Общероссийский математический портал

Д. И. Пионтковский, Ряды Гильберта и соотношения в алгебрах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2000, том 64, выпуск 6, 205–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/im316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:05:15

УДК 512.552

Д. И. Пионтковский

Ряды Гильберта и соотношения в алгебрах

Пусть A – градуированная ассоциативная алгебра над полем, $I \triangleleft A$ – идеал, порожденный некоторым множеством однородных элементов $\alpha \subset A$, и $B = A/I$. В работе получены оценки, связывающие ряды Гильберта алгебр A и B с числом элементов множества α . Как и в теореме Голода–Шафаревича, равенства в этих оценках достигаются в точности для *сильно свободных* множеств α : тем самым получены новые характеристики таких множеств. В качестве следствия доказано, что над полем нулевой характеристики в классе конечно определенных алгебр не существует алгоритма, проверяющего по заданным образующим и соотношениям алгебры, равен ли радиус сходимости ее ряда Гильберта данному рациональному числу, а также алгоритма, проверяющего, равно ли значение функции Гильберта в данной точке данному числу.

Попутно вводятся и исследуются *экстремальные* градуированные алгебры, т.е. такие, что всякая их факторизация строго увеличивает радиус сходимости ряда Гильберта. В частности, показано, что к этому классу относятся свободные произведения двух нетривиальных алгебр, квадратичные алгебры с одним соотношением и не менее чем тремя порождающими и регулярные по Артину–Шелтеру не нётеровы алгебры глобальной размерности 2.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Мы будем называть векторное пространство над основным полем k , ассоциативную k -алгебру или модуль над ней *градуированными*, если они $\mathbf{Z}_+$ -градуированы и конечномерны в каждой компоненте. За исключением специально оговоренных случаев, все алгебры, модули и векторные пространства, рассматриваемые ниже, градуированы. Для такого пространства V (в частности, алгебры или модуля) через $V(x)$ обозначим его ряд Гильберта $\sum_{i \geq 0} \dim V_i x^i$; для множества однородных элементов $\alpha \in V$ через $\alpha(x)$ обозначим производящую функцию множества α : если α содержит d_i элементов степени i , то $\alpha(x) = \sum_{i \geq 0} d_i x^i$.

Градуированная алгебра $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ называется *связной*, если ее нулевая компонента A_0 одномерна; связная алгебра называется *стандартной*, если она порождена компонентой A_1 . Иногда мы также будем называть связными алгебры без единицы, градуированные в положительных степенях: такие случаи специально оговариваются. Неравенства между рядами Гильберта понимаются покомпонентно, т.е. $\sum_i a_i x^i \geq \sum_i b_i x^i$ тогда и только тогда, когда $a_i \geq b_i$ для всех $i \geq 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01144).

Пусть A – k -алгебра, $I \triangleleft A$ – однородный собственный двусторонний идеал, минимальным образом порожденный некоторым множеством однородных элементов $\alpha \subset A$, и $B = A/I$. Пусть $C = B * k\langle\alpha\rangle$, где звездочка обозначает свободное произведение алгебр, $k\langle\alpha\rangle$ – свободная алгебра. Очевидно, имеет место неравенство рядов Гильберта

$$C(x) \geq A(x). \quad (0.1)$$

Те множества α , для которых выполняется равенство, называются *сильно свободными* [1], или *инертными* [2]: они являются некоммутативными аналогами хорошо известных в коммутативной алгебре *регулярных последовательностей*. Эквивалентное определение состоит в том, что множество однородных элементов ассоциативной алгебры A называется сильно свободным (инертным), если, во-первых, оно составляет систему свободных образующих для порожденной им подалгебры и, во-вторых, алгебра A как градуированное пространство изоморфна свободному произведению этой подалгебры и соответствующей факторалгебры.

Таким образом, сильно свободные множества естественным образом возникают при рассмотрении следующего вопроса: какова связь между рядами Гильберта алгебр A и B и рядом $\alpha(x)$? Ниже мы подробно исследуем эту связь и получим другие характеристики сильно свободных множеств.

Как следует из результатов [1], свойство множества α быть сильно свободным равносильно ацикличности комплекса Шафаревича, а соответствующее неравенство для рядов Гильберта тесно связано с теоремой Голода–Шафаревича [3]. Другие гомологические характеристики сильно свободных множеств, связанные с комплексом Шафаревича, см. в [4].

Эта работа посвящена различным оценкам рядов Гильберта и количества соотношений ассоциативных алгебр, а также связям таких оценок с сильно свободными множествами. В §1 мы приводим одну из первых таких оценок – теорему Голода–Шафаревича [3] и выводим из нее новую характеристику сильно свободных множеств в свободных алгебрах (следствие 1.4).

В §2 устанавливается связь между теоремой Голода–Шафаревича и оценками В. Е. Говорова минимального числа определяющих соотношений ассоциативных алгебр [5]: оказывается, в обоих неравенствах Говорова равенство достигается тогда же, когда и в неравенстве Голода–Шафаревича, т.е. в точности в случае сильно свободного множества соотношений (теорема 2.2).

Далее мы переходим к рассмотрению более общей задачи: как связаны ряды Гильберта алгебры и ее факторалгебры по некоторому идеалу с производящей функцией множества порождающих идеала? Поскольку общие конечно порожденные ассоциативные алгебры растут экспоненциально, то в качестве характеристики асимптотического поведения ряда Гильберта мы рассматриваем *экспоненту роста* алгебры – величину, обратную к радиусу сходимости ряда Гильберта.

В §3 мы исследуем *экстремальные* алгебры, т.е. такие, что экспонента роста факторалгебры всегда строго меньше экспоненты роста самой алгебры, вне зависимости от множества порождающих идеала. Оказывается, экспоненты роста экстремальных алгебр конечны (предложение 3.2), а сами они всегда первичны (теорема 3.3). Класс экстремальных алгебр весьма обширен: в частности, все свободные произведения нетривиальных алгебр, равно как и алгебры, содержащие сильно свободные множества, экстремальны (теорема 3.5, следствие 1.4). Примерами

могут служить алгебры с одним квадратичным соотношением (предложение 3.8) и не нётеровы регулярные по Артину–Шелтеру алгебры глобальной размерности 2 (следствие 3.9).

В §4, с использованием свойств экстремальных алгебр, дано обобщение одного из двух упоминавшихся неравенств Говорова на случай общих алгебр (теорема 4.2). Исследуя в получившемся неравенстве случай равенства, мы получаем новые критерии сильной свободы множеств в терминах значения функции Гильберта в точке и экспоненты роста алгебр (предложение 4.1, теорема 4.2).

Как показал Д. Аник [6], над полем нулевой характеристики свойство конечно-го подмножества свободной алгебры быть сильно свободным алгоритмически не распознаваемо. Используя полученные критерии сильно свободных множеств, мы получаем (теорема 5.1, теорема 5.5), что над полем нулевой характеристики невозможно, вообще говоря, по заданным образующим и соотношениям стандартной алгебры определить, равна ли ее экспонента роста данному натуральному числу, равно как и определить, равно ли значение функции Гильберта алгебры в данной рациональной точке данному рациональному числу.

Автор хотел бы выразить благодарность Е. С. Голоду за ценные советы и плодотворные обсуждения.

§ 1. Теорема Голода–Шафаревича и гомологии

Пусть $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$ – стандартная ассоциативная алгебра. Тогда если $\{x_1, \dots, x_s\}$ – базис в пространстве R_1 , то $R = F/I$, где $F = k\langle x_1, \dots, x_s \rangle = T(R_1)$ – свободная ассоциативная алгебра, $I \triangleleft F$ – двусторонний однородный идеал, все элементы которого имеют степень не ниже 2. Пусть $\alpha = \{f_1, f_2, \dots\}$ – минимальная система однородных порождающих I и $u = k\alpha \approx I/PI + IP$ – порожденное ею пространство (здесь $P = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots$ – пополняющий идеал алгебры F).

Пусть

$$0 \longleftarrow k \xleftarrow{d_0} R \otimes H_0 \xleftarrow{d_1} R \otimes H_1 \xleftarrow{d_2} \dots \quad (1.1)$$

– минимальная левая R -резольвента k : здесь $H_i \approx \text{Tor}_i^R(k, k) = H_i(R)$, т.е.

$$H_0 = k, \quad H_1 \approx R_1, \quad H_2 \approx u$$

и т.д.

Пусть $\Omega^i = \text{Coker } d_{i-1}$ – i -й модуль сизигий. Поскольку ряд Гильберта тензорного произведения равен произведению сомножителей, из формулы Эйлера для точной последовательности

$$0 \longleftarrow k \xleftarrow{d_0} R \otimes H_0 \xleftarrow{d_1} \dots \xleftarrow{d_{i-1}} R \otimes H_{i-1} \longleftarrow \Omega^i \longleftarrow 0$$

получаем следующее утверждение (по-видимому, относящееся к математическому фольклору).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Имеет место равенство формальных степенных рядов*

$$R(x)(1 - sx + u(x) - H_3(x) + \dots + (-1)^i H_i(x)) = 1 + (-1)^i \Omega^i(x).$$

В частности, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} R(x)(1 - H_1(x) + \dots - H_{2i-1}(x)) &\geq 1, \\ R(x)(1 - H_1(x) + \dots + H_{2i}(x)) &\leq 1, \end{aligned}$$

причем неравенства обращаются в равенства, если и только если $\text{gl. dim } R \leq 2i - 1$ (соответственно $\text{gl. dim } R \leq 2i$).

СЛЕДСТВИЕ 1.2 (теорема Голода–Шафаревича). *Имеет место неравенство*

$$R(x)(1 - sx + u(x)) \geq 1. \quad (1.2)$$

Оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\text{gl. dim } R \leq 2$.

Это неравенство доказано в [3], утверждение о равенстве – в [1]. Такие непустые множества α , для которых достигается равенство, называются *сильно свободными*, или *инертными*: так как α непусто, это равносильно тому, что $\text{gl. dim } R = 2$.

Равенство $R(x)(1 - sx + u(x)) = 1 + \Omega^3(x)$ показывает, что для конечно определенных алгебр вычисление ряда $R(x)$ сводится к вычислению ряда $\Omega^3(x)$: в частности, эти ряды рациональны одновременно. В этой связи интересно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть $L = F\alpha \triangleleft F$ – левый идеал, порожденный α . Тогда имеет место изоморфизм левых R -модулей:

$$\Omega^3 \cong \text{Tor}_1^F(R, P/L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{u_1, \dots, u_s \mid \deg u_i = 1\}$ – базис пространства H_1 , $\{r_1, r_2, \dots \mid \deg r_i = \deg f_i\}$ – базис H_2 . Тогда отображение d_2 в резольвенте (1.1) можно считать заданным следующим образом: если $f_i = \sum_{j=1}^n a_i^j x_j$, то $d_2(r_i) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_i^j u_j$, где черта обозначает образ элемента F в R .

С другой стороны, поскольку всякий левый идеал в свободной алгебре свободен как модуль, из длинной точной последовательности Tor -ов получаем

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1^F(R, P/L) \longrightarrow R \bigotimes_F L \xrightarrow{\phi} R \bigotimes_F P \longrightarrow R \bigotimes_F P/L \longrightarrow 0.$$

Здесь, очевидно, $R \bigotimes_F L \cong R \otimes u$, $R \bigotimes_F P \cong R \otimes R_1$ и отображение ϕ , индуцированное вложением $L \hookrightarrow P$, отождествляется с описанным выше отображением d_2 . Таким образом,

$$\text{Tor}_1^F(R, P/L) \cong \text{Ker } d_2 = \Omega^3,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим $Q = \text{Tor}_1^F(R, P/L)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Непустое множество α сильно свободно тогда и только тогда, когда $Q = 0$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Существует естественный эпиморфизм левых R -модулей*

$$R \otimes H_3 \longrightarrow Q.$$

Он биективен тогда и только тогда, когда $\text{gl. dim } R \leq 3$.

§ 2. Об оценках на число соотношений алгебр

Мы сохраняем здесь обозначения из предыдущего параграфа.

Предположим, что I порожден t ($t > 0$) элементами l , т.е. $\alpha = \{f_1, \dots, f_t \mid \deg f_i = l\}$. Через a_i , $i \geq 0$, обозначим размерность пространства R_i :

$$R(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i.$$

Для этой ситуации В. Е. Говоровым была доказана

ТЕОРЕМА 2.1 [5]. *Ряд $R(x)$ сходится при $x = s^{-1}$. При этом выполняются неравенства*

$$t \geq \frac{s^l}{R(s^{-1})}, \quad (2.1)$$

$$t \geq \frac{sa_{n-1} - a_n}{a_{n-l}} \quad (2.2)$$

для допустимых n , причем равенство в (2.2) при всех допустимых n равносильно тому, что $\text{Tor}_1^F(R, P/L) = 0$.

Следующая теорема показывает, что в обоих случаях равенство равносильно равенству в неравенстве Голода–Шафаревича (1.2).

ТЕОРЕМА 2.2. *Неравенства (2.1) и (2.2) (при допустимых n) обращаются в равенства тогда и только тогда, когда α – сильно свободное множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку равенство в (2.2) равносильно тому, что $Q = 0$, то согласно следствию 1.4 оно равносильно тому, что множество α сильно свободно.

Подставим в неравенство (1.2) $x = s^{-1}$. Поскольку $u(x) = tx^l$, получаем

$$R(s^{-1})ts^{-l} \geq 1,$$

что равносильно (2.1). Таким образом, если α сильно свободно, то (2.1) обращается в равенство.

Обратно, если α не сильно свободно, то неравенство степенных рядов (1.2) строгое, т.е. выполняется покоеэффициентное неравенство

$$R(x)(1 - sx + tx^l) \geq 1 + ax^n,$$

где $n \geq 0$, $a > 0$. Тогда при $x = s^{-1}$

$$R(s^{-1})ts^{-l} \geq 1 + as^{-n} > 1,$$

или

$$t > \frac{s^l}{R(s^{-1})},$$

т.е. неравенство (2.1) тоже строгое.

§ 3. Алгебры экстремального роста

Поскольку общие конечно порожденные ассоциативные алгебры растут экспоненциально, то для такой алгебры A $\text{GK-dim } A = \infty$. Для таких алгебр роль размерности Гельфанда–Кириллова играет *экспонента роста*

$$p(A) = \inf\{q > 0 \mid \exists c > 0 \quad \forall n \geq 0 \quad a_n \leq cq^n\}.$$

Будем обозначать через $r(A)$ радиус сходимости ряда $A(t)$. Поскольку

$$p(A) = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = r(A)^{-1},$$

то вопрос об асимптотике роста ассоциативной алгебры полиномиального роста сводится к вычислению радиуса сходимости ее ряда Гильберта.

Следующие несложные свойства радиуса сходимости хорошо известны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть A – градуированная ассоциативная алгебра.

- (i) $r(A) = \infty$ тогда и только тогда, когда A конечномерна.
- (ii) Если A конечно порождена, то $r(A) > 0$.
- (iii) $r(A) = 1$ тогда и только тогда, когда A – бесконечномерная алгебра субэкспоненциального роста.
- (iv) Если B – подалгебра или факторалгебра алгебры A с индуцированной градуировкой, то $r(B) \geq r(A)$.
- (v) Если $r(A) > 0$, то $\lim_{t \rightarrow r(A)} A(t) = \infty$. Следовательно, если A связна, то функция $f(t) = A(t)^{-1}$ непрерывна на отрезке $[0, r(A)]$, причем $f(0) = 1$, $f(r(A)) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем градуированную алгебру A *экстремальной*, если для любого ненулевого однородного идеала $I \triangleleft A$ выполняется строгое неравенство $r(A/I) > r(A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если A – экстремальная алгебра, то $0 < r(A) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $r(A) < \infty$ следует из предложения 3.1, (i). Докажем другое неравенство.

Предположим, что $r(A) = 0$. Пусть $a \in A$ – ненулевой однородный элемент степени $d > 0$, I – порожденный этим элементом идеал, и пусть $B = A/I$. Поскольку A экстремальна, $r(B) > 0$.

Пусть $F = k\langle c \mid \deg c = d \rangle$. Из неравенства рядов Гильберта

$$(B * F)(t) \geq A(t)$$

следует, что $r(B * F) = 0$.

С другой стороны, $(B * F)(t)^{-1} = b(t)^{-1} - dt$, где $b(t)$ равно $B(t)$ (соответственно $B(t) + 1$), если B унитарна (соответственно не унитарна). Поскольку правая часть представляет собой функцию, аналитическую в некоторой окрестности нуля, причем значение этой функции в нуле равно 1, то в некоторой окрестности нуля ее образ не содержит 0. Следовательно, функция $(B * F)(t)$ аналитична в некоторой окрестности нуля, откуда $r(B * F) > 0$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть A – экстремальная алгебра. Тогда A первична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать, что $IJ \neq 0$ для любых ненулевых однородных идеалов I и J алгебры A . Не ограничивая общности, можно считать, что J – главный идеал, порожденный элементом a некоторой степени h .

Предположим, что $IJ = 0$. Пусть $B = A/I$, $C = A/J$ и $A = I \oplus V$, где V – некоторое градуированное векторное пространство. Имеем

$$J = ka + Aa + aA + AaA = ka + Va + aV + VaV.$$

Следовательно, выполняется неравенство рядов Гильберта

$$J(t) \leq t^h + 2t^h V(t) + t^h V(t)^2,$$

или

$$A(t) - C(t) \leq t^h (B(t) + 1)^2.$$

Имеем

$$A(t) \leq C(t) + t^h (B(t) + 1)^2.$$

Для радиусов сходимости получаем неравенство

$$r(A) \geq \min\{r(B), r(C)\}$$

в противоречие с экстремальностью алгебры A .

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы, фактически, доказали, что для любых двух однородных идеалов I, J градуированной алгебры A из равенства $IJ = 0$ следует, что $r(A) = \min\{r(A/I), r(A/J)\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть A – (не градуированная) локально конечно фильтрованная алгебра такая, что ассоциированная градуированная алгебра $\text{gr } A$ экстремальна. Тогда A первична.

Большой класс примеров экстремальных алгебр дает следующая

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть A, B – нетривиальные связные алгебры такие, что $r(A) > 0$ и $r(B) > 0$. Тогда алгебра $A * B$ экстремальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C = A * B$. Из формулы

$$C(t)^{-1} = A(t)^{-1} + B(t)^{-1} - 1$$

следует, что функция $C(t)^{-1}$ аналитическая и не нулевая в некоторой окрестности нуля, откуда $r(C) > 0$. При $t \in (0, r_C]$ имеем $0 \leq A(t)^{-1} < 1$ и $0 \leq B(t)^{-1} < 1$. Поскольку $A(r(C))^{-1} + B(r(C))^{-1} - 1 = 0$, получаем $A(r(C))^{-1} > 0$ и $B(r(C))^{-1} > 0$; следовательно, $r(C) < \min\{r(A), r(B)\}$.

Как следует из стандартных соображений теории некоммутативных базисов Грёбнера (см. [7], [8]), можно считать алгебры A и B мономиальными. Действительно, зафиксировав соответствующий порядок на мономах и обозначая через $\bar{R}$

мономиальную алгебру, ассоциированную с произвольной алгеброй R , имеем формулу $\overline{C} = \overline{A} * \overline{B}$. Кроме того, если I – однородный идеал алгебры C , то существует такой идеал $J \triangleleft \overline{C}$, что $r(C/I) \geq r(\overline{C}/J)$.

Итак, пусть $A = k\langle X \rangle / I$ и $B = k\langle Y \rangle / J$, где X, Y – однородные минимальные множества порождающих, идеалы I и J порождены мономами от элементов множеств X и Y соответственно. Если A и B двумерны, т. е. $A \cong k\langle x | x^2 = 0 \rangle$ и $B \cong k\langle x | x^2 = 0 \rangle$, то доказательство тривиально. Значит, мы имеем право предположить, что $\dim_k B \geq 3$.

Пусть $S \triangleleft C$ – произвольный ненулевой главный идеал, порожденный непустым мономом m : достаточно доказать, что $r(C/S) > r(C)$. Будем говорить, что непустой моном a является *зацеплением* двух мономов b, c , если существуют непустые мономы f, g такие, что $b = fa$, $c = ag$. Теперь нам потребуется следующая

ЛЕММА 3.6. Пусть A, B – связные мономиальные алгебры, причем $\dim_k B \geq 3$. Пусть B минимальным образом порождена множеством $Y = \{y_i\}_{i \in \Gamma}$, и пусть S – мономиальный идеал в алгебре $C = A * B$. Тогда S содержит ненулевой моном p , обладающий следующими свойствами:

- (i) все мономы $p_{ij} = y_i p y_j$, $i, j \in \Gamma$, ненулевые в C ;
- (ii) у любой пары мономов p_{ij} и p_{kl} не существует зацеплений, если $j \neq k$, и существует единственное зацепление y_j , если $j = k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, S содержит ненулевой моном n вида $n = xp'x$, где p' – моном и $x \in X$, где X – множество порождающих мономиальной алгебры A . Рассмотрим теперь два случая.

Случай 1. Пусть $\#Y = 1$, т. е. $Y = \{y\}$. Поскольку $\dim B \geq 3$, то $y^2 \neq 0$. Пусть $l \geq 0$ – наибольшее целое число такое, что $n = (xy^2)^l n_1$ для какого-нибудь монома n_1 . Положим $p = y(xy^2)^q n_1 (yx)^q$, где $q > \max\{l, \text{len } n_1 + 3\}$; в частности, $p_{11} = y^2(xy^2)^q n_1 (yx)^q y$.

Предположим, что моном a является зацеплением пары мономов p_{11}, p_{11} , причем $\text{len } a \geq 2$. Тогда существуют непустые мономы c, d такие, что $p_{11} = ca = ad$. Следовательно, a имеет вид $(y^2x)^q f(xy)^q$, где f – некоторый моном; таким образом, $\text{len } c = \text{len } d = \text{len } p_{11} - \text{len } a < q$. Поскольку $p_{11} = y^2(xy^2)^q n_1 (yx)^q y = c(y^2x)^q f(xy)^q$, то c имеет вид $(y^2x)^r$ для некоторого $r > 0$. Из максимальной l имеем $r = 1$, откуда $\text{len } c = \text{len } d = 3$. С другой стороны, из равенства $p_{11} = ad$ следует, что d имеет вид $(xy)^l$ для некоторого l , откуда $\text{len } d$ четна.

Случай 2. Пусть $\#Y \geq 2$, т. е. $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$. Положим $p = (xy_1)^q n (y_2x)^q$, где $q > \text{len } n$. Пусть a – такое зацепление некоторых мономов p_{ij} и p_{kl} , что $\text{len } a \geq 2$. Тогда существует зацепление для пары мономов p, p . Это означает, что множество $\{p\}$ не является *комбинаторно свободным*, т. е. сильно свободным множеством мономов в свободной алгебре, порожденной множеством $X \cup Y$ [1]. Согласно [9, предложение 3.15] это означает, что существуют непустой моном a и некоторый моном b такие, что $p = aba$ (по крайней мере в мономиальном случае доказательство в [9] не использует предположение $\text{char } k = 0$). Тогда $a = (xy_1)^q c (y_2x)^q$ для некоторого монома c , откуда $\text{len } a \geq 4q$ и $\text{len } p \geq 8q$ в противоречие с выбором q .

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $P \triangleleft C$ – идеал, порожденный всевозможными мономами p_{ij} , и пусть $D = C/P$. Поскольку $P \subset S$, достаточно доказать, что $r(D) > r(C)$. Для этого мы вычислим гомологии алгебры D и по-

лучим ее ряд Гильберта как эйлерову характеристику минимальной резольвенты поля k .

Напомним, как вычисляются гомологии мономиальной алгебры (подробности см. в [10]; мы используем терминологию из [8]). Пусть F – свободная ассоциативная алгебра, порожденная множеством X , $I \triangleleft F$ – идеал, минимальным образом порожденный множеством мономов U , и M – факторалгебра F/I . Определим рекурсивно понятие *цепи ранга n* и ее *хвоста*.

При $n = 0$ каждую порождающую $x \in X$ назовем *цепью ранга 0*; она совпадает со своим хвостом. При $n > 0$, моном $f = gt$ называется *цепью ранга n* , а моном t – ее *хвостом*, если выполняются следующие условия:

- (i) g – цепь ранга $n - 1$;
- (ii) если r – хвост цепи g , то $rt = vu$, где v, u – мономы, и $u \in U$;
- (iii) за исключением слова u в конце, никакое подслово слова rt не лежит в U .

Обозначим множество цепей ранга n через C_n^M ; например, $C_0^M = X$ и $C_1^M = U$. Тогда для любого $n \geq 0$ имеется изоморфизм градуированных векторных пространств

$$kC_n^M \simeq \text{Tor}_{n+1}^M(k, k).$$

Обозначив через c_j^i число цепей степени i , имеющих ранг j , рассмотрим производящую функцию

$$C^M(s, t) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} c_j^i s^j t^i.$$

Рассуждая, как в предложении 1.1, из эйлеровой характеристики минимальной свободной резольвенты получаем

$$M(t)^{-1} = 1 - C^M(-1, t);$$

формальный степенной ряд в правой части существует, поскольку каждое векторное пространство $\text{Tor}_n^M(k, k)$ сконцентрировано в степенях $\geq n$.

По определению при всех $i \geq 0$ имеем $C_i^C = C_i^A \cup C_i^B$ и $C_0^D = C_0^C$. Следовательно,

$$C^C(s, t) = C^A(s, t) + C^B(s, t),$$

откуда

$$C^D(s, t) = C^A(s, t) + C^B(s, t) + C'(s, t),$$

где множество C' состоит из всевозможных цепей, имеющих подслово p . В частности, множество C_0' пусто и $C_1' = \{p_{ij}\}$.

Докажем, что множество C' состоит из всевозможных мономов вида

$$c_1 p c_2 p \dots p c_n \tag{3.1}$$

при $n \geq 2$, где $c_1, \dots, c_n \in C^B$. Легко видеть, что все мономы такого вида – цепи из C' . Докажем обратное утверждение.

Поскольку $C_0^B = Y$, оно очевидно для цепей ранга ≤ 1 . Пусть $f = gt \in C_n'$, где g – цепь меньшего ранга и t – хвост цепи f . Пусть r – хвост g . По индукции мы можем считать, что либо $g \in C^B$, либо g имеет вид (3.1); в последнем случае r – либо хвост цепи c_n , либо имеет вид py_i , где $y_i = c_n \in Y$. Если t – слово над

алфавитом Y , то либо $gt \in C^B$, либо $c_nt \in C^B$, т.е. f имеет требуемый вид. В противном случае t должен содержать p в качестве подслова; следовательно, $t = py_j$ для некоторого j . Таким образом,

$$f = c_1 p c_2 p \dots p c_n p y_j.$$

Перейдем к вычислению производящей функции. Заметим, что если цепь f имеет вид (3.1), то ранг f равен $k + n - 1$, где k – сумма рангов цепей $c_1, \dots, c_n$. Пусть $\deg p = b$. Из (3.1) имеем

$$C'(s, t) = \sum_{i \geq 1} (st^b)^i (C^B(s, t))^{i+1} = \frac{st^b (C^B(s, t))^2}{1 - st^b C^B(s, t)}.$$

Положим $q(t) = 1 - B(t)^{-1} = C^B(t, -1)$. Очевидно, при $0 < t \leq r(B)$ имеем $q(t) > 0$.

Получаем

$$D(t)^{-1} = C(t)^{-1} - C'(-1, t),$$

откуда

$$D(r(C))^{-1} = -C'(-1, r(C)) = \frac{r(C)^b q(r(C))^2}{1 + r(C)^b q(r(C))} > 0.$$

Поскольку $r(D) \geq r(C)$ и $D(r(C)) > 0$, получаем, что $r(D) > r(C)$. Теорема 3.5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть A – связная алгебра такая, что $r(A) > 0$. Если в A существует непустое сильно свободное множество, то A экстремальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [1, лемма 2.7] всякое подмножество сильно свободного множества сильно свободно; значит, существует сильно свободный элемент $f \in A$. Пусть L – идеал, порожденный f , и $B = A/L$.

Если A порождена элементом f , то, поскольку любое сильно свободное множество порождает свободную подалгебру, $A = k\langle f \rangle$; значит, каждая собственная факторалгебра алгебры A конечномерна и алгебра A экстремальна. В противном случае алгебра B нетривиальна, и потому алгебра $C = B * k\langle g \mid \deg g = \deg f \rangle$ экстремальна по теореме 3.5.

Согласно [1, §2] существует изоморфизм градуированных векторных пространств $\rho: C \rightarrow A$ со следующими свойствами:

- (i) ограничение ρ на B обратно справа к канонической проекции $A \rightarrow B$;
- (ii) $\rho(g) = f$ и $\rho(a_1 g a_2 \dots g a_n) = \rho(a_1) f \rho(a_2) \dots f \rho(a_n)$.

Пусть $m \in A$ – произвольный однородный элемент, $m = \rho(c)$, и $I = AmA$ – идеал, порожденный m . Требуется доказать, что $r(A/I) > r(A)$. Действительно, пусть $c' = g c g$, $m' = f m f = \rho(c')$ и $J \triangleleft A$ (соответственно $K \triangleleft C$) – идеал, порожденный m' (соответственно c'). Для любых $a, b \in C$ получаем

$$\rho(ac'b) = \rho(agcgb) = \rho(a) f \rho(c) f \rho(b) = \rho(a) m' \rho(b).$$

Следовательно, $\rho(K) \subset J$, откуда $(A/J)(t) \leq (C/K)(t)$. Имеем

$$r(A/I) \geq r(A/J) \geq r(C/K) > r(C) = r(A).$$

Следствие 3.7 показывает, что для доказательства экстремальности связной конечно порожденной алгебры достаточно найти в ней сильно свободный элемент. Это дает новые примеры экстремальных алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Связная квадратичная алгебра с одним определяющим соотношением и не менее чем тремя порождающими экстремальна.*

Отметим, что, как показывает пример кольца многочленов от двух переменных, для 2-порожденной алгебры это уже не верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = F/\text{id}(b)$ – такая алгебра, где $F = T(V)$, $\dim V = n \geq 3$ и $b \in V \otimes V$. Рассмотрим сначала случай, когда b зависит не от всех порождающих, т.е. существует собственное подпространство $V' \subset V$ такое, что $b \in T(V') \subset F$. Тогда если $V = V' \oplus V''$, то $A \simeq T(V')/\text{id}(b) * T(V'')$ и алгебра A экстремальна по теореме 3.5.

Итак, можно считать, что для любого базиса $x_1, \dots, x_n$ в V элемент b существенно зависит от каждого элемента базиса. Наша цель – найти в F такой квадратичный элемент m , что множество $\{b, m\}$ сильно свободно в F : тогда образ m в A также сильно свободен и согласно следствию 3.7 алгебра A экстремальна.

Пусть $b = \alpha x_1^2 + \beta x_1 x_2 + \gamma x_2 x_1 + \delta x_2^2 + f$, где f линейно по x_1, x_2 . Если $\alpha = 0$, то, поскольку элемент b существенно зависит от x_1 , либо его старший моном $\tilde{b}$ относительно лексикографически-степенного порядка при $x_1 > \dots > x_n$ равен $x_1 x_i$, либо его старший моном $\tilde{b}$ относительно обратного лексикографически-степенного порядка при той же упорядоченности переменных равен $x_i x_1$, где $i > 1$. Если старшие члены нескольких элементов свободной алгебры не пересекаются, то эти элементы образуют сильно свободное множество [1]. Следовательно, в первом случае достаточно взять $m = x_1 x_j$, а во втором – $m = x_j x_1$, где $j \neq 1, i$.

Таким образом, можно считать $\alpha \neq 0$ и, аналогично, $\delta \neq 0$: с точностью до пропорциональности можно считать $\delta = 1$. Рассмотрим b как элемент свободной алгебры $\bar{F} = \bar{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ над алгебраическим замыканием $\bar{k}$ поля k . Сделаем в $\bar{F}$ линейную замену порождающих $x_2 = y_2 + \epsilon y_1$, $x_i = y_i$ при $i \neq 2$. Тогда

$$b = (\alpha + \epsilon^2 + \beta\epsilon + \gamma\epsilon)y_1^2 + (\beta + \epsilon)y_1 y_2 + (\gamma + \epsilon)y_2 y_1 + y_2^2 + f,$$

где f линейно по y_1, y_2 . Выберем ϵ так, чтобы коэффициент при y_1^2 был равен нулю. Если при этом коэффициент при $y_1 y_2$ (соответственно при $y_2 y_1$) ненулевой, то множество $\{b, m\}$ при $m = y_1 y_3 = x_1 x_3$ (соответственно $m = y_3 y_1 = x_3 x_1$) сильно свободно над $\bar{k}$ и, следовательно, над k . Если же оба эти коэффициента нулевые, то $\epsilon = -\beta \in k$, т.е. замена переменных в $\bar{F}$ индуцирована автоморфизмом V , и $b = y_2^2 + f$. Теперь задача сводится к уже разобранному случаю $\alpha = 0$.

Напомним, что связная конечно порожденная алгебра A называется *регулярной* (по Артину–Шелтеру), если, во-первых, она имеет конечную глобальную размерность (скажем, d) и, во-вторых, $\text{Ext}_A^i(k, A) = 0$ при $i \neq d$ и $\text{Ext}_A^d(k, A) = k[m]$ для некоторого целого m . Известна классификация регулярных алгебр полиномиального роста глобальной размерности 3 [11]–[13] и регулярных алгебр глобальной размерности 2 [14]. В частности, регулярные алгебры размерности 2 могут иметь произвольное количество $n \geq 2$ порождающих и единственное соотношение, причем при $n = 2$ такая алгебра имеет полиномиальный рост, а при $n \geq 3$ – экспоненциальный рост.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. *Регулярные алгебры глобальной размерности 2 с $n \geq 3$ порождающими экстремальны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – такая алгебра, $x_1, \dots, x_n$ – ее однородные порождающие, где $1 \leq \deg x_1 \leq \dots \leq \deg x_n$, и $b \in F = k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – соотношение. Как показано в [14], существует такой градуированный автоморфизм σ алгебры F , что $b = \sum_{i=1}^n x_i \sigma x_{n+1-i}$. Если $\deg x_1 = \dots = \deg x_n$, то A – квадратичная алгебра с $n \geq 3$ порождающими, значит, она экстремальна по предложению 3.8.

Предположим, что не все порождающие имеют одну и ту же степень, т.е. $s = \deg x_1 = \dots = \deg x_i < \dots < \deg x_{n+1-i} = \dots = \deg x_n = t$. Тогда $\deg b = s + t < 2t$, и потому в разложение элемента $b \in F$ не входит моном x_n^2 . Следовательно, старший относительно лексикографически-степенного порядка при $x_n > \dots > x_1$ моном элемента b равен $x_n x_j$ для некоторого $j < n$. Если $j \neq l < n$, то множество $\{b, x_n x_l\}$ сильно свободно в F , поскольку старшие мономы его элементов не пересекаются [1]. Таким образом, элемент $x_n x_l$ сильно свободен в A , и алгебра A экстремальна по следствию 3.7.

§ 4. Оценки рядов Гильберта факторалгебр

Пусть A – связная алгебра, $r(A) > 0$, $S \subset A$ – непустое множество однородных элементов, минимальным образом порождающее идеал $I = ASA$, и $B = A/I$. Пусть $C = B * k\langle S \rangle$ и

$$D = A/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \dots$$

с индуцированной градуировкой; в частности, $D(t) = A(t)$. Согласно [9, теорема 2.4] имеем эпиморфизм $f: C \rightarrow D$, который является изоморфизмом в том и только том случае, когда множество S сильно свободно. Поскольку алгебра C содержит сильно свободное множество S , она экстремальна; следовательно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *В описанных обозначениях $r(A) \geq r(C)$. Равенство выполняется тогда и только тогда, когда множество S сильно свободно.*

Согласно формуле для ряда Гильберта свободного произведения имеем

$$C(t)^{-1} = B(t)^{-1} - S(t).$$

Поскольку C экстремальна, ряды $B(t)$ и $S(t)$ сходятся при $t \in [0, r(C)]$, откуда

$$B(r(C))^{-1} - S(r(C)) = 0,$$

или

$$B(r(C))S(r(C)) = 1.$$

Поскольку $r(A) \geq r(C)$, имеем

$$B(r(A))S(r(A)) \geq 1;$$

равенство выполняется тогда и только тогда, когда $r(A) = r(C)$.

Таким образом, получаем

ТЕОРЕМА 4.2. В описанных обозначениях $B(r(A))S(r(A)) \geq 1$, причем следующие условия эквивалентны:

- (i) это неравенство обращается в равенство;
- (ii) $r(A) = r(C)$;
- (iii) множество $S \subset A$ сильно свободно.

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, если множество S состоит из n элементов одной и той же степени l , то имеем

$$t \geq B(r(A))^{-1} r(A)^{-l},$$

где равенство выполняется тогда и только тогда, когда множество S сильно свободно. Эта оценка обобщает неравенство Говорова (2.1).

§ 5. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания экспоненты роста

В этом параграфе мы считаем, что основное поле k имеет нулевую характеристику. Пусть в обозначениях предыдущего параграфа A – свободная ассоциативная алгебра ранга s со стандартной градуировкой и множество α состоит из t элементов второй степени. Как показал Д. Аник [6], для некоторых t и s проблема распознавания сильно свободных множеств α алгоритмически неразрешима. Будем называть такую пару натуральных чисел (s, t) *неразрешимой*.

Для неразрешимой пары (s, t) невозможно, вообще говоря, проверить, выполняются ли эквивалентные условия из теоремы 4.2, т.е. справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть (s, t) – неразрешимая пара натуральных чисел. Тогда не существует алгоритма, который по заданному набору α из t соотношений 2-й степени от s переменных проверял бы равенство $r(C) = s^{-1}$, где C – алгебра с данными соотношениями, порожденная s элементами 1-й степени и t элементами 2-й степени. Кроме того, не существует алгоритма, который проверял бы равенство $B(s^{-1}) = s^2 t^{-1}$, где B – s -порожденная стандартная алгебра с теми же соотношениями.

Отметим, что здесь алгебра C не может быть стандартной. Наша ближайшая цель – доказать аналог этой теоремы для стандартной квадратичной алгебры C .

ЛЕММА 5.2. Пусть l – натуральное число, и пусть (s, t) – неразрешимая пара. Тогда пара $(s + l, t)$ также неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = A * k \langle x_{s+1}, \dots, x_{s+l} \rangle$ – свободная алгебра ранга $s + l$. Тогда множество $\alpha \in A$ сильно свободно в A в том и только том случае, когда оно сильно свободно в G . Следовательно, распознающего его алгоритма не существует.

ЛЕММА 5.3. Пусть натуральное число s четно. Если пара (s, t) неразрешима, то и пара $(2s, s^2/4)$ неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [15] в A существует квадратичное сильно свободное множество, состоящее из q элементов, в том и только том случае, когда $4q \leq s^2$. В частности, $t \leq s^2/4$. Пусть β – квадратичное сильно свободное множество в алгебре $G = k \langle x_{s+1}, \dots, x_{2s} \rangle$, состоящее из $s^2/4 - t$

элементов. Тогда $(s^2/4)$ -элементное множество $\alpha \cup \beta$ сильно свободно в алгебре $A * G = k\langle x_1, \dots, x_{2s} \rangle$ в том и только том случае, когда множество α сильно свободно в алгебре A .

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Для всех достаточно больших натуральных d пара $(4d, d^2)$ неразрешима.*

ТЕОРЕМА 5.5. *Обозначим через F_s свободную ассоциативную алгебру ранга s со стандартной градуировкой.*

Тогда для некоторых натуральных s, t, q не существует алгоритма, который бы по данному множеству $\gamma \subset F_s$ из t однородных квадратичных элементов всегда определял бы, выполняется ли равенство

$$r(R) = q^{-1},$$

где $R = F_s / \text{id}(\gamma)$. При этом для любого достаточно большого натурального d можно положить $s = 64d$, $t = 241d^2$ и $q = 60d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d – такое натуральное число, что пара $(60d, 15^2d^2)$ неразрешима. Пусть $\alpha \in F_{60d}$ – квадратичное 15^2d^2 -элементное множество, и пусть $B = F_{60d} / \text{id}(\alpha)$. Обозначим через A стандартную алгебру $k\{1, y_1, \dots, y_{4d}\} = k\langle y_1, \dots, y_{4d} \mid y_i y_j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4d \rangle$. Тогда алгебра $C = k\langle x_1, \dots, x_{64d} \rangle / \text{id}(\gamma)$ изоморфна $A * B$, где $\gamma = \alpha \cup \{x_i x_j = 0 \mid 60d + 1 \leq i, j \leq 64d\}$. Значит, C – стандартная алгебра с $s = 64d$ порождающими и $t = (4d)^2 + 15^2d^2 = 241d^2$ квадратичными соотношениями. Достаточно доказать, что множество α сильно свободно в F_{60d} в том и только том случае, когда $r(C) = (60d)^{-1}$.

Имеем

$$C^{-1}(x) = B^{-1}(x) + A^{-1}(x) - 1 = B^{-1}(x) + \frac{1}{1 + 4dx} - 1 = B^{-1}(x) - \frac{4dx}{1 + 4dx}.$$

Если α сильно свободно в F_{60d} , то согласно следствию 1.2 имеем $B^{-1}(x) = 1 - 60dx + 225d^2x^2$, откуда

$$C^{-1}(x) = 1 - 60dx + 225d^2x^2 - \frac{4dx}{1 + 4dx} = \frac{(1 - 60dx)(1 - 15d^2x^2)}{1 + 4dx}.$$

Согласно предложению 3.1, (v) получаем $r(C) = (60d)^{-1}$.

Пусть теперь α не сильно свободно в F_{60d} . По теореме 2.2 имеем $B^{-1}((60d)^{-1}) < 225d^2 / (60d)^2 = 1/16$. Значит,

$$C^{-1}((60d)^{-1}) = B^{-1}((60d)^{-1}) - \frac{4d(60d)^{-1}}{1 + 4d(60d)^{-1}} < \frac{1}{16} - \frac{1}{1 + 1/(4d(60d)^{-1})} = 0.$$

Имеем $r(C) \neq (60d)^{-1}$ в противоречие с предложением 3.1, (v).

Таким образом, над полем нулевой характеристики невозможно, вообще говоря, по заданным образующим и соотношениям стандартной алгебры определить, равна ли ее экспонента роста данному натуральному числу, а также определить, равно ли значение функции Гильберта алгебры в данной рациональной точке данному целому числу.

Список литературы

1. *Anick D.* Non-commutative graded algebras and their Hilbert series // *J. Algebra.* 1982. V. 78. P. 120–140.
2. *Anick D.* Inert sets and the Lie algebra associated to a group // *J. Algebra.* 1987. V. 111. P. 154–165.
3. *Голод Е. С., Шафаревич И. Р.* О башне полей классов // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1964. Т. 28. № 2. С. 261–272.
4. *Голод Е. С.* Некоммутативные полные пересечения и гомологии комплекса Шафаревича // *УМН.* 1997. Т. 52. № 4. С. 201–202.
5. *Говоров В. Е.* О градуированных алгебрах // *Матем. заметки.* 1972. Т. 12. № 2. С. 197–204.
6. *Anick D.* Diophantine equations, Hilbert series, and undecidable spaces // *Ann. Math.* 1985. V. 122. P. 87–112.
7. *Латышев В. Н.* Компьютерная алгебра. Стандартные базисы. М.: Изд-во МГУ, 1988.
8. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // *Современная математика и ее приложения.* 1990. Т. 57. С. 5–177.
9. *Halperin S., Lemaire J.-M.* Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées // *Math. Scand.* 1987. V. 61. № 1. P. 39–67.
10. *Anick D.* On the homology of associative algebras // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. V. 296. № 2. P. 641–659.
11. *Artin M., Shelter W.* Graded algebras of global dimension 3 // *Adv. Math.* 1987. V. 66. P. 171–216.
12. *Artin M., Tate J., van den Bergh M.* Some algebras related to automorphisms of elliptic curves // *The Grothendieck Festschrift. V. 1.* Boston: Birkhauser, 1990. P. 33–85.
13. *Stephenson D. R.* Artin–Shelter regular of global dimension three // *J. Algebra.* 1996. V. 183. № 1. P. 55–73.
14. *Zhang J. J.* Non-Noetherian regular rings of dimension 2 // *Proc. AMS.* 1998. V. 126. № 6. P. 1645–1653.
15. *Anick D.* Generic algebras and CW-complexes // *Proc. of 1983 Conf. on algebra, topol. and K-theory in honor of John Moore.* Princeton Univ., 1988. P. 247–331.

Центральный экономико-математический институт РАН,
Москва, Россия
E-mail: piont@mccme.ru

Поступило в редакцию
5.I.2000