Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Мусин, Теорема типа Пэли–Винера для весового пространства бесконечно дифференцируемых функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 6, 181–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 03:15:11

УДК 517.982.3

И. Х. Мусин

Теорема типа Пэли–Винера для весового пространства бесконечно дифференцируемых функций

С помощью преобразования Фурье–Лапласа дается описание сопряженного пространства к весовому неквазианалитическому пространству бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Пусть $M_0 = 1$, $M_1, M_2, \dots$ – заданная возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям:

$$(M1) \quad M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$(M2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty;$$

$$(M3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{M_{k+1}}{M_k} \right)^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Полагая $M_k = (k!)^s$ или $M_k = k^{ks}$, $k \in \mathbb{N}$, получим при $s > 1$ важные примеры последовательностей, удовлетворяющих условиям (M1)–(M3).

Из условия (M1) легко следует неравенство

$$M_p M_q \leq M_{p+q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

В силу условия (M1) последовательность $\left\{ \frac{M_k}{M_{k+1}} \right\}_{k=0}^{\infty}$ невозрастающая, что вместе с условием (M2) дает $k \frac{M_k}{M_{k+1}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^{\frac{1}{k}} = \infty. \quad (2)$$

Положим

$$w(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k}, \quad r > 0, \quad w(0) = 0.$$

Согласно [1] (лишь при выполнении условий (M1) и (M2))

$$|w(|z_1|) - w(|z_2|)| \leq c_w |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00655).

где $c_w > 0$ – некоторая постоянная. Непрерывность функции $w(r)$, $r \geq 0$, отмечалась ранее в [2]. Очевидно, $w(|z|)$ – субгармоническая функция в комплексной плоскости.

Обозначим через $D(z, t)$, $z \in \mathbb{C}$, $t > 0$, открытый круг радиуса t с центром в точке z , через $\partial D(z, t)$ – его границу.

Всюду далее $\alpha > 1$ – фиксированное число.

Пусть $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ – выпуклая функция, $\psi(0) = 0$, удовлетворяющая условиям:

1) существует постоянная $A_\psi > 0$ такая, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq A_\psi(1 + |x_1| + |x_2|)^{\alpha-1}|x_1 - x_2|; \quad (4)$$

2) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{|x|} = +\infty$.

Для выпуклой функции g на вещественной прямой такой, что $g(x)/|x| \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$, пусть $g^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}}(xy - g(y))$, $x \in \mathbb{R}$, – преобразование Юнга функции g . Известно [3], что g^* – выпуклая функция, $g^*(x)/|x| \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$ и справедлива формула обращения преобразования Юнга: $(g^*)^* = g$.

Положим $\varphi = \psi^*$. Из неравенства (4) следует, что при некоторых положительных A_φ, B_φ

$$\varphi(x) > A_\varphi|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - B_\varphi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Как обычно, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с топологией компактной сходимости всех производных, $C(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных функций на вещественной прямой, $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах комплексной плоскости. Для произвольного локально выпуклого пространства X через X^* обозначаем сильное сопряженное пространство.

Пусть всюду далее $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ – строго убывающая к нулю последовательность положительных чисел, а σ – положительное число. Для краткости положим $\theta_m(x) = \exp(\varphi(x) - m \ln(1 + |x|))$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

Введем нормированные пространства

$$G_m = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \|f\|_{G,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Через G обозначим проективный предел пространств G_m относительно вложений $i_{mn}: G_m \rightarrow G_n$, $m > n$. Ясно, что определение пространства G не зависит от выбора конкретной последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$.

Положим $w_m(|z|) = w((\sigma + \varepsilon_m)^{-1}|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$.

Введем нормированные пространства

$$P_m = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|))} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Через P обозначим индуктивный предел пространств P_m относительно вложений $\gamma_{mn}: P_m \rightarrow P_n$, $m < n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразование Фурье–Лапласа $\widehat{T}$ функционала $T \in G^*$ определяется формулой

$$\widehat{T}(z) = T(e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В данной работе получена следующая

ТЕОРЕМА. Преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространствами G^* и P .

Доказательство этой теоремы дано в § 4. В § 2 приводятся вспомогательные утверждения. В § 3 доказывается полнота многочленов в G , что также используется при доказательстве теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Метод работы [4] позволяет описывать с помощью преобразования Фурье–Лапласа сопряженное пространство к пространству $G(\Phi)$ – проективному пределу нормированных пространств,

$$G(\varphi_m) = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \|f\|_{\varphi_m} = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \exp(\varphi_m(x))} < \infty \right\},$$

где $\Phi = \{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – семейство неотрицательных выпуклых функций таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

- 1) $\varphi_{m+1}(x) < \varphi_m(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
- 2) $\frac{\varphi_m(x)}{|x|} \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$;
- 3) существуют $\eta > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $\sup_{|y| \leq 1} \varphi_n(x+y) + \eta|x| \leq \varphi_m(x)$.

Для применения этого метода третье условие существенно. В нашей задаче это условие не имеет места.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При доказательстве сюръективности преобразования Фурье–Лапласа эффективным оказалось использование разложения целых функций из пространства P в интерполяционный ряд Лагранжа. Этот способ ранее был использован в работах [1] и [5], в которых дано описание сопряженных пространств к невесовым пространствам бесконечно дифференцируемых функций с оценками на производные на конечном интервале числовой оси. В связи с применением этого способа в данной статье важную роль сыграл результат, полученный М. И. Соломешем (см. [6, гл. 2, § 3], [7]). Кратко опишем его.

Пусть f – произвольная целая функция с нулями $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ соответствующих кратностей $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$, $f(0) \neq 0$. Разложение Вейерштасса функции f имеет вид [8, с. 17]

$$f(\lambda) = g(\lambda) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^{m_j} \exp\left(P_j\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где g – целая функция, не имеющая нулей, P_j – специальным образом подобранные полиномы, $j \in \mathbb{N}$. Пусть последовательность $t = \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ комплексных чисел такова, что $\lambda_j + t_j \neq 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Функции f сопоставляется произведение

$$f_t(\lambda) = g(\lambda) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j + t_j}\right)^{m_j} \exp\left(P_j\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В этих предположениях приведем результат М. И. Соломеша в удобной для нас формулировке.

ТЕОРЕМА S. Пусть $\lambda_j + t_j$ лежат в непересекающихся попарно кружках $D(\lambda_j, r_j)$, $r_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j |t_j|}{r_j} < \infty$.

Тогда f_t – целая функция, причем для λ вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D(\lambda_j, r_j)$

$$|\ln |f_t(\lambda)| - \ln |f(\lambda)|| \leq C,$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная.

Автор признателен В. В. Напалкову за внимание, проявленное к работе.

§ 2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Для любых $A > 0$, $m \in \mathbb{N}$ существует неотрицательная постоянная $Q = Q(m, A)$ такая, что

$$w_m(|z|) + A \ln(1 + |z|) \leq w_{m+1}(|z|) + Q, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k_0(r) = \min \left\{ k \in \mathbb{Z}_+ : w(r) = \ln \frac{r^k}{M_k} \right\}$, $r > 0$. Тогда $\frac{r^{k_0(r)}}{M_{k_0(r)}} \geq \frac{r^{k_0(r)+1}}{M_{k_0(r)+1}}$. Следовательно, $r \leq \frac{M_{k_0(r)+1}}{M_{k_0(r)}}$. Из этого неравенства, пользуясь (МЗ), для любого $\delta > 0$ найдем $A_\delta > 0$ такое, что $r \leq A_\delta(1 + \delta)^{k_0(r)}$. Отсюда $k_0(r) \geq \frac{\ln(r/A_\delta)}{\ln(1+\delta)}$. Полагая $r = \frac{|z|}{\sigma + \varepsilon_m}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} w_{m+1}(|z|) - w_m(|z|) &\geq \ln \left(\left(\frac{|z|}{\sigma + \varepsilon_{m+1}} \right)^{k_0(r)} \frac{1}{M_{k_0(r)}} \right) \\ &- \ln \left(\left(\frac{|z|}{\sigma + \varepsilon_m} \right)^{k_0(r)} \frac{1}{M_{k_0(r)}} \right) = k_0(r) \ln \frac{\sigma + \varepsilon_m}{\sigma + \varepsilon_{m+1}} \geq \frac{\ln \frac{|z|}{A_\delta(\sigma + \varepsilon_m)}}{\ln(1 + \delta)} \ln \frac{\sigma + \varepsilon_m}{\sigma + \varepsilon_{m+1}}. \end{aligned}$$

Теперь, подобрав достаточно малое δ и подходящую постоянную $Q = Q(m, A) \geq 0$, добьемся выполнения неравенства

$$w_{m+1}(|z|) - w_m(|z|) \geq A \ln(1 + |z|) - Q, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма доказана.

Изучаемые далее пространства G и P принадлежат специальным классам локально выпуклых пространств, сведения о которых имеются в [9].

ЛЕММА 2. Пространство G – пространство (M^*) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению пространства (M^*) надо показать, что вложения $i_{m+1,m} : G_{m+1} \rightarrow G_m$ вполне непрерывны для каждого $m \in \mathbb{N}$, т.е. образ шара $\mathcal{B}_r = \{f \in G_{m+1} : \|f\|_{G,m+1} \leq r\}$, $r > 0$, при отображении $i_{m+1,m}$ относительно компактен в G_m .

Пользуясь теоремой Арцела–Асколи, выделим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}_r$, сходящуюся в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ к $f_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что $\|f_0\|_{G,m+1} \leq r$.

Покажем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в G_m к f_0 при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем $a > 0$ и натуральное p так, что $(a+1)^{-1} < \frac{\varepsilon}{2r}$, $\left(\frac{\sigma+\varepsilon_{m+1}}{\sigma+\varepsilon_m}\right)^p < \frac{\varepsilon}{2r}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{|x|>a, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f_n^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} &\leq 2r \sup_{|x|>a, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(\sigma + \varepsilon_{m+1})^k}{(\sigma + \varepsilon_m)^k (1 + |x|)} \\ &< 2r \sup_{|x|>a} (1 + |x|)^{-1} < \varepsilon, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \leq a, k > p} \frac{|f_n^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} &\leq 2r \sup_{|x| \leq a, k > p} \frac{(\sigma + \varepsilon_{m+1})^k}{(\sigma + \varepsilon_m)^k (1 + |x|)} \\ &< 2r \sup_{k > p} \frac{(\sigma + \varepsilon_{m+1})^k}{(\sigma + \varepsilon_m)^k (1 + |x|)} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ к f_0 при $n \rightarrow \infty$, то найдется такое натуральное $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\sup_{|x| \leq a, 0 \leq k \leq p} \frac{|f_n^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} < \varepsilon. \quad (8)$$

Из оценок (6)–(8) следует, что $\|f_n - f_0\|_{G,m} < \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Таким образом, из шара $\mathcal{B}_r$ в G_{m+1} удалось выделить последовательность, сходящуюся в G_m . Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 и [9, теорема 5] имеем

СЛЕДСТВИЕ. *Пространство G^* – пространство (LN^*) .*

ЛЕММА 3. *Пространство P – пространство (LN^*) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что вложения $\gamma_{m,m+1}: P_m \rightarrow P_{m+1}$ вполне непрерывны при любом натуральном m , т.е. образ шара $U_r = \{f \in P_m : \|f\|_m \leq r\}$, $r > 0$, при отображении $\gamma_{m,m+1}$ относительно компактен в P_{m+1} .

По теореме Монтеля выделим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset U_r$, сходящуюся в $H(\mathbb{C})$ к $f_0 \in H(\mathbb{C})$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что $\|f_0\|_m \leq r$.

Покажем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в P_{m+1} к f_0 при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Для любого $a > 0$

$$\sup_{|z|>a} \frac{|f_n(z) - f_0(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|))} \leq 2r \sup_{|z|>a} \exp(w_m(|z|) - w_{m+1}(|z|)). \quad (9)$$

Учитывая лемму 1, выберем a настолько большим, что правая часть последнего неравенства станет меньше ε . Далее, в силу равномерной сходимости на компактах последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ к f_0 при $n \rightarrow \infty$ существует такое натуральное $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\sup_{|z| \leq a} \frac{|f_n(z) - f_0(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|))} < \varepsilon. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что $\|f_n - f_0\|_{m+1} < \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Таким образом, из шара U_r в P_m удалось выделить последовательность, сходящуюся в P_{m+1} . Это означает, что множество $\gamma_{m,m+1}(U_r)$ относительно компактно в P_{m+1} . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть числа $m_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$ таковы, что для $T \in G^*$ выполнено неравенство

$$|T(f)| \leq c \|f\|_{G, m_0}, \quad f \in G.$$

Тогда функционал T представляется в виде

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma + \varepsilon_{m_0})^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^{(k)}(x)}{\theta_{m_0}(x)} d\mu_k(x), \quad f \in G, \quad (11)$$

где μ_k – комплексные ограниченные меры в $\mathbb{R}$, причем $\int_{\mathbb{R}} d|\mu_k|(x) \leq c$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$E = \left\{ \underline{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots), \quad f_k \in C(\mathbb{R}), \quad k \in \mathbb{Z}_+ : \right. \\ \left. \|\underline{f}\|_{m, E} = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f_k(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

– пространство последовательностей, наделенное топологией, определяемой системой норм $\|\underline{f}\|_{m, E}$, $m \in \mathbb{N}$, $\underline{f} \in E$.

Каждой функции $f \in G$ поставим в соответствие последовательность $\tilde{f} = (f, f', \dots, f^{(k)}, \dots)$. Это соответствие взаимно однозначно. Очевидно, $\tilde{f} \in E$. Множество $\tilde{G}$ таких последовательностей $\tilde{f}$ образует векторное подпространство в E . Если наделить $\tilde{G}$ топологией, индуцированной из E , то оно будет замкнутым подпространством в E .

Определим функционал $\tilde{T}$ на $\tilde{G}$ по формуле $\tilde{T}(\tilde{f}) = T(f)$, $f \in G$. Тогда $\tilde{T}$ – линейный непрерывный функционал на $\tilde{G}$.

По теореме Хана–Банаха продолжим $\tilde{T}$ до линейного непрерывного функционала $\underline{T}$ на E . Тогда

$$|\underline{T}(\underline{f})| \leq c \|\underline{f}\|_{m_0, E}, \quad \underline{f} \in E. \quad (12)$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ функционал $\underline{T}$ порождает линейный непрерывный функционал T_k на пространстве V_k всех непрерывных функций f на числовой прямой, для которых при любом $m \in \mathbb{N}$ конечны нормы

$$\|f\|_m^{(k)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)},$$

по правилу

$$T_k(f) = \underline{T}(i_k(f)), \quad f \in V_k,$$

где $i_k(f)$ – последовательность, $(k+1)$ -й член которой есть f , а все остальные компоненты – нули. В силу (12)

$$|T_k(f)| \leq c \|f\|_{m_0}^{(k)}, \quad f \in V_k. \quad (13)$$

Положим

$$g_f(x) = \frac{f(x)}{(\sigma + \varepsilon_{m_0})^k M_k \theta_{m_0}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in V_k.$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ определим функционал S_k на множестве

$$\tilde{V}_k = \left\{ g_f : g_f(x) = \frac{f(x)}{(\sigma + \varepsilon_{m_0})^k M_k \theta_{m_0}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in V_k \right\}$$

по правилу

$$S_k(g_f) = T_k(f), \quad f \in V_k.$$

В силу плотности $\tilde{V}_k$ в $C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty; f(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow +\infty\}$ из оценки (13) следует неравенство

$$|S_k(g)| \leq c \|g\|_0, \quad g \in C_0(\mathbb{R}).$$

По теореме Рисса функционал S_k имеет вид

$$S_k(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_k(x), \quad g \in C_0(\mathbb{R}),$$

где μ_k – комплексные ограниченные меры в $\mathbb{R}$, причем $\int_{\mathbb{R}} d|\mu_k|(x) \leq c$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда получаем, что функционал T_k представляется в виде

$$T_k(f) = \frac{1}{(\sigma + \varepsilon_{m_0})^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\theta_{m_0}(x)} d\mu_k(x), \quad f \in V_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как для $\underline{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots) \in E$ $\underline{T}(\underline{f}) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(f_k)$, то для $f \in G$

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma + \varepsilon_{m_0})^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^{(k)}(x)}{\theta_{m_0}(x)} d\mu_k(x).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Для любого $z \in \mathbb{C}$ функция $f_z(x) = \exp(-izx)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|f_z\|_{G,m} &= \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|(-iz)^k \exp(-izx)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} \\ &= \exp(w_m(|z|)) \exp \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \ln \theta_m(x)) \right), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Оценим $\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \ln \theta_m(x))$ сверху. Из оценки (5) следует, что при некоторых положительных $A_m(\varphi)$, $B_m(\varphi)$

$$\varphi(x) - m \ln(1 + |x|) \geq A_m(\varphi) |x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - B_m(\varphi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому найдется такое $y_m > 0$, что для всех $z \in \mathbb{C}$ таких, что $|\operatorname{Im} z| > y_m$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \varphi(x) + m \ln(1 + |x|))$ будет достигаться в некоторой точке x_m ,

лежащей на интервале $(-(2A_m^{-1}(\varphi)|\operatorname{Im} z|)^{\alpha-1}, (2A_m^{-1}(\varphi)|\operatorname{Im} z|)^{\alpha-1})$. Тогда при $|\operatorname{Im} z| > y_m$

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \varphi(x) + m \ln(1 + |x|)) - \sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \varphi(x)) \\ & \leq m \ln(1 + |x_m|) \leq m \ln(1 + (2A_m^{-1}(\varphi)|\operatorname{Im} z|)^{\alpha-1}) \\ & \leq m(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + m(\alpha - 1) \ln(1 + 2A_m^{-1}(\varphi)) + m \ln 2. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Юнга и выбирая подходящую постоянную $b_m > 0$, добьемся выполнения неравенства

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \ln \theta_m(x)) - \psi(\operatorname{Im} z) \leq m(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + b_m, \quad (14)$$

справедливого при всех $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\|f_z\|_{G,m} \leq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|) + m(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + b_m), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пользуясь леммой 1, найдем постоянную $q_m > 0$ такую, что

$$\|f_z\|_{G,m} \leq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|) + q_m), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Таким образом, $f_z \in G$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть числа $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ таковы, что для $T \in G^*$ выполнено неравенство

$$|T(f)| \leq c \|f\|_{G,m}, \quad f \in G. \quad (16)$$

Тогда $\hat{T}$ – целая функция, удовлетворяющая оценке

$$|\hat{T}(z)| \leq c \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|) + q_m), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (17)$$

где q_m – постоянная из оценки (15). Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\hat{T}^{(k)}(z) = T((-ix)^k e^{-ixz}), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая представление (11) функционала T , имеем

$$\hat{T}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-izx}}{\theta_m(x)} d\mu_k(x), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (19)$$

где μ_k – комплексные ограниченные меры в $\mathbb{R}$ такие, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\int_{\mathbb{R}} d|\mu_k|(x) \leq c. \quad (20)$$

Функция

$$V_k(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-izx}}{\theta_m(x)} d\mu_k(x), \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

– целая функция, так как подынтегральная функция – целая функция по $z \in \mathbb{C}$ при каждом $x \in \mathbb{R}$ и непрерывная по $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, а интеграл сходится равномерно по z на компактах комплексной плоскости в силу ограниченности меры μ_k и справедливой при любых $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ оценки

$$\left| \frac{e^{-izzx}}{\theta_n(x)} \right| \leq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + n(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + b_n), \quad (21)$$

вытекающей из (14). Из неравенств (20) и (21) следует, что семейство $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ равномерно ограничено в $H(\mathbb{C})$. Отсюда с учетом (2) следует, что ряд в правой части (19) сходится в топологии пространства $H(\mathbb{C})$. Следовательно, $\hat{T}$ – целая функция.

Оценка (17) следует из неравенств (15) и (16). Равенство (18) справедливо благодаря оценкам (20), (21) и проверяется непосредственно. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть целая функция $F \in P$ имеет вид $F(z) = U(z)V(z)$, $z \in \mathbb{C}$, где целые функции U , V при некоторых $m \in \mathbb{N}$, положительных C_U , C_V удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} |U(z)| &\leq \frac{C_U \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2}, & z \in \mathbb{C}, \\ |V(z)| &\leq C_V e^{w_m(|z|)}, & z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Тогда найдется функционал $T \in G^*$ такой, что $\hat{T} = F$, причем

$$|T(f)| \leq \beta_m C_U C_V \|f\|_{G, m+1}, \quad f \in G,$$

где β_m – некоторая постоянная, зависящая только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки модуля функции U стандартным образом (см., например, [10]–[12]) следует существование функции $p \in C(\mathbb{R})$ такой, что:

- 1) $\sup_{t \in \mathbb{R}} |p(t)| \exp(\varphi(t)) < C_U/2$;
- 2) $U(z) = \int_{\mathbb{R}} p(t) e^{-izt} dt$, $z \in \mathbb{C}$.

Далее оценим коэффициенты Тейлора целой функции $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$ по неравенству Коши:

$$|v_k| \leq C_V \inf_{r>0} \frac{\exp(w_m(r))}{r^k} = C_V (\sigma + \varepsilon_m)^{-k} \inf_{r>0} \frac{\exp(w(r))}{r^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пользуясь равенством (см. [2, с. 24])

$$\inf_{r>0} \frac{\exp(w(r))}{r^k} = \frac{1}{M_k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

получаем

$$|v_k| \leq C_V (\sigma + \varepsilon_m)^{-k} M_k^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (22)$$

Определим функционал T на пространстве G по формуле

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} p(t) \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^k f^{(k)}(t) dt, \quad f \in G.$$

Покажем, что функционал T определен корректно. Прежде всего, для любого $f \in G$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} i^k v^k f^{(k)}(t) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \|f\|_{G, m+1} (\sigma + \varepsilon_{m+1})^k M_k \theta_{m+1}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь оценкой (22), имеем для любого $f \in G$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} v_k i^k f^{(k)}(t) \right| \leq \beta_m C_V \|f\|_{G, m+1} \theta_{m+1}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\beta_m = \frac{\sigma + \varepsilon_m}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |T(f)| &\leq \beta_m C_V \|f\|_{G, m+1} \int_{\mathbb{R}} |p(t)| \exp(\varphi(t)) (1 + |t|)^{-(m+1)} dt \\ &\leq \beta_m C_U C_V \|f\|_{G, m+1}, \quad f \in G. \end{aligned}$$

Итак, $T \in G^*$. При этом

$$\hat{T}(z) = \int_{\mathbb{R}} p(t) \sum_{k=0}^{\infty} v_k i^k (-iz)^k e^{-izt} dt = U(z)V(z) = F(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма доказана.

§ 3. Полнота многочленов в G

При доказательстве полноты многочленов в G будет использована следующая

ЛЕММА 8. Пусть для функции g , определенной на вещественной прямой, при некоторых постоянных $A > 0$, B справедливо неравенство

$$g(x) > A|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - B, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда найдется постоянная C , зависящая только от A и B , такая, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (m \ln(1 + |x|) - g(x)) < (1 - \alpha^{-1})m \ln m + Cm.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} (m \ln(1 + |x|) - g(x)) &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (m \ln(1 + |x|) - A|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}) + B \\ &= B + \sup_{x \geq 0} (m \ln(1 + x) - Ax^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}) < B + 2m + \sup_{u > 0} (mu - Ae^{\frac{\alpha}{\alpha-1}u}) \\ &= B + 2m + (1 - \alpha^{-1})m \ln m - (1 - \alpha^{-1})m \ln((1 - \alpha^{-1})Ae). \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 9. *Многочлены плотны в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in G$, т.е. $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c_m > 0$ такая, что при всех $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|f^{(k)}(x)| \leq c_m(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x). \quad (23)$$

Приближим функцию f многочленами в G . Это будет проделано в несколько этапов.

Для $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$ положим $f_\delta(x) = f(\delta x)$, $x \in \mathbb{R}$. Из оценки (23) при любых $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|f_\delta^{(k)}(x)| \leq K_m \delta^k (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x), \quad (24)$$

где $K_m = 2^m c_m$. Таким образом, $f_\delta \in G$.

1) Покажем вначале, что $f_\delta \rightarrow f$ в G при $\delta \rightarrow 1$. В силу определения топологии в G для этого надо показать, что $f_\delta \rightarrow f$ в каждом G_m при $\delta \rightarrow 1$.

Итак, пусть взято произвольное $m \in \mathbb{N}$. Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|(f(x) - f_\delta(x))^{(k)}| \leq |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(\delta x)| + (1 - \delta^k) |f^{(k)}(\delta x)|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь неравенством (23) и формулой конечных приращений, оценим первое слагаемое в правой части последнего неравенства:

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(\delta x)| &= |f^{(k+1)}(\xi)| |x - \delta x| \\ &\leq c_{m+1}(1 - \delta)(\sigma + \varepsilon_{m+1})^{k+1} M_{k+1} \theta_{m+1}(\xi) |x|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

где точка $\xi = \xi(x)$ находится между x и δx . Пользуясь условием (МЗ) на последовательность $\{M_k\}_{k=0}^\infty$ и тем, что $\delta > \frac{1}{2}$, получим при некотором $\tilde{c}_m > 0$, не зависящем от x и k ,

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(\delta x)| \leq \tilde{c}_m(1 - \delta)(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_{m+1}(x) |x|, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, при $\delta \rightarrow 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(\delta x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} \rightarrow 0. \quad (25)$$

Из оценки (23) имеем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(\delta x)| (1 - \delta^k)}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} \leq 2^{m+1} c_{m+1} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\sigma + \varepsilon_{m+1}}{\sigma + \varepsilon_m} \right)^k (1 - \delta^k).$$

Правая часть в последнем неравенстве стремится к нулю при $\delta \rightarrow 1$. Отсюда и из (25) следует, что $f_\delta \rightarrow f$ при $\delta \rightarrow 1$ в G_m , а в силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ и в G .

2) Согласно [2, с. 105] существует неотрицательная четная функция $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $v(0) > 0$, такая, что для некоторых положительных чисел a , C_v при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ $v^{(k)}(\pm a) = 0$ и $|v^{(k)}(x)| \leq C_v \sigma^k M_k$, $x \in \mathbb{R}$.

Будем считать, что $\int_{\mathbb{R}} v(x) dx = 1$ и $\text{supp } v \subseteq [-a, a]$.

Пусть $\chi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[-2a, 2a]$. Положим

$$\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x-y)v(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\text{supp } \gamma \subseteq [-3a, 3a]$, $\gamma(x) = 1$ для $x \in [-a, a]$, $0 \leq \gamma(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и при $C_\gamma = 4aC_v$

$$|\gamma^{(k)}(x)| \leq C_\gamma \sigma^k M_k, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Зафиксируем $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Отметим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $n > \frac{1}{1-\delta}$, функция $f_{\delta,n}(x) = f_\delta(x)\gamma(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит G . Действительно, из неравенств (1), (24) и (26) при любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f_{\delta,n}^{(k)}(x)| &\leq \sum_{s=0}^k C_k^s |f_\delta^{(s)}(x)| n^{s-k} \left| \gamma^{(k-s)}\left(\frac{x}{n}\right) \right| \\ &\leq K_m C_\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \delta^s (\sigma + \varepsilon_m)^s M_s \theta_m(x) n^{s-k} \sigma^{k-s} M_{k-s} \\ &\leq K_m C_\gamma (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x) \sum_{s=0}^k C_k^s \delta^s \left(\frac{1}{n}\right)^{k-s} \\ &= K_m C_\gamma (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x) \left(\delta + \frac{1}{n}\right)^k \leq K_m C_\gamma (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x). \end{aligned}$$

Отметим неравенство

$$\sum_{s=0}^k C_k^s |f_\delta^{(s)}(x)| n^{s-k} \left| \gamma^{(k-s)}\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq K_m C_\gamma (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x), \quad (27)$$

справедливое для любых $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Покажем теперь, что $f_{\delta,n} \rightarrow f_\delta$ в G при $n \rightarrow \infty$. Пусть взято произвольное натуральное m . Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f_{\delta,n}(x) - f_\delta(x)|}{\theta_m(x)} \leq \sup_{|x| > an} \frac{|f_\delta(x)|}{\theta_m(x)} \leq \sup_{|x| > an} \frac{K_{m+1} \theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)} = \sup_{|x| > an} \frac{K_{m+1}}{1 + |x|}.$$

Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f_{\delta,n}(x) - f_\delta(x)|}{\theta_m(x)} \rightarrow 0. \quad (28)$$

Далее, пользуясь неравенствами (24) и (27), имеем

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}} \frac{|(f_{\delta,n}(x) - f_{\delta}(x))^{(k)}|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} = \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}} \frac{\left| \sum_{s=0}^{k-1} C_k^s f_{\delta}^{(s)}(x) n^{s-k} \gamma^{(k-s)}\left(\frac{x}{n}\right) + f_{\delta}^{(k)}(x) \left(\gamma\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \right|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} \\
&\leq \sup_{an < |x| < 3an, k \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{s=0}^{k-1} C_k^s |f_{\delta}^{(s)}(x)| n^{s-k} \left| \gamma^{(k-s)}\left(\frac{x}{n}\right) \right|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} \\
&\quad + \sup_{|x| > an, k \in \mathbb{N}} \frac{|f_{\delta}^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} \\
&\leq \sup_{an < |x| < 3an, k \in \mathbb{N}} \frac{C_{\gamma} K_{m+1} (\sigma + \varepsilon_{m+1})^k M_k \theta_{m+1}(x)}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} + \sup_{|x| > an} \frac{K_{m+1} \theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)} \\
&\leq \sup_{an < |x| < 3an} \frac{K_{m+1} C_{\gamma}}{1 + |x|} + \sup_{|x| > an} \frac{K_{m+1}}{1 + |x|}.
\end{aligned}$$

Из (28) и последней оценки следует, что $f_{\delta,n} \rightarrow f_{\delta}$ при $n \rightarrow \infty$ в G_m , а в силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ и в G .

3) Пусть теперь зафиксированы $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$ и натуральное $n > \frac{1}{1-\delta}$. Как уже было показано, финитная функция $u(x) = f_{\delta}(x) \gamma(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству G , и, значит, для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $A_m > 0$ такая, что при всех $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|u^{(k)}(x)| \leq A_m (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k. \quad (29)$$

Пусть h – не равная тождественно нулю четная целая функция экспоненциального типа 1, принадлежащая классу $L_1(\mathbb{R})$ и неотрицательная на вещественной прямой. Можно взять, например, $h(z) = \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$.

По теореме Пэли–Винера существует функция $g \in C(\mathbb{R})$ с носителем в $[-1, 1]$ такая, что

$$h(z) = \int_{-1}^1 g(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Так как

$$h^{(k)}(z) = \int_{-1}^1 g(t) (-it)^k e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

то

$$|h^{(k)}(x)| \leq C_g, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (30)$$

где $C_g = 2 \max_{|t| \leq 1} |g(t)|$.

Пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = A$. Для $\lambda > 0$ положим

$$u_{\lambda}(x) = \frac{\lambda}{A} \int_{\mathbb{R}} u(y) h(\lambda(x - y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, $u_\lambda \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Так как

$$u_\lambda^{(k)}(x) = \frac{\lambda}{A} \int_{\mathbb{R}} u^{(k)}(x-y) h(\lambda y) dy = \frac{\lambda}{A} \int_{\mathbb{R}} u^{(k)}(y) h(\lambda(x-y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

то из этого представления, учитывая (29), вытекает, что $u_\lambda \in G$.

Покажем теперь, что $u_\lambda \rightarrow u$ в G при $\lambda \rightarrow +\infty$. Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} u_\lambda^{(k)}(x) - u^{(k)}(x) &= \frac{\lambda}{A} \int_{\mathbb{R}} (u^{(k)}(y) - u^{(k)}(x)) h(\lambda(x-y)) dy \\ &= \frac{\lambda}{A} \int_{|y-x| \leq \lambda^{-2/3}} (u^{(k)}(y) - u^{(k)}(x)) h(\lambda(x-y)) dy \\ &\quad + \frac{\lambda}{A} \int_{|y-x| > \lambda^{-2/3}} (u^{(k)}(y) - u^{(k)}(x)) h(\lambda(x-y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего равенства через $I_1(x)$ и $I_2(x)$ соответственно. Оценим $I_1(x)$ и $I_2(x)$ по модулю. Пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях и оценкой (29), имеем при любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$

$$|u^{(k)}(y) - u^{(k)}(x)| \leq A_{m+1}(\sigma + \varepsilon_{m+1})^{k+1} M_{k+1} |y - x|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, при любых $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &\leq \frac{\lambda}{A} \int_{|y-x| \leq \lambda^{-2/3}} |u^{(k)}(y) - u^{(k)}(x)| h(\lambda(x-y)) dy \\ &\leq \frac{2C_g}{A} A_{m+1}(\sigma + \varepsilon_{m+1})^{k+1} M_{k+1} \lambda^{-1/3}. \end{aligned}$$

Учитывая условие (М3) на последовательность $\{M_k\}_{k=0}^\infty$, имеем при любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$$|I_1(x)| \leq \tilde{A}_m \lambda^{-1/3} (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k, \quad (31)$$

где $\tilde{A}_m > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от x и k .

Далее, для любых $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$

$$|I_2(x)| \leq 2A_m(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \frac{1}{A} \int_{|t| > \lambda^{1/3}} h(t) dt. \quad (32)$$

Пусть ε – произвольное положительное число, а $\Theta_m = \inf_{x \in \mathbb{R}} \theta_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$. Выберем $\lambda_m(\varepsilon) > 0$ так, что

$$\frac{1}{A} \int_{|t| > \lambda^{1/3}} h(t) dt < \frac{\varepsilon \Theta_m}{4A_m}, \quad \tilde{A}_m \lambda^{-1/3} < \frac{\varepsilon \Theta_m}{2}$$

для $\lambda > \lambda_m(\varepsilon)$. Тогда из неравенств (31) и (32) следует, что $\|u_\lambda - u\|_{G,m} < \varepsilon$ для всех $\lambda > \lambda_m(\varepsilon)$. Это означает, что $u_\lambda \rightarrow u$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ в G_m , а значит, и в G в силу произвольности $m \in \mathbb{N}$.

4) Зафиксируем $\lambda > 0$. Приближим функцию u_λ многочленами в G . Пусть $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$, – разложение в ряд Тейлора функции h . Пусть

$P_{2N}(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Пользуясь формулой Тейлора и оценкой (30), имеем

$$|h(x) - P_{2N}(x)| \leq \frac{C_g |x|^{2N+1}}{(2N+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Положим

$$Q_{2N}(x) = \frac{\lambda}{A} \int_{-L}^L u(y) P_{2N}(\lambda(x-y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N},$$

где положительное L выбрано так, что $\text{supp } u \subseteq [-L, L]$; Q_{2N} — многочлен степени не выше $2N$.

Покажем, что последовательность $\{Q_{2N}\}_{N=1}^\infty$ сходится в G к u_λ при $N \rightarrow \infty$. Действительно, для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$u_\lambda^{(k)}(x) - Q_{2N}^{(k)}(x) = \frac{\lambda}{A} \int_{-L}^L u^{(k)}(y) (h(\lambda(x-y)) - P_{2N}(\lambda(x-y))) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь неравенствами (29) и (33), имеем при любых $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m, N \in \mathbb{N}$

$$|u_\lambda^{(k)}(x) - Q_{2N}^{(k)}(x)| \leq \frac{2L\lambda^{2N+2}}{A} C_g A_m (\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \frac{(|x| + L)^{2N+1}}{(2N+1)!}.$$

Отсюда при некотором $C_1 > 0$, зависящем от m , и некотором $C_2 > 0$ для всех $m, N \in \mathbb{N}$

$$\|u_\lambda - Q_{2N}\|_{G,m} \leq \frac{C_1 C_2^{2N+2}}{(2N+1)!} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{(1 + |x|)^{2N+1}}{\theta_m(x)}. \quad (34)$$

В силу (5) функция φ удовлетворяет условиям леммы 8, поэтому найдется положительная постоянная C_3 такая, что $\forall m, N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} ((2N + m + 1) \ln(1 + |x|) - \varphi(x)) \\ & \leq (1 - \alpha^{-1})(2N + m + 1) \ln(2N + m + 1) + C_3(2N + m + 1). \end{aligned}$$

Из этой оценки и неравенства (34) следует, что каково бы ни было $m \in \mathbb{N}$, при некоторых положительных C_4, C_5 , зависящих от m и не зависящих от N , имеем

$$\|u_\lambda - Q_{2N}\|_{G,m} \leq C_4 \frac{C_5^N (2N + 1)^{(2N+1)(1-\alpha^{-1})}}{(2N+1)!}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что функцию u_λ удалось приблизить многочленами в G_m , а значит, и в G , так как $m \in \mathbb{N}$ было произвольное.

Из 1)–4) следует полнота многочленов в G . Лемма 9 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы

Через J обозначим отображение, которое всякому элементу $T \in G^*$ ставит в соответствие целую функцию $\widehat{T}$.

Отображение J является линейным и по лемме 6 действует из G^* в P .

Отображение J непрерывно. Действительно, если $T \in G^*$, то $T \in G_m^*$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ и, следовательно,

$$|T(f)| \leq \|T\|_{G_m^*} \|f\|_{G,m}, \quad f \in G,$$

где $\|T\|_{G_m^*}$ — норма T в G_m^* . Согласно лемме 6

$$|\widehat{T}(z)| \leq \|T\|_{G_m^*} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|) + q_m), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому

$$\|\widehat{T}\|_{m+1} \leq e^{q_m} \|T\|_{G_m^*}, \quad T \in G_m^*.$$

Следовательно, отображение J непрерывно.

Из полноты полиномов в G и равенства (18) легко следует, что система экспонент $\{\exp(-ixz)\}_{z \in \mathbb{C}}$ плотна в G . Поэтому отображение J взаимно однозначно.

Докажем, что отображение J сюръективно.

Пусть целая функция $F \in P$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|F(z)| \leq c \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (35)$$

Покажем, что существует функционал $\mathcal{F} \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}} = F$.

Отметим, что функции $\psi(\operatorname{Im} z)$, $w_{m+3}(|z|)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 из [13] (проверка выполнения условия (5.3) этой теоремы для данных функций проводится, например, по схеме, изложенной в [14, доказательство теоремы 1']). Поэтому существуют целые функции L и Y , удовлетворяющие условиям:

(L1) круги $D(\lambda_j, d_1 |\lambda_j|^{1-\alpha})$, где d_1 — некоторое положительное число, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots$ — простые нули функции L , расположенные в порядке неубывания их модулей, попарно не пересекаются;

(L2) вне множества $\bigcup_{j=1}^{\infty} D(\lambda_j, d_1 |\lambda_j|^{1-\alpha})$ при некоторых положительных A, A_0 выполняется неравенство

$$|\psi(\operatorname{Im} z) - \ln |L(z)|| \leq A \ln(1 + |z|) + A_0; \quad (36)$$

(Y1) круги $D(\mu_k, d_2)$, где d_2 — некоторое положительное число, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ — простые нули функции Y , расположенные в порядке неубывания их модулей, попарно не пересекаются;

(Y2) вне множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} D(\mu_k, d_2)$ при некоторых положительных B, B_0 выполняется неравенство

$$|w_{m+3}(|z|) - \ln |Y(z)|| \leq B \ln(1 + |z|) + B_0. \quad (37)$$

Без ограничения общности считаем, что $|\mu_k| > \max(1, 4d_2)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $|\lambda_j| > \max(2(d_1 + d_2), 1)$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Вначале, исходя из функций L и Y , построим целую функцию $\mathcal{N} \in P$, которая вне некоторых исключительных кружков, в частности на некоторой последовательности $\{l_n\}_{n=1}^\infty$ окружностей $l_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n\}$, где $R_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, удовлетворяет оценке

$$|\mathcal{N}(z)| \geq C_{\mathcal{N}} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|)).$$

Применяя принцип максимума к функции Y в кружках $D(\mu_k, d_2)$, $k \in \mathbb{N}$, и пользуясь неравенством (3), получим из (37) оценку

$$|Y(z)| \leq B_1 \exp(w_{m+3}(|z|) + B \ln(1 + |z|)), \quad z \in \mathbb{C},$$

где B_1 – некоторое положительное число. Из последнего неравенства, пользуясь леммой 1, имеем при некотором $B_2 > 0$

$$|Y(z)| \leq B_2 \exp(w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (38)$$

Для произвольных $\nu > 0$, $b \in (0, d_2)$ пусть $\Omega(b, \nu) = \bigcup_{k=1}^\infty D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$. Оценим $|Y(z)|$ снизу вне множества $\Omega(b, \nu)$. С этой целью для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$Y_k(z) = \frac{z - \mu_k}{Y(z)}, \quad z \in \overline{D(\mu_k, d_2)}.$$

Функция $Y_k(z)$ аналитична в $\overline{D(\mu_k, d_2)}$ и не имеет там нулей. По принципу максимума модуля

$$|Y_k(z)| \leq \frac{d_2}{|Y(z_0)|}, \quad z \in D(\mu_k, d_2),$$

где z_0 – точка минимума модуля Y на окружности $\partial D(\mu_k, d_2)$. Отсюда, пользуясь неравенствами (37) и (3), получаем

$$|Y_k(z)| \leq C_1(1 + |z|)^B \exp(-w_{m+3}(|z|)), \quad z \in D(\mu_k, d_2),$$

где $C_1 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от k . Следовательно,

$$|Y(z)| \geq \frac{|z - \mu_k| \exp(w_{m+3}(|z|))}{C_1(1 + |z|)^B}, \quad z \in D(\mu_k, d_2).$$

Таким образом, для $z \in D(\mu_k, d_2) \setminus D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$

$$|Y(z)| \geq \frac{b \exp(w_{m+3}(|z|))}{C_1 |\mu_k|^\nu (1 + |z|)^B}.$$

Так как $|\mu_k| \leq 4|z|/3$ для $z \in D(\mu_k, d_2)$, то из последнего неравенства получаем

$$|Y(z)| \geq \frac{C_2 \exp(w_{m+3}(|z|))}{(1 + |z|)^{B+\nu}}, \quad z \in D(\mu_k, d_2) \setminus D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu}), \quad (39)$$

где $C_2 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от k .

Из (37) и (39) получаем

$$|Y(z)| \geq \frac{C_3 \exp(w_{m+3}(|z|))}{(1 + |z|)^{B+\nu}}, \quad z \notin \Omega(b, \nu),$$

где $C_3 > 0$ – некоторая постоянная. Пользуясь теперь леммой 1, получаем оценку

$$|Y(z)| \geq C_4 \exp(w_{m+2}(|z|)), \quad z \notin \Omega(b, \nu), \quad (40)$$

где $C_4 > 0$ – некоторая постоянная.

Для дальнейших построений необходимо выбрать положительные числа b, ν и последовательность $t = \{t_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ так, чтобы выполнялись условия:

- 1) $D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu}) \subset D(\lambda_j, d_1|\lambda_j|^{1-\alpha})$ для любого $j \in \mathbb{N}$;
- 2) $\Omega(b, \nu) \cap \left(\bigcup_{j=1}^\infty D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu}) \right) = \emptyset$;
- 3) $\sum_{j=1}^\infty |t_j||\lambda_j|^{\alpha-1} < \infty$.

Проведем это, следуя схеме, изложенной в [6, гл. 2, § 4] и [7], где в связи с применением аппроксимационной теоремы Р. С. Юлмухаметова [13] требовалось, чтобы исключительное множество кружков не задевало нулей некоторой целой функции конечного порядка. И это было достигнуто за счет сдвижек нулей аппроксимирующей целой функции и уменьшения радиуса исключительных кружков.

Согласно [1] и [2, с. 29]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{w(r)}{r} = 0.$$

Поэтому последовательность $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ имеет плотность при порядке 1 [8, с. 20], равную нулю. Следовательно, при некотором $A_\mu > 1$ для количества $n_\mu(r)$ точек последовательности μ в круге $D(0, r)$ справедливо неравенство $n_\mu(r) < A_\mu r$, $r > 0$. Выберем теперь ν и b так, что $\nu > 2\alpha + 1$, $0 < b < \min(d_2, d_1 2^{-(\nu+6)} A_\mu^{-2})$.

Введем обозначения: $\Delta(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$, $D_{k,Y} = D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$, $D_{j,L} = D(\lambda_j, d_1|\lambda_j|^{1-\alpha})$, $k, j \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$. Для $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\Delta(D_{k,Y}) \cap \Delta(D_{j,L}) \neq \emptyset$, имеем $||\mu_k| - |\lambda_j|| < l$, где $l = d_1 + d_2$. Сумма s длин всех интервалов $\Delta(D_{k,Y})$, пересекающихся с $\Delta(D_{j,L})$, оценивается следующим образом:

$$s = \sum_{|\lambda_j| - l < |\mu_k| < |\lambda_j| + l} 2b|\mu_k|^{-\nu} \leq \frac{2bn_\mu(|\lambda_j| + l)}{(|\lambda_j| - l)^\nu} \leq \frac{2bA_\mu(|\lambda_j| + l)}{(|\lambda_j| - l)^\nu}.$$

Так как $|\lambda_j| > 2l$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то $s \leq 2^{\nu+2}bA_\mu|\lambda_j|^{1-\nu}$. Положим $\sigma_j = 2^{\nu+2}bA_\mu|\lambda_j|^{1-\nu}$. Найдется интервал вида $(|\lambda_j| + k_0\sigma_j, |\lambda_j| + (k_0 + 1)\sigma_j)$, где $k_0 + 1 \leq 4n(|\lambda_j| + l)$, не пересекающийся с $\bigcup_{k=1}^\infty \Delta(D_{k,Y})$. Положим

$$t_j = \left(k_0 + \frac{1}{2}\right)\sigma_j \exp(i \arg \lambda_j).$$

Таким образом, точки t_j так же, как и в [6], [7], удовлетворяют условию $\arg t_j = \arg \lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$. Оценим t_j по модулю:

$$|t_j| \leq (k_0 + 1)\sigma_j \leq 4n(|\lambda_j| + l)2^{\nu+2}bA_\mu|\lambda_j|^{1-\nu} \leq 2^{\nu+5}bA_\mu^2|\lambda_j|^{2-\nu}. \quad (41)$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |t_j| |\lambda_j|^{\alpha-1} \leq 2^{\nu+5} b A_{\mu}^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{\alpha+1-\nu} < \infty,$$

так как $\nu - \alpha - 1 > \alpha$ в силу выбора ν , а показатель сходимости последовательности $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ не превосходит α . Это означает, что условие 3) выполнено.

Неравенство (41), выбор ν , b , а также то, что $|\lambda_j| > 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$, гарантируют выполнение условия 1).

По построению кружок $D(\lambda_j + t_j, \sigma_j/2)$ не пересекается с $\Omega(b, \nu)$. Так как

$$\frac{\sigma_j}{2} = 2^{\nu+1} b A_{\mu} |\lambda_j|^{1-\nu} > b(|\lambda_j| + |t_j|)^{-\nu} = |\lambda_j + t_j|^{-\nu},$$

то круг $D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu})$ тем более не пересекается с $\Omega(b, \nu)$. Итак, условие 2) также выполнено.

Обозначим $D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu})$ через $D'_{j,L}$, $j \in \mathbb{N}$.

Согласно теореме S функция L_t удовлетворяет неравенству

$$|\ln |L_t(z)| - \ln |L(z)|| \leq C, \quad z \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{j,L},$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная. Отсюда и из неравенства (36) следует, что для $z \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{j,L}$

$$|\ln |L_t(z)| - \psi(\operatorname{Im} z)| \leq A \ln(1 + |z|) + A_0 + C. \quad (42)$$

Применяя принцип максимума к функции $L_t(z)$ в каждом круге $D_{j,L}$, пользуясь неравенством (42) и вытекающим из (4) неравенством

$$|\psi(\operatorname{Im} z_1) - \psi(\operatorname{Im} z_2)| \leq A_1, \quad z_1, z_2 \in D_{j,L}, \quad (43)$$

где $A_1 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от $j \in \mathbb{N}$, получим оценку

$$|L_t(z)| \leq A_2(1 + |z|)^A \exp(\psi(\operatorname{Im} z)), \quad z \in \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{j,L}, \quad (44)$$

где $A_2 > \exp(A_0 + C)$ – некоторая постоянная. Из (42), (44) следует, что неравенство (44) на самом деле справедливо при всех $z \in \mathbb{C}$. Действуя точно так же, как и в [6, гл. 2, § 4], пользуясь при этом неравенствами (36), (42), (43), получим вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D'_{j,L}$ оценку

$$|L_t(z)| \geq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) - A_3 \ln(1 + |z|) - A_4), \quad (45)$$

где A_3, A_4 – некоторые положительные постоянные. Итак, необходимые оценки модуля функции L_t сверху в комплексной плоскости и снизу вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D'_{j,L}$ установлены.

В силу выбора b, ν сумма радиусов непересекающихся исключительных кружков $D'_{j,L}$ и $D_{k,Y}$ конечна, поэтому найдется последовательность $\{l_n\}_{n=1}^\infty$ окружностей $l_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n\}$, где $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, не пересекающая исключительных кружков $D'_{j,L}$ и $D_{k,Y}$.

Положим

$$\mathcal{L}(z) = \frac{L_t(z)}{\prod_{j=1}^N (z - (\lambda_j + t_j))}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $N \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $N > A + 2$. Тогда при некоторых положительных A_5, A_6 из оценок (44) и (45)

$$|\mathcal{L}(z)| \leq \frac{A_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (46)$$

$$|\mathcal{L}(z)| \geq \frac{A_6 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{(1 + |z|)^{A_3 + N}}, \quad z \notin \bigcup_{j=1}^\infty D'_{j,L}. \quad (47)$$

Пусть $\mathcal{N}(z) = \mathcal{L}(z)Y(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — нули $\mathcal{N}$, расположенные в порядке неубывания модулей. Из оценок (40), (47) и леммы 1 следует, что вне $\bigcup_{n=1}^\infty D(a_n, b|a_n|^{-\nu})$ справедлива оценка

$$|\mathcal{N}(z)| \geq C_{\mathcal{N}} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|)), \quad (48)$$

в частности она справедлива на окружностях $l_n, n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что функцию $F \in P$ можно разложить в ряд Лагранжа по функции $\mathcal{N}$. Пусть K — произвольный компакт в $\mathbb{C}$ и $s_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $K \subset D(0, R_{s_0})$. Для натуральных $s \geq s_0$ рассмотрим интеграл

$$I_s(z) = \int_{l_s} \frac{F(\xi)}{\mathcal{N}(\xi)(\xi - z)} d\xi, \quad z \in K.$$

По теореме о вычетах

$$I_s(z) = 2\pi i \sum_{|a_n| < R_s} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)(a_n - z)} + 2\pi i \frac{F(z)}{\mathcal{N}(z)}, \quad z \in K. \quad (49)$$

Пользуясь оценками (35) и (48), для $z \in K$ имеем

$$|I_s(z)| \leq \int_{l_s} \frac{c \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi) + w_m(|\xi|))}{C_{\mathcal{N}} \operatorname{dist}(K, l_s) \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi) + w_{m+1}(|\xi|))} |d\xi|.$$

Устремляя s к ∞ в правой части последнего неравенства и учитывая лемму 1, получаем $\lim_{s \rightarrow \infty} I_s(z) = 0$, $z \in K$. Переходя в (49) к пределу при $s \rightarrow \infty$, выводим

$$F(z) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{|a_n| < R_s} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in K. \quad (50)$$

В силу произвольности компакта K равенство (50) верно для всех $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (51)$$

Покажем, что он сходится в топологии пространства $H(\mathbb{C})$. Вначале для каждого $n \in \mathbb{N}$ оценим сверху модуль целой функции $\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$. Возможны два случая.

Первый случай. Пусть a_n – нуль функции $\mathcal{L}$. Тогда $a_n = \lambda_j + t_j$ при некотором $j \in \mathbb{N}$, и поэтому

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} Y(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $z \notin D'_{j,L}$, то по неравенству (46)

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \frac{A_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2} \frac{|\lambda_j + t_j|^\nu}{b}. \quad (52)$$

Если $z \in D'_{j,L}$, то по принципу максимума модуля

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \max_{\xi \in \partial D'_{j,L}} \left| \frac{\mathcal{L}(\xi)}{\xi - (\lambda_j + t_j)} \right|.$$

Пусть максимум в правой части последнего неравенства достигается в точке $\xi_0 \in \partial D'_{j,L}$; тогда, пользуясь неравенством (46), получаем

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \frac{|\mathcal{L}(\xi_0)| |\lambda_j + t_j|^\nu}{b} \leq \frac{A_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi_0))}{1 + |\xi_0|^2} \frac{|\lambda_j + t_j|^\nu}{b}.$$

Учитывая, что $|\xi_0| \geq |z| - 1$ для $z \in D'_{j,L}$, и используя неравенство (43), получаем при некотором $A_7 > 0$, не зависящем от j ,

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \frac{A_7 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2} \frac{|\lambda_j + t_j|^\nu}{b}. \quad (53)$$

Таким образом, из (52), (53) имеем

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - a_n} \right| \leq \frac{A_8 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2} |a_n|^\nu, \quad (54)$$

где $A_8 = b^{-1} \max(A_5, A_7)$. Из (38), (54) получаем в первом случае

$$\left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_9 |a_n|^\nu \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (55)$$

где $A_9 = A_8 B_2$.

Второй случай. Пусть a_n – нуль функции Y . Тогда $a_n = \mu_k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, и поэтому

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \mathcal{L}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $z \notin D_{k,Y}$, то из неравенства (37)

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq b^{-1} \exp(w_{m+3}(|z|) + B \ln(1 + |z|) + B_0) |\mu_k|^\nu, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (56)$$

Если $z \in D_{k,Y}$, то по принципу максимума модуля

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq \max_{\xi \in \partial D_{k,Y}} \left| \frac{Y(\xi)}{\xi - \mu_k} \right|.$$

Пусть максимум в правой части последнего неравенства достигается в точке $\xi_0 \in \partial D_{k,Y}$. Тогда, опять пользуясь неравенством (37), имеем

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq b^{-1} |Y(\xi_0)| |\mu_k|^\nu \leq b^{-1} \exp(w_{m+3}(|\xi_0|) + B \ln(1 + |\xi_0|) + B_0) |\mu_k|^\nu.$$

Для $z \in D_{k,Y}$ $|\xi_0| \leq |z| + 1$, поэтому из последнего неравенства, пользуясь неравенством (3), получаем

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq \exp(w_{m+3}(|z|) + B \ln(1 + |z|) + B_3) |\mu_k|^\nu, \quad (57)$$

где $B_3 > 0$ не зависит от k . Из оценок (56), (57) и леммы 1 следует неравенство

$$\left| \frac{Y(z)}{z - a_n} \right| \leq B_4 |a_n|^\nu \exp(w_{m+4}(|z|)), \quad (58)$$

где $B_4 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от n . Из оценок (46) и (58) во втором случае получаем

$$\left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_{10} |a_n|^\nu \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (59)$$

где $A_{10} = A_5 B_4$. Из неравенств (55) и (59) заключаем, что в обоих случаях справедливо неравенство

$$\left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_{11} |a_n|^\nu \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (60)$$

где $A_{11} = \max(A_9, A_{10})$. Из представления

$$\frac{1}{\mathcal{N}'(a_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a_n| = b|a_n|^{-\nu}} \frac{d\xi}{\mathcal{N}(\xi)},$$

оценки (48), а также применением неравенств (3) и (43) получаем

$$\left| \frac{1}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \leq A_{12} |a_n|^{-\nu} \exp(-(\psi(\operatorname{Im} a_n) + w_{m+1}(|a_n|))),$$

где постоянная $A_{12} > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Из этого неравенства и из неравенства (35) получаем

$$\left| \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \leq c A_{12} |a_n|^{-\nu} \exp(w_m(|a_n|) - w_{m+1}(|a_n|)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

По лемме 1 найдется постоянная Q_α такая, что $w_m(|a_n|) - w_{m+1}(|a_n|) < -(\alpha + 1) \ln(1 + |a_n|) + Q_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\left| \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \leq A_{13} (1 + |a_n|)^{-(\alpha + \nu + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (61)$$

где постоянная $A_{13} > 0$ не зависит от n . Из оценок (60) и (61) для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_{11} A_{13} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)^{-(\alpha + 1)} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)).$$

Так как показатель сходимости корней целой функции $\mathcal{N}$ не превосходит α , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)^{-(\alpha + 1)} < \infty. \quad (62)$$

Следовательно, ряд (51) абсолютно сходится в $\mathbb{C}$, более того, он сходится в топологии пространства P . Поэтому из равенства (50) имеем

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (63)$$

Определим функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Возможны два случая.

Первый случай. a_n — нуль функции $\mathcal{L}$. Следовательно,

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{\mathcal{L}(z)}{z - a_n} Y(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу оценок (38) и (54), леммы 7 существует функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$, при этом

$$|\mathcal{F}_n(f)| \leq \beta_m A_8 B_2 |a_n|^\nu \|f\|_{G, m+5}, \quad f \in G.$$

Второй случай. a_n — нуль функции Y . Следовательно,

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{Y(z)}{z - a_n} \mathcal{L}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу оценок (46) и (58), леммы 7 существует функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$, при этом

$$|\mathcal{F}_n(f)| \leq \beta_m A_5 B_4 |a_n|^\nu \|f\|_{G, m+5}, \quad f \in G.$$

Итак, в обоих случаях для любого $n \in \mathbb{N}$ существует функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что

$$\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (64)$$

причем

$$|\mathcal{F}_n(f)| \leq H |a_n|^\nu \|f\|_{G, m+5}, \quad f \in G, \quad (65)$$

где постоянная $H > 0$ не зависит от n . Положим

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \mathcal{F}_n(f), \quad f \in G.$$

В силу (61), (62), (65) функционал $\mathcal{F}$ определен корректно и является линейным и непрерывным на G . Из равенств (63) и (64) имеем $\widehat{\mathcal{F}} = F$. Таким образом, отображение J сюръективно. По теореме об открытом отображении для пространств $(L\mathbb{N}^*)$ (см. [15, с. 230], [16, с. 12]) J осуществляет топологический изоморфизм между G^* и P . Теорема доказана.

Список литературы

1. Юлмухаметов Р. С. Квазианалитические классы функций в выпуклых областях // Матем. сб. 1986. Т. 130(172). № 4(8). С. 500–519.
2. Мандельбройт С. Примакающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М.: ИЛ, 1955.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. Taylor B. A. Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Commun. on pure and appl. math. 1971. V. 24. № 1. P. 39–51.
5. Напалков В. В., Рудаков И. А. Описание ядра оператора свертки в пространствах типа Жеврея. Препринт/Ин-т математики БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1988.
6. Соломещ М. И. Операторы типа свертки в некоторых пространствах аналитических функций: Дис. . . канд. физ.-мат. наук. Уфа: Ин-т математики с Вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, 1995.
7. Соломещ М. И. К теореме Р. С. Юлмухаметова об аппроксимации субгармонических функций // Деп. в ВИНТИ 24.07.92, № 2447 – В92. Уфа: Ин-т математики УрО РАН, 1992. 14 с.
8. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
9. Себастьян-и-Сильва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
10. Напалков В. В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 287–305.
11. Попенков С. В. О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^m$ // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 3. С. 374–384.
12. Маннанов М. М. Описание одного класса аналитических функционалов // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 3. С. 62–72.
13. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. Т. 11. № 3. С. 257–282.
14. Юлмухаметов Р. С. Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 4. С. 205–224.
15. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
16. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.

Поступило в редакцию
31.V.1999