Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Б. Дубовский, Разрешимость уравнения переноса в кинетике коагуляции и дробления, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 1, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/im317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:24:56

УДК 517.968

П. Б. Дубовский

Разрешимость уравнения переноса в кинетике коагуляции и дробления

Доказывается локальная теорема существования непрерывного решения для пространственно неоднородной кинетической модели коагуляции–дробления. Затем доказана разрешимость задачи в целом по времени в классе непрерывных функций. Важно отметить, что в обоих случаях допускаются неограниченные интегральные ядра. Демонстрируется также единственность решения и его непрерывная зависимость от исходных данных задачи.

Библиография: 23 наименования.

Одним из основных механизмов эволюции дисперсных систем, под которыми понимается смесь двух фаз, одна из которых распределена в другой в виде мелких частиц (кристалликов, капель, пузырьков и т.д.), является механизм коагуляции (слияния) частиц системы и их дробление, который в пространственно неоднородном случае описывается следующим кинетическим уравнением переноса [1]–[3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(x, z, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_z(v(x, z, t)c(x, z, t)) &= \frac{1}{2} \int_0^x K(x-y, y)c(x-y, z, t)c(y, z, t) dy \\ &- c(x, z, t) \int_0^\infty K(x, y)c(y, z, t) dy + q(x, z, t) - a(x, z, t)c(x, z, t) \\ &+ \int_x^\infty F(y-x, x)c(y, z, t) dy - \frac{1}{2}c(x, z, t) \int_0^x F(x-y, y) dy, \quad x \geq 0, \quad t > 0, \\ c(x, z, 0) &= c_{01}(x, z) \geq 0, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

$$(2)$$

Здесь $c(x, z, t)$ – функция распределения частиц массой $x \in \mathbb{R}_+^1 = [0, \infty)$ в момент времени $t \geq 0$ в пространственной точке $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Неотрицательные симметричные функции K и F , называемые *ядрами коагуляции и дробления*, предполагаются известными из физики процесса. Они наиболее существенным образом влияют на эволюцию коагулирующих систем и характеризуют соответственно интенсивность слияния частиц с массами x и y и дробления частиц с массой $x+y$ на две частицы с массами x и y [2]. Из физических соображений интегральные ядра должны быть симметричными, т.е. $K(x, y) = K(y, x)$, $F(x, y) = F(y, x)$ при всех значениях аргументов; функция $v(x, z, t) \in \mathbb{R}^3$ является скоростью пространственного переноса частиц массы x в точке z в момент времени t . Скалярная функция $q(x, z, t)$ является функцией распределения источников частиц, а $a(x, z, t)$ определяет интенсивность поглощения частиц внешней средой. Функции v, q, a считаются

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-00336).

известными, функции v и a зачастую могут быть приближены степенной функцией от x .

Обзор исследований задачи Коши (1), (2) содержится в [5]. Однако при анализе коагуляции–дробления водяных капель в атмосфере и во многих других процессах следует учитывать и краевое условие на поверхности Земли (или в тропопаузе в зависимости от направления скорости пространственного переноса)

$$c(x, z, t)|_{z_3=0} = c_{02}(x, z_1, z_2, t) \geq 0, \quad -\infty < z_1, z_2 < +\infty. \quad (3)$$

При формулировке краевого условия (3) мы предполагаем, что проекция скорости на вертикальную ось z_3 неотрицательна, т.е. $v_3(x, z, t) \geq 0$. В этом случае начально-краевая задача (1)–(3) рассматривается в полупространстве $z_3 \geq 0$, которое мы обозначим $\mathbb{R}_+^3$. Интеграл по $(z, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^1$ от функции $c(x, z, t)$ равен полному числу частиц в момент времени t , а первый момент – полной массе частиц дисперсной системы.

Если предположить, что частицы могут дробиться не на две, а на много мелких частиц, то последние два слагаемых в правой части уравнения (1) следует заменить на (см. [4])

$$\int_x^\infty \Psi(y, x) c(y, z, t) dy - c(x, z, t) \int_0^x \frac{y}{x} \Psi(x, y) dy, \quad (4)$$

где функция дробления $\Psi(x, y)$, $x \geq y$, описывает распределение частиц, возникших в результате дробления частицы массой x . Слагаемые дробления в виде (1) могут быть получены из данной модели. Действительно, если предположить, что каждая частица может разделиться только на две, то $\Psi(x, y) = \Psi(x, x - y)$, и тогда слагаемые (4) могут быть переписаны в форме (1) с заменой $F(x - y, y) = \Psi(x, y)$.

Задача Коши (1), (2) без учета дробления ($F \equiv 0$), источников и поглощения ($q \equiv a \equiv 0$) изучалась в работах [6]–[8]. Отметим, что рассмотрение процессов дробления заметно усложняет анализ, поскольку дополнительное положительное слагаемое имеет бесконечную область интегрирования и к тому же нулевой момент от решения (соответствующий полному числу частиц в системе) увеличивается со временем. Что касается влияния источников и поглощения частиц, то с математической точки зрения оно не столь существенно.

В [6] скорость пространственного переноса $v(x)$ предполагается постоянной при достаточно больших $x > x_0$, что позволяет свести задачу к пространственно однородному случаю, существенно более легкому, чем неоднородный. В [8] доказано существование обобщенного решения при условии $K(x, x) \equiv 0$. В последнее время появилась серия работ [9]–[13], в которых авторы рассматривают эту задачу при учете диффузии, что математически означает добавление в правую часть уравнения (1) выражения $D\Delta c$. Однако добавление лапласиана, регуляризирующего задачу, обычно лишь упрощает ее анализ. Именно поэтому многие результаты цитированных работ получены при строго положительных коэффициентах диффузии D , а в тех случаях, когда допускаются $D = 0$, использованы другие упрощающие предположения (обычно условия убывания интегральных ядер). Предельные переходы при $D \rightarrow 0$ обычно не делаются (за исключением [9], где, однако, при этом скорость пространственного переноса v является по сути константой). Другие результаты, касающиеся пространственно неоднородного уравнения коагуляции–дробления с диффузией, могут быть найдены в [14]–[16]. Пространственно неоднородная модель с дискретными скоростями переноса рассмотрена в [17].

В данной статье доказывается локальная разрешимость начально-краевой задачи (1)–(3) при достаточно общих с физической точки зрения предположениях на неограниченные ядра коагуляции $K(x, y)$, а также теорема существования и единственности непрерывного решения в целом начально-краевой задачи (1)–(3) при некоторых дополнительных ограничениях, которые, однако, допускают рассмотрение неограниченных ядер коагуляции и дробления, важных как с физической точки зрения, так и с точки зрения их математического исследования, поскольку при этом моментная цепочка уравнений является незамкнутой, т.е. левая и правая части уравнения (1) (записанного ниже в интегральной форме (5)) принадлежат разным функциональным пространствам.

В §1 вводятся основные функциональные пространства и доказывается локальная разрешимость задачи для финитных интегральных ядер, на основании чего в §2 доказывается локальная теорема существования и единственности решения. Отметим, что доказательство неотрицательности решения проводится на основе довольно общей леммы о неподвижных точках последовательности сжимающих операторов. Затем формулируется принцип максимума, применимый и к другим эволюционным задачам. Варианты этого принципа максимума, не применимые к рассматриваемой задаче, можно найти в [18], [19]. Затем на основе этого принципа максимума получается априорная оценка ограниченности решения в пространстве C . §3 посвящен доказательству интегральной априорной оценки. Доказательство использует подход [7], однако в нашем случае удастся расширить результат с ограниченных на неограниченные ядра коагуляции и учесть процессы дробления. Некоторые аспекты существенного усложнения задачи, вызванные учетом дробления и влиянием пространственной неоднородности, отражены в конце §1. В §5 существенно улучшается интегральная оценка предыдущего параграфа, что позволяет доказать разрешимость задачи в целом в классе непрерывных функций. Затем делается ряд выводов и комментариев ко всей работе, включая переформулировку основной теоремы существования для важного частного случая.

Результаты данной статьи могут быть естественным образом сужены на задачу Коши (1), (2), и тогда мы получаем существенное развитие результатов цитированных работ, позволяющее рассматривать неограниченные ядра коагуляции и дробления.

§1. Локальная разрешимость для ядер коагуляции и дробления с компактным носителем

Фиксируем произвольное $T > 0$ и запишем задачу (1)–(3) в следующем интегральном виде:

$$c(x, z, t) = \begin{cases} c_{01}(x, z^{(0)}) + \int_0^t (\mathbf{S}(c) - c \operatorname{div}_z v)(x, z(s), s) ds, & \text{если } z_3^{(0)} \geq 0, \\ c_{02}(x, t^{(0)}) + \int_{t^{(0)}}^t (\mathbf{S}(c) - c \operatorname{div}_z v)(x, z(s), s) ds, & \text{если } z_3^{(0)} < 0, \\ & t^{(0)} > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, z_3^{(0)})$ и $t^{(0)} = t^{(0)}(x, z, t)$ являются началом характеристики уравнения (1), проходящей через точку (x, z, t) в зависимости от ее располо-

жения; значение $\mathbf{S}(c)(x, z, t)$ столкновительного оператора $\mathbf{S}$ равно правой части уравнения (1). Уравнение характеристик имеет вид $dz/dt = v(x, z, t)$, и мы предполагаем, что оно однозначно разрешимо и что многообразие $z_3 = 0$ не является характеристическим. Решение уравнения характеристик обозначаем $z(x, s)$ или $z(s)$, причем $z(t) = z$.

Мы налагаем следующие условия на пространственный перенос и поглощение частиц, которые не ограничивают многообразия физически реальных процессов¹:

$$a(x, z, t) + \operatorname{div}_z v(x, z, t) \geq -b = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad z \in \mathbb{R}_+^3, \quad x \geq 0. \quad (6)$$

Функции v и $\operatorname{div}_z v$ предполагаются непрерывными, а функция поглощения a непрерывной и ограниченной.

Определим банахово пространство $\Omega_\lambda(T)$, $\lambda > 0$, функций с нормой

$$\|c\|_\lambda = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty \exp(\lambda x) \sup_{z \in \mathbb{R}_+^3} |c(x, z, t)| dx + \sup_{z \in \mathbb{R}_+^3, 0 \leq t \leq T, x \geq 0} |c(x, z, t)|$$

и при некотором $r \geq 0$ банахово пространство $\Omega_{0,r}(T) \supset \Omega_\lambda(T)$ непрерывных функций $c(x, z, t)$ с нормами

$$\|c\|_{0,r} = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty x^r \sup_{z \in \mathbb{R}_+^3} |c(x, z, t)| dx + \sup_{z \in \mathbb{R}_+^3, 0 \leq t \leq T, x \geq 0} |c(x, z, t)|.$$

Конусы неотрицательных функций в вышеопределенных пространствах мы обозначаем верхним индексом “+”. Сформулируем лемму, которая гарантирует разрешимость начально-краевой задачи (1)–(3) с финитными ядрами коагуляции и дробления.

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие (6), функции K и F (или, для членов дробления в форме (4), функция Ψ) неотрицательны, непрерывны и имеют компактный носитель. Пусть также для некоторого $r \geq 0$

$$1) \quad q, c_{02} \in \Omega_{0,r}^+(T), \quad c_{01} \in \Omega_{0,r}^+(0);$$

или для некоторого $\lambda_0 > 0$

$$2) \quad q, c_{02} \in \Omega_{\lambda_0}^+(T), \quad c_{01} \in \Omega_{\lambda_0}^+(0).$$

Предположим, что начальные и краевые условия непрерывно сопряжены, т.е. $c_{01}|_{z_3=0} = c_{02}|_{t=0}$ при всех значениях аргументов. Тогда для некоторого $\tau > 0$ задача (1)–(3), записанная в интегральной форме (5), имеет единственное решение

$$1) \quad c \in \Omega_{0,r}^+(\tau)$$

или

$$2) \quad c \in \Omega_{\lambda_0}^+(\tau)$$

соответственно. В обоих случаях решение имеет непрерывную производную вдоль характеристик уравнения (1).

¹ Действительно, из уравнения неразрывности $\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}_z(\rho v) = 0$ и ограниченности плотности ρ вместе с ее производными следует (6). На это внимание автора обратил А.Е. Алоян.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интегральное уравнение $c = Y(c)$, где оператор Y , определяемый правой частью соотношений (5), отображает пространства $\Omega_{0,r}$ и Ω_{λ_0} в себя благодаря финитности интегральных ядер. Применяя принцип сжимающих отображений, получаем теорему локального существования и единственности непрерывного решения. Его дифференцируемость вдоль характеристик непосредственно следует из непрерывности подынтегрального выражения в (5).

Для доказательства неотрицательности предположим, что начальные данные строго положительны, но решение где-то становится равным нулю. Из таких “нулевых” точек выберем точку $P_0 = (x_0, z_0, t_0)$, которая является “первой”, т.е. на характеристике, проходящей через нее, решение c положительно при $t < t_0$ и

$$c(x, z(s), s) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq s < t_0, \quad 0 \leq x \leq X. \quad (7)$$

Здесь $X < \infty$ таково, что носители интегральных ядер находятся внутри области $[0, X] \times [0, X]$. Существование такой точки зануления следует из того, что множество “нулевых” точек не пусто на достаточно большом компакте и, следовательно, имеет предельную точку с наименьшим временным аргументом, которая и является искомой.

Из (5) следует, что в точке P_0 производная вдоль характеристики положительна, что противоречит выбору точки P_0 , так что такая точка отсутствует и из непрерывности решения следует его положительность.

Если же начальные данные не строго положительны, то аппроксимируем их положительными и получаем последовательность положительных решений c^n , удовлетворяющих уравнениям $c^n = Y_n(c^n)$, где операторы Y_n определены правой частью (5) для последовательности положительных начальных данных c_{01}^n , причем $Y, Y_n: \Omega_{0,r}(\tau) \mapsto \Omega_{0,r}(\tau)$.

Непосредственно проверяется, что в шаре радиуса C , в котором имеет место сжатие при $0 \leq t \leq \tau$ и в котором находятся функции c^n и c ,

$$\sup_{\|c\|_{0,r}^{(\tau)} \leq C} \|Y_n(c) - Y(c)\|_{0,r}^{(\tau)} \leq \int_0^\infty \sup_z (1+x^r) |c_{01}^n(x, z) - c_{01}(x, z)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому сходимость последовательности положительных решений, аппроксимирующих решение задачи c^n в пространстве $\Omega_{0,r}$ к решению исходной задачи, которое, таким образом, оказывается неотрицательным, устанавливается из следующей простой леммы.

ЛЕММА 2. Пусть сжимающий оператор Y с константой сжатия $\alpha < 1$, отображающий банахово пространство X в себя, является пределом последовательности операторов $Y_n: X \mapsto X$ по норме. Пусть операторы Y_n имеют неподвижные точки x_n , которые ограничены в совокупности: $\|x_n\| \leq C$, $n \geq 1$. Тогда $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где x – неподвижная точка оператора Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \|Y_n(x_n) - Y(x)\| \leq \|Y_n(x_n) - Y(x_n)\| + \|Y(x_n) - Y(x)\| \\ &\leq \|Y_n(x_n) - Y(x_n)\| + \alpha \|x_n - x\| \end{aligned}$$

получаем

$$(1 - \alpha)\|x_n - x\| \leq \sup_{\|x\| \leq C} \|Y_n(x) - Y(x)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что завершает доказательство леммы 2 и, тем самым, леммы 1.

Обсудим вопрос о продолжении полученного локального решения на весь временной промежуток. Казалось бы для получения априорной оценки ограниченности решения достаточно отбросить отрицательные слагаемые в правой части уравнения и ввести мажорирующую функцию $h(x, t) > \sup_z c(x, z, t)$, для которой выполняется уравнение

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \bar{K} \int_0^x h(x - y, t) h(y, t) dy + (b + 1)h(x, t) + \bar{F} \int_x^n h(y, t) dy, \quad (8)$$

$$h(x, 0) \equiv h_0 \stackrel{\text{def}}{=} \|c_{01}\|_{0,k} + \|c_{02}\|_{0,k} + \|q\|_{0,k}. \quad (9)$$

Здесь $\bar{K} = \sup_{x, y \geq 0} K(x, y)$, $\bar{F} = \sup_{x, y \geq 0} F(x, y)$. Неравенство

$$c(x, z, t) \leq h(x, t), \quad 0 \leq x \leq n, \quad z \in \mathbb{R}_+^3, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

в этом случае несложно доказать. В работе [20] при $b + 1 = 0$, $F \equiv 0$ получено решение $h(x, t) = h_0 e^{Cxt}$ уравнения (8), что позволяет продолжить решение по t .

Однако в нашем случае наличие третьего слагаемого в правой части данного уравнения, вызванное учетом дробления, не позволяет доказать разрешимость в целом для уравнения (8) и получить априорную оценку, необходимую для продолжения локального решения. Наиболее явно сложность этой проблемы, вызванной учетом дробления, можно показать для дискретной версии уравнения (8), которая физически не менее значима, чем рассматриваемая в данной работе непрерывная версия уравнения коагуляции–дробления и выводится в предположении, что все частицы системы имеют массу, пропорциональную некоторому минимальному размеру m_0 , называемому по аналогии с физикой полимеров *мономером*. В этом случае $c_i(z, t)$ является концентрацией частиц массы im_0 . Тогда соотношение (8) принимает вид

$$\frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{1}{2} \bar{K} \sum_{j=1}^{i-1} h_{i-j}(t) h_j(t) + (b + 1)h_i(t) + \bar{F} \sum_{j=i+1}^n h_j(t) dy, \quad i \geq 1,$$

и при $n = 2$, $K \equiv 2$, $F \equiv 1$, $b + 1 = 0$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = h_2, \quad \frac{dh_2(t)}{dt} = h_1^2,$$

откуда $h_1''(t) = h_1^2(t)$. Стандартной заменой $h_1' = p(h_1)$ достигается понижение порядка уравнения, и оно приобретает вид

$$h_1' = \sqrt{\frac{2}{3} h_1^3 + C},$$

откуда убеждаемся в отсутствии нелокального по t решения для мажорирующей функции h . Таким образом, учет процессов дробления существенно усложняет исследование процессов коагуляции. В дальнейшем для продолжения решения по t мы используем более тонкие оценки. Отметим также, что в пространственно однородном случае подобные проблемы отсутствуют, поскольку тогда имеются оценки ограниченности моментов решения, а проблемное третье слагаемое в (8) непосредственно оценивается нулевым моментом. Подобная схема рассуждений выполнена в [21].

§ 2. Теорема существования локального решения для неограниченных ядер

В этом параграфе ядра коагуляции и дробления могут не иметь компактных носителей, и для анализа задачи мы строим последовательности непрерывных финитных ядер, аппроксимирующих K_n и F_n так, что они совпадают с K и F при $x+y \leq n$, равны нулю при $x+y \geq n+1$ и не превосходят K и F при $n \leq x+y \leq n+1$. Рассмотрим регуляризацию уравнения (1), получающуюся путем замены K и F на K_n и F_n соответственно. Согласно теореме 1 последовательности K_n и F_n порождают последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ решений аппроксимирующих задач. Далее исследуются свойства последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, на основании чего устанавливается локальная по времени разрешимость начально-краевой задачи (1)–(3) с неограниченными ядрами коагуляции. Следующая лемма обеспечивает равномерную по $n \geq 1$ оценку интегралов от решений c_n уравнения (1) с ядрами K_n и F_n .

ЛЕММА 3. Пусть выполнено (6) и условие непрерывного сопряжения начальных и краевых данных. Пусть для некоторого $\lambda_0 > 0$ справедливо следующее: $q, c_{02} \in \Omega_{\lambda_0}^+(T)$, $c_{01} \in \Omega_{\lambda_0}^+(0)$. Пусть ядра коагуляции и дробления непрерывны, неотрицательны,

$$K(x, y) \leq k \cdot (1+x)(1+y), \quad x, y \geq 0, \quad (10)$$

и в зависимости от вида функции дробления выполнено одно из двух условий:

$$\int_0^x (1+y)F(x-y, y) dy \leq C_0(1+x)^2, \quad x \geq 0, \quad (11)$$

или

$$\int_0^x (1+y)\Psi(x, y) dy \leq C_0(1+x)^2, \quad x \geq 0,$$

где $C_0 = \text{const}$. Зафиксируем любое λ_1 , $0 < \lambda_1 < \lambda_0$. Тогда найдется $\tau > 0$ такое, что для всех $0 < \lambda < \lambda_1$

$$\int_0^{\infty} \exp(\lambda x) \sup_{z \in \mathbb{R}^3} c_n(x, z, t) dx \leq C_1 = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ограниченные ядра дробления входят в класс (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. В соответствии с леммой 1 $c_n \in \Omega_{\lambda_0}^+(\tau)$. Мы делаем подстановку $d_n(x, z, t) = (1+x)c_n(x, z, t) \in \Omega_{\lambda_1}(\tau)$ и конструируем мажорирующие функции $h_n(x, t) > d_n(x, z, t)$, $z \in \mathbb{R}_+^3$, $x \geq 0$, которые удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_n(x, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2}(1+x) \int_0^x \frac{K_n(x-y, y)}{(1+x-y)(1+y)} h_n(x-y, t) h_n(y, t) dy + (1+b)h_n(x, t) \\ & + (1+x) \int_x^\infty \frac{F_n(y-x, x) h_n(y, t)}{1+y} dy, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} h_n(x, 0) & > \max\{(1+x) \sup_z c_{01}(x, z), (1+x) \sup_t c_{02}(x, t), (1+x) \sup_{z,t} q(x, z, t)\}, \\ h_n(x, 0) & \in \Omega_{\lambda_1}^+(0). \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) мы полагаем значения $h_n(x, 0)$ не зависящими от номера n . Определим вспомогательные функции

$$u_n(\lambda, t) = \int_0^\infty \exp(\lambda x) h_n(x, t) dx,$$

и из (13), (14) получаем в силу (10), (11) следующее дифференциальное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n(\lambda, t)}{\partial t} & \leq \frac{1}{2}k[u_n(\lambda, t)]^2 + k u_n(\lambda, t) \frac{\partial u_n(\lambda, t)}{\partial \lambda} \\ & + (1+b+C_0)u_n(\lambda, t) + C_0 \frac{\partial u_n(\lambda, t)}{\partial \lambda}, \\ u_n(\lambda, 0) & = \int_0^\infty \exp(\lambda x) h_n(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим мажорирующее уравнение

$$\frac{\partial w(\lambda, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}k w^2(\lambda, t) + k w \frac{\partial w}{\partial \lambda} + (1+b+C_0)w + C_0 \frac{\partial w}{\partial \lambda} \quad (16)$$

с аналитичным начальным условием $w(\lambda, 0)$, которое предполагается бóльшим, чем $u_n(\lambda, 0)$, равномерно по $n \geq 1$:

$$w(\lambda, 0) > u_n(\lambda, 0), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1. \quad (17)$$

Задача Коши (16), (17) удовлетворяет условиям теоремы Коши–Ковалевской, и, следовательно, такая мажорирующая функция $w(\lambda, t)$ действительно существует при достаточно малом времени $t \leq \tau$.

Несложно заметить, что равномерно по $n \geq 1$ выполнена оценка $u_n \leq w$. Действительно, предполагая противное и обозначая через $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ характеристики неравенства (15) и уравнения (16) соответственно, пересекающиеся в той точке

(λ_0, t_0) , где функции u_n и w впервые (на этих характеристиках) становятся равными, получаем на основании неотрицательности функции u_n , ее монотонного по λ возрастания и неравенства $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t)$, $0 \leq t < t_0$, что

$$\begin{aligned} u_n(\lambda_0, t_0) &= u_n(\lambda_1(0)) + \int_0^{t_0} \left[\frac{1}{2} u_n^2(\lambda_1(s), s) + (1 + b + C_0) u_n(\lambda_1(s), s) \right] ds \\ &\leq \int_0^{t_0} \left[\frac{1}{2} u_n^2(\lambda_2(s), s) + (1 + b + C_0) u_n(\lambda_2(s), s) \right] ds \\ &< \int_0^{t_0} \left[\frac{1}{2} w^2(\lambda_2(s), s) + (1 + b + C_0) w(\lambda_2(s), s) \right] ds = w(\lambda_0, t_0). \end{aligned}$$

Полученное противоречие $u_n(\lambda_0, t_0) < w(\lambda_0, t_0)$ доказывает желаемую оценку

$$u_n(\lambda, t) \leq w(\lambda, t), \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Обозначая максимум функции w через C_1 , получаем (12). На этом лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда на каждом ограниченном множестве изменения аргументов последовательность аппроксимирующих решений $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ является компактным подмножеством пространства непрерывных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (12) мы убеждаемся в равномерной ограниченности на компактах последовательности решений аппроксимирующих задач $\{c_n\}_{n=1}^\infty$. Доказательство равномерной непрерывности последовательности $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ основано на анализе модулей непрерывности

$$\begin{aligned} \eta^n(x) &= \sup_{|z| \leq Z, |t' - t| < \delta} |c_n(x, z, t') - c_n(x, z, t)|, \quad 0 \leq x \leq X, \quad n \geq 1, \\ \theta^n(t) &= \sup_{0 \leq x \leq X, |z' - z| < \delta} |c_n(x, z', t) - c_n(x, z, t)|, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad n \geq 1, \\ \rho^n(t) &= \sup_{|z| \leq Z, |x' - x| < \delta} |c_n(x', z, t) - c_n(x, z, t)|, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

который также проводится на основе оценки (12) и неравенств (10), (11):

$$\begin{aligned} \int_A^\infty (1+x) c_n(x, z, t) dx &\leq \exp(-\lambda A) \int_0^\infty (1+x) \exp(\lambda x) \sup_z c_n(x, z, t) dx \rightarrow 0, \\ |z| &\leq Z, \quad 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (18)$$

В (18) $0 < \lambda < \lambda_1$ и правая часть стремится к нулю при $A \rightarrow \infty$. Выбирая для произвольного $\varepsilon > 0$ достаточно малое $\delta > 0$, мы получим

$$\begin{aligned} \theta^n(t) &\leq \text{const} \cdot \varepsilon + \text{const} \cdot \int_0^t \theta^n(s) ds, \quad n \geq 1, \\ \eta^n(x) &\leq \text{const} \cdot \varepsilon + \text{const} \cdot \int_0^t \theta^n(s) ds, \quad 0 \leq x \leq X, \quad n \geq 1, \\ \rho^n(t) &\leq \text{const} \cdot \varepsilon + \text{const} \cdot \int_0^t (\theta^n(s) + \rho^n(s)) ds, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

откуда сразу делается вывод о равностепенной непрерывности последовательности $\{c_n\}$ на компактах. Применение теоремы Арцела завершает доказательство леммы 4.

Сформулируем теорему о локальной разрешимости начально-краевой задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для некоторого $\tau > 0$ и любого λ , $0 < \lambda < \lambda_0$, существует непрерывное неотрицательное решение задачи (5) в пространстве $\Omega_\lambda(\tau)$, которое непрерывно дифференцируемо вдоль характеристик уравнения (1). Оно единственно в $\Omega_\lambda(\tau)$ и непрерывно зависит от начальных условий c_{01} , краевых значений c_{02} и функции источников q .*

Если ядра коагуляции и дробления подчиняются дополнительным условиям

$$K(x, y) \leq \text{const} \sqrt{1+x} \sqrt{1+y}, \quad \int_0^x \sqrt{1+y} F(x-y, y) dy \leq \text{const} \sqrt{1+x},$$

то единственность решения имеет место в более широком пространстве $\Omega_{0,1}(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность финитных ядер коагуляции и дробления, аппроксимирующих исходные ядра. В соответствии с теоремой 1 эта последовательность порождает последовательность $\{c_n\}$ непрерывных решений уравнения (5). Используя лемму 4, мы выбираем из $\{c_n\}$ подпоследовательность, которая равномерно сходится на компакте $[0, X] \times [0, Z_1] \times [-Z_2, Z_2] \times [-Z_3, Z_3] \times [0, \tau]$ к некоторой непрерывной неотрицательной функции $c(x, z, t)$. Затем выбираем подпоследовательность, которая сходится к $c(x, z, t)$ на большем компакте $[0, 2X] \times [0, 2Z_1] \times [-2Z_2, 2Z_2] \times [-2Z_3, 2Z_3] \times [0, \tau]$, и т.д. Окончательно мы получим последовательность решений аппроксимирующих задач, которая сходится в $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^3 \times [0, \tau]$ к непрерывной функции $c(x, z, t)$. Чтобы показать, что полученная функция $c(x, z, t)$ действительно удовлетворяет (5), мы заметим, что поскольку в силу (12) $c_n \in \Omega_\lambda^+(\tau)$ равномерно по $n \geq 1$, то также $c \in \Omega_\lambda^+(\tau)$. Переход к пределу в (5) при $n \rightarrow \infty$ возможен благодаря равномерной по n оценке интегральных “хвостов” (18). Так доказывается существование решения в $\Omega_\lambda^+(\tau)$. Его непрерывная дифференцируемость вдоль характеристик явствует из его непрерывности и уравнения (5). Непрерывная зависимость решения от исходных данных в $\Omega_\lambda(\tau)$ и, как следствие, единственность решения доказываются на основе [22]. Единственность решения в $\Omega_{0,1}(\tau)$ следует из [23]. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа отметим, что более простая схема доказательства локальной теоремы существования решения в пространстве $\Omega_\lambda(\tau)$ вряд ли возможна. Например, оператор Y , определенный в доказательстве леммы 1, при неограниченных ядрах коагуляции (тем более при быстро растущих мультипликативных ядрах (10), покрывающих почти все физически значимые ядра) не отображает пространство $\Omega_\lambda(\tau)$ в себя ни при каком $\lambda > 0$, что не позволяет использовать принцип сжимающих отображений. Отметим, что если снять ограничения (10), (11) на рост ядер коагуляции и дробления, то возникающее дифференциальное неравенство (15) будет иметь второй порядок дифференцирования по λ , так

что оценка $u_n \leq w$ нарушается, не говоря уже о том, что задача Коши (16), (17) перестает удовлетворять условиям теоремы Коши–Ковалевской. Поэтому локальная теорема существования для ядра гравитационной коагуляции

$$K(x, y) = C|x^{2/3} - y^{2/3}|(x^{2/3} + y^{2/3})$$

с показателем роста, равным $4/3$, остается недоказанной.

§ 3. Оценки решения в равномерной норме

Сформулируем один достаточно общий принцип максимума, который нам понадобится для получения априорной оценки ограниченности решения и, следовательно, продолжения локального решения, полученного в § 1.

Пусть множество G является компактом в метрическом пространстве $\Omega = \{\omega\}$. Пусть непрерывные действительные функции $v(\omega, t)$ и $m(\omega, t)$ определены в цилиндре $G \times [0, T]$. Предположим, что v имеет в этом цилиндре непрерывную производную по времени v_t . Определим для каждого фиксированного $t \in (0, T]$ точки $\bar{\omega} \in G$ как точки максимума, т.е.

$$v(\bar{\omega}, t) = \max_{\omega \in G} v(\omega, t).$$

Точки $\bar{\omega}$ заведомо существуют благодаря компактности множества G .

ЛЕММА 5. *Предположим, что при выполнении неравенства*

$$v(\bar{\omega}, t) \geq m(\bar{\omega}, t) \tag{19}$$

справедливо соотношение

$$v_t(\bar{\omega}, t) \leq 0. \tag{20}$$

Тогда максимум функции v либо не превосходит m , либо достигается в начальный момент времени:

$$\max_{G \times [0, T]} v(\omega, t) \leq \max \left\{ \max_{G \times [0, T]} m(\omega, t), \max_G v(\omega, 0) \right\}. \tag{21}$$

Доказательство этой леммы очень простое, и оно аналогично рассуждениям [18].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если производная v_t непрерывна не на всем компакте $G \times [0, T]$, а лишь на $\text{Int } G \times [0, T]$, где $\text{Int } G$ есть внутренность множества G , и выполнены условия леммы 5, то максимум функции v либо не превосходит m , либо достигается на параболической границе множества $G \times [0, T]$, т.е. на $(G \times \{0\}) \cup (\partial G \times [0, T])$.*

Отметим, что при отсутствии условия (19) (т.е. в предположении безусловной выполнимости (20)) этот принцип максимума применяется в [18], [7] к уравнению коагуляции без дробления. При $\Omega = \{i\}_{i=1}^n \times \mathbb{R}^k$, $m = 0$, приходим к принципу максимума в [19, с. 172], где он применен к дискретным моделям уравнения Больцмана. Существенным отличием приведенного принципа максимума от [18], [19] является возможность нарушения (20) при невыполнении неравенства (19), что позволяет ниже получить оценки решения при учете дробления.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если для непрерывных в $[0, T]$ функций q и a вместо неравенства (20) имеет место соотношение

$$v_t(\bar{\omega}, t) \leq q(t) - a(t)v(\bar{\omega}, t), \quad (22)$$

то неравенство (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \max_{\bar{C}(T)} v(\omega, t) &\leq \exp\left(-\int_0^t a(s) ds\right) (\max m + \max v(\omega, 0)) \\ &+ \int_0^t \exp\left(-\int_s^t a(s_1) ds_1\right) q(s) ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Для доказательства замечания 2 достаточно ввести вспомогательную функцию

$$\tilde{v}(\omega, t) = \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right) v(\omega, t) - \int_0^t \exp\left(\int_0^s a(s_1) ds_1\right) q(s) ds,$$

которая удовлетворяет (20), и воспользоваться леммой 5.

В дальнейшем мы рассматриваем случай одномерной пространственной неоднородности ($z \in \mathbb{R}_+^1$) и предполагаем, что скорость пространственного переноса частиц $v(x)$ зависит только от их массы x и не зависит от z и t , что имеет место во многих реальных процессах (например, при рассмотрении воднокапельных облаков в атмосфере, когда можно пренебречь изменением ускорения свободного падения).

Определим срезающие функции $\chi_n(x) = 0$ при $x > n$ и $\chi_n(x) = 1$ при $0 \leq x \leq n$ и, подобно [7], рассмотрим следующую регуляризацию уравнения (1):

$$\frac{\partial c^n(x, z, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_z(v c^n)(x, z, t) = \mathbf{S}_n(c^n)(x, z, t), \quad (24)$$

где $\mathbf{S}_n(c)(x, z, t) = \chi_n(x) \mathbf{S}(\chi_n c)(x, z, t)$. Локальная разрешимость задачи (24), (2), (3) доказывается почти дословным повторением рассуждений теоремы 1. Необходимость подобной регуляризации и отказа от “обрезания” ядер K, F вызвана тем, что аппроксимация ядрами K_n не годится, поскольку из-за их финитности они не удовлетворяют условию (27), приведенному ниже.

Для последовательности решений $\{c^n\}_{n=1}^\infty$ имеет место следствие принципа максимума:

ЛЕММА 6. Пусть ядра коагуляции и дробления непрерывны, неотрицательны, симметричны и удовлетворяют условиям (27) и (28). Пусть также $v(x) \geq 0$. Тогда для последовательности $\{c^n\}_{n=1}^\infty$ решений аппроксимирующих задач (24), (2), (3) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x < \infty, z \in \mathbb{R}_+^1} c^n(x, z, t) &\leq \\ &\leq \max \left\{ m, \sup_{0 \leq x \leq \infty, z \in \mathbb{R}_+^1} c_{01}(x, z) + Q, \sup_{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T} c_{02}(x, t) + Q \right\} = C_2, \\ &0 \leq t \leq \tau, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь

$$Q = \int_0^T \sup_{x, z} q(x, z, s) ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы иметь возможность использовать принцип максимума, фиксируем $b, Z, 0 < b, Z < \infty$, и рассмотрим $x \in [0, b], z \in [-Z, Z]$. Для $t > 0$ с учетом симметричности ядра K мы можем записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{dc^n(\bar{x}, \bar{z}, t)}{dt} = & \int_0^{\bar{x}/2} [K(\bar{x} - y, y)c^n(\bar{x} - y, \bar{z}, t) - K(\bar{x}, y)c^n(\bar{x}, \bar{z}, t)]c^n(y, \bar{z}, t) dy \\ & - \int_{\bar{x}}^n [K(\bar{x}, y)c^n(\bar{x}, \bar{z}, t) - F(y - \bar{x}, \bar{x})]c^n(y, \bar{z}, t) dy \\ & - c^n(\bar{x}, \bar{z}, t) \int_{\bar{x}/2}^{\bar{x}} K(\bar{x}, y)c^n(y, \bar{z}, t) dy - c^n(\bar{x}, \bar{z}, t) \int_0^{\bar{x}} F(\bar{x} - y, y) dy \\ & - a(\bar{x}, \bar{z}, t)c^n(\bar{x}, \bar{z}, t) + q(\bar{x}, \bar{z}, t), \end{aligned} \quad (26)$$

где $(\bar{x}, \bar{z})$ – точка максимума функции c^n в момент времени t в компактной области $[0, b] \times [0, Z]$. Левая часть уравнения (26) равна производной вдоль характеристики. Член с div_z отсутствует, поскольку, напомним, начиная с этого параграфа мы предположили, что скорость переноса $v = v(x)$ не зависит от пространственной переменной. Чтобы применить лемму 5, необходимо обеспечить неположительность первых двух интегралов в правой части (26). Очевидно, что это будет выполнено, если ядра коагуляции и дробления удовлетворяют следующим условиям:

$$K(x - y, y) \leq K(x, y), \quad 0 \leq y \leq \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \infty; \quad (27)$$

существует положительная константа $m > 0$ такая, что для всех $x \geq 0$

$$mK(x, y) \geq F(y - x, x), \quad \text{если } y \geq x. \quad (28)$$

Условия (27), (28) выполняются во многих физически реальных ситуациях. Достаточным условием справедливости (27) является возрастание функции $K(x, y)$ по x , если $x \in [y, +\infty)$ для каждого фиксированного $y > 0$, а условие (28) означает, что интенсивность процессов дробления не может существенно превосходить коагуляцию.

Следовательно, в силу неотрицательности функций, входящих в уравнение (26), а также условий (27), (28) имеем

$$\frac{d}{dt}c^n(\bar{x}, \bar{z}, t) \leq \max_{0 \leq x \leq b, 0 \leq z \leq Z} q(x, z, t) - \min_{0 \leq x \leq b, 0 \leq z \leq Z} a(x, z, t) \cdot c^n(\bar{x}, \bar{z}, t),$$

если $c^n(\bar{x}, \bar{z}, t) \geq m$. Применяя лемму 5 с учетом замечания 2, приходим к завершению доказательства леммы 6.

§ 4. Оценки решения в интегральной норме

Для решений c^n аппроксимирующих уравнений (24) имеют место оценки, являющиеся следствием закона сохранения массы, которая, напомним, равна первому моменту от решения. Интегрирование (24) с весом x позволяет заключить, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty x c^n(x, z, t) dx dz &= \int_0^\infty \int_0^\infty x c_{01}(x, z) dx dz \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty x v(x) c_{02}(x, s) dx ds \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \left\{ - \int_0^n \int_{n-x}^n x K(x, y) c^n(x) c^n(y) dy dx - \int_0^n a(x, z, s) x c^n(x) dx \right. \\ &\left. + \int_0^n c^n(x) \int_0^x F(x-y, y) \left(y - \frac{x}{2}\right) dy dx + \int_0^n x q(x, z, s) dx \right\} dz ds. \end{aligned}$$

Благодаря симметричности функции F слагаемое $\int_0^x F(x-y, y) (y - x/2) dy$ равно нулю, так что приходим к важному неравенству, выражающему равномерную по n ограниченность первого момента от решений, что означает конечность полной массы системы:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x c^n(x, z, t) dx dz \leq M_1 = \text{const}, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (29)$$

Этот же результат получается и при рассмотрении членов дробления в виде (4). Для справедливости оценки (29) достаточно, чтобы помимо интегрируемости исходных данных задачи имело место неравенство

$$\int_0^\infty x v(x) c_{02}(x, t) dx < \infty, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (30)$$

Чтобы доказать, что предел последовательности $\{c^n\}_{n=1}^\infty$ (если он существует) является решением исходной задачи, нам необходимо иметь возможность перейти к пределу под знаком интеграла с бесконечными пределами интегрирования, для чего помимо оценок (25) и (29) необходимо иметь равномерную относительно $n \geq 1$ оценку равномерной малости интегралов $\int_A^\infty$ (типа (18)). Для получения таких оценок докажем следующую лемму.

ЛЕММА 7. Пусть $z \in \mathbb{R}_+^1$, $c_{01} \in \Omega_{0,1}^+(0)$, $q, c_{02} \in \Omega_{0,1}^+(T)$, ядра коагуляции и дробления неотрицательны, непрерывны и удовлетворяют условиям (27), (28). Пусть функция $K(x, y)$ симметрична. Пусть скорость пространственного переноса имеет непрерывную производную $v'(x)$, является неотрицательной и имеет место соотношение (30). Пусть также найдутся константы $A > 1$, $p > 1$ и непрерывные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $w(x) > 0$ такие, что начальное, краевое условия и функция источников имеют ограниченные интегралы

$$\int_A^\infty w(x) \sup_{z \geq 0} c_{01}(x, z) dx < \infty, \quad \int_A^\infty w(x) \sup_{0 \leq t \leq T} c_{02}(x, t) dx < \infty, \quad (31)$$

$$\int_A^\infty w(x) \sup_{z, t \geq 0} q(x, z, t) dx < \infty. \quad (32)$$

Пусть ядро коагуляции K и скорость переноса v связаны для некоторой зависящей от A константы C_3 соотношением

$$w(x)\varphi(x)K(x-y, y) \leq C_3 \cdot x|v'(x)|, \quad x > A, \quad 0 \leq y \leq x, \quad (33)$$

причем

$$\int_A^\infty w(x)[\varphi(x)]^{1-p} \int_0^x K(x-y, y) dy dx < \infty. \quad (34)$$

Пусть также

$$\int_A^\infty [\psi(x)]^{1-p} \int_A^x F(x-y, y)w(y) dy dx < \infty, \quad (35)$$

$$F(x-y, y)w(y)\psi(x) \leq C_4 x \cdot |v'(y)|, \quad A \leq y \leq x < \infty. \quad (36)$$

Тогда равномерно по $n \geq 1$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{z \in \mathbb{R}_+^1} \int_0^\infty w(x)c^n(x, z, t) dx \leq C_5 < \infty. \quad (37)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия (34) и (35) выполнены, если подынтегральные ядра имеют не более чем степенную скорость роста, а функции φ, ψ монотонно возрастают и не ограничены на бесконечности. Так что эти условия практически не являются ограничительными. Что касается условия (33), то, например, при $F(x, y) \leq 1$, $K(x, y) \leq 1 + x + y$ выбираем $\varphi = \psi = x^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $w(x) = (1+x)^\gamma$, и имеем из (33) следующее условие на v :

$$v'(x) \geq C_3^{-1} x^{-(1-\varepsilon)} (1+x)^{\gamma+1}, \quad x > A, \quad (38)$$

откуда видим, что (33) означает, что при некотором $\alpha > 0$ должно быть $v'(x) \geq Cx^\alpha$, $x > A$, а уж тогда мы по данному α всегда подберем положительные константы ε и γ , определяющие функции φ, ψ и w , такие, что $\varepsilon + \gamma < \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Отбрасывая отрицательные слагаемые, получаем из (5)

$$\begin{aligned} c^n(x, z, t) \leq & \max \left\{ \sup_{z \geq 0} c_{01}(x, z), \sup_{0 \leq t \leq T} c_{02}(x, t) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^x K(x-y, y) c^n(x-y, z(x, s), s) c^n(y, z(x, s), s) dy \right. \\ & \left. + \int_x^\infty F(y-x, x) c^n(y, z(x, s), s) dy + q(x, z(x, s), s) \right\} ds. \end{aligned} \quad (39)$$

В (39) $t_0 = 0$ при $t \leq z/v(x)$ и $t_0 = t - z/v(x)$ при $t > z/v(x)$. В силу условия $v = v(x)$ отныне имеем в виду, что $z(x, s) = z - v(x)(t-s)$.

Нашей задачей является нахождение равномерной относительно номера n оценки интеграла $\int_0^\infty w(x)c^n(x, z, t) dx$. С этой целью умножим левую часть (39) на

$w(x)$ и проинтегрируем по $x \in [0, \infty)$. В силу оценки (25) для достаточно большого значения A интеграл по $x \in [0, A]$ равномерно ограничен. Рассмотрим оставшийся интегральный “хвост”. Умножим первое интегральное слагаемое в правой части (39) на $w(x)$ и проинтегрируем по x на интервале $x \in [A, \infty)$. Вводя ступенчатую функцию $\theta(s)$, равную единице при $s \geq 0$ и нулю при $s < 0$, получаем для этого слагаемого с учетом (25)

$$\begin{aligned} & \int_A^\infty \int_0^x \theta(s - t_0(x)) K(x - y, y) w(x) c^n(x - y, z(x), s) c^n(y, z(x), s) dy dx \\ & \leq \left(\int_A^\infty \theta(s - t_0(x)) w(x) [\varphi(x)]^{1-p} \int_0^x K(x - y, y) C_2^2 dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left(\int_A^\infty \int_0^x \theta(s - t_0(x)) K(x - y, y) c^n(x - y, z(x), s) \right. \\ & \quad \left. \times c^n(y, z(x), s) w(x) \varphi(x) dy dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь мы воспользовались следующим неравенством:

$$\int \alpha \beta dx \leq \left[\int |\alpha| \varphi^{1-p} dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int |\alpha| |\beta|^q \varphi dx \right]^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q > 1, \quad (41)$$

которое имеет место для любой неотрицательной функции φ , при которой интегралы существуют и конечны. Действительно, заменяя α на $\alpha^{1/p} \varphi^{(1/p)-1}$, а β на $\alpha^{1/q} \varphi^{1/q} \beta$ и применяя неравенство Гёльдера к интегралу от произведения этих функций, получаем (41). В этом параграфе мы использовали подход из [7], где уже применялось неравенство (41) при $\beta \equiv 1$, что позволило доказать существование обобщенного решения при ограниченных ядрах коагуляции и при отсутствии дробления. Однако проведенный нами анализ позволяет получить априорные оценки для неограниченных ядер коагуляции и в присутствии дробления.

Рассматривая второй сомножитель (40), имеем

$$\begin{aligned} & \int_A^\infty \int_0^x \theta(s - t_0(x)) K(x - y, y) c^n(x - y, z(x), s) c^n(y, z(x), s) w(x) \varphi(x) dy dx \\ & \leq \int_A^\infty \theta(s - t_0(x)) \varphi(x) w(x) x^{-1} \\ & \quad \times \left(x \int_0^x K(x - y, y) c^n(x - y, z(x), s) c^n(y, z(x), s) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (42)$$

Заменяя множитель x на $x - y + y$, учитывая (25) и симметричность ядра $K(x, y)$, мы видим, что величина в скобках не превышает

$$2C_2 \int_0^x K(x - y, y) y c^n(y, z(x), s) dy.$$

Делая замену переменных $x \mapsto z(x) = z - v(x)(t - s)$, устанавливаем, что левая часть (42) меньше или равна

$$\frac{2C_2}{(t - s)} \int_0^\infty \int_0^x \left[\frac{K(x - y, y) w(x) \varphi(x) \theta(s - t_0(x))}{x |v'(x)|} \right] y c^n(y, z, s) dy dz \leq \frac{2C_2 C_3 M_1}{t - s}.$$

При получении последнего неравенства мы воспользовались (29) и (33). Благодаря (34) можно подобрать достаточно большое значение p и ограничить первый сомножитель в (40) константой C_6 . Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_A^\infty \int_0^x \theta(s - t_0(x)) K(x - y, y) w(x) c^n(x - y, z(x), s) c^n(y, z(x), s) dy dx \\ & \leq C_6 \left(\frac{2C_2 C_3 M_1}{t - s} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для удобства оценки второго интегрального слагаемого в правой части (39) заменим $\int_{t_0}^t f(s) ds$ на $\int_0^t \theta(s - t_0(x)) f(s) ds$:

$$\begin{aligned} & \int_A^\infty \int_{t_0(x)}^t \int_x^\infty w(x) F(y - x, x) c^n(y, z(x), s) dy dx ds \\ & \leq \int_0^t \left\{ \int_A^\infty \int_x^\infty \theta(s - t_0(x)) F(y - x, x) c^n(y, z(x), s) w(x) [\psi(y)]^{1-p} dy dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ & \quad \times \left\{ \int_A^\infty \int_x^\infty \theta(s - t_0(x)) w(x) F(y - x, x) c^n(y, z(x), s) \psi(y) dy dx \right\}^{\frac{1}{q}} ds. \end{aligned} \quad (44)$$

С помощью неравенств (25) и (35) мы устанавливаем, что первый множитель в (44) равномерно ограничен по n . Во втором сомножителе в (44) делаем замену переменной x на z и в силу (36) получаем

$$\begin{aligned} & \int_A^\infty \int_x^\infty \theta(s - t_0(x)) w(x) F(y - x, x) c^n(y, z(x), s) \psi(y) dy dx \\ & \leq \frac{C_4}{t - s} \int_0^\infty \int_0^\infty x c^n(x, z, s) dz dx. \end{aligned} \quad (45)$$

Подставляя (45) в (44) и пользуясь оценками (25), (29), получаем утверждение леммы 7.

§ 5. Разрешимость в целом в классе непрерывных функций

В этом параграфе мы улучшим оценку (37) путем переноса супремума по z под знак интеграла. Это, казалось бы, небольшое изменение очень существенно, поскольку уже позволяет доказать разрешимость в классе непрерывных функций.

ЛЕММА 8. Пусть ядра коагуляции и дробления непрерывны, неотрицательны, функция $K(x, y)$ симметрична. Пусть выполнено неравенство (37) леммы 7 (и тем самым определена функция $w(x)$), и пусть найдется такая непрерывная монотонно возрастающая положительная функция $g(x)$, что выполнены следующие условия:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{g(x)} < \infty, \quad (46)$$

$$\sup_{x \in [0, \infty), z \in [0, \infty)} g(x) c_{01}(x, z) = C_7 < \infty, \quad (47)$$

$$\sup_{x \in [0, \infty), t \in [0, T]} g(x) c_{02}(x, t) = C_8 < \infty, \quad (48)$$

$$\int_0^T \sup_{x, z} g(x) q(x, z, s) ds = C_9 < \infty. \quad (49)$$

Предположим, что для некоторой константы $r_1 > 0$ ядро коагуляции удовлетворяет при всех $x \geq 0$ условию

$$g(x)K(x-y, y) \leq r_1 w(y) \cdot g(x-y) \quad \text{при } y \in \left[0, \frac{x}{2}\right] \quad \text{или при } y \in \left[\frac{x}{2}, x\right], \quad (50)$$

а для ядра дробления и некоторых констант $r_2, r_3 > 0$ выполнено хотя бы одно из двух нижеприведенных условий:

$$g(x) \int_x^\infty \frac{F(y-x, x)}{g(y)} dy \leq r_2, \quad x > 0, \quad (51)$$

или

$$g(x)F(y-x, x) \leq r_3 w(y), \quad y \geq x. \quad (52)$$

Тогда

$$c^n(x, z, t) \leq \frac{C_{10}}{g(x)}, \quad x, z \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (53)$$

В частности,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\infty \sup_{z \geq 0} |c^n(x, z, t)| dx \leq C_{11} = \text{const}. \quad (54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отбрасывая в (5) отрицательные слагаемые и умножая получаеое неравенство на $g(x)$, имеем с учетом (50) и симметрии ядра коагуляции

$$\begin{aligned} g(x)c^n(x, z, t) \leq & C_7 + C_8 + \int_0^t \left[r_1 \sup_{x, z} [g(x)c^n(x, z, s)] \int_0^{\frac{x}{2}} w(y)c^n(y, z(x, s), s) dy \right. \\ & \left. + g(x) \int_x^\infty F(y-x, x)c^n(y, z(x, s), s) dy + g(x)q(x, z(x, s), s) \right] ds. \end{aligned} \quad (55)$$

Введем обозначение

$$\sup_{x, z} g(x)c^n(x, z, t) = f^n(t) \quad (56)$$

и, пользуясь (51), (52), выделим $f^n(t)$ из второго интегрального слагаемого в (55):

$$\begin{aligned} g(x) \int_x^\infty F(y-x, x)c^n(y, z(x, s), s) dy & \leq \\ & \leq \begin{cases} r_2 f^n(s) & \text{для (51),} \\ r_3 \int_0^\infty w(y)c^n(y, z(x, s), s) dy & \text{для (52).} \end{cases} \end{aligned}$$

Суммируя оба случая, мы усиливаем (55) и приходим к неравенству

$$f^n(t) \leq C_{12} + \int_0^t \left\{ (r_1 f^n(s) + r_3) \left[\int_0^\infty w(y)c^n(y, z, s) dy \right] + r_2 f^n(s) \right\} ds,$$

где $C_{12} = C_7 + C_8 + C_9$. Таким образом, с учетом (37) и неравенства Гронуолла получаем

$$f^n(t) \leq (C_{12} + r_3 C_5 T) \exp((C_5 r_1 + r_2)t) \leq C_{10}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1. \quad (57)$$

Из (56), (57) устанавливаем (53), откуда немедленно вытекает (54), причем

$$C_{11} = C_{10} \int_0^\infty \frac{dx}{g(x)}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем сформулировать теорему разрешимости в целом начально-краевой задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $z \in \mathbb{R}_+^1$, $c_{01} \in \Omega_{0,1}^+(0)$, $q, c_{02} \in \Omega_{0,1}^+(T)$, ядра коагуляции и дробления неотрицательны, непрерывны, симметричны и удовлетворяют условиям (27), (28). Пусть скорость пространственного переноса имеет непрерывную производную $v'(x)$, является неотрицательной и имеет место соотношение (30). Пусть функции c_{01} и c_{02} непрерывно сопряжены и выполнены условия лемм 7, 8. Пусть также для достаточно большого значения A интегралы

$$\int_A^\infty \frac{K(x, y)}{g(y)} dy < \infty, \quad \int_A^\infty \frac{F(y - x, x)}{g(y)} dy < \infty \quad (58)$$

ограничены при каждом $x \in [0, \infty)$.

Тогда существует непрерывное неотрицательное решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее (5), имеющее непрерывную производную вдоль характеристик уравнения (1).

Если к тому же ядра коагуляции и дробления ограничены в L_∞ и

$$\int_0^\infty \int_0^x F(x - y, y) dy dx < \infty,$$

то это решение единственно и непрерывно зависит от возмущений в $C \cap L_1$ исходных данных задачи: начальных, краевых значений, источников и стоков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и доказательство теоремы 1, доказательство теоремы 2 базируется на рассмотрении последовательности $\{c^n\}_{n=1}^\infty$ решений аппроксимирующих задач (24), (2), (3). Оценки (25), (29) и (54) равномерны относительно элементов указанной последовательности, что позволяет аналогично рассуждениям леммы 4 и теоремы 1 обосновать наличие непрерывного предела последовательности c^n . Обозначим этот предел как $c(x, z, t)$. Предельный переход под знаком интеграла с бесконечными пределами интегрирования возможен благодаря (53) и (58). Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K(x, y) |c(y, z, t) - c^n(y, z, t)| dy &= \int_0^A K(x, y) |c(y, z, t) - c^n(y, z, t)| dy \\ &+ \int_A^\infty K(x, y) |c(y, z, t) - c^n(y, z, t)| dy. \end{aligned}$$

В силу (53) последний интеграл меньше, чем

$$\begin{aligned} \int_A^\infty K(x, y) |c(y, z, t) + c^n(y, z, t)| dy &\leq 2C_{10} \int_A^\infty \frac{K(x, y)}{g(y)} dy \rightarrow 0, \\ A \rightarrow \infty, \quad 0 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

Так доказывается существование решения. Его непрерывная дифференцируемость вдоль характеристик является простым следствием непрерывности подынтегрального выражения в (5). Единственность и непрерывная зависимость решения от возмущений в $C \cap L_1$ исходных данных c_{01} , c_{02} , a , q доказывается путем оценки интеграла по x от модуля разности двух решений, соответствующих различным исходным данным, с помощью неравенства Гронуолла и оценки ограниченности (25). На этом доказательство теоремы 2 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 2 верна и в случае записи членов дробления в форме (4), ибо доказательства остаются верными при замене в формулировках теорем и лемм $F(x-y, y)$ на $\Psi(x, y)$. Симметричность функции $F(x, y)$ требовалась только при получении оценки (29), но, как там указано, эта оценка верна и для более общей функции дробления Ψ .

Поскольку формулировка основной теоремы существования решения осложнена введением вспомогательных функций (хотя именно благодаря им удастся максимально расширить класс интегральных ядер), то ниже приводится ее частный случай для важных конкретных типов ядер коагуляции и дробления.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть ядра коагуляции и дробления неотрицательны, непрерывны, симметричны, удовлетворяют условиям (27), (28) и при некотором $\alpha \geq 0$ неравенствам

$$K(x, y) \leq C(1+x+y)^\alpha, \quad F(x, y) \leq C(1+x+y)^\beta, \quad (59)$$

где $\beta < 1$ при $\alpha \geq 1$ и $\beta \geq \alpha$ при $0 \leq \alpha < 1$. Как обычно, символом C обозначена некоторая положительная константа.

Пусть $v(x) > 0$, $z \in \mathbb{R}_+^1$, функция $v'(x)$ непрерывна, выполнено условие (30) и при достаточно большом $A > 0$

$$|v'(x)| \geq Cx^{3\alpha+\varepsilon}, \quad x > A, \quad \varepsilon > 0. \quad (60)$$

Пусть функции c_{01} , c_{02} , q достаточно быстро убывают (определено ниже в (61)).

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно непрерывное решение, непрерывно дифференцируемое вдоль характеристик оператора переноса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ядер коагуляции (59) получаем из (58), что в качестве функции $g(x)$ следует взять $g(x) = (1+x)^{1+\alpha+\varepsilon_1}$, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Далее для справедливости (50) необходимо рассмотреть $w(x) = (1+2x)^{1+2\alpha+\varepsilon_1}$. Функции φ и ψ возьмем равными x_1^ε , поскольку тогда при достаточно больших значениях r выполнены (34) и (35). Благодаря неравенству (60) выполнено условие (33). Поскольку ядра дробления удовлетворяют (59), то справедливы соотношения (36) и (52). Отметим, что условие неотрицательности параметра α вызвано необходимостью выполнения (27). Неравенства (31), (32) будут, следовательно, выполнены, если

$$c_{01} \in \Omega_{0,1+2\alpha+\varepsilon_1}^+(0), \quad c_{02} \in \Omega_{0,1+2\alpha+\varepsilon_1}^+(T), \quad q \in \Omega_{0,1+2\alpha+\varepsilon_1}^+(T). \quad (61)$$

Дополнительно функции c_{01} , c_{02} , q должны удовлетворять условиям (47)–(49) с функцией $g(x) = (1+x)^{1+\alpha+\varepsilon_1}$. На этом доказательство следствия 2 закончено.

Применяя теорему 2 к мультипликативным ядрам коагуляции

$$K(x, y) \leq C(1+x)^\alpha(1+y)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

получаем, что утверждение следствия 2 остается верным при замене условия (60) на условие

$$|v'(x)| \geq Cx^{4\alpha+\varepsilon}, \quad x > A.$$

Таким образом, мы установили, что чем интенсивнее коагуляция, тем большей должна быть скорость пространственного переноса, чтобы гарантировать существование решения.

При отказе от краевого условия (3) и рассмотрении задачи Коши (1), (2) условие неотрицательности функции $v(x)$ в условиях теоремы 2 и следствия 2 является излишним.

Заключение

На основе анализа задачи с финитными интегральными ядрами и использования новых подходов и априорных оценок доказаны локальная и глобальная по времени теоремы существования непрерывного решения для уравнения переноса, возникающего при анализе систем, подверженных коагуляции и дроблению частиц, причем ядра коагуляции и дробления могут быть неограничены. Учтено влияние источников и стоков частиц. Отметим, что и при отсутствии дробления существование непрерывных решений ранее не было доказано даже для ограниченных ядер.

В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность В. В. Веденяшину, поддержавшему данную работу.

Список литературы

1. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
2. Barrow J. D. Coagulation with fragmentation // J. Phys. A. Math. Gen. 1981. V. 14. P. 729–733.
3. Мартынов М. М., Муллер В. М. Уравнения кинетики коагуляции с учетом распада образующихся агрегатов // ДАН СССР. 1972. Т. 207. № 5. С. 1161–1164.
4. Melzak Z. A. A scalar transport equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 85. P. 547–560.
5. Dubovskii P. B. Mathematical theory of coagulation. Seoul: Seoul National Univ., Research Inst. of Math., Global Analysis Research Center, 1994.
6. Буробин А. В. О существовании и единственности решения задачи Коши для пространственно неоднородного уравнения коагуляции // Дифференц. уравн. 1983. Т. 19. С. 1568–1579.
7. Галкин В. А. О решениях уравнения Смолуховского для пространственно неоднородных систем // ДАН СССР. 1985. Т. 285. С. 1087–1091.
8. Галкин В. А. Обобщенные решения пространственно неоднородного уравнения коагуляции // ДАН СССР. 1987. Т. 293. С. 74–77.
9. Буробин А. В. О задаче Коши для пространственно неоднородного уравнения коагуляции при учете диффузии // Дифференц. уравн. 1985. Т. 21. № 10. С. 1806–1808.
10. Collet J. F., Poupaud F. Existence of solutions to coagulation–fragmentation systems with diffusion // Transport Theory Stat. Phys. 1996. V. 25. № 3–5. P. 503–513.
11. Bénilan P., Wrzosek D. On an infinite system of reaction-diffusion equations // Advances in Mathematical Sciences and Applications. 1997. V. 7. № 1. P. 351–366.
12. Wrzosek D. Existence of solutions for the discrete coagulation–fragmentation model with diffusion // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1997. V. 9. P. 279–296.
13. Laurencot Ph., Wrzosek D. The Becker–Döring model with diffusion. I. Basic properties of solutions // Colloquium Mathematicum. 1998. V. 75. № 2. P. 245–269.
14. Slemrod M. Coagulation–diffusion systems: derivation and existence of solutions for the diffuse interface structure equations // Physica D. 1990. V. 46. P. 351–366.
15. Laurencot Ph., Wrzosek D. Fragmentation–diffusion model. Existence of solutions and their asymptotic behaviour // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1998. V. 128A. P. 759–774.

16. *Laurencot Ph., Wrzosek D.* The Becker–Döring model with diffusion. II. Long time behavior // J. Differ. Eqs. 1998. V. 148. P. 268–291.
17. *Slemrod M., Qi A., Grinfeld M., Stewart I.* A discrete velocity coagulation–fragmentation model // Math. Meth. Appl. Sci. 1995. V. 18. P. 959–993.
18. *Галкин В. А.* Об устойчивости и стабилизации решения уравнения коагуляции // Дифференц. уравн. 1978. Т. 14. С. 1863–1874.
19. *Веденяпин В. В.* Дифференциальные формы в пространствах без нормы. Теорема о единственности H -функции Больцмана // УМН. 1988. Т. 43. № 1. С. 159–179.
20. *Галкин В. А., Дубовский П. Б.* О решениях уравнения коагуляции с неограниченными ядрами // Дифференц. уравн. 1986. Т. 22. С. 504–509.
21. *Dubovskii P. B., Stewart I. W.* Existence, uniqueness and mass conservation for the coagulation–fragmentation equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1996. V. 19. P. 571–591.
22. *Галкин В. А.* О существовании и единственности решения уравнения коагуляции // Дифференц. уравн. 1977. Т. 13. С. 1460–1470.
23. *Stewart I. W.* A uniqueness theorem for the coagulation–fragmentation equation // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1990. V. 107. P. 573–578.

Поступило в редакцию
29.XI.1999