Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Жеглов, О строении двумерных локальных тел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 1, 25–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/im318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:27:23

УДК 512.625+512.552.32+512.717

А. Б. Жеглов

О строении двумерных локальных тел

Понятие n -мерного локального тела является прямым обобщением понятия n -мерного локального поля. Мы исследуем 2-мерные локальные тела и решаем проблему классификации для тел нулевых равных характеристик и с последним полем вычетов, лежащим в центре, а также приводим условие, при котором существует сечение отображения вычета в телах, первое тело вычетов которых коммутативно. При выполнении этого условия мы решаем проблему классификации для любых 2-мерных локальных тел.

Для тел нулевых равных характеристик и с последним полем вычетов, лежащим в центре, мы приводим критерий сопряженности двух элементов.

Библиография: 8 наименований.

В алгебраической геометрии и теории чисел хорошо известно понятие n -мерного локального поля, имеющее многочисленные применения (см. [3], а также [4] и [5]). В работе [6] было предложено рассматривать n -мерные локальные поля без условия коммутативности, т.е. n -мерные локальные тела, и поставлена задача их классификации и описания классов сопряженных элементов.

В настоящей работе эти задачи изучаются для двумерных локальных тел с телом вычетов, являющимся полем. Для таких тел дается достаточное условие (теорема 1) вложения тела вычетов, и в случае его выполнения приводится классификация тел относительно изоморфизмов, сохраняющих локальную структуру. В случае невыполнения этого условия приводится пример, когда тело вычетов не вкладывается в тело, и дается классификация двумерных тел характеристики нуль, у которых последнее поле вычетов лежит в центре, а поле вычетов вкладывается в тело.

Работа построена следующим образом. Во введении даются определения и доказываются некоторые общие теоремы для любых двумерных локальных тел, § 2 посвящен вопросу вложимости поля вычетов в тело и классификации тел, для которых выполняется соответствующее условие. В § 3 приводится классификация тел характеристики нуль, у которых имеется вложение поля вычетов в тело и последнее поле вычетов лежит в центре. Теоремы сопряженности доказываются в § 4. Все основные результаты первых трех параграфов сформулированы в теореме 5 в § 3.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю А. Н. Паршину за постоянное внимание к работе, а также Н. И. Дубровину за ценные консультации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96050) и INTAS (грант № 93-2805).

§ 1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть K и k – произвольные тела. Будем говорить, что K является n -мерным локальным телом, имеющим тело k последним телом вычетов, если тело K имеет следующую структуру: или $n = 0$ (и при этом $K = k$), или K обладает дискретным нормированием $\nu: K^* \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, где $\nu: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ – сюръективный гомоморфизм, $\nu(0) = \infty$ и $\nu(a + b) \geq \inf(\nu(a), \nu(b))$, его кольцо нормирования $\mathcal{O} := \{x \in K: \nu(x) \geq 0\}$ является полным и отделимым относительно топологии, задаваемой ν , и его тело вычетов является $(n-1)$ -мерным локальным телом с последним телом вычетов k .

Следующие утверждения являются хорошо известными фактами из теории нормирования алгебр с делением (см., например, [1]).

ЛЕММА 1. Пусть K – произвольное тело, обладающее дискретным нормированием. Тогда:

- i) его кольцо нормирования $\mathcal{O}$ является топологической группой относительно топологии, задаваемой нормированием ν , и одновременно метрическим пространством;
- ii) $\mathcal{O}$ является локальным кольцом и областью главных идеалов.

Для каждого двумерного локального тела имеем

$$K \supset \mathcal{O} \rightarrow \overline{K} \supset \overline{\mathcal{O}} \rightarrow k,$$

где $\overline{\mathcal{O}}$ – кольцо нормирования тела $\overline{K}$. Имеются также две фильтрации:

$$K \supset \mathcal{O} \supset \wp \supset \wp^2 \supset \dots, \quad \overline{K} \supset \overline{\mathcal{O}} \supset \overline{\wp} \supset \overline{\wp}^2 \supset \dots,$$

где $\overline{\wp}$ – максимальный идеал в $\overline{\mathcal{O}}$, и дискретное нормирование $\overline{\nu}$ поля $\overline{K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Изоморфизмом локальных тел K и K' будем называть изоморфизм их как колец, сохраняющий фильтрации, указанные выше.

Это эквивалентно сохранению нормирований ν и $\overline{\nu}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Произвольное двумерное локальное тело будем называть *расщепимым*, если существует гомоморфизм $\overline{K} \hookrightarrow \mathcal{O} \subset K$, являющийся сечением отображения $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\wp = \overline{K}$.

Элементы $z \in \mathcal{O}$, $\nu(z) = 1$, и $u \in \overline{\mathcal{O}} \subset \overline{K}$, $\overline{\nu}(u) = 1$, будем называть *локальными параметрами* (или *переменными*) тела K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть тело K расщепимо. Фиксируем некоторые параметры z и u . Тогда имеет место изоморфизм $K = \overline{K}((z))$ как векторное пространство, закон умножения двух рядов из которого задается с помощью тождества

$$za = a^\alpha z + a^{\delta_1} z^2 + a^{\delta_2} z^3 + \dots,$$

где $a \in \overline{K}$, α – некоторый автоморфизм, $\delta_i: \overline{K} \rightarrow \overline{K}$ – некоторые линейные отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что расщепимое тело представляется в виде $\overline{K}((z))$, доказывается стандартным образом. А именно, пусть $a \in K$, $\nu(a) = j$. Тогда $\nu(az^{-j}) = 0$ и $\overline{az^{-j}} := az^{-j} \bmod \wp \in \overline{K}$. Будем считать, что этот элемент из $\overline{K}$ лежит в $\mathcal{O}$, поскольку у нас есть сечение. Тогда $\nu(az^{-j} - \overline{az^{-j}}) \geq 1$. Продолжая дальше этот процесс, мы получаем, что a записывается в виде ряда $\sum_{i=j}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \overline{K}$. Закон умножения, указанный в формулировке, получается аналогичным образом: определим $a^\alpha = zaz^{-1} \bmod \wp$, где $a \in \overline{K}$. Ясно, что α – автоморфизм. Поскольку $\nu(zaz^{-1}) = 0$, zaz^{-1} записывается в общем виде как ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, где $a_i \in \overline{K}$. Как мы уже выяснили, $a_0 = a^\alpha$. Остальные коэффициенты переобозначим следующим образом: $a^{\delta_i} := a_i$, $i \geq 1$. Линейность определенных таким образом отображений δ_i проверяется непосредственно.

Оказывается, что для каждого введенного выше отображения δ_i выполняется некоторое тождество. Чтобы написать его, введем предварительно несколько новых обозначений.

Рассмотрим кольцо некоммутативных полиномов от двух переменных $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$. Определим теперь отображение

$$\sigma: \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle \rightarrow \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta, \delta_i; i \geq 1\rangle$$

со значениями в кольце некоммутативных многочленов от переменных α, δ, δ_i , $i \geq 1$, как отображение, которое заменяет в каждом слове, начиная с правого конца, сочетания типа $\delta^i \alpha$ на δ_i , т.е.

$$\sigma(\alpha^{a_1} \delta^{b_1} \dots \alpha^{a_n} \delta^{b_n}) = \alpha^{a_1} \delta_{b_1} \dots \delta_{b_{n-1}} \alpha^{a_n-1} \delta^{b_n},$$

где $a_1, b_n \geq 0$, $a_i, b_j \geq 1$, $i > 1$, $j < n$ – натуральные числа.

Нас будут интересовать значения этого отображения на многочленах, все мономы которых оканчиваются на α . В этом случае значения отображения σ будут принадлежать кольцу $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta_i; i \geq 1\rangle$.

Например,

$$\sigma(\alpha^k) = \alpha^k, \quad \sigma(\alpha^k \delta^l \alpha^i) = \alpha^k \delta_l \alpha^{i-1},$$

где k, l, i – натуральные числа, $i, l \geq 1$.

В кольце $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$ определим теперь многочлены S_i^k как сумму всех мономов, принадлежащих орбите монома $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k} \underbrace{\delta \dots \delta}_k$ под действием группы подстановок S_i :

$$S_i^k = \sum_{\tau \in S_i/G} \tau(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k} \underbrace{\delta \dots \delta}_k),$$

где G – стационарная подгруппа.

Непосредственно из определения вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2. *Многочлены S_i^k удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:*

$$S_{i+1}^{k+1} = \alpha S_i^{k+1} + \delta S_i^k,$$

с начальными условиями $S_i^i = \delta^i$, $S_i^0 = \alpha^i$, где $k, i \in \mathbb{Z}$, $i \geq k$, $i \geq 1$.

Теперь мы можем написать тождества для отображений δ_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $i \geq 1$. Тогда

$$\delta_i(ab) = \sum_{k=0}^i \sigma(\delta^{i-k}\alpha)(a)\sigma(S_i^k\alpha)(b), \quad a, b \in \overline{K}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in \overline{K}$. Имеем

$$(ab)^\alpha z + (ab)^{\delta_1} z^2 + \dots = z(ab) = (a^\alpha z + a^{\delta_1} z^2 + \dots)b. \quad (*)$$

Если мы распишем правую часть так, чтобы это был ряд, у которого степени z стоят справа, и затем сравним коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях, мы получим общие формулы для $\delta_i(ab)$. Наша задача – доказать, что формулы из формулировки предложения совпадают с этими формулами.

Возьмем произвольное $i \geq 1$ и посмотрим на формулу для $\delta_i(ab)$, получающуюся из формулы (*). Эта формула есть коэффициент при z^{i+1} . Пусть x_k – коэффициенты при z^{i+1} в рядах $z^{i+1-k}b$. Тогда коэффициент при z^{i+1} состоит из суммы

$$\alpha(a)x_i + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k(a)x_k = \sum_{k=0}^i \sigma(\delta^{i-k}\alpha)(a)x_k.$$

Заметим, что x_k – это некоторые многочлены, состоящие из суммы мономов, каждый из которых имеет общий вид

$$\alpha^{a_1} \delta_{b_1} \dots \alpha^{a_n} \delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b), \quad a_k, b_k \in \mathbb{Z}, \quad a_k, b_k \geq 0$$

(δ_0 считается равным 1). Несложно видеть, что все различные мономы входят в эти многочлены с целыми положительными коэффициентами.

Покажем, что $x_k = \sigma(S_i^k\alpha)(b)$.

Для доказательства этого факта достаточно показать, что все слагаемые из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ присутствуют в x_k , а также что числа слагаемых в x_k и в $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ совпадают, где под числом слагаемых понимается сумма коэффициентов мономов.

Действительно, все мономы в $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ по определению разные и входят туда с коэффициентами, равными 1. Несложно видеть, что число слагаемых там равно $C_i^k = i!/(i-k)!k!$. С другой стороны, все различные мономы в x_k входят с целыми положительными коэффициентами. Поэтому если мы покажем, что каждый моном из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ присутствует в качестве слагаемого в x_k и число слагаемых в x_k равно C_i^k , мы получим искомое утверждение.

Покажем сначала, что любой моном из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ присутствует в x_k . По определению всякий моном из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ есть моном $\sigma(\tau(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k} \underbrace{\delta \dots \delta}_k)\alpha)(b)$, где $\tau \in S_i$,

т.е. моном вида $\alpha^{a_1} \delta_{b_1} \dots \alpha^{a_n} \delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b)$, где $a_j \geq 0$, $b_j \geq 1$, $\sum_{j=1}^n b_j = k$, $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = i - k + 1 - n$. Чтобы этот моном присутствовал в x_k , необходимо, чтобы он присутствовал в ряде $z^{i+1-k}b$ в качестве коэффициента при z^{i+1} . Чтобы это увидеть, запишем последний ряд так:

$$z^{i+1-k}b = z^{i+1-k-a_{n+1}} \alpha^{a_{n+1}}(b) z^{a_{n+1}} + \text{остальные мономы.}$$

Распишем выделенный моном:

$$\begin{aligned}
& z^{i+1-k-a_{n+1}} \alpha^{a_{n+1}}(b) z^{a_{n+1}} = \\
& = z^{i+1-k-a_{n+1}-1} [\alpha^{a_{n+1}+1}(b) z + \dots + \delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b) z^{b_n+1} + \dots] z^{a_{n+1}} \\
& = z^{i+1-k-a_{n+1}-1} \alpha^{a_{n+1}+1}(b) z^{a_{n+1}+1} \\
& \quad + z^{i+1-k-a_{n+1}-1} \delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b) z^{b_n+1+a_{n+1}} + \dots.
\end{aligned}$$

Записывая теперь аналогичным образом $z^{i+1-k-a_{n+1}-1} b_1$, где в качестве b_1 выступает $\delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b)$, получим на следующем шаге

$$z^{i+1-k-a_{n+1}-1-a_n-1} b_2 z^{b_n+1+a_{n+1}+a_n+b_{n-1}+1},$$

где $b_2 = \delta_{b_{n-1}} \alpha^{a_n} \delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b)$. Действуя далее по индукции, получаем на последнем шаге

$$\begin{aligned}
& z^{i+1-k-\sum a_j-n} \alpha^{a_1} \delta_{b_1} \dots \alpha^{a_n} \delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b) z^{\sum b_j+n+\sum a_j} \\
& = \alpha^{a_1} \delta_{b_1} \dots \alpha^{a_n} \delta_{b_n} \alpha^{a_{n+1}}(b) z^{i+1},
\end{aligned}$$

т.е. искомым моном в x_k найден.

Таким образом, любое слагаемое из $\sigma(S_i^k \alpha)(b)$ присутствует в x_k . Покажем теперь, что число слагаемых в x_k равно C_i^k .

Обозначим через s_n^l число слагаемых в коэффициенте при z^l в ряде $z^n a z^{-n}$, $a \in \overline{K}$. Тогда число слагаемых в x_k есть s_{i+1-k}^k . Утверждается, что выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$$s_n^d = \sum_{l=0}^d s_{n-1}^l.$$

Докажем это по индукции. Пусть $n = 1$. Тогда $s_1^d = 1$ для всех $d \geq 0$. С другой стороны, все слагаемые s_0^l , $l > 0$, равны нулю, и лишь $s_0^0 = 1$.

Пусть теперь n любое. Пусть

$$z^{n-1} a z^{-n+1} = y_0 + y_1 z + \dots,$$

где $y_0 \in \overline{K}$. Тогда

$$z^n a z^{-n} = z y_0 z^{-1} + z y_1 z^{-1} z + \dots = [y_0^\alpha + y_0^{\delta_1} z + \dots] + [y_1^\alpha + y_1^{\delta_1} z + \dots] z + \dots.$$

Отсюда следует, что коэффициент при z^d есть

$$\sum_{j=1}^d \delta_j(y_{d-j}) + \alpha(y_d).$$

Поскольку число слагаемых в y_j равно s_{n-1}^j , отсюда получаем

$$s_n^d = \sum_{j=0}^d s_{n-1}^j.$$

Теперь, наконец, покажем, что $s_{i+1-k}^k = C_i^k$, если $k < i + 1$. Докажем это по индукции. Пусть $i = 0$. Тогда $s_1^0 = 1 = C_0^0$. Считаем теперь, что формулы доказаны для $i - 1$. Пусть $k < i + 1$; тогда

$$\begin{aligned} s_{i+1-k}^k &= \sum_{l=0}^k s_{i-k}^l = C_i^k + C_{i-1}^{k-1} + \dots + C_{i-k}^0 \\ &= (\dots (((C_{i-k}^0 + C_{i-k+1}^1) + C_{i-k+2}^2) + C_{i-k+3}^3) + \dots + C_i^k) \\ &= (\dots (((C_{i-k+2}^1 + C_{i-k+2}^2) + C_{i-k+3}^3) + \dots + C_i^k) = C_{i+1}^k. \end{aligned}$$

Поскольку число слагаемых в x_k равно s_{i+1-k}^k , предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha = \text{Id}$. Тогда

$$\delta_i(ab) = \delta_i(a)b + \sum_{k=1}^i \delta_{i-k}(a) \sum_{(j_1, \dots, j_l)} C_{i-k+1}^l \delta_{j_1} \dots \delta_{j_l}(b).$$

Здесь $\delta_0 = \alpha$, $0 < l \leq \min\{i - k + 1, k\}$, $j_m \geq 1$, $\sum j_m = k$, вектор $(j_1, \dots, j_l)$ принадлежит орбите целочисленного вектора с суммой координат, равной k , под действием группы подстановок S_l .

В дальнейшем будет часто употребляться следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть (α, β) – некоторые эндоморфизмы тела L . Отображение $\delta: L \rightarrow L'$, где $L \subset L'$ – произвольные тела, называется (α, β) -дифференцированием, если оно линейно и удовлетворяет тождеству

$$\delta(ab) = \delta(a)b^\alpha + a^\beta \delta(b),$$

где $a, b \in L$; $(\alpha, 1)$ -дифференцирование будем называть просто α -дифференцированием.

Например, $\delta_1 - (\alpha^2, \alpha)$ -дифференцирование.

Если $\alpha = \text{Id}$, то δ_1 – дифференцирование в обычном смысле; $\delta_2 = \delta_1^2 + \delta$, где δ – тоже некоторое дифференцирование. Вообще, верно следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\delta_1 = \dots = \delta_{k-1} = 0$, то $\delta_k - (\alpha^{k+1}, \alpha)$ -дифференцирование.

Наконец, приведем еще одно следствие, которое будет нам полезно в дальнейшем, а именно в § 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\overline{K}$ – поле, $\overline{K} = k((u))$, $k \subset Z(K)$ и отображения δ_i , $i \geq 1$, непрерывны, если $\text{char } k = 0$. Тогда

$$\delta_i \left(\sum_{j=N}^{\infty} x_j u^j \right) = \sum_{j=N}^{\infty} x_j \delta_i(u^j), \quad x_j \in k.$$

Таким образом, для любого i δ_i определяется значениями $\delta_i(u)$ и $\delta_j(u)$ с $j < i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\text{char } k = p \neq 0$ непрерывность отображений δ_i , $i \geq 1$, вытекает из того факта, что $\delta_i(a^{p^i}) = 0$ для любого $a \in \overline{K}$. Поскольку для одномерных равнохарактеристических локальных полей топология определяется однозначно локальной структурой, непрерывность наших отображений не зависит от выбора параметризации (о связи локальной структуры, параметризации и топологии локальных полей любой размерности см. [8]).

Покажем, что α непрерывен. Для этого в нашем случае, т.е. в случае одномерного локального поля, достаточно показать, что α сохраняет нормирование. Докажем это сразу в произвольной характеристике.

Чтобы доказать наше утверждение, достаточно показать, что $\overline{\nu}(\alpha(u')) = 1$ для любого u' , $\overline{\nu}(u') = 1$. Рассмотрим автоморфизм α' :

$$\alpha'(a) := \overline{z^{-1}az},$$

где $a \in \overline{K}$ (все обозначения из предложения 1). Очевидно, что $\alpha' = \alpha^{-1}$.

Пусть u' – произвольный параметр. Положим $\kappa = \overline{\nu}(\alpha(u'))$. Покажем, что $|\kappa| \leq 1$ или $|\kappa| = p^q$, $q \in \mathbb{N}$. Пусть это не так. Тогда $\kappa = mp^q$, $(m, p) = 1$, $|m| \neq 1$. Тогда существуют $c \in k$, $a \in \overline{K}$: $\alpha(u') = ca^m$. Отсюда получаем

$$u' = \alpha^{-1}(\alpha(u')) = c(\alpha^{-1}(a))^m,$$

т.е.

$$\overline{\nu}(u') = 1 = \overline{\nu}(c(\alpha^{-1}(a))^m) = m\overline{\nu}(\alpha^{-1}(a)).$$

Противоречие.

Покажем, что $\kappa \geq 0$. Пусть это не так, т.е. $\kappa < 0$. Рассмотрим элемент $u' + u'^2$ ($u' + u'^3$, если $\text{char } k = 2$). Тогда $\overline{\nu}(\alpha(u' + u'^2)) = 2\kappa < -1$. Если $\text{char } k \neq 2$, это противоречит только что доказанному утверждению, что $|\overline{\nu}(\alpha(u'))| = p^q$ или $|\overline{\nu}(\alpha(u'))| \leq 1$ для любого параметра u' . Если $\text{char } k = 2$, то то же рассуждение проходит для элемента в скобках.

Аналогично для числа $\kappa' := \overline{\nu}(\alpha^{-1}(u'))$ выполнено $0 \leq \kappa' \leq 1$ или $\kappa' = p^l$.

Покажем, что $\kappa \neq p^q$. Доказательство от противного разбивается на два случая.

1) Пусть $\kappa' \leq 1$. Существуют $r \in k$, $a_1 \in k((u))$: $\alpha(u') = c_2 u'^2 a_1^{p^q - 2}$. Отсюда

$$1 = 2\overline{\nu}(\alpha^{-1}(u')) + (p^q - 2)\overline{\nu}(\alpha^{-1}(a_1)),$$

т.е. $(p^q - 2) \mid 1$. Последнее выполняется, только если $p = 3$, $q = 1$. Но в последнем случае можно воспользоваться тем же рассуждением с $\alpha(u') = c_3 u'^5 a_1^{-2}$. Тогда мы получим, что $\bar{\nu}(\alpha^{-1}(a_1)) = 2$, что противоречит свойству κ' .

2) Пусть $\kappa' = p^l$. Запишем тогда $\alpha(u')$ как $\alpha(u') = cu' a^{p^q-1}$ для некоторых $c \in k$, $a \in k((u))$, $\bar{\nu}(a) = 1$. Отсюда

$$\bar{\nu}(u') = 1 = \bar{\nu}(\alpha^{-1}(u')) + (p^q - 1)\bar{\nu}.$$

Противоречие, так как $\bar{\nu}(\alpha^{-1}(a)) \geq 0$ по свойству числа κ .

Итак, $\kappa = 0$ или $\kappa = 1$, т.е. мы показали, что для любого параметра u' $\bar{\nu}(\alpha(u')) = 0$ или $\bar{\nu}(\alpha(u')) = 1$. Пусть $\kappa = 0$. Тогда рассмотрим элемент $x = u' + c_1 u'^2 + c_2(u'^3 + c_1 u'^4)$, где $c_1 = -w_0^{-1}$, если $\alpha(u') = w_0 + \dots$, а c_2 — такой элемент из k , что $\bar{\nu}(\alpha(x)) > 1$ (нетрудно видеть, что он всегда существует, так как $\bar{\nu}(\alpha(u' + c_1 u'^2)) > 0$). Противоречие. Следовательно, $\kappa = 1$ и наше утверждение доказано, т.е. α — непрерывный автоморфизм.

Теперь в силу полноты и отделимости топологии в $k((u))$ достаточно показать, что ряд $\sum_{j=N}^{\infty} x_j \delta_i(u^j)$ сходится. Доказательство проводится индукцией по i . Если $i = 0$, то $\bar{\nu}(\alpha(u^j)) = j$, и ряд сходится. Если $i = 1$, то $\bar{\nu}(\delta_1(u^j)) = (j-1)\bar{\nu}(\delta_1(u))$, и опять ряд сходится в силу полноты $k((u))$.

Наконец, в силу предложения 2 при $j > 1$

$$\delta_i(u^j) = \delta_i(u^{j-1})y_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k(u^{j-1})y_{i-k},$$

где $\bar{\nu}(y_k)$ не зависит от j . По предположению индукции

$$\begin{aligned} & \min\{\bar{\nu}(\delta_0(u^{j-1})y_i), \dots, \bar{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-1})y_1)\} \\ & > \min\{\bar{\nu}(\delta_0(u^{j-2})y_i), \dots, \bar{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-2})y_1)\} \end{aligned}$$

и $\bar{\nu}(y_0) = 1$, поэтому

$$\begin{aligned} & \min\{\bar{\nu}(\delta_i(u^{j-1})y_0), \bar{\nu}(\delta_0(u^{j-1})y_i), \dots, \bar{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-1})y_1)\} \\ & > \min\{\bar{\nu}(\delta_i(u^{j-2})y_0), \bar{\nu}(\delta_0(u^{j-2})y_i), \dots, \bar{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-2})y_1)\}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится.

§ 2. Расщепимые тела

С этого места и далее, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $\bar{K}$ — поле.

Для такого локального тела можно определить естественным образом канонический автоморфизм α тела вычетов $\bar{K}$.

Из определения локального тела имеем следующие точные последовательности:

$$1 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow K^* \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z} \rightarrow 1,$$

где $\mathcal{O}$ – кольцо нормирования;

$$1 \rightarrow 1 + \wp \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \overline{K}^* \rightarrow 1,$$

где $\wp$ – максимальный идеал.

Рассмотрим отображение

$$\phi: K^* \rightarrow \text{Int}(K), \quad \phi(x) = \text{ad}(x), \quad \text{ad}(x)(y) = x^{-1}yx,$$

где $\text{Int}(K)$ – группа внутренних автоморфизмов тела K . Поскольку внутренние автоморфизмы не меняют нормирование элемента, их можно ограничить на кольцо $\mathcal{O}$. Кроме того, они переводят идеал $\wp$ в себя. Это дает отображение $\phi: K^* \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{O}/\wp) = \text{Aut}(\overline{K})$. Покажем теперь, что $\phi(\mathcal{O}^*)$ является тривиальным автоморфизмом поля $\overline{K}$. Чтобы показать это, воспользуемся второй из вышеприведенных точных троек. Покажем, что $\phi(1 + \wp)$ действует на $\overline{K}$ тривиально. Для этого нужно показать, что $(1 + \wp)^{-1}x(1 + \wp) = x \bmod \wp$ для любого $x \in \mathcal{O}$. Но это очевидно сразу после раскрытия скобок. Из этого факта следует, что мы можем определить действие $\overline{K}$ на $\overline{K}$. Покажем, что оно также тривиально. Действительно, это действие определяется как $a^{-1}xa \bmod \wp$, где a, x – представители в кольце $\mathcal{O}$. Но это есть просто $\bar{a}^{-1}\bar{x}\bar{a} = \bar{x}$ (черта означает образ в теле вычетов), поскольку тело вычетов по предположению есть поле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Канонический автоморфизм α поля $\overline{K}$ определяется соотношением $\alpha = \phi(z)$, где $z \in K^*$ и $\nu(z) = 1$. Он не зависит от выбора z .*

Опишем теперь все расщепимые двумерные локальные тела с *изоморфными последними полями вычетов* с точностью до изоморфизма. Пусть K и K' – два расщепимых тела, $K \cong \overline{K}((z))$, $K' \cong \overline{K}'((z'))$. Если $K \cong K'$, то отображение изоморфизма $\varphi: K \rightarrow K'$ можно представить как композицию изоморфизма $\phi: K \rightarrow K'$, $\phi(u) = u'$, $\phi(z) = z'$, и некоторого автоморфизма ψ тела K . В свою очередь, любой автоморфизм задается некоторой заменой переменных

$$\begin{aligned} u &\mapsto u' = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots, & \bar{\nu}(c_0) &= 1, \\ z &\mapsto z' = a_0z + a_1z^2 + \dots, & a_0 &\neq 0, \end{aligned} \quad (*)$$

где $a_i, c_i \in \overline{K}$, в силу наших соглашений о сохранении изоморфизмами локальной структуры тела.

Легко видеть, что всякая замена переменных выглядит таким образом. Ясно также, что любая замена может быть разбита в последовательность замен $u \mapsto u'$, $z \mapsto z'$; $u' \mapsto u'$, $z \mapsto z' = a'_0z + a'_1z^2 + \dots$ или в обратном порядке. В свою очередь, замена $u \mapsto u'$ разбивается в последовательность замен $u \mapsto u'_1 = c_0$, $u'_1 \mapsto u'_2 = u'_1 + c'_1z, \dots, u'_i \mapsto u'_{i+1} = u'_i + c'_iz^i, \dots$, а замена $z \mapsto z'$ разбивается в последовательность замен $z \mapsto z'_1 = a_0z$, $z'_1 \mapsto z'_2 = z'_1 + a'_1z^2, \dots, z'_i \mapsto z'_{i+1} = z'_i + a'_iz^{i+1}, \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Необходимо отметить, что любая общая замена переменных $(*)$ задает некоторое отображение $f: K \rightarrow K$, которое, в отличие от случая полей, не всегда является автоморфизмом. Действительно, пусть это не так, и любая замена переменных задает автоморфизм f . Рассмотрим замену $f(z) = z'$, $f(u) = u$, где z' – какая-то новая переменная. Тогда должны иметь место равенства

$$\begin{aligned} f(zu) &= f(z)f(u) = z'u = u^{\alpha'}z' + u^{\delta'_1}z'^2 + \dots, \\ f(zu) &= f(u^\alpha z + u^{\delta_1}z^2 + \dots) = u^\alpha z' + u^{\delta_1}z'^2 + \dots. \end{aligned}$$

Отсюда $\alpha = \alpha'$, $\delta_1 = \delta'_1$ и т.д., т.е. $\delta'_i = \delta_i \ \forall i$.

Рассмотрим тело $\mathbb{Q}((u))((z))$ с соотношением $zu = (u + u^2)z$ и рассмотрим замену $z \mapsto z' = z + z^2$. Тогда

$$\begin{aligned} z'u &= (z + z^2)u = (u + u^2)z + z(u + u^2)z \\ &= (u + u^2)z + [(u + u^2)z + (u + u^2)^2z]z \\ &= (u + u^2)z' + [u + 2u^2 + 2u^3 + u^4 - u - u^2]z^2 \\ &= (u + u^2)z' + [u^2 + 2u^3 + u^4]z'^2 + \dots. \end{aligned}$$

Таким образом, здесь $\delta_1 \neq \delta'_1$. Противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В любом двумерном расщепимом локальном теле K с $\alpha^n \neq \text{Id}$ для всех n можно сделать замену переменных так, что $z'a = a^\alpha z'$ для любого a из $\overline{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать утверждение будем по индукции, делая последовательно замены переменных так, чтобы в нуль последовательно обращались δ_1, δ_2 .

ЛЕММА 3 (о замене). Пусть в K выполняется соотношение вида

$$zaz^{-1} = a^\alpha + a^{\delta_j}z^j + a^{\delta_{j+1}}z^{j+1} + \dots,$$

где $j \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta_1 = \dots = \delta_{j-1} = 0$, $\delta_j \neq 0$. Тогда:

(i) при замене $z \mapsto z' = z + bz^{q+1}$, $q \in \mathbb{N}$, имеет место соотношение

$$z'az'^{-1} = a^\alpha + \dots + a^{\delta_{q-1}}z'^{q-1} + (a^{\delta_q} + ba^{\alpha^{q+1}} - a^\alpha b)z'^q + \dots,$$

т.е. $a^{\delta'_q} = a^{\delta_q} + ba^{\alpha^{q+1}} - a^\alpha b$;

(ii) если $\alpha^n = 1$ для некоторого n , то при замене $z \mapsto z' = z + bz^{q+1}$, где $n \mid q$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} z'az'^{-1} &= a^\alpha + \dots + a^{\delta_{q+j-1}}z'^{q+j-1} + \left(a^{\delta_{q+j}} + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} - a^{\delta_j}b^{\alpha^j} \right. \\ &\quad \left. + b \sum_{k=1}^q ((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} - a^{\delta_j} \sum_{k=0}^{j-1} b^{\alpha^k} \right) z'^{q+j} + \dots; \end{aligned}$$

(iii) при замене $z \mapsto z' = bz$, $b \neq 0$, имеет место соотношение

$$z'az'^{-1} = a^\alpha + a^{\delta_j}(b^{-1})^\alpha \dots (b^{-1})^{\alpha^j} z'^j + \dots.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\alpha = \text{Id}$, то

$$z'az'^{-1} = a + \dots + a^{\delta_{q+j-1}} z'^{q+j-1} + (a^{\delta_{q+j}} + (q-j)a^{\delta_j}b)z'^{q+j} + \dots.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. (i) Имеем

$$\begin{aligned} z'az'^{-1} &= (1 + bz^q)zaz^{-1}(1 + bz^q)^{-1} \\ &= (zaz^{-1} + bz^qzaz^{-1})(1 - bz^q + bz^qbz^q - \dots) \\ &= (zaz^{-1} - zaz^{-1}bz^q + \dots + bz^qzaz^{-1} - \dots) \\ &= (zaz^{-1} - [a^\alpha + a^{\delta_j}z^j + \dots]bz^q + bz^q[a^\alpha + a^{\delta_j}z^j + \dots] + \dots) \\ &= (zaz^{-1} - [a^\alpha b + a^{\delta_j}b^{\alpha^j}z^j + \dots]z^q + ba^{\alpha^{q+1}}z^q + \dots) \\ &= (zaz^{-1} + (-a^\alpha b + ba^{\alpha^{q+1}})z^q + \dots) \\ &= a^\alpha + \dots + a^{\delta_{q-1}}z'^{q-1} + (a^{\delta_q} + ba^{\alpha^{q+1}} - a^\alpha b)z'^q + \dots. \end{aligned}$$

(ii) Имеем

$$\begin{aligned} z'az'^{-1} &= (1 + bz^q)zaz^{-1}(1 + bz^q)^{-1} = (zaz^{-1} + bz^qzaz^{-1})(1 + bz^q)^{-1} \\ &= (a^\alpha + a^{\delta_j}z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}}z^{q+j} + \dots + bz^q(a^\alpha + a^{\delta_j}z^j + \dots))(1 + bz^q)^{-1} \\ &= \left(a^\alpha + ba^{\alpha^{q+1}}z^q + a^{\delta_j}z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}}z^{q+j} + \dots + b \sum_{k=1}^q ((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} z^{q+j} \right. \\ &\quad \left. + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} z^{q+j} + \dots \right) (1 + bz^q)^{-1} \\ &= a^\alpha + \left(a^{\delta_j}z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}}z^{q+j} + \dots + b \sum_{k=1}^q ((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} z^{q+j} \right. \\ &\quad \left. + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} z^{q+j} + \dots \right) (1 - bz^q + bz^qbz^q - \dots) \\ &= a^\alpha + a^{\delta_j}z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}}z^{q+j} + \dots + b \sum_{k=1}^q ((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} z^{q+j} \\ &\quad + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} z^{q+j} + \dots - a^{\delta_j}b^{\alpha^j} z^{q+j} + \dots \\ &= a^\alpha + \dots + a^{\delta_{q+j-1}}z'^{q+j-1} + \left(a^{\delta_{q+j}} + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} - a^{\delta_j}b^{\alpha^j} \right. \\ &\quad \left. + b \sum_{k=1}^q ((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} - a^{\delta_j} \sum_{k=0}^{j-1} b^{\alpha^k} \right) z'^{q+j}, \end{aligned}$$

ПОСКОЛЬКУ $z'^j = z^j + \sum_{k=0}^{j-1} b^{\alpha^k} z^{q+j} + \dots$.

(iii) Имеем

$$\begin{aligned} z'az'^{-1} &= bza z^{-1}b^{-1} = a^\alpha + ba^{\delta_j}(b^{-1})^{\alpha^j} z^j + \dots \\ &= a^\alpha + a^{\delta_j}(b^{-1})^\alpha \dots (b^{-1})^{\alpha^j} z'^j + \dots. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. *Всякое (α, β) -дифференцирование δ поля $\overline{K}$, $\alpha \neq \beta$, является внутренним, т.е. существует $d \in \overline{K}$ такое, что*

$$\delta(a) = da^\alpha - a^\beta d \quad \forall a \in \overline{K}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $d = \delta(a)/(a^\alpha - a^\beta)$, где a – произвольный элемент такой, что $a^\alpha \neq a^\beta$. Он существует по условию $\alpha \neq \beta$. Положим $\delta_{\text{вн}}(x) = dx^\alpha - x^\beta d$. Утверждается, что $\delta = \delta_{\text{вн}}$. Действительно, рассмотрим $\bar{\delta} = \delta - \delta_{\text{вн}}$. Это (α, β) -дифференцирование. Пусть $b \in \overline{K}$. Тогда $\bar{\delta}(ab) = \bar{\delta}(ba)$. Но

$$\bar{\delta}(ab) = \bar{\delta}(a)b^\alpha + a^\beta \bar{\delta}(b) = a^\beta \bar{\delta}(b),$$

а

$$\bar{\delta}(ba) = \bar{\delta}(b)a^\alpha + b^\beta \bar{\delta}(a) = a^\alpha \bar{\delta}(b).$$

Отсюда $\bar{\delta}(b) = 0$ для произвольного b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Пусть

$$zaz^{-1} = a^\alpha + a^{\delta_1}z + a^{\delta_2}z^2 + \dots.$$

Мы знаем, что $\delta_1 - (\alpha^2, \alpha)$ -дифференцирование (предложение 2 и следствие). Поскольку $\alpha^2 \neq \alpha$, то δ_1 по лемме 4 – внутреннее дифференцирование и $\delta_1(a) = da^{\alpha^2} - a^\alpha d$. По лемме 3,(i) замена $z \mapsto z_2 = z - d_1z^2$ дает нам

$$z_2az_2^{-1} = a^\alpha + a^{\delta'_2}z_2^2 + \dots,$$

причем $\delta'_1 = 0$. По следствию предложения 2 $\delta'_2 - (\alpha^3, \alpha)$ -дифференцирование. Поскольку $\alpha^3 \neq \alpha$, оно опять внутреннее, и мы можем применить лемму 3. При этом замена будет выглядеть как $z_2 \mapsto z_3 = z_2 - d_2z_2^3$.

Рассуждая по индукции, на k -м шаге имеем

$$z_kaz_k^{-1} = a^\alpha + a^{\delta'_k}z_k^k + \dots,$$

причем $\delta'_j = 0$ при $j < k$. По следствию предложения 2 $\delta'_k - (\alpha^{k+1}, \alpha)$ -дифференцирование. Поскольку $\alpha^{k+1} \neq \alpha$, оно опять внутреннее, и мы можем применить лемму 3. При этом замена будет выглядеть как $z_k \mapsto z_{k+1} = z_k - d_kz_k^{k+1}$.

Таким образом, мы получили, что последовательность замен $\{z_n\}$: $z_{n+1} = z_n - d_nz_n^{n+1}$, обращает в нуль все δ_i . Последовательность $\{z_n\}$, очевидно, сходится в K . В силу полноты и отделимости топологии по первому нормированию ν у нее существует единственный предел z . Он и будет, очевидно, искомым элементом для замены, для которого все отображения $\delta_i = 0$, $i \geq 1$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть K – двумерное локальное тело, у которого первое тело вычетов – поле, и для всех $n \in \mathbb{N}$ $\alpha^n \neq 1$. Тогда:*

- (i) $\text{char } K = \text{char } \overline{K}$;
- (ii) *существует гомоморфизм $\overline{K} \hookrightarrow \mathcal{O} \subset K$, являющийся сечением отображения $\mathcal{O} \mapsto \overline{K}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство разобьем на следующие шаги.

Шаг 0. Докажем, что $\text{char } K = \text{char } \overline{K}$.

Действительно, если это не так, то имеем $\text{char } \overline{K} = l > 0$. Следовательно, $\nu(l) = r > 0$. Но тогда для любого элемента $t \in K$ такого, что $\nu(t) = 0$, имеем $l t l^{-1} \bmod \wp = \bar{t}^{\alpha^r}$, где $\bar{t}$ – образ t в $\overline{K}$. Доказательство этого факта следует из того, что $l = z^r u$, где u – единица в кольце $\mathcal{O}$, и совпадает с доказательством того, что α не зависит от выбора локального параметра z . С другой стороны, $l t = t l$, т.е. $l t l^{-1} \bmod \wp = \bar{t}$, что противоречит тому, что $\alpha^r \neq \text{Id}$.

Шаг 1. Ясно, что простое поле вкладывается в $\mathcal{O}$. Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА 5. В $\overline{K}$ существует элемент c такой, что $c^{\alpha^k} \neq c \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\overline{K}$ – одномерное локальное поле, в нем есть фильтрация, определенная нормированием $\bar{\nu}$. Утверждается, что можно найти в $\overline{\mathcal{O}}$ последовательность $\{c_{j_i}\}$, $j_i, i \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

- (i) $\bar{\nu}(c_{j_i}) > \bar{\nu}(c_{j_{i-1}}) \quad \forall i$;
- (ii) если $k \in \mathbb{N}$: $k = 0 \bmod j_2 \dots j_l$ и $k \neq 0 \bmod j_2 \dots j_{l+1}$, то $\alpha^k(c_{j_1}) = c_{j_1}, \dots, \alpha^k(c_{j_{l-1}}) = c_{j_{l-1}}, \alpha^k(c_{j_l}) \neq c_{j_l}$ и

$$\bar{\nu}[(\alpha^k - \text{Id})(c_{j_l})] < \bar{\nu}(c_{j_{l+1}}).$$

Будем строить ее по индукции следующим образом: выберем c_{j_1} таким, что $\alpha(c_{j_1}) \neq c_{j_1}$ и $\bar{\nu}(c_{j_1}) \geq 1$. Это всегда можно сделать: пусть u – элемент с $\bar{\nu}(u) = 1$. Если $\alpha(u) \neq u$, то в качестве c_{j_1} можно взять u . Если же $\alpha(u) = u$, то выберем какой-нибудь элемент c_{j_1} такой, что $\alpha(c_{j_1}) \neq c_{j_1}$. Если $\bar{\nu}(c_{j_1}) = 0$, то положим $\tilde{c}_{j_1} := c_{j_1} u$. Тогда $\bar{\nu}(\tilde{c}_{j_1}) = 1$ и $\alpha(c_{j_1} u) = \alpha(c_{j_1}) u \neq c_{j_1} u$. Индекс j_1 положим равным 1.

Пусть j_2 – наименьшее число: $(\alpha^{j_1})^{j_2}(c_{j_1}) = c_{j_1}$, а $k_1 = \max\{\bar{\nu}[(\alpha^{j_1})^m(c_{j_1}) - c_{j_1}], m \in \{1, \dots, j_2 - 1\}\}$. Выберем $\tilde{c}_{j_2}$: $(\alpha^{j_1})^{j_2}(\tilde{c}_{j_2}) \neq \tilde{c}_{j_2}$. Положим $c_{j_2} = \tilde{c}_{j_2} c_{j_1}^{k_1+1}$. Тогда $(\alpha^{j_1})^{j_2}(c_{j_2}) \neq c_{j_2}$ и $\bar{\nu}[(\alpha^{j_1})^m(c_{j_1}) - c_{j_1}] < \bar{\nu}(c_{j_2}) \quad \forall m < j_2$.

Далее действуем по индукции. В итоге получим последовательность, у которой свойства (i) и (ii) выполняются по построению.

Теперь положим $c = \sum_{i=1}^{\infty} c_{j_i}$. Тогда $\forall k \quad \alpha^k(c) \neq c$. Действительно, пусть $k = 0 \bmod j_2 \dots j_l$ и $k \neq 0 \bmod j_2 \dots j_{l+1}$. Тогда в силу (ii)

$$\alpha^k(c) - c = \alpha^k(c_{j_l}) - c_{j_l} + \alpha^k\left(\sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_i}\right) - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_i}.$$

Но $\bar{\nu}(\alpha^k(c_{j_l}) - c_{j_l}) < \bar{\nu}(c_{j_{l+1}}) \leq \bar{\nu}(\alpha^k(\sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_i}) - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_i})$. Отсюда имеем $\alpha^k(c) - c \neq 0$.

Обозначим через Π простое поле. Пусть $\overline{F} = \Pi(c) \subset K$. Покажем, что это поле всегда можно вложить в $\mathcal{O}$.

Возьмем любой подъем $c' \in \mathcal{O}$ элемента c : $c' \bmod \wp = c$. Очевидно, что c' коммутирует с любым элементом из простого поля. Легко видеть, что c трансцендентен над простым полем. Действительно, если бы он был алгебраичен, то его

уравнение по модулю $\wp$ имело бы бесконечное число решений, так как $c^{\alpha^k} \neq c \ \forall k$, а этого не может быть. Поэтому кольцо $\Pi[c']$ не пересекается с $\wp$, т.е. $\Pi[c'] \cap \wp = 0$. Таким образом, поле частных $\overline{F}$ этого кольца можно вложить в $\mathcal{O}$.

Пусть теперь $\bar{L}$ – некоторое максимальное расширение поля $\overline{F}$, для которого имеется вложение в $\mathcal{O}$, $L \subset \mathcal{O}$ – образ при вложении, и пусть $\bar{a} \in \bar{K}$, $\bar{a} \notin \bar{L}$, – некоторый элемент. Наша цель – доказать, что существует такой элемент $a \in \mathcal{O}$, что $a \bmod \wp = \bar{a}$ и a коммутирует с любым элементом из L .

Шаг 2. Покажем, что элемент a с указанными свойствами существует. Возьмем произвольный элемент a такой, что $a \bmod \wp = \bar{a}$. Пусть $x \in L$ – произвольный элемент. Рассмотрим теперь элемент axa^{-1} . Имеем $axa^{-1} \bmod \wp = x$, так как тело вычетов $\bar{K}$ – поле. Выберем в K элемент z такой, что $\nu(z) = 1$. Тогда axa^{-1} можно записать в виде

$$axa^{-1} = x + x^{\delta'_1}z,$$

где $x^{\delta'_1} \in \mathcal{O}$ – некоторый элемент. Легко проверить, что отображение $\bar{\delta}'_1$, ставящее в соответствие элементу x элемент $\overline{x^{\delta'_1}} \in \bar{K}$, является α -дифференцированием на L со значениями в $\bar{K}$:

$$\begin{aligned} a(x_1 + x_2)a^{-1} &= (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^{\delta'_1}z, \\ a(x_1 + x_2)a^{-1} &= ax_1a^{-1} + ax_2a^{-1} = x_1 + x_1^{\delta'_1}z + x_2 + x_2^{\delta'_1}z \\ &= (x_1 + x_2) + (x_1^{\delta'_1} + x_2^{\delta'_1})z. \end{aligned}$$

Отсюда $\overline{(x_1 + x_2)^{\delta'_1}} = \overline{x_1^{\delta'_1}} + \overline{x_2^{\delta'_1}}$. Далее, имеем

$$a(x_1x_2)a^{-1} = (ax_1a^{-1})(ax_2a^{-1}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x_1x_2 + (x_1x_2)^{\delta'_1}z &= (x_1 + x_1^{\delta'_1}z)(x_2 + x_2^{\delta'_1}z) \\ &= x_1x_2 + x_1x_2^{\delta'_1}z + x_1^{\delta'_1}zx_2 + x_1^{\delta'_1}zx_2^{\delta'_1}z \\ &\equiv x_1x_2 + x_1x_2^{\delta'_1}z + x_1^{\delta'_1}x_2^\alpha z \bmod \wp^2 \\ &= x_1x_2 + (x_1^{\delta'_1}x_2^\alpha + x_1x_2^{\delta'_1})z \bmod \wp^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{(x_1x_2)^{\delta'_1}} = \overline{x_1^{\delta'_1}x_2^\alpha} + \overline{x_1x_2^{\delta'_1}} = \overline{x_1^{\delta'_1}x_2^\alpha} + \overline{x_1x_2^{\delta'_1}}.$$

По лемме 4 $\bar{\delta}'_1$ – внутреннее α -дифференцирование. Положим $\tilde{a}_1 := (1 + a_1z)a$, где $a_1 \bmod \wp = -d$, если $\bar{\delta}'_1(x) = d(x^\alpha - x)$. Тогда, используя те же самые выкладки, что были проведены в лемме о замене, имеем

$$(1 + a_1z)axa^{-1}(1 + a_1z)^{-1} = x + (x^{\delta'_1} + a_1x^\alpha - xa_1)z + \text{чл. из } \wp^2.$$

Так как $x^{\delta'_1} + a_1 x^\alpha - x a_1 = 0 \pmod{\wp}$, получаем, что $\tilde{a}_1 x \tilde{a}_1^{-1} = x + x^{\delta'_2} z^2$. Так же, как и выше, проверяется, что $\bar{\delta}'_2: L \rightarrow \bar{K} - \alpha^2$ -дифференцирование. Пользуясь индуктивными рассуждениями (аналогичными тем, что в предложении 3), получаем, что существует $\tilde{a}_i = (1 + a_i z^i) \dots (1 + a_1 z) a$:

$$\tilde{a}_i x \tilde{a}_i^{-1} = x + x^{\delta'_{i+1}} z^{i+1},$$

и $\bar{\delta}'_{i+1}: L \rightarrow \bar{K} - \alpha^{i+1}$ -дифференцирование. Чтобы завершить индуктивное рассуждение, применим лемму 4. Получаем, что $\bar{\delta}'_{i+1}$ – внутреннее дифференцирование. Полагая $\tilde{a}_{i+1} = (1 + a_{i+1} z^{i+1}) \tilde{a}_i$ для подходящего a_{i+1} и пользуясь опять выкладками из леммы о замене, завершаем шаг индукции:

$$\tilde{a}_{i+1} x \tilde{a}_{i+1}^{-1} = x + x^{\delta'_{i+2}} z^{i+2} \quad \forall x \in L.$$

Поскольку последовательность $\tilde{a}_i$ в K , очевидно, сходится, и $\tilde{a}_i \pmod{\wp} = a$, получаем, что искомый элемент равен ее пределу.

Шаг 3. В ситуации шага 1 предположим, что $\bar{a}$ – элемент, трансцендентный над $\bar{K}$. Тогда существует его подъем $a \in \mathcal{O}$ такой, что a коммутирует с любым элементом из L . В этом случае $L[a] \cap \wp = 0$ и поле частных $L(a)$ вкладывается в $\mathcal{O}$, т.е. мы нашли поле, содержащее максимальное поле L . Следовательно, мы можем считать, что $\bar{K}$ алгебраично над L .

Пусть теперь $\bar{a}$ – алгебраический сепарабельный элемент над $\bar{L}$. Взяв его подъем a , коммутирующий с любым элементом из L , и применив лемму Гензеля (см. ниже), получим, что существует подъем $a' \in \mathcal{O}$ такой, что a' коммутирует с любым элементом из L и a' алгебраичен над L . Следовательно, поле $\bar{L}(a')$ вкладывается в $\mathcal{O}$.

Наконец, пусть $\bar{a}$ – чисто несепарабельный элемент над $\bar{L}$. Рассмотрим его подъем a , коммутирующий с любым элементом из L . Тогда $a^{l^k} \pmod{\wp} = x \in L$, где $l = \text{char } K$. Поэтому элемент $a^{l^k} - x$ коммутирует с любым элементом из L . Если он не равен нулю, то пусть $\nu(a^{l^k} - x) = r$. Тогда так же, как в шаге 0, получаем, что $(a^{l^k} - x)c(a^{l^k} - x)^{-1} \pmod{\wp} = c^{\alpha^r} \neq c$. Из этого противоречия следует, что $a^{l^k} - x = 0$. Следовательно, поле $\bar{L}(a)$ вкладывается в $\mathcal{O}$. Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (лемма Гензеля¹). Пусть $\mathcal{O}$ – полное кольцо нормирования в теле K , I – идеал нормирования, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$ и F – подполе, лежащее в $\mathcal{O}$. Предположим, что $A \in \mathcal{O}$ таков, что $\forall l \in F \quad Al = lA$. Пусть $f(X) \in F[X]$, $f'(A) \notin I$ и $f(A) \in I$. Тогда найдется такой элемент $\hat{A} \in \mathcal{O}$, что:

- а) $\hat{A}$ коммутирует с A ;
- б) $\hat{A} - A \in I$;
- в) $f(\hat{A}) = 0$;
- г) $\hat{A}l = l\hat{A} \quad \forall l \in F$.

¹Идея доказательства этой леммы была подсказана Н. И. Дубровиным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для элемента $\tilde{A}$, коммутирующего с A , имеем

$$f(A + \tilde{A}) = f(A) + f'(A)\tilde{A} + P\tilde{A}^2$$

для некоторого элемента $P \in F[A, \tilde{A}]$. Здесь мы применили формулу Тейлора. Возьмем $\tilde{A} = -(f'(A))^{-1}f(A)$. Ясно, что $\tilde{A} \in I$ и что $\tilde{A}$ коммутирует с A . Кроме того, $\tilde{A}$ коммутирует с любым элементом из F . Тогда $f(A + \tilde{A}) = P\tilde{A}^2 \in I^2$, а $f'(A + \tilde{A}) = f'(A) + X\tilde{A} \notin I$, где $X \in F[A, \tilde{A}]$. Точно так же находим элемент $\tilde{A}_2 = -(f'(A + \tilde{A}))^{-1}f(A + \tilde{A}) \in I^2$, коммутирующий с A , $\tilde{A}$ и любым элементом из F и такой, что

$$f(A + \tilde{A} + \tilde{A}_2) \in I^4.$$

Продолжая процесс, построим искомый элемент $\hat{A} = A + \tilde{A} + \tilde{A}_2 + \dots$ как сумму ряда, сходящегося в силу полноты кольца $\mathcal{O}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\alpha^n = \text{Id}$, то утверждение теоремы неверно (см. пример в §3).

СЛЕДСТВИЕ 5. Предложение 3 справедливо для любого двумерного локального тела.

ТЕОРЕМА 2. Пусть K, K' – двумерные локальные тела, для которых $\alpha^n \neq \text{Id}$, $\alpha'^n \neq \text{Id}$ для всех n , и тело вычетов $\overline{K}$ коммутативно. Тогда:

- (i) тело K изоморфно телу вида $\overline{K}((z))$, $za = a^\alpha z$, $a \in \overline{K}$, где $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k ;
- (ii) K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и существует такой изоморфизм $f: \overline{K} \rightarrow \overline{K}'$, что $\alpha = f^{-1}\alpha'f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из следствия 5, а также из известного факта о классификации одномерных локальных полей с данным полем вычетов (см., например, [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k , $\text{char } \overline{K} = \text{char } k$, α – автоморфизм поля $\overline{K}$, сохраняющий естественную фильтрацию поля $\overline{K}$. Положим $a_1 = \alpha(u)u^{-1} \bmod \wp \in k$ и определим $i_\alpha \in \mathbb{N} \cup \infty$ так: $i_\alpha = 1$, если a_1 не является корнем из 1 в k , а иначе $i_\alpha = \bar{\nu}((\alpha^n - \text{Id})(u))$, где $n \geq 1$: $a_1^n = 1$, $a_1^m \neq 1 \ \forall m < n$.

ЛЕММА 6. Пусть k – произвольное поле характеристики нуль. Всякий k -автоморфизм α поля $k((u))$ с $\alpha(u) = \xi u + a_2 u^2 + \dots$, где $\xi^n = 1$, $n \geq 1$, $\xi^m \neq 1$ при $m < n$, сопряжен с автоморфизмом β : $\beta(u) = \xi u + x u^{i_\alpha} + y u^{2i_\alpha - 1}$, где $x \in k^*$, $y \in k$, x и y зависят от α . Кроме того, $i_\alpha = i_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что α сопряжен с автоморфизмом β' : $\beta'(u) = \xi u + x u^{in+1} + y u^{2in+1}$, где i – какое-то натуральное число. После этого мы докажем, что $in + 1 = i_\alpha$.

Будем искать автоморфизм f : $f(u) = u + x_2 u^2 + \dots$, такой, что $\alpha f = f \beta'$:

$$\begin{aligned} \alpha f(u) &= (\xi u + a_2 u^2 + \dots) + x_2 (\xi u + a_2 u^2 + \dots)^2 + \dots = f \beta'(u) \\ &= \xi(u + x_2 u^2 + \dots) + x(u + x_2 u^2 + \dots)^{in+1} + y(u + x_2 u^2 + \dots)^{2in+1}. \end{aligned}$$

Положим $i = 1$ и выпишем уравнения на коэффициенты x_i при степенях u в этом равенстве.

Первое уравнение (при u^2): $x_2\xi^2 + a_2 = \xi x_2$.

$(n-1)$ -е уравнение (при u^n): $x_n\xi^n + \text{члены с } x_j, j < n + a_n = \xi x_n$.

Все эти уравнения однозначно разрешимы, поскольку $\xi^j \neq \xi \ \forall j < n+1$.

Выпишем следующее уравнение.

n -е уравнение: $x_{n+1}\xi^{n+1} + \text{члены с } x_j, j < n+1 + a_{n+1} = \xi x_{n+1} + x$.

В этом уравнении сокращается переменная x_{n+1} , и мы получаем однозначно разрешимое уравнение на x . Если получим, что $x = 0$, полагаем $i := i+1$ и выпишем уравнения дальше. На каком-то шаге мы получим, что $x \neq 0$. При этом у нас будут определены все коэффициенты x_l : $n \nmid l-1$. Нетрудно видеть, что все следующие k -е уравнения при $n \nmid k$ однозначно разрешимы по x_k .

Таким образом, $\alpha = f^{-1}\alpha'f$, где $\alpha'(u) = \xi u + xu^{in+1} + \dots$, а $f^{-1} = \prod_{k=1, n \nmid k}^{in} f_k$, где $f_k(u) = u + x_{k+1}u^{k+1}$, причем x_k однозначно определены. Следовательно, мы можем заменить α на α' и считать, что $a_q = 0$ при $q < in+1$ (соответственно $x_q = 0$ при $q < in+1$, $n \nmid q$). Используя аналогичные рассуждения и индукцию, можно получить произвольное уравнение на x_q , $q < in+1$, $n \nmid q$, в виде

$$a_{q+in} + qxx_q = (in+1)xx_q$$

(здесь мы считаем, что x_k , $k < q$, уже определены и $a_k = 0$, $k < q+in$). Отсюда получаем единственное решение на x_q .

Уравнение при u^{2in+1} будет иметь вид

$$a_{2in+1} + (in+1)xx_{in+1} = (in+1)xx_{in+1} + y,$$

откуда получаем значение y . Из единственности значений x_q следует инвариантность x и y в классе сопряженности $f^{-1}\alpha f$, где $f(u) = u + \dots$. Все остальные уравнения при степенях u , кратных n , будут иметь вид

$$a_{q+in} + qxx_q = (in+1)xx_q + \text{члены с } x_k, \quad k < q.$$

Поскольку $q > in+1$, все они являются разрешимыми относительно x_q , откуда следует искомое рассуждение.

Покажем теперь, что $in+1 = i_\alpha$. Несложным рассуждением по индукции можно вывести, что

$$\beta'^n(u) = u + x\xi^{-in-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\xi^{in})^j \right) u^{in+1} + \dots = u + x\xi^{-in-1} n u^{in+1} + \dots$$

Таким образом, $i_{\beta'} = in+1$. Мы знаем, что $f^{-1}\alpha f = \beta'$. Следовательно, $f^{-1}(\alpha^n - \text{Id})f = \beta'^n - \text{Id}$, поэтому $\bar{v}(f^{-1}(\alpha^n - \text{Id})f(u)) = \bar{v}((\beta'^n - \text{Id})(u)) = i_{\beta'}$.

Пусть $f(u) = u' = f_1u + f_2u^2 + \dots$, $f_1 \neq 0$. Покажем, что $\bar{v}f^{-1}(\alpha^n - \text{Id})(u') = i_\alpha$. Для этого достаточно показать, что $\bar{v}(\alpha^n - \text{Id})(u') = i_\alpha$. Имеем

$$\begin{aligned} (\alpha^n - \text{Id})(u') &= [f_1(u + \bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \dots) + f_2(u + \bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \dots)^2 + \dots] \\ &\quad - [f_1u + f_2u^2 + \dots] = [(f_1u + f_1\bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}) + (f_2u^2 + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}) \\ &\quad + (f_3u^3 + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}) + \dots] - [f_1u + f_2u^2 + \dots] = f_1\bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k и $\text{char } \overline{K} = \text{char } k$, k алгебраически замкнуто, $\text{char } k = 0$, и пусть α, β – два автоморфизма поля $\overline{K}$. Тогда $\overline{K} = k((u))$ и $\alpha = f^{-1}\beta f$ (где f – некоторый автоморфизм поля $\overline{K}$) тогда и только тогда, когда $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)) = (b_1, i_\beta, y(\beta))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно. Докажем второе.

Легко видеть, что если $\alpha = f^{-1}\beta f$, то $a_1 = b_1$.

Пусть в условии леммы 6 ξ не является корнем из 1. Тогда из доказательства легко следует, что α сопряжен с β : $\beta(u) = \xi u$, поскольку все выписывавшиеся уравнения в этом случае однозначно разрешимы в том случае, когда $x = y = 0$. Отсюда мы получаем доказательство предложения для случая, когда $i_\alpha = i_\beta = 1$.

Пусть теперь $i_\alpha = i_\beta \neq 1$, $a_1 = b_1$ – корни из 1.

ЛЕММА 7. В обозначениях леммы 6 пусть β, β' – k -автоморфизмы поля $k((u))$: $\beta(u) = \xi u + x u^{in+1} + y u^{2in+1}$, $\beta'(u) = \xi u + \bar{x} u^{in+1} + \bar{y} u^{2in+1}$, где $\bar{x}/x \in (k^*)^{in}$, $\bar{y} = (\bar{x}/x)^2 y$. Тогда β и β' сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $x_0 = (\bar{x}/x)^{(in)^{-1}}$. Пусть f – автоморфизм: $f(u) = x_0 u$. Тогда

$$f\beta(u) = \xi x_0 u + x(x_0 u)^{in+1} + y(x_0 u)^{2in+1} = x_0 \xi u + x_0 \bar{x} u^{in+1} + x_0 \bar{y} u^{2in+1} = \beta' f(u).$$

Из этой и предыдущей леммы непосредственно вытекает, что если k – алгебраически замкнуто, то любые два автоморфизма α, β с равными тройками данных $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)), (b_1, i_\beta, y(\beta))$ сопряжены. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть выполняются все условия предложения, кроме условия, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\alpha^n = \text{Id}$. Тогда в $k((u))$ существует такой параметр u' , что $\alpha(u') = a_1 u'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 6.

Из предложения вытекает также следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K, K' – двумерные локальные тела с последними полями вычетов k, k' и каноническими автоморфизмами α, α' . Предположим, что $\text{char } K = \text{char } k$, $\text{char } K' = \text{char } k'$, для всех $n \in \mathbb{N}$ $\alpha^n \neq \text{Id}$, $\alpha'^n \neq \text{Id}$ и поля k, k' алгебраически замкнуты характеристики нуль. Тело K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)) = (a'_1, i_{\alpha'}, y(\alpha'))$.

Перейдем теперь к изучению тел с $\alpha^n = 1$.

§ 3. Классификация расщепимых тел характеристики нуль

Начиная с этого места, будем предполагать, что $k \subset K$, $k \subset \overline{K}$ и эти вложения согласованы с локальной структурой. Будем предполагать также, что k принадлежит центру K : $k \subset Z(K)$, отображения δ_i , $i \geq 1$, непрерывны (см. следствие 3) и что тело K расщепимо.

При этих условиях $\text{char } k = \text{char } \overline{K} = \text{char } K$ и $\overline{K} \simeq k((u))$. Это следует из теоремы Коэна для одномерных локальных полей, так как у нас есть вложение поля вычетов в $\overline{K}$. Как следует из леммы о замене и из доказательства следствия 3, свойство непрерывности отображений $\delta_i, i \geq 1$, не зависит от их определения, т.е. от выбора параметра z (и u).

Разберем сначала случай, когда $\alpha = \text{Id}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Положим

$$i = \nu((\phi_z - 1)(u)) \in \mathbb{N} \cup \infty, \\ r = \overline{\nu}[(\phi_z - 1)(u))z^{-i} \bmod \wp] \bmod i \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z},$$

где u, z – произвольные локальные параметры тела K , $\phi_z: K \rightarrow K$, $\phi_z(a) = \text{ad}(z)(a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. i и r не зависят от выбора параметров u и z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку тело K расщепимо, фиксируем какое-нибудь представление его в виде $K \cong k((u))((z))$. Пусть u', z' – другие параметры. Тогда

$$u' = (x_0u + x_1u^2 + \dots) + c_1z + c_2z^2 + \dots, \quad x_i \in k, \quad c_i \in k((u)), \quad x_0 \neq 0, \\ z' = a_0z + a_1z^2 + \dots, \quad a_i \in k((u)), \quad a_0 \neq 0.$$

Положим $z'' = a_0^{-1}z'$. Ясно, что $\nu((\phi_{z''} - 1)(u)) = \nu((\phi_{z'} - 1)(u))$. С другой стороны, по следствию 4 $\nu((\phi_{z'} - 1)(u)) = \nu((\phi_z - 1)(u))$. Таким образом, от выбора параметра z число i не зависит.

Покажем теперь, что $\nu((\phi_z - 1)(u')) = \nu((\phi_z - 1)(u))$. Это сразу вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8 (вторая лемма о замене). Пусть в K выполняется соотношение вида

$$zu'z^{-1} = u^\alpha + u^{\delta_j}z^j + \dots,$$

где j такое, что $\delta_1 = \dots = \delta_{j-1} = 0$, $\delta_j \neq 0$, $\alpha^n = 1$. Тогда:

(i) при замене $u \mapsto u' = u + bz^q$, $n \mid q$, имеет место соотношение

$$zu'z^{-1} = u'^\alpha + u'^{\delta_1}z + \dots + u'^{\delta_{q-1}}z^{q-1} + u'^{\delta_q}z^q + \dots,$$

где $u'^{\delta_q} = u^{\delta_q} + b^\alpha - \partial/\partial u(u^\alpha)b$, $u'^{\delta_k} = u^{\delta_k}$, если $k < q$;

(ii) если $\alpha(u) = \xi u$, $\xi \in k$, $\xi^n = 1$ для некоторого n , то при замене $u \mapsto u' = u + bz^q$, $n \mid q$, имеет место соотношение

$$zu'z^{-1} = \xi u' + \dots + (u^{\delta_q} + b^\alpha - \xi b)z^q + \dots + u'^{\delta_{q+j-1}}z^{q+j-1} + u'^{\delta_{q+j}}z^{q+j} + \dots,$$

где $u'^{\delta_{q+j}} = u^{\delta_{q+j}} + b^{\delta_j} - \partial/\partial u(u^{\delta_j})b$;

(iii) если $\alpha = 1$, то при замене $u \mapsto u' = x_0u + x_1u^2 + \dots$, где $x_q \in k$, $x_0 \neq 0$, имеет место соотношение

$$zu'z^{-1} = u' + \left(u^{\delta_j} \frac{\partial}{\partial u} u'\right) z^j + \dots.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Имеем

$$\begin{aligned} zu'z^{-1} &= z(u + bz^q)z^{-1} = u^\alpha + u^{\delta_1}z + \dots + (b^\alpha + b^{\delta_1}z + \dots)z^q \\ &= u^\alpha + u^{\delta_1}z + \dots + (u^{\delta_q} + b^\alpha)z^q + \dots \\ &= u'^\alpha + u'^{\delta_1} + \dots + (u^{\delta_q} + b^\alpha - \partial/\partial u(u^\alpha)b)z^q + \dots, \end{aligned}$$

так как

$$u'^{\delta_1} = (u + bz^q)^{\delta_1} = x_0(u + bz^q) + x_1(u + bz^q)^2 + \dots = u^{\delta_1} + \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_1})bz^q + \dots,$$

если $u^{\delta_1} = x_0u + x_1u^2 + \dots$.

(ii) Имеем

$$\begin{aligned} zu'z^{-1} &= z(u + bz^q)z^{-1} = \xi u + u^{\delta_j}z^j + \dots + (b^\alpha + b^{\delta_j}z^j + \dots)z^q \\ &= \xi u + u^{\delta_j}z^j + \dots + (u^{\delta_q} + b^\alpha)z^q + u^{\delta_{q+1}}z^{q+1} + \dots + u^{\delta_{q+j-1}}z^{q+j-1} \\ &\quad + (u^{\delta_{q+j}} + b^{\delta_j})z^{q+j} + \dots = \xi u' + \dots + (u^{\delta_q} + b^\alpha - \xi b)z^q \\ &\quad + u'^{\delta_{q+1}}z^{q+1} + \dots + u'^{\delta_{q+j-1}}z^{q+j-1} + \left(u^{\delta_{q+j}} + b^{\delta_j} - \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_j})b \right) z^{q+j}. \end{aligned}$$

(iii) Имеем

$$zu'z^{-1} = x_0(u + u^{\delta_j}z^j + \dots) + x_1(u + u^{\delta_j}z^j + \dots)^2 + \dots = u' + \left(u^{\delta_j} \frac{\partial}{\partial u} u' \right) z^j + \dots.$$

Таким образом, от выбора параметров u и z число i не зависит.

Докажем то же для r . По лемме 8 при замене u на u' имеем

$$zu'z^{-1} = u' + \left(u^{\delta_i} \frac{\partial}{\partial u} u' \right) z^i + \dots.$$

Поэтому $\bar{\nu}[(\phi_z - 1)(u'))z^{-i}] = \bar{\nu}(u^{\delta_i}) = \bar{\nu}[(\phi_z - 1)(u'))z^{-i}]$.

При замене z на z' имеем

$$z'u z'^{-1} = zu z^{-1} \bmod \wp^i.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{\nu}[(\phi_{z'} - 1)(u))z'^{-i} \bmod \wp] &= \bar{\nu}[(\phi_z - 1)(u))z'^{-i} \bmod \wp] = \\ &= \bar{\nu}[(\phi_z - 1)(u))z^{-i} \bmod \wp] + \bar{\nu}(a_0^{-i}) = \bar{\nu}[(\phi_z - 1)(u))z^{-i} \bmod \wp] \bmod i. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Положим

$$a = \operatorname{res}_u \left\{ \frac{u^{\delta_{2i} - \frac{i+1}{2}\delta_i^2}}{(u^{\delta_i})^2} du \right\} \in k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. $a = a(u^{\delta_{i+1}}, \dots, u^{\delta_{2i-1}})$, т.е. a зависит только от $u^{\delta_{i+1}}, \dots, u^{\delta_{2i-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства предложения достаточно показать, что a не зависит от замен переменных, сохраняющих $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$. При этом можно считать, что $\delta_{i+1} = 0, \dots, \delta_{2i-1} = 0$, так как всегда существует замена, переводящая $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$ в нуль. Для этого нужно делать последовательные замены типа $z \mapsto z' = z + bz^{j+1}$. По следствию 4 для каждого из указанных j существует элемент b такой, что $\delta'_j(u) = 0$.

Покажем сначала, что любая замена $u \mapsto u' = u + c_1z + \dots + c_iz^i$ эквивалентна замене $z \mapsto z' = z + a_1z^2 + \dots, u \mapsto u' = u + c'_iz^i + \dots$, т.е. отображения δ_j будут при обеих заменах одинаковыми. Доказывать это будем по индукции.

Указанную замену можно разбить на последовательность замен $u \mapsto u_1 = u + c_iz^i, u_1 \mapsto u_2 = u_1 + c_{i-1}z^{i-1}, \dots, u_{i-1} \mapsto u_i = u_{i-1} + c_1z$. Поэтому нам достаточно доказать, что для произвольного j замена $u_j \mapsto u_{j+1} = u_j + c_{i-j}z^{i-j}$ представляется в нужном виде.

Для первой замены утверждение тривиально. Рассмотрим произвольную j -ю замену. Из леммы 8 мы знаем, что первое изменяющееся отображение при такой замене — это δ_{2i-j} . По лемме 3, (ii) существует замена, которая изменяет δ_{2i-j} таким же образом. Для того чтобы воспользоваться индуктивным предположением и закончить доказательство, нужно проверить, что при композиции замены $u_j \mapsto u_{j+1}$ с обратной ей заменой $z \mapsto z' = z + a_{i-j}z^{i-j+1}$ отображение δ_{2i} изменяется на замену $u \mapsto u' = u + bz^i$, т.е. при такой замене новое отображение δ'_{2i} совпадает с новым отображением δ''_{2i} , получающимся при композиции указанных замен. Из леммы 8 мы знаем, что это так, если и только если

$$\text{res}_{u_{j+1}} \frac{(\delta''_{2i} - \delta_{2i})(u_{j+1})}{(u_{j+1}^{\delta_i})^2} du_{j+1} = 0.$$

Замена $u_j \mapsto u_{j+1}$ — это замена $u \mapsto u_{j+1} = u + c_{i-j}z^{i-j} + \dots + c_iz^i$. Последняя замена разбивается на две: $u \mapsto u' = u + c_{i-j}z^{i-j}$ и $u' \mapsto u'' = u' + c_{i-j+1}z^{i-j+1} + \dots + c_iz^i$. Вторая замена не влияет на δ_{2i-j} , поэтому в силу индуктивного предположения достаточно доказать равенство нулю вычета для композиции замен $u \mapsto u' = u + c_{i-j}z^{i-j}$ и $z \mapsto z' = z + a_{i-j}z^{i-j+1}$.

Пользуясь леммой 8, мы можем вычислить a_{i-j} :

$$a_{i-j} = \frac{\partial}{\partial u} ((ju^{\delta_i})^{-1} c_{i-j}) u^{\delta_i}.$$

Заметим теперь, что если $\bar{\nu}(c_{i-j})$ имеет достаточно большое положительное значение, то вычет равен нулю. Это легко вытекает из выкладок, проведенных при доказательстве лемм 3 и 8, — из них видно, что отображение δ_{2i} изменяется на полиномиальное выражение от c_{i-j}, a_{i-j} и u^{δ_i} .

Пусть r — такое значение. Пусть $c_{i-j} = \sum_{h=N}^r x_h u^h + \sum_{h=r+1}^{\infty} x_h u^h$. Тогда замену $u \mapsto u' = u + c_{i-j}z^{i-j}$ можно разбить на конечную последовательность замен $u \mapsto u'_1 = u + x_N u^N z^{i-j}, \dots, u'_{r-N-1} \mapsto u'_{r-N} = u'_{r-N-1} + \sum_{h=r+1}^{\infty} x_h u^h z^{i-j}$.

Очевидно теперь, что если мы докажем наше исходное утверждение для каждой замены в отдельности, то мы докажем все. Поскольку для последней замены это уже было показано, нам остается это доказать для произвольной замены $u \mapsto u + xu^h z^j$, $x \in k$.

Для такой замены мы должны взять ее композицию с заменой $z \mapsto z - (j-i)^{-1} \times (h-r)xu^{h-1}z^{j+1}$ и проверить, что вычет равен нулю. Для удобства обозначим $-(j-i)^{-1}(h-r)xu^{h-1} = b$, $xu^h = b'$.

Покажем, что при композиции этих замен меняются только отображения δ_{i+qj} , $q \in \mathbb{N}$. При этом $\delta_{i+qj}(u)$ имеют вид $\text{const} \cdot u^{r+q(h-1)}$. Действительно, при замене $u \mapsto u' = u + b'z^j$ имеем

$$\begin{aligned} zu'z^{-1} &= u + u^{\delta_i}z^i + u^{\delta_{2i}}z^{2i} + \dots + (b' + b'^{\delta_i} + b'^{\delta_{2i}}z^{2i} + \dots)z^j \\ &= u' + u^{\delta_i}z^i + b'^{\delta_i}z^{i+j} + u^{\delta_{2i}}z^{2i} + \dots \\ &= u' + u'^{\delta_i}z^i + \left(\frac{\partial}{\partial u}(b')u^{\delta_i} - \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_i})b' \right) z^{i+j} \\ &\quad - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial u^2}(u^{\delta_i})b'^2 z^{i+2j} - \dots - \frac{1}{(e-1)!} \frac{\partial^{e-1}}{\partial u^{e-1}}(u^{\delta_i})b'^{e-1} z^{i+(e-1)j} \\ &\quad + \left(u^{\delta_{2i}} - \frac{1}{e!} \frac{\partial^e}{\partial u^e}(u^{\delta_i})b'^e \right) z^{2i} + \dots, \end{aligned}$$

где $ej = i$, если $j \mid i$. Если $j \nmid i$, то $u^{\delta_{2i}}$ не меняется.

Следовательно,

$$u'^{\delta_{i+j}} = \frac{\partial}{\partial u}(b')u^{\delta_i} - \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_i})b'$$

и $\bar{\nu}(u'^{\delta_{i+j}}) = r + (h-1)$.

Продолжая далее выкладку, имеем

$$u'^{\delta_{i+2j}} = -\frac{\partial}{\partial u}(u'^{\delta_{i+j}})b' - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial u^2}(u^{\delta_i})b'^2$$

и $\bar{\nu}(u'^{\delta_{i+2j}}) = r + 2(h-1)$,

$$u'^{\delta_{i+qj}} = -\frac{\partial}{\partial u}(u'^{\delta_{i+(q-1)j}})b' - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial u^2}(u'^{\delta_{i+(q-2)j}})b'^2 - \dots - \frac{1}{q!} \frac{\partial^q}{\partial u^q}(u'^{\delta_i})b'^q$$

и $\bar{\nu}(u'^{\delta_{i+qj}}) = r + q(h-1)$.

При замене $z \mapsto z' = z + bz^{j+1}$ имеем

$$\begin{aligned} z'u &= (z + bz^{j+1})u = uz + u^{\delta_i}z^{i+1} + u^{\delta_{i+j}}z^{i+j+1} + \dots \\ &\quad \dots + u^{\delta_{2i}}z^{2i+1} + \dots + buz^{j+1} + (j+1)bu^{\delta_i}z^{i+j+1} + \dots \\ &\quad \dots + (j+1)bu^{\delta_{2i-j+1}} + \text{чл. с } z^{>2i+1} \\ &= uz' + u^{\delta_i}z'^{i+1} + u^{\delta'_{i+j}}z'^{i+j+1} + \dots + u^{\delta'_{2i}}z'^{2i+1} + \dots \\ &= u(z + bz^{j+1}) + u^{\delta_i}(z + bz^{j+1})^{i+1} + u^{\delta'_{i+j}}(z + bz^{j+1})^{i+j+1} + \dots \\ &\quad \dots + u^{\delta'_{2i}}(z + bz^{j+1})^{2i+1} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$u^{\delta'_{i+j}} = u^{\delta_{i+j}} + b(j-i)u^{\delta_i}$$

$$\text{и } \bar{v}(u^{\delta'_{i+j}}) = r + (h-1),$$

$$u^{\delta'_{i+2j}} = u^{\delta_{i+2j}} - C_{i+1}^2 b^2 u^{\delta_i} - C_{i+j+1}^1 b u^{\delta'_{i+j}} + (j+1) b u^{\delta_{i+j}}$$

$$\text{и } \bar{v}(u^{\delta'_{i+2j}}) = r + 2(h-1),$$

$$\begin{aligned} u^{\delta'_{i+qj}} &= u^{\delta_{i+qj}} - C_{i+1}^q b^q u^{\delta_i} - C_{i+j+1}^{q-1} b^{q-1} u^{\delta'_{i+j}} - \dots - C_{i+(q-1)j+1}^1 b u^{\delta'_{i+(q-1)j}} \\ &\quad + (j+1) b u^{\delta_{i+(q-1)j}} \end{aligned}$$

$$\text{и } \bar{v}(u^{\delta'_{i+qj}}) = r + q(h-1).$$

Поэтому если $j \nmid i$, то $u^{\delta_{2i}}$ не меняется и утверждение доказано. Если $j \mid i$, но $e(h-1) - r \neq -1$, то вычет равен нулю, и опять утверждение доказано (заметим, что $e(h-1) - r \neq -1$, если $(r-1, i) = 1$). Наконец, если $e(h-1) - r = -1$, утверждение проверяется прямыми вычислениями, которые мы здесь приводить не будем.

Итак, мы показали, что замена $u \mapsto u' = u + c_1 z + \dots + c_i z^i$ эквивалентна замене $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \dots$, $u \mapsto u' = u + c'_i z^i + \dots$. По лемме 8 замена $u \mapsto u' = u + c'_i z^i + \dots$ не изменяет значения a . По лемме 3 замена $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \dots$ не изменяет значений $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$ только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_{i-1} = 0$. Но в этом случае такая замена не изменяет также значения a . Отсюда следует, что любая замена $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \dots$, $u \mapsto u' = u + c_1 z + \dots$, не изменяющая значений $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$, не изменяет также значения a .

Для завершения доказательства предложения осталось теперь только показать, что замены $u \mapsto u' = x_0 u + x_1 u^2 + \dots$, $x_j \in k$, и $z \mapsto z' = a_0 z$, $a_0 \neq 0 \in k((u))$, не изменяют значения a . Для первой замены это очевидно. В случае второй замены имеем

$$\begin{aligned} u^{\delta'_{2i}} &= a_0^{-2i} [u^{\delta_{2i}} + i a_0 (a_0^{-1})^{\delta_i} u^{\delta_i} - a_0^{-i} (a_0^{i-1} a_0^{\delta_i} + \dots + a_0 (a_0^{i-1})^{\delta_i})] \\ &= a_0^{-2i} [u^{\delta_{2i}} + i(i+1)/2 a_0^{-1} a_0^{\delta_i} u^{\delta_i}], \\ u^{(\delta'_i)^2} &= a_0^{-2i} u^{\delta_i^2} - i a_0^{-2i-1} a_0^{\delta_i} u^{\delta_i}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{u^{\delta'_{2i}} - (i+1)/2 u^{(\delta'_i)^2}}{(u^{\delta'_i})^2} = \frac{u^{\delta_{2i}} - (i+1)/2 u^{\delta_i^2}}{(u^{\delta_i})^2} = a.$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если двумерное локальное тело не расщепимо, то числа i , r , a не являются инвариантами, как показывает следующий пример (см. также замечание 2).

ПРИМЕР². Рассмотрим свободную ассоциативную алгебру $\mathbb{Q}((u))\langle x_1, x_2 \rangle$ и в ней идеал I , порожденный элементами $[[x_1, x_2], x_1]$, $[[x_1, x_2], x_2]$. Легко проверяется, что факторкольцо $S = \mathbb{Q}((u))\langle x_1, x_2 \rangle / I$ — $\mathbb{Q}$ -алгебра без делителей нуля, в которой $z = [x_1, x_2] + I$ — центральный и алгебраически независимый с $u_i = x_i + I$ ($i = 1, 2$) элемент. В этом кольце любой элемент имеет вид

$$f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots + f_m z^m,$$

где $f_0, \dots, f_m$ — многочлены от u_1, u_2 , записанные в каноническом виде

$$a + bu_1 + cu_2 + d_1 u_1^2 + d_2 u_1 u_2 + d_3 u_2^2 + \cdots,$$

S — область Оре (см. [7]) и тело частных K обладает дискретным нормированием таким, что $\nu(u_i) = 0$, $\nu(\mathbb{Q}) = 0$, $\nu(z) = 1$. Если пополнить его по этому нормированию, получится двумерное локальное тело (в качестве второго нормирования мы можем взять нормирование по u). Оказывается, оно не расщепимо.

ЛЕММА 9. Пусть в кольце нормирования двумерного локального тела K существуют элементы u_1, u_2 такие, что $z = u_1 u_2 - u_2 u_1$ — униформизирующая нормирования ν , и для любого $m \in z\mathcal{O} \setminus z^2\mathcal{O}$ коммутаторы $[u_i, m] = u_i m - m u_i$ ($i = 1, 2$) принадлежат $z^2\mathcal{O}$. Тогда поле вычетов не вкладывается в тело K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\pi: \bar{K} \hookrightarrow K$ — вложение. Рассмотрим элементы $f \in \pi(u_1)$, $g \in \pi(u_2)$. Тогда $m_1 = f - u_1$, $m_2 = g - u_2 \in z\mathcal{O}$ и

$$\begin{aligned} 0 &= [u_1 + m_1, u_2 + m_2] = [u_1, u_2] + [m_1, u_2] + [u_1, m_2] + [m_1, m_2] \\ &= z + [m_1, u_2] + [u_1, m_2] + [m_1, m_2]. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые последней суммы принадлежат $z^2\mathcal{O}$, а $[m_1, m_2] \in z^2\mathcal{O}$, так как $m_1 m_2, m_2 m_1 \in z^2\mathcal{O}$. Но тогда

$$\infty = \nu(0) = \nu(z + [m_1, u_2] + [u_1, m_2] + [m_1, m_2]) = \nu(z) = 1.$$

Противоречие.

В этом теле z — центральный элемент, поэтому $i = \infty$, и r, a не определены. Однако если мы рассмотрим замену $z \mapsto u_1 z$, то получим $i = 1$, $r = 0$, $a = 0$.

Таким образом, эти числа зависят от выбора параметров в этом нерасщепимом теле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть K — двумерное локальное тело, удовлетворяющее условиям, сформулированным в начале этого параграфа. Пусть $\text{char } k = 0$, $\alpha = 1$ и инвариант i больше 1. Тогда тело K изоморфно телу вида $k((u))((z))$, $z u z^{-1} = u + u^{\delta'_i} z^i + u^{\delta'_{2i}} z^{2i}$, где $\delta'_i(u) = c u^r$, r — второй инвариант, $c \in k^*/(k^*)^e$, если $(r-1, i) = e > 1$, и $c = 1$ в остальных случаях; $\delta'_{2i}(u) = (a(0, \dots, 0) + r(i+1)/2) u^{-1} (\delta'_i(u))^2$, а все остальные $\delta'_j(u)$ равны нулю.

²Этот пример был любезно предоставлен мне Н.И. Дубровиным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену $z \mapsto z' = a_0 z$. По лемме 3, (iii) будем иметь $u^{\delta'_i} = a_0^{-i} u^{\delta_i}$. Таким образом, $u^{\delta'_i}$ можно привести к виду

$$u^{\delta'_i} = c_0 u^{\overline{r}(u^{\delta_i}) \bmod i},$$

где $c_0 \in k^*/(k^*)^i$. Из лемм 8 и 3 мы знаем, что на c_0 влияет только замена $z \mapsto z' = a_0 z$, $u \mapsto u' = x_0 u$, где $a_0, x_0 \in k$. При такой замене c_0 переходит в $c = c_0 a_0^{-i} x_0^{-r+1}$. Отсюда видно, что если $(r-1, i) = e > 1$, то $c \in k^*/(k^*)^e$. Если же $(r-1, i) = 1$, то, очевидно, можно подобрать a_0 и x_0 так, чтобы c стало равным 1.

Покажем, что существует замена $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \dots$ такая, что все δ_j , $2i > j > i$, перейдут в δ'_j : $\delta'_j(u) = 0$. Для этого будем делать последовательные замены типа $z \mapsto z' = z + b z^{j+1}$. По следствию 4 для каждого из указанных j существует элемент b такой, что $\delta'_j(u) = 0$.

Теперь можно сделать замену таким образом, что δ_{2i} перейдет в δ'_{2i} : $\delta'_{2i}(u') = (a + r(i+1)/2)u'^{-1}(u'^{\delta_i})^2$. Для этого воспользуемся леммой 8, (ii). В силу этой леммы нужно показать, что существует элемент b такой, что

$$u^{\delta_{2i}} - (a + r(i+1)/2)u^{-1}(u^{\delta_i})^2 + b^{\delta_i} - (u^{\delta_i})'b = 0,$$

где штрих обозначает дифференцирование по u . Поскольку по следствию 2 δ_i — дифференцирование, последнее уравнение переписывается в виде

$$u^{\delta_{2i}} - \left(a + \frac{r(i+1)}{2}\right)u^{-1}(u^{\delta_i})^2 + b'u^{\delta_i} - (u^{\delta_i})'b = 0.$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения ищется в виде $b = u^{\delta_j} \tilde{b}$, и оно имеет решение, если $\tilde{b}' + u^{\delta_{2i}}(u^{\delta_i})^{-2} - (a + r(i+1)/2)u^{-1} = 0$. Из определения a мы видим, что это так, поскольку $\text{res}_u \frac{\delta_i^2(u)}{(\delta_i(u))^2} du = r$.

Применяя теперь такие же рассуждения, как в предыдущем абзаце, получаем искомый результат.

Вернемся к случаю, когда $\alpha^n = \text{Id}$ для некоторого n .

ЛЕММА 10. Пусть канонический автоморфизм α тела $K \cong k((u))((z))$ обладает свойством $\alpha^n = 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Тогда в K можно сделать такую замену $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \dots$, что

$$z' u z'^{-1} = u^\alpha + u^{\delta'_n} z'^n + u^{\delta'_{2n}} z'^{2n} + \dots.$$

При этом $\delta'_j = 0$, если $n \nmid j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$zu z^{-1} = u^\alpha + u^{\delta_1} z + u^{\delta_2} z^2 + \dots$$

По следствию 2 $\delta_1 - (\alpha^2, \alpha)$ -дифференцирование. Поскольку $n > 1$, то $\alpha^2 \neq \alpha$. Поэтому δ_1 по лемме 4 – внутреннее дифференцирование и $\delta_1(u) = du^{\alpha^2} - u^\alpha d$. По лемме 3, (i) замена $z \mapsto z' = z - dz^2$ дает нам

$$z' u z'^{-1} = u^\alpha + u^{\delta'_2} z'^2 + \dots$$

По следствию 2 $\delta'_2 - (\alpha^3, \alpha)$ -дифференцирование. Если $n \neq 2$, оно внутреннее, и мы можем применить лемму 3. Рассуждая по индукции, получаем, что существует такая замена, что

$$z' u z'^{-1} = u^\alpha + u^{\delta'_n} z'^n + u^{\delta'_{n+1}} z'^{n+1} + \dots,$$

где $\delta'_n - (\alpha^{n+1}, \alpha)$ -дифференцирование, т.е. $\delta'_n \alpha^{-1}$ – простое дифференцирование.

Теперь заметим, что δ'_{n+1} в последней формуле является (α^2, α) -дифференцированием. Действительно, из предложения 2 мы знаем, что

$$\delta'_{n+1}(ab) = \sum_{k=0}^{n+1} \delta'_{n+1-k}(a) \sigma(S_{n+1}^k \alpha)(b), \quad a, b \in \overline{K}.$$

Но все $\delta'_j = 0$, если $j < n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \delta'_{n+1}(ab) &= \delta'_{n+1}(a) \alpha^{n+2}(b) + \delta'_n(a) \left(\sum_{k=0}^n \alpha^k \delta'_1 \alpha^{n-k} \right)(b) + \alpha(a) \delta'_{n+1}(b) \\ &= \delta'_{n+1}(a) \alpha^2(b) + \alpha(a) \delta'_{n+1}(b). \end{aligned}$$

Но тогда по лемме 4 δ'_{n+1} – внутреннее дифференцирование. Применяя лемму 3 с заменой $z' \mapsto z'' = z' + bz'^{n+2}$ при подходящем b , имеем

$$z'' u z''^{-1} = u^\alpha + u^{\delta'_n} z''^n + u^{\delta'_{n+2}} z''^{n+2} + \dots,$$

причем $\delta'_{n+1} = 0$. Рассуждая по индукции, считаем, что мы сделали замену $z \mapsto z'$ такую, что

$$z' u z'^{-1} = u^\alpha + u^{\delta'_n} z'^n + u^{\delta'_{2n}} z'^{2n} + \dots + u^{\delta'_{k+1}} z'^{k+1} + \dots$$

Тогда если $n \nmid (k+1)$, то $\delta'_{k+1} - (\alpha^{k+2}, \alpha)$ -дифференцирование. Действительно,

$$\begin{aligned} \delta'_{k+1}(ab) &= \sum_{l=0}^{k+1} \sigma(\delta'_{k+1-l} \alpha)(a) \sigma(S_{k+1}^l \alpha)(b) \\ &= \delta'_{k+1}(a) \alpha^{k+2}(b) + \sum_{m=1}^x \delta'_{mn}(a) \sigma(S_{k+1}^{k+1-mn} \alpha)(b) + \alpha(a) \delta'_{k+1}(b), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{N}$: $xn \leq k+1$, $(x+1)n > k+1$, поскольку все $\delta'_j = 0$, если $j < k+1$ и $n \nmid j$.

В каждом мономе из $\sigma(S_{k+1}^{k+1-mn}\alpha)$ существует элемент δ'_j с $j < k+1$ и $n \nmid j$. Это следует из определения S_{k+1}^l и того, что $n \nmid (k+1-mn)$. Следовательно, $\sigma(S_{k+1}^{k+1-mn}\alpha)(b) = 0 \ \forall m$ и $\delta'_{k+1} - (\alpha^{k+2}, \alpha)$ -дифференцирование.

Если же $n \mid (k+1)$, то точно таким же рассуждением получаем, что $\delta'_{k+2} - (\alpha^{k+2}, \alpha)$ -дифференцирование. Следовательно, по лемме 3 существует замена $z' \mapsto z'' = z' + bz'^{k+2}$ (или $z'' = z' + bz'^{k+3}$, если $n \mid (k+1)$) такая, что

$$z''uz''^{-1} = u^\alpha + u^{\delta'_1}z''^n + u^{\delta'_{2n}}z''^{2n} + \dots + u^{\delta'_{k+2}}z''^{k+2} + \dots$$

$$(\text{или } u^{\delta'_{k+1}}z''^{k+1} + u^{\delta'_{k+3}}z''^{k+3} + \dots, \text{ если } n \mid (k+1)).$$

Поскольку на l -м шаге индукции мы делаем замену $z_l \mapsto z_{l+1} = (1 + z_l^l)z_l$, последовательность $\{z_l\}_{l=1}^\infty$ сходится в K . Отсюда получаем результат леммы.

ЛЕММА 11. *В K существует такой параметр u , что $\alpha(u) = \xi u$, где $\xi^n = 1$, u для всех j $\delta'_{jn}(u) = u(\sum_k y_{jk}u^{nk}) \in uk((u^n))$, где $y_{jk} \in k$, а остальные δ'_k равны нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 10 считаем, что у нас уже выполняется соотношение из формулировки этой леммы. Будем делать последовательно замены типа $u \mapsto u' = u + b_{jn}z^{jn}$. При таких заменах, как легко видно из доказательства леммы 8, отображения δ_k , $n \nmid k$, не меняются. По лемме 8, (i) в результате такой замены $u'^{\delta'_{jn}} = u^{\delta'_{jn}} + b^\alpha - \partial/\partial u(u^\alpha)b$. В силу следствия 6 можно считать, что $\alpha(u) = \xi u$, где $\xi^n = 1$. Поэтому $u'^{\delta'_{jn}} = u^{\delta'_{jn}} + b^\alpha - \xi b$. Отсюда видно, что можно выбрать такой элемент b , чтобы выполнялось условие леммы.

Аналогично со случаем $\alpha = \text{Id}$, можно определить числа i_n, r_n и a_n . Определение a_n совпадает с прежним, а числа i_n и r_n определяются следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Положим

$$i_n = \nu((\phi_{z^n} - 1)(u)) \in \mathbb{N} \cup \infty,$$

$$r_n = \bar{\nu}[(\phi_{z^n} - 1)(u)z^{-i_n} \bmod \wp] \bmod i_n \in \mathbb{Z}/i_n\mathbb{Z},$$

$$a_n = \text{res}_u \left\{ \frac{u^{\delta_{2i_n} - \frac{i_n+1}{2}\delta_{i_n}^2}}{(u^{\delta_{i_n}})^2} du \right\} \in k,$$

где u, z – произвольные локальные параметры тела K , $\phi_z: K \rightarrow K$, $\phi_z(a) = \text{ad}(z)(a)$.

Из двух предыдущих лемм следует, что если z – параметр из леммы 10, то $i_n \in n\mathbb{N}$, а $r_n = 1 \bmod n$. Число i_n , как нетрудно заметить, первое ненулевое отображение δ_{i_n} в утверждении леммы 11. Так же, как предложение 7, доказывається следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. $i_n = i_n(u^{\delta_j}, j \notin n\mathbb{N})$, $r_n = r_n(i_n)$, $a_n = a_n(u^{\delta_{i_n+1}}, \dots, u^{\delta_{2i_n-1}})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть K – двумерное локальное тело, удовлетворяющее условиям, сформулированным в начале этого параграфа. Пусть $\text{char } k = 0$ и $\alpha^n = \text{Id}$ для некоторого n . Тогда тело K изоморфно телу вида $k((u))((z))$ с соотношением $zuz^{-1} = \xi u + u^{\delta'_{i_n}} z^{i_n} + u^{\delta'_{2i_n}} z^{2i_n}$, где $\xi^n = 1$, $i_n = i_n(0, \dots, 0)$, $\delta'_{i_n}(u) = cu^{r_n}$, $c \in k^*/(k^*)^e$, если $(r_n - 1, i) = e > 1$, и $c = 1$ иначе, $\delta'_{2i_n}(u) = (a_n(0, \dots, 0) + r_n(i_n + 1)/2)u^{-1}(\delta'_{i_n}(u))^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что выполняются условия леммы 11. Но тогда для доказательства нашего предложения в силу специального вида элементов $u^{\delta'_{j_n}}$ достаточно повторить дословно доказательство предложения 8.

Из всех этих результатов очевидным образом вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Любые два локальных тела K и K' нулевой характеристики, удовлетворяющие условиям, сформулированным в начале этого параграфа, изоморфны тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и наборы $(n, \xi, i_n, r_n, c, a_n)$ и $(n', \xi', i'_n, r'_n, c', a'_n)$ совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $n = 1$, а $i_n = \infty$, тело K является двумерным локальным полем вида $k((u))((z))$.

Сформулируем теперь в окончательном виде то, что мы получили.

ТЕОРЕМА 5. (I) Пусть K – двумерное локальное тело, у которого первое тело вычетов коммутативно. Такое тело расщепимо, если его канонический автоморфизм α удовлетворяет условию $\alpha^n \neq \text{Id}$ для всех n . Если это условие не выполняется, существуют примеры нерасщепимых тел.

(II) Пусть K, K' – двумерные локальные тела, для которых $\alpha^n \neq \text{Id}$, $\alpha'^n \neq \text{Id}$ для всех n , и тело вычетов $\bar{K}$ коммутативно. Тогда:

(а) тело K изоморфно телу вида $\bar{K}((z))$, $za = a^\alpha z$, $a \in \bar{K}$, где $\bar{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k ;

(б) K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и существует такой изоморфизм $f: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$, что $\alpha = f^{-1}\alpha'f$;

(с) если $\text{char } K = \text{char } k$, $\text{char } K' = \text{char } k'$ и поля k, k' алгебраически замкнуты характеристики нуль, то тело K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)) = (a'_1, i_{\alpha'}, y(\alpha'))$.

(III) Пусть K, K' – расщепимые двумерные локальные тела нулевой характеристики, $k \subset Z(K)$, $k' \subset Z(K')$ и $\alpha^n = \text{Id}$, $\alpha'^{n'} = \text{Id}$ для некоторых $n, n' \geq 1$. Тогда:

(а) тело K изоморфно телу вида $k((u))((z))$ с соотношением $zuz^{-1} = \xi u + u^{\delta'_{i_n}} z^{i_n} + u^{\delta'_{2i_n}} z^{2i_n}$, где $\xi^n = 1$, $i_n = i_n(0, \dots, 0)$, $\delta'_{i_n}(u) = cu^{r_n}$, $c \in k^*/(k^*)^e$, если $(r_n - 1, i) = e > 1$, и $c = 1$ иначе, $\delta'_{2i_n}(u) = (a_n(0, \dots, 0) + r_n(i_n + 1)/2)u^{-1}(\delta'_{i_n}(u))^2$ (i_n, r_n, a_n определены в предложении 9), при этом если $n = 1$, а $i_n = \infty$, то тело K коммутативно;

(б) K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и наборы $(n, \xi, i_n, r_n, c, a_n)$ и $(n', \xi', i'_n, r'_n, c', a'_n)$ совпадают.

§ 4. Классы сопряженных элементов

Пусть K – расщепимое локальное тело характеристики нуль, у которого первое тело вычетов коммутативно и последнее тело вычетов k лежит в центре. Все такие тела были классифицированы в предыдущем параграфе. В этом параграфе мы дадим необходимые и достаточные условия сопряженности двух элементов из K .

Фиксируем некоторое представление K в виде $k((u))((z))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $\alpha = \text{Id}$. *Вычетом $\text{res}_{i,r}$ на теле K будем называть отображение $\text{res}_{i,r}: k((u))((z)) \mapsto k$,*

$$\text{res}_{i,r}(X) = \text{res} \frac{x_i}{u^{\delta_i}} du,$$

где $X = \sum_l x_l z^l$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\alpha = \text{Id}$. Пусть $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1z + \dots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z + \dots$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует такой элемент $S \in K$, $\nu(S) = 0$, что $M = S^{-1}LS$;
- (ii) $a_{-1} = b_{-1}$, $a_0 = b_0, \dots, a_{i-2} = b_{i-2}$,

$$\text{res} \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{u^{\delta_i} a_{-1}} du \in \mathbb{Z} \quad u \quad u \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{u^{\delta_i} a_{-1}} \in k[[u]],$$

$\text{res}_{i,r}(M^j) = \text{res}_{i,r}(L_j^j)$ для всех $j \geq 1$, где $L_j = \tilde{S}_j^{-1} L_{j-1} \tilde{S}_j$, $L_0 := L$, $\tilde{S}_j = \tilde{S}_j(M, L_{j-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тело K имеет вид $k((u))((z))$ с соотношением $zu z^{-1} = u + u^{\delta_i} z^i + \dots$. Имеем

$$\begin{aligned} SM &= s_0 b_{-1} z^{-1} + (s_0 b_0 + s_1 b_{-1}) + \dots + \left(\sum_{j=-1}^{i-2} b_j s_{i-2-j} \right) z^{i-2} + \\ &+ \left(\sum_{j=-1}^{i-1} b_j s_{i-1-j} \right) z^{i-1} + \dots, \\ LS &= s_0 a_{-1} z^{-1} + (s_0 a_0 + s_1 a_{-1}) + \dots + \left(\sum_{j=-1}^{i-2} a_j s_{i-2-j} \right) z^{i-2} + \\ &+ \left(-a_{-1} s_0^{\delta_i} + \sum_{j=-1}^{i-1} a_j s_{i-1-j} \right) z^{i-1} + \dots. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что условие $a_{-1} = b_{-1}$, $a_0 = b_0, \dots, a_{i-2} = b_{i-2}$ является необходимым условием сопряженности M и L . Еще одно необходимое условие – уравнение на s_0 :

$$\frac{s_0^{\delta_i}}{s_0} = \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{a_{-1}}.$$

Поскольку δ_i – дифференцирование, получаем

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u} s_0}{s_0} = \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{u^{\delta_i} a_{-1}}.$$

Отсюда вытекает второе необходимое условие:

$$\text{res} \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{u^{\delta_i} a_{-1}} du \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad u \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{u^{\delta_i} a_{-1}} \in k[[u]].$$

Обратно, если эти два условия выполняются, то существует такой элемент $s_0 \in k((u))$, что у элементов $L_1 = s_0^{-1} L s_0$ и M первые $i+1$ слагаемых совпадают. Ясно, что L и M сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены L_1 и M , сопрягающий элемент $\tilde{S}$ имеет вид $1 + \dots$; $\tilde{S}$ представляется в виде $(1 + s_1 z)(1 + s_2 z^2) \dots$. Заметим, что для любого элемента $x_{-1} z^{-1} + x_0 + x_1 z + \dots \in K$

$$\begin{aligned} & (1 + s_j z^j)^{-1} (x_{-1} z^{-1} + x_0 + x_1 z + \dots) (1 + s_j z^j) \\ &= x_{-1} z^{-1} + x_0 + x_1 z + \dots + x_{i+j-2} z^{i+j-2} \\ &+ (x_{i+j-1} + j x_{-1}^{\delta_i} s_j + x_{-1} s_j^{\delta_i}) z^{i+j-1} + \dots, \end{aligned}$$

так как из доказательства леммы 3, (ii) имеем

$$\begin{aligned} & (1 + s_j z^j)^{-1} (x_{-1} + x_0 z + x_1 z^2 + \dots) (1 + s_j z^j) \\ &= x_{-1} + x_0 z + \dots + x_{i+j-2} z^{i+j-1} + (x_{i+j-1} + j x_{-1}^{\delta_i} s_j) z^{i+j} + \dots, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} & (1 + s_j z^j)^{-1} z^{-1} (1 + s_j z^j) = (1 + s_j z^j)^{-1} (z^{-1} + s_j z^{j-1} - s_j^{\delta_i} z^{i+j-1} + \dots) \\ &= z^{-1} - s_j^{\delta_i} z^{i+j-1} + \dots. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что если $M = \tilde{S}^{-1} L_1 \tilde{S}$, то

$$(s_1 a_{-1})^{\delta_i} = b_i - a_i,$$

где a_i – коэффициент элемента L_1 . Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\text{res} \frac{b_i - a_i}{u^{\delta_i}} du = 0,$$

т.е. $\text{res}_{i,r}(M) = \text{res}_{i,r}(L_1)$.

Обратно, если вычеты равны, то существует такой элемент $s_1 \in k((u))$, что у элементов $L_2 = (1 + s_1 z)^{-1} L_1 (1 + s_1 z)$ и M первые $i+2$ слагаемых совпадают.

Продолжая рассуждение по индукции, на k -м шаге имеем: если $M = \bar{S}^{-1} L_k \bar{S}$, то

$$k s_k a_{-1}^{\delta_i} + a_{-1} s_k^{\delta_i} = b_{i+k-1} - a_{i+k-1}.$$

Решение этого уравнения ищется в виде $s_k = a_{-1}^{-k}s$. Подставляя это выражение в уравнение, получаем

$$s' = a_{-1}^{k-1} \frac{b_{i+k-1} - a_{i+k-1}}{u^{\delta_i}}.$$

Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{res} \frac{a_{-1}^{k-1} a_{i+k-1}}{u^{\delta_i}} = \operatorname{res} \frac{u^{-r} a_{-1}^{k-1} b_{i+k-1}}{u^{\delta_i}}.$$

С другой стороны, коэффициент при z^i у M^k имеет вид

$$ka_{-1}^{k-1} b_{i+k-1} + f_M,$$

где f_M — полином от $b_{i+k-2}, \dots, b_{-1}$ и значений δ_j от них. Аналогично, у L_k^k соответствующий коэффициент имеет вид

$$ka_{-1}^{k-1} a_{i+k-1} + f_{L_k},$$

причем $f_{L_k} = f_M$, так как $a_j = b_j$ для $j \leq i + k - 2$. Отсюда получаем, что $\operatorname{res}_{i,r} L_k^k = \operatorname{res}_{i,r} M^k$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{res} \frac{a_{-1}^{k-1} a_{i+k-1}}{u^{\delta_i}} = \operatorname{res} \frac{a_{-1}^{k-1} b_{i+k-1}}{u^{\delta_i}}.$$

Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть $\alpha \neq \operatorname{Id}$. Будем говорить, что *вычет* $\operatorname{res}_\alpha$ *элемента* $X = \sum_l x_l z^l$ *равен нулю*, если

$$x_0 \in \operatorname{im}(\alpha - \operatorname{Id}).$$

Будем говорить, что *два элемента имеют одинаковый вычет*, если вычет их разности равен нулю.

Положим $\varphi: k((u)) \mapsto k((u))$, $\varphi(x) = x^{\alpha^{-1}}/x$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $\alpha \neq \operatorname{Id}$. Пусть $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1z + \dots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z + \dots$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует такой элемент $S \in K$, $\nu(S) = 0$, что $M = S^{-1}LS$;
- (ii) $b_{-1}/a_{-1} \in \operatorname{im} \varphi$, $\operatorname{res}_\alpha(M^j) = \operatorname{res}_\alpha(L^j)$ для всех $j \geq 1$, где $L_j = \tilde{S}_j^{-1}L_{j-1}\tilde{S}_j$, $L_0 := L$, $\tilde{S}_j = \tilde{S}_j(M, L_{j-1})$.

Доказательство проводится так же, как и в предыдущем предложении. Имеем

$$\begin{aligned} SM &= s_0 b_{-1} z^{-1} + (s_0 b_0 + s_1 b_{-1}) + \dots, \\ LS &= a_{-1} s_0^{\alpha^{-1}} z^{-1} + (a_0 s_0 + a_{-1} s_1^{\alpha^{-1}}) + \dots. \end{aligned}$$

Отсюда $s_0 b_{-1} = a_{-1} s_0^{\alpha^{-1}}$, т.е. $b_{-1}/a_{-1} \in \text{im } \varphi$. Если это условие выполняется, то полагаем $L_1 = s_0^{-1} L s_0$. У L_1 и M первые коэффициенты совпадают.

Теперь заметим, что для любого элемента $x_{-1} z^{-1} + x_0 + x_1 z + \dots \in K$

$$\begin{aligned} (1 + s_j)^{-1} (x_{-1} z^{-1} + x_0 + x_1 z + \dots) (1 + s_j z^j) \\ = x_{-1} z^{-1} + \dots + x_{j-2} z^{j-2} + (x_{j-1} + s_j x_{-1}^{\alpha^j} - x_{-1} s_j^{\alpha^{-1}}) z^{j-1} + \dots. \end{aligned}$$

Это легко следует из выкладок, проведенных при доказательстве леммы 3, (i).

Проводя те же рассуждения, что были проведены в предыдущем предложении, на первом шаге имеем необходимое условие сопряженности:

$$s_1 a_{-1}^{\alpha} - a_{-1} s_1^{\alpha^{-1}} = \alpha(s_1^{\alpha^{-1}} a_{-1}) - (s_1^{\alpha^{-1}} a_{-1}) = b_0 - a_0.$$

Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $(b_0 - a_0) \in \text{im}(\alpha - \text{Id})$. Но это условие равносильно условию $\text{res}_\alpha M = \text{res}_\alpha L_1$.

На j -м шаге имеем условие

$$s_j a_{-1}^{\alpha^j} - a_{-1} s_j^{\alpha^{-1}} = a_{j-1} - b_{j-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (a_{-1}^{\alpha} a_{-1}^{\alpha^2} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) (a_{j-1} - b_{j-1}) &= (a_{-1}^{\alpha} a_{-1}^{\alpha^2} \dots a_{-1}^{\alpha^j}) s_j - (a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) s_j^{\alpha^{-1}} \\ &= \alpha((a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) s_j^{\alpha^{-1}}) - (a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) s_j^{\alpha^{-1}}. \end{aligned}$$

Это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) \times (a_{j-1} - b_{j-1}) \in \text{im}(\alpha - \text{Id})$. Но это равносильно условию, что $\text{res}_\alpha(M^j) = \text{res}_\alpha(L_j^j)$, так как у L_j и M все коэффициенты вплоть до $(j-1)$ -х совпадают, а коэффициент при нулевой степени z у M^j равен

$$a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} b_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} + b_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} + \text{сумма мономов с индексами } < j-1.$$

Соответственно у L_j^j этот коэффициент равен

$$a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} a_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} + a_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} + \text{сумма мономов с индексами } < j-1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} b_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} - a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} a_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} + b_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} \\ - a_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) = ([a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} b_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} - a_{-1} + \dots + a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} a_{j-1}^{\alpha^{-j+1}}] \\ - \alpha[\dots] + \alpha[\dots] - \alpha^2[\dots] + \alpha^2[\dots] + \dots + \alpha^{j-1}[\dots] \\ + b_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} - a_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) = (2[a_{-1} \dots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} (a_{j-1} - b_{j-1})]). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В статье [6] было показано, что для вычета $\text{res}_{1,0}$ в теле псевдодифференциальных операторов выполняется свойство $\text{res}_{1,0}[X, Y] = 0$, где $[X, Y]$ – коммутатор двух псевдодифференциальных операторов. Это свойство справедливо также для следующих тел.

ЛЕММА 12. Пусть K – тело с условием $\alpha^n \neq \text{Id}$ или $\alpha^n = \text{Id}$, $i_n = \infty$. Пусть $X, Y \in K$. Тогда $\text{res}_\alpha[X, Y] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно доказать для $X = u^l z^k$, $Y = u^m z^q$. Если $k + q \neq 0$, то $\text{res}_\alpha(XY) = \text{res}_\alpha(YX) = 0$. В случае $k + q = 0$ имеем

$$XY - YX = u^l(u^m)^\alpha{}^k - u^m(u^l)^\alpha{}^{-k} = \alpha^k(u^m(u^l)^\alpha{}^{-k}) - u^m(u^l)^\alpha{}^{-k} \in \text{im}(\alpha - \text{Id}).$$

В этом случае наши предложения могут быть переформулированы следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть K – тело, у которого $\alpha = \text{Id}$, $i = 1$, $r = 0$, $a = 0$ (в этом случае K – кольцо псевдодифференциальных операторов $k((u))((\partial^{-1}))$). Пусть $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1z + \dots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z + \dots$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует такой элемент $S \in K$, $\nu(S) = 0$, что $M = S^{-1}LS$;
- (ii) $a_{-1} = b_{-1}$,

$$\text{res} \frac{a_0 - b_0}{a_{-1}} du \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \frac{u(a_0 - b_0)}{a_{-1}} \in k[[u]],$$

$$\text{res}_{1,0}(M^j) = \text{res}_{1,0}(L^j) \quad \text{для всех } j \geq 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $\alpha^n \neq \text{Id}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1z + \dots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z + \dots$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует такой элемент $S \in K$, $\nu(S) = 0$, что $M = S^{-1}LS$;
- (ii) $b_{-1}/a_{-1} \in \text{im } \varphi$, $\text{res}_\alpha(M^j) = \text{res}_\alpha(L^j)$ для всех $j \geq 1$.

В остальных случаях свойство $\text{res}_{\dots}([X, Y]) = 0$ не выполняется, как показывают следующие примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть K – тело с $\alpha = 1$, $a(0, \dots, 0) \neq 0$, $r \neq 1$. Будем считать, что K имеет вид из теоремы 5. Пусть $M = z^{-1}$, $L = z^{-1} + z^i \in k((z)) \subset K$. Если бы выполнялось свойство $\text{res}_{i,r}([X, Y]) = 0$, то M и L были бы сопряжены по предложению 11. Пусть $S = 1 + s_1z + \dots$. Имеем

$$\begin{aligned} SM &= z^{-1} + s_1 + s_2z + \dots = LS = (z^{-1} + z^i)(1 + s_1z + \dots) \\ &= (z^{-1} + s_1 + s_2z + \dots) + (z^i - s_1^{\delta_i} z^i) + (s_1 z^{i+1} - s_2^{\delta_i} z^{i+1}) + \dots \\ &\quad \dots + (s_i z^{2i} + s_1^{\delta_i^2 - \delta_{2i}} z^{2i} - s_{i+1}^{\delta_i} z^{2i}) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда имеем $1 - s_1^{\delta_i} = 0$. Так как $r \neq 1$, это уравнение разрешимо и $s_1 = (1-r)^{-1} c^{-1} u^{1-r}$. Решая следующие уравнения, будем получать значения $s_2, s_3, \dots$

При этом все эти элементы будут состоять из одного монома, нормирование которого не равно $r - 1$.

Имеем далее $s_i z^{2i} + s_1^{\delta_i^2 - \delta_{2i}} z^{2i} - s_{i+1}^{\delta_i} z^{2i} = 0$. По теореме 5, если $a(0, \dots, 0) \neq 0$, в $s_1^{\delta_i^2 - \delta_{2i}}$ будет присутствовать моном, нормирование которого равно $r - 1$. Но тогда уравнение неразрешимо относительно s_{i+1} , т.е. M и L не сопряжены. Противоречие.

ПРИМЕР 2. Пусть K – тело с $\alpha = 1$, $a(0, \dots, 0) = 0$. В этом случае $i > 1$, так как $r = 0$ при $i = 1$, и мы получаем кольцо псевдодифференциальных операторов. Будем считать, что K имеет вид из теоремы 5. Тогда $zu z^{-1} = u + cu^r z^i + r(i+1)/2c^2 u^{2r-1} z^{2i}$. Отсюда получаем, что $\delta_{2i} = \delta_i^2$. Тогда для любого $x \in k((u))$ имеем

$$z^{-1}xz = x - x^{\delta_i} z^i + \text{чл. с } z^{>2i}.$$

Положим $X = u^{-r-1} z^{-i}$, $Y = u^2$. Тогда

$$XY = u^{1-r} z^{-i} + \dots + Cu^{r-1} z^i + \dots, \quad C \in \mathbb{Q}, \quad C \neq 0.$$

Отсюда $\text{res}_{i,r}([X, Y]) \neq 0$.

Пример с $a(0, \dots, 0) \neq 0$, $r = 1$ строится аналогично.

ПРИМЕР 3. Пусть K – тело с $\alpha^n = 1$, $i_n \neq \infty$. Положим $X = u^{-r_n} z^{-i_n}$, $Y = u$. Тогда

$$XY = \xi^{-i_n} u^{1-r_n} z^{-i_n} + C + \dots,$$

где $C = -i_n \xi^{-i_n+1} c \neq 0$. Отсюда $\text{res}_\alpha([X, Y]) \neq 0$.

Пусть K – кольцо псевдодифференциальных операторов $k((u))((\partial_u^{-1}))$. Как было показано, это тело является единственным, для которого выполняется свойство $\text{res}_{1,0}([X, Y]) = 0$. Выведем теперь для этого тела критерий сопряженности произвольных двух элементов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – некоторое число. Рассмотрим тело $K' = k((t))((\partial_t^{-1}))$, где $t^n = u$. Тогда $\partial_t = nt^{n-1} \partial_u$ и $K \subset K'$.

ЛЕММА 13. Пусть $L = l_{-m} \partial_t^m + \dots + l_0 + l_1 \partial_t^{-1} + \dots \in K'$ – произвольный элемент из K' ; L принадлежит K тогда и только тогда, когда $l_i \in t^i k((t^n))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L \in K$. Тогда $L = b_{-m} \partial_u^m + \dots$; $b_i \in k((u)) = k((t^n))$. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Имеем $\partial_u^j = (n^{-1} t^{1-n} \partial_t)^j$, $\partial_u^{-j} = (\partial_t^{-1} n t^{n-1})^j$.

Сначала докажем, что лемма выполняется для коэффициентов l_{-i} ($i > 0$). Проведем рассуждение по индукции. Для $i = 1$ имеем $\partial_u^i = n^{-1} t^{1-n} \partial_t$ и $b_{-1} \partial_u = l_{-1} n^{-1} t^{1-n} \partial_t$. Утверждение леммы выполнено, поскольку $t^{1-n} \in tk((t^n))$.

Для произвольного i имеем

$$\begin{aligned} \partial_u^i &= \frac{\partial_t}{\partial_t t} (n^{-1} t^{1-n}) (n^{-1} t^{1-n} \partial_t)^{i-1} + (n^{-1} t^{1-n})^2 \partial_t^2 (n^{-1} t^{1-n} \partial_t)^{i-2} \\ &= (1-n) (n^{-1} t^{1-n}) (n^{-1} t^{1-n} \partial_t)^{i-1} + (n^{-1} t^{1-n})^2 \partial_t^2 (n^{-1} t^{1-n} \partial_t)^{i-2}. \end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты в записи L в K принадлежат $k((t^n))$, достаточно показать, что лемма выполняется для ∂_u^i .

По индукции в $(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-1}$ все коэффициенты удовлетворяют условию леммы. То же самое имеем для $(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-2}$. Пусть $(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-2} = \sum_{k=0}^{i-2} \tilde{l}_k \partial_t^k$ (заметим, что в разложении ∂_u^i , $i > 0$, нет отрицательных степеней ∂_t и минимальная степень вхождения ∂_t равна 1). Тогда имеем

$$(n^{-1}t^{1-n})^2 \partial_t^2 \left(\sum_{k=0}^{i-2} \tilde{l}_k \partial_t^k \right) = (n^{-1}t^{1-n})^2 \left(\sum_{k=0}^{i-2} \tilde{l}_k \partial_t^{k+2} + \sum_{k=0}^{i-2} \tilde{l}'_k \partial_t^{k+1} + \sum_{k=0}^{i-2} \tilde{l}''_k \partial_t^k \right).$$

Отсюда $(n^{-1}t^{1-n})^2 \tilde{l}_k \in t^{k+2}k((t^n))$, $(n^{-1}t^{1-n})^2 \tilde{l}'_k \in t^{k+1}k((t^n))$, $(n^{-1}t^{1-n})^2 \tilde{l}''_k \in t^k k((t^n))$.

Для $i = 0$ имеем $l_0 = b_0 \in k((t^n))$.

Покажем теперь, что утверждение леммы справедливо для ∂^{-i} , $i > 0$. Для $i = 1$ имеем

$$\partial_u^{-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} (t^{n-1})^{(k)} \partial_t^{-1-k} C_k^{-1}.$$

Пусть доказано, что $\partial_u^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{l}_j \partial_t^{-k-j}$, $\tilde{l}_j \in t^{-k-j}k((t^n))$ для $k < i$:

$$\begin{aligned} \partial_u^{-i} &= (\partial_t^{-1} n t^{n-1})^i = \left(n \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{-1} (t^{n-1})^{(k)} \partial_t^{-1-k} \right) (\partial_t^{-1} n t^{n-1})^{i-1} = \\ &= \left(n \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{-1} (t^{n-1})^{(k)} \partial_t^{-1-k} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{l}_j \partial_t^{-i+1-j} \right). \end{aligned}$$

Для любого $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\partial_t^{-1-k} \tilde{l}_j = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{-1-k} \tilde{l}_j^{(p)} \partial_t^{-1-k-p}.$$

Отсюда получаем для фиксированных k и j такие условия на коэффициенты: при $\partial_t^{-1-k-p-i+1-j}$, $p \geq 0$, коэффициент принадлежит $t^{-1-k-i+1-j-p}k((t^n))$.

Обратно, пусть выполняются условия леммы на коэффициенты. Из предыдущих рассуждений мы получили, что $\partial_u^i = \sum_{j \geq 0} c_j \partial_t^{i-j}$ и $c_j \in t^{i-j}k((t^n))$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим старший моном в записи L :

$$l_{-m} \partial_t^m = l_{-m} c_0^{-1} \partial_u^m - l_{-m} \left(\sum_{j \geq 1} c_j c_0^{-1} \partial_t^{m-j} \right).$$

Имеем $l_{-m} c_0^{-1} \in k((t^n))$, $l_{-m} c_j c_0^{-1} \in t^{m-j}k((t^n))$. Отсюда $L = l_{-m} c_0^{-1} \partial_u^m + L_1$, где $\nu(L_1) > \nu(L)$ и коэффициенты L_1 удовлетворяют условию леммы. По индукции получаем искомый результат.

ЛЕММА 14. Пусть $L, M \in K \subset K'$ и $\nu(L) = \nu(M) = -n$. Пусть $M = SLS^{-1}$, где $S \in K'$. Тогда $S \in K$ в том и только том случае, когда

$$\operatorname{res} \frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} = 0 \quad \text{и} \quad t \frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} \in k[[t]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается теми же рассуждениями, которые были проведены в предложении 11.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $L, M \in K = k((u))((\partial_u^{-1}))$, $\nu(L) = \nu(M) < 0$, $M = m_{\nu(M)} \partial_t^{-\nu(M)} + \dots$, $L = l_{\nu(L)} \partial_t^{-\nu(L)} + \dots$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует такой элемент $S \in K$, $\nu(S) = 0$, что $M = S^{-1}LS$;
- (ii) $\nu(L) = \nu(M)$, $m_{\nu(M)} = l_{\nu(L)}$,

$$\operatorname{res} \frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} = 0 \quad \text{и} \quad t \frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} \in k[[t]],$$

$\operatorname{res}(M^{j/(-\nu(M))}) = \operatorname{res}(L^{j/(-\nu(L))})$ для всех $j \geq 1$ в K' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из следствия 7, леммы 13, леммы 14 и того факта, что в K' корень n -й степени из L и M извлекается единственным образом.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $L, M \in K = k((u))((\partial_u^{-1}))$ и $\nu(L) = \nu(M) = 0$. Тогда:

- (i) если $l_0 = m_0 \neq \text{const}$ и $l_1 = m_1$, то $M = SLS^{-1}$;
- (ii) если $l_0 = m_0 = \text{const}$, то $M = SLS^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(M - m_0)^{-1} = S(L - l_0)^{-1}S^{-1}$ (см. теорему 6).

Доказательство очевидно.

Список литературы

1. Shilling O. F. G. The theory of Valuations. Providence: AMS, 1956.
2. Serre J. P. Corps locaux. Paris: Hermann, 1962.
3. Fimmel T., Parshin A. N. Introduction to the Higher Adelic Theory. Preprint, 1996.
4. Паршин А. Н. К арифметике двумерных схем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 4. С. 736–773.
5. Паршин А. Н. Когомологии Галуа и группы Брауэра локальных полей // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1990. Т. 183. С. 159–168.
6. Паршин А. Н. О кольце формальных псевдодифференциальных операторов // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1999. Т. 224. С. 291–305.
7. Cohn P. M. Skew-fields. Cambridge University Press, 1997.
8. Yekutieli A. An explicit construction of the Grothendieck residue complex // Asterisque. 1992. V. 208.

Поступило в редакцию
28.VI.1999