} y_\sigma^2 + \left(\sum^{(+)} x_\sigma \right)^2 + \left(\sum^{(-)} x_\sigma \right)^2 \leq (k+2)\|\mathbf{v}\|^2$$

(в суммах $\sum^{(\pm)}$ сгруппированы слагаемые, имеющие одинаковый знак). Поэтому если $\|\mathbf{e}_j\| \leq 1$, $1 \leq j \leq r$, то $\|\mathbf{e}_j\|_2 \leq (k+2)^{1/2}$, $1 \leq j \leq r$, и объем построенного на них параллелепипеда не больше $(k+2)^{r/2}$. Это доказывает оценку для шара $\mathcal{B}(\|\cdot\|, r)$.

Для оценки объема решеток достаточно указать в пространстве $\mathcal{V}_r = \langle \mathbf{M} \rangle_{\mathbb{R}}$ тело $\mathcal{S}_r$, удовлетворяющее условию $2\mathcal{S}_r \cap \mathbf{M} = \{\mathbf{0}\}$. Тогда по теореме Минковского $\text{Vol}_r \mathbf{M} \geq \text{Vol}_r \mathcal{S}_r$.

Возьмем в случае $\mathbb{Q}$ тело

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{E}_1(\mathbb{Q}^+): |x_\sigma| < \frac{1}{2} \ln p_\sigma, \quad \sigma > 1 \right\},$$

а если в $\mathbb{Q}$ можно брать отрицательные числа, то добавим условие

$$|y_1| < \frac{1}{2} \pi.$$

Тогда при сечении $\mathcal{S}$ каким-либо r -мерным подпространством получается тело объема не менее $P_1 \dots P_r$ (согласно лемме Ваалера о сечениях куба [22] случай параллелепипеда см. в [8, лемма 7] или [23, оценка (3.2)]). Кроме того, ясно, что $\mathbf{M}_{\mathcal{X}}(\mathbb{Q}) \cap 2\mathcal{S} = \{\mathbf{0}\}$, откуда следует (5.6).

В случае $D > 1$ рассмотрим тело

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\mathbb{K}): \|\mathbf{v}\|_2 < R \}, \quad R = \left(\frac{9}{8} D^{3/2} \ln(eD) \right)^{-1},$$

и покажем, что $\mathbf{M}_{\mathcal{X}}(\mathbb{K}) \cap 2\mathcal{S} = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha)$. Если α не единица, то для какой-либо p -адической координаты имеем $|x_\sigma| \geq \ln 2 > 2R$, поэтому $\mathbf{x} \notin 2\mathcal{S}$. Так что далее считаем α единицей, т.е. $x_\sigma = 0$, $\sigma > D$.

Для $D = 2, 3$ малые алгебраические числа известны. Здесь, если α не корень из 1, то при $D = 2$ имеем $\max |x_\sigma| > 0.48$ (минимум достигается для корня уравнения $x^2 - x - 1 = 0$), а при $D = 3$ имеем $\max |x_\sigma| > 0.28$ (минимум достигается для корня уравнения $x^3 - x - 1 = 0$); в обоих случаях $\max |x_\sigma| > 2R$. Для $\alpha \neq 1$, являющегося корнем из 1, здесь имеем $|\ln \alpha| \geq \pi/3$. Во всех случаях получаем $\|\mathbf{x}(\alpha)\|_2 > 2R$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{X}}(\mathbb{Q}) \cap 2\mathcal{S} = \{\mathbf{0}\}$.

Если $D \geq 4$ и $\mathbf{x}(\alpha) \in 2\mathcal{S}$, то $x_1^2 + \dots + x_D^2 < (2R)^2$, значит, $|x_1| + \dots + |x_D| < 2R\sqrt{D}$ и $D \ln(\alpha) < R\sqrt{D}$. Кроме того, $|\ln \alpha| = |z_1| < 2R \leq R\sqrt{D}$, значит, $\mathbf{H}_{\mathcal{X}}(\alpha) < R\sqrt{D}$ и согласно предложению 5.2 $\alpha = 1$.

Теперь, рассматривая $\mathcal{S}_r = \mathcal{S} \cap \langle \mathbf{M} \rangle_{\mathbb{R}}$, получаем шар радиуса R , объем которого представлен правой частью неравенства (5.5).

ПРИМЕЧАНИЕ. Лемма 5.3 дает рабочую формулу для оценки с помощью леммы 4.2 коэффициентов в соотношениях между логарифмами. Следует отметить, что в аналогичных оценках из [8] (теоремы 4 и 6), получающихся соединением леммы 4.2 и теоремы Минковского, был пропущен множитель, соответствующий объему единичного шара нормы. Теорема 5 из [8] верна, поскольку аналогична случаю $\mathbb{Q}^+$ леммы 5.3, только нумеровать в ней следует простые идеалы поля, а не простые числа. Исправленная версия теоремы 4 из [8] указана в [23] (без явной рабочей формулы).

Отметим, что для доказательства леммы 5.3 мы взяли обычный шар, сечения которого также являются шарами, а формула для их объема известна. При доказательстве аналогичной леммы в работе [2] был фактически взят куб, вписанный в наш шар, что привело к худшей оценке.

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю.В. Нестеренко, сделавшему ряд ценных замечаний.

Список литературы

1. Матвеев Е. М. Явная нижняя оценка однородной рациональной линейной формы от логарифмов алгебраических чисел // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 4. С. 81–136.
2. Waldschmidt M. A lower bound for linear forms in logarithms // Acta Arithm. 1980. V. 37. P. 257–283.
3. Матвеев Е. М. Оценка линейной формы от логарифмов алгебраических чисел: Тез. докл. всесоюз. конф. “Теория трансцендентных чисел и ее приложения” (М., 2–4 февр. 1983 г.). М.: Изд-во МГУ, 1983.
4. Baker A., Wüstholz G. Logarithmic forms and group varieties // J. reine angew. Math. 1993. V. 442. P. 19–62.
5. Матвеев Е. М. О последовательных минимумах расширенной логарифмической высоты алгебраических чисел // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 3. С. 89–108.
6. Feldman N. I. Approximations of number π by algebraic numbers from special fields // J. Number Theory. 1977. V. 9. № 1. P. 48–60.
7. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
8. Матвеев Е. М. О линейных и мультипликативных соотношениях // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 4. С. 23–40.
9. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972.
10. Ленг С. Основы диофантовой геометрии. М.: Мир, 1986.
11. Матвеев Е. М. Об алгебраических числах малой логарифмической высоты // Диофантовы приближения: Сб. статей, посвященных памяти Н. И. Фельдмана / Ред. Ю. В. Нестеренко. М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 90–98.
12. Гельфонд А. О., Фельдман Н. И. О нижних границах линейных форм от трех логарифмов алгебраических чисел // Вестн. МГУ. Сер. матем., механ. 1949. № 5. С. 13–16; см. также Гельфонд А. О. Избранные труды. М.: Наука, 1973. С. 155–158.
13. Матвеев Е. М. Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 76–81.
14. Baker A. A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms. III // Acta Arithm. 1975. V. 27. P. 247–252.
15. Baker A., Stark H. M. On a fundamental inequality in number theory // Ann. of Math. 1971. V. 94. P. 190–199.
16. Bombieri E., Vaaler J. On Siegel’s Lemma // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 11–32; Addendum in: Invent. Math. 1984. V. 75. P. 377.
17. Yu Kumru. p -adic logarithmic forms and group varieties. I // J. reine angew. Math. 1998. V. 502. P. 29–92.

18. *Waldschmidt M.* Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques // *Canad. J. Math.* 1993. V. 45. № 1. P. 176–224.
19. *Wüstholz G.* A new approach to Baker's theorem on linear forms in logarithms. III // *New advances in transcendence theory* / Ed. A. Baker. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. P. 399–410.
20. *Леўxmөөейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
21. *Vaaler J. D.* A geometric inequality with application to linear forms // *Pacific. J. Math.* 1979. V. 83. P. 543–553.
22. *Bertrand D.* Duality on tori and multiplicative dependence relations // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* 1997. V. 62. P. 198–216.
23. *Meyer M., Pajor A.* Sections of the unit ball of l_p^n // *J. Func. Anal.* 1988. V. 80. P. 109–123.

Московский государственный текстильный
университет им. А. Н. Косыгина

Поступило в редакцию
31.VIII.1999
12.VII.2000