Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Кордонский, О бирациональной классификации действий алгебраических групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 1, 61–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:12:05

УДК 512.745

В. Э. Кордонский

О бирациональной классификации действий алгебраических групп

В настоящей работе показывается, что в ряде случаев бирациональная классификация некоторых действий произвольной алгебраической группы может быть сведена к бирациональной классификации локально свободных действий редуктивных групп. Доказывается существование обычных и относительных сечений для некоторых действий.

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена бирациональной классификации действий линейных алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль и некоторым смежным вопросам бирациональной теории инвариантов. Все необходимые факты и определения можно найти в [2], [3], [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 1) Назовем действия $G : X_1$ и $G : X_2$ *бirationально изоморфными*, если существует G -эквивариантное бирациональное отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$.

2) Действие группы G на многообразии X называется *действием со стабилизатором общего положения*, если существует такое плотное открытое подмногообразие $W \subset X$, что для всякого $x \in W$ стабилизатор G_x сопряжен некоторой фиксированной подгруппе $H \subset G$. При этом H называется *стабилизатором общего положения действия* $G : X$.

Везде в данной работе, кроме § 3 и п. 4.1, мы ограничимся рассмотрением рациональных действий алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X , для которых группа G действует транзитивно на множестве неприводимых компонент X . В этом случае определено поле инвариантов $K = k(X)^G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Произвольное многообразие Y , поле рациональных функций которого равно K , называется *рациональным фактором* действия G на X , а естественное отображение $\pi : X \rightarrow Y$ — *отображением факторизации*.

Подмножество $W \subset X$ называется *густым*, если W содержит плотное открытое по Зарисскому подмножество многообразия X .

Действие $G : X$ называется *локально свободным*, если существует такое густое подмногообразие $W \subset X$, что стабилизатор G_w любой точки $w \in W$ тривиален.

Одними из основных понятий и объектов изучения бирациональной теории инвариантов являются понятия квазисечения и сечения действия.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов INTAS-OPEN-97-1570 и CRDF RM1-206.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Неприводимое подмногообразие $S \subset X$ называется *сечением* (соответственно *квазисечением*) действия α , если существует такое инвариантное густое подмножество $X_0 \subset X$, что любая орбита индуцированного действия $G : X_0$ пересекает S ровно в одной точке (соответственно по непустому конечному множеству).

Сечение существует далеко не всегда. В то же время любое действие допускает квазисечение (см., например, [3]).

В данной работе большую роль играют различные обобщения (предложение 4 и теоремы 3 и 12) известной теоремы Розенлихта.

ТЕОРЕМА РОЗЕНЛИХТА [14]. Пусть V – произвольная связная разрешимая группа. Тогда любое действие группы V допускает сечение.

В дальнейшем теорема Розенлихта будет использоваться лишь для унитарных групп.

Известно, что для локально свободных действий их бирациональная классификация сводится к вычислению некоторых когомологий Галуа (см. [3]). Аналогичный результат может быть получен для действий с произвольным стабилизатором общего положения (см. [3]).

В данной работе рассматривается бирациональная классификация произвольных действий и показывается, что ее также можно свести к вычислению когомологий Галуа, а точнее, когомологий Галуа некоторых редуктивных групп.

В § 2 мы покажем, как каждому действию α со стабилизатором общего положения можно канонически сопоставить локально свободное действие $\Psi(\alpha)$ некоторой редуктивной группы и тем же полем инвариантов. При этом действия α и β с одинаковыми стабилизаторами общего положения бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда действия $\Psi(\alpha)$ и $\Psi(\beta)$ бирационально изоморфны. Следовательно, можно рассмотреть отображение Ψ на классах бирационально изоморфных действий. Мы покажем (теорема 1), что Ψ является биекцией.

Существование такого отображения Ψ следует из [3] и [17] (см. теорему 5 и п. 4.1 настоящей работы).

В § 3 приводятся необходимые для дальнейших исследований основные результаты теории однородных пространств над алгебраически незамкнутыми полями.

В § 4 строится обобщение отображения Ψ на случай произвольных действий (теорема 7). Это отображение в общем случае зависит от выбора “начального” действия α_0 . Построение этого отображения Ψ есть не что иное, как объединение результатов [3], [17], [7] (см. § 3 и п. 4.1 настоящей работы). В частном случае, когда стабилизатор квазисечения определен над полем инвариантов, отображение Ψ не зависит от начального действия (теорема 5).

Стабилизатор сечения определен над полем инвариантов, поэтому в связи с теоремой 5 для бирациональной теории действий представляют интерес результаты о существовании сечений. Некоторые из них приводятся в п. 2.4. Эти теоремы могут быть получены из результатов теории однородных пространств над алгебраически незамкнутыми полями при помощи результатов п. 4.1. Доказательству теоремы о существовании сечения для действия специальных групп с унитарными стабилизаторами (теорема 12) посвящается § 6.

В § 7 формулируется и доказывается одно достаточное условие существования относительного сечения (определение см. в § 3). При этом доказательство существенно опирается на результаты § 2, 6.

§ 2. Случай действия, имеющего стабилизатор общего положения

2.1. Относительное сечение. Пусть задано действие группы G на многообразии X и $P \subset G$ – некоторая подгруппа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [4]. Несмешанное подмногообразие $S \subset X$ называется *относительным сечением* или *P -сечением*, если выполнены следующие три условия:

- 1) $\overline{GS} = X$;
- 2) $PS \subset S$;
- 3) существует такое густое подмногообразие $S_0 \subset S$, что $gS_0 \cap S_0 \neq \emptyset$ влечет $g \in P$.

Как легко видеть, поля инвариантов действий $G : X$ и $P : S$ естественно изоморфны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [3] и [12]). Многообразие X с действием на нем группы G однозначно с точностью до бирационального изоморфизма восстанавливается по P -сечению S с действием на нем подгруппы $P \subset G$.

Пусть теперь некоторая подгруппа $P \subset G$ действует на некотором многообразии S . Положим X равным рациональному фактору действия $P : G \times S$, задаваемого формулой

$$p(g, s) = (gp, p^{-1}s).$$

Рассмотрим действие $G : X$, индуцированное действием $G : G \times S$ на первом множителе левыми умножениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [12]). Построенное выше действие $G : X$ допускает такое P -сечение S' , что действия $P : S$ и $P : S'$ изоморфны.

2.2. Сведение к случаю локально свободного действия. Пусть α – действие группы G на многообразии X со стабилизатором общего положения, равным H . Рассмотрим объединение X_m^H неприводимых компонент максимальной размерности многообразия X^H , состоящего из неподвижных относительно H точек X . Легко видеть, что X_m^H является $N_G(H)$ -сечением.

Более того, $N_G(H)$ на X_m^H действует с ядром H , т. е. действие группы $N_G(H)/H$ на X_m^H является локально свободным действием.

Обозначим последнее действие через $\psi_1(\alpha)$. Отображение ψ_1 сопоставляет действиям группы G со стабилизатором общего положения H локально свободные действия группы $N_G(H)/H$.

Легко видеть, что из предложений 1 и 2 следует

ЛЕММА 1. ψ_1 – биекция.

2.3. Существование инвариантного сечения. Рассмотрим произвольное разложение в полупрямое произведение $G = M \ltimes V$ группы G (группа V является нормальной подгруппой группы G).

Пусть α – действие группы G на многообразии X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Действие $V : X$ допускает M -инвариантное квазисечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – квазисечение действия $G : X$. Рассмотрим множество

$$S' = \{x \in X \mid x = m \cdot s, m \in M, s \in S\} \subset X.$$

Его плотное подмножество является M -инвариантным квазисечением действия $V : X$.

Пусть Y – неприводимое многообразие. Рассмотрим многообразие $Y \times k^m$, где естественно определена сумма точек (y, v_1) и (y, v_2) для любых $y \in Y$ и $v_1, v_2 \in k^m$. Пусть замкнутое подмногообразие $S \subset Y \times k^m$ такое, что ограничение на S проекции $Y \times k^m \rightarrow Y$ задает неразветвленное n -листное накрытие Y . Определим множество $S' \subset Y \times k^m$ как множество точек вида

$$\left(y, \frac{1}{n} \sum_{\{v \mid (y, v) \in S\}} v\right).$$

ЛЕММА 2. Можно выбрать густое подмногообразие $Y_0 \subset Y$ таким образом, что множество $S' \cap (Y_0 \times k^m)$ будет являться подмногообразием многообразия $Y_0 \times k^m$ и сечением векторного расслоения $Y_0 \times k^m \rightarrow Y_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторое координатное разложение $k^m = \bigoplus_{i=1}^m k_i$ так, чтобы образы S при проекциях $\pi_i : Y \times k^m \rightarrow Y \times k_i$ являлись n -листными накрытиями многообразия Y . Так как $\text{codim}_{Y \times k_i} \pi_i(S) = 1$, то для некоторого непустого открытого аффинного подмногообразия $Y_i \subset Y$ выполняются следующие свойства:

- 1) подмногообразие $S_i = (\pi_i(S) \cap Y_i \times k_i) \subset (Y_i \times k_i)$ является неразветвленным накрытием многообразия Y_i ;
- 2) многообразие S_i задается одним уравнением

$$x_i^n + a_{i,n-1}x_i^{n-1} + \dots + a_{i,1}x_i + a_{i,0} = 0,$$

где $a_{i,j}$ – регулярные функции на Y_i и x_i – координатная функция на k_i .

Покажем, как можно добиться выполнения условия 2). Пусть мы выбрали многообразии Y_i , удовлетворяющее условию 1). Рассмотрим идеал $I = I(\pi_i(S)) \subset k(Y_i)[x_i]$, состоящий из многочленов, обнуляющихся на $\pi_i(S)$. Это главный идеал. Обозначим его образующую через f . Переходя к непустому открытому подмножеству Y_i , можно считать, что $f \in k[Y_i][x_i]$ и коэффициент многочлена f при старшем члене по переменной x_i равен 1. Так как поле k имеет нулевую характеристику и идеал I радикален, то многочлен f и его производная f' по переменной x_i взаимно просты в $k(Y_i)[x_i]$. Следовательно, существуют g, h в кольце $k(Y_i)[x_i]$ такие, что $gf + hf' = 1$. Переходя к непустому открытому подмножеству Y_i , можно считать, что $g, h \in k[Y_i][x_i]$. Для произвольной точки $y \in Y_i$ многочлен $f(y) \in k[x_i]$ имеет ровно n корней. С другой стороны, $f(y)$ не имеет кратных корней, так как $g(y)f(y) + h(y)f'(y) = 1 \in k[x_i]$ и, следовательно, многочлен $f(y)$ взаимно прост со своей производной. Значит, степень $f(y)$ равна n . Следовательно, степень многочлена f по переменной x_i также равна n .

Положим теперь $Y_0 = \bigcap_i Y_i$. По теореме Виета множество $(S' \cap (Y_0 \times k^m)) \subset Y_0 \times k^m$ задается уравнениями

$$x_i = -\frac{1}{n} a_{i,n-1}.$$

Мы показали, что $S' \cap (Y_0 \times k^m)$ – замкнутое подмногообразие многообразия $Y_0 \times k^m$. То, что многообразие $S' \cap (Y_0 \times k^m)$ является сечением расслоения $Y_0 \times k^m \rightarrow Y_0$, следует из построения множества S' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если V – унитарная группа, то действие $V : X$ допускает M -инвариантное сечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале V – векторная группа.

По теореме Розенлихта действие $V : X$ допускает сечение и, следовательно, определено V -эквивариантное отображение $f : Y \times V \rightarrow X$, где Y – рациональный фактор действия $V : X$.

Пусть размерность пространства V равна n , а размерность стабилизаторов точек из некоторого плотного открытого подмножества многообразия Y равна $n - m$. Выберем в V подпространство U размерности m , трансверсальное к стабилизаторам точек из густого подмножества многообразия Y . Так как свойство иметь ненулевое пересечение с некоторым подпространством V выделяет замкнутое подмногообразие в грассманиане $\text{Gr}(V, n - m)$, то в качестве пространства U можно взять любое m -мерное пространство, трансверсальное к произвольному стабилизатору точки из X . По построению отображение $f|_{Y \times U} : Y \times U \rightarrow X$ является бирациональным изоморфизмом.

Таким образом, действие $V : X$ бирационально изоморфно действию $V : Y \times k^m$ для Y , равного X/V , и некоторого натурального m , где действие $V : Y$ тривиально, а действие $V : \{y\} \times k^m$ зависит от точки $y \in Y$.

По предложению 3 выберем M -инвариантное квазисечение $S \subset X$ для действия $V : Y \times k^m$. Переходя к замыканию в $Y \times k^m$, можно считать, что S замкнуто в $Y \times k^m$, а переходя к непустому открытому подмножеству в Y , можно считать, что отображение факторизации $Y \times k^m \rightarrow Y$ при ограничении на S является неразветвленным накрытием.

Вновь переходя к непустому открытому подмногообразию Y , получаем, что по лемме 2 определено подмногообразие S' , которое является сечением действия $V : Y \times k^m$.

Для доказательства предложения для векторной группы V остается проверить M -инвариантность сечения S' .

Пусть s' – произвольная точка из S' . Тогда $s' = v_i s_i$, где $v_i \in V$ и $s_i \in S$ – точки, лежащие на той же V -орбите, что и s' . Для любого элемента $m \in M$ получаем

$$ms' = mv_i s_i = (mv_i m^{-1})ms_i.$$

Точки ms_i принадлежат многообразию S в силу его M -инвариантности.

Так как группа V абелева, то по построению многообразия S' имеем

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0 \in V.$$

Для доказательства того, что $ms' \in S'$, достаточно проверить, что

$$\sum_{i=1}^n (mv_i m^{-1}) = 0 \in V,$$

но это равенство имеет место в силу предыдущего равенства и линейности действия подгруппы Леви на унитарном радикале.

В случае абелевого унитарного радикала предложение доказано.

Доказательство для произвольной унитарной группы V получается индукцией по размерности V . База индукции уже доказана. Рассмотрим центр Z группы V . По предположению индукции действие группы $M \ltimes (V/Z) = (M \ltimes V)/Z$ на многообразии X/Z допускает M -инвариантное V/Z -сечение S . Рассмотрим S' – полный прообраз S при отображении $X \rightarrow X/Z$. Действие $M \ltimes Z : S'$ по предположению индукции допускает M -инвариантное Z -сечение S'' . Подмногообразие $S'' \subset X$ является M -инвариантным V -сечением, так как ZS'' густо в S' , а VS' густо в X .

2.4. Сведение к случаю редуктивной группы. Рассмотрим разложение Леви $G = M \ltimes V$ группы G .

Пусть задано некоторое локально свободное действие $M : Y$. Определим локально свободное действие $G : V \times Y$ по формуле

$$g \cdot (v, y) = (muvt^{-1}, ty) = (gvt^{-1}, ty),$$

где $ti = g \in G, t \in M, u \in V$ и $(v, y) \in V \times Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Любое локально свободное действие группы $G : X$ может быть построено описанным выше способом по некоторому локально свободному действию $M : Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G : X$ – некоторое локально свободное действие. По предложению 4 возьмем M -инвариантное сечение Y действия $V : X$. По действию $M : Y$ построим действие $G : V \times Y$. Легко видеть, что отображение

$$(v, y) \mapsto v \cdot y$$

задает бирациональный изоморфизм между действиями $G : V \times Y$ и $G : X$.

ЛЕММА 3. Действия $M : Y$ и $M : (V \times Y)/V$ бирационально изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $Y \rightarrow (V \times Y)/V$ по формуле $y \rightarrow (e, y)V$. Это отображение является бирациональным и M -эквивариантным.

Пусть α – локально свободное действие группы G на многообразии X . Тогда определено естественное действие группы M на X/V , которое, как легко видеть, также является локально свободным.

Обозначим последнее действие через $\psi_2(\alpha)$. Отображение ψ_2 сопоставляет локально свободным действиям группы G локально свободные действия группы M . Из предложения 5 и леммы 3 получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4. ψ_2 – биекция.

Итак, мы научились по действию α группы G со стабилизатором общего положения H строить локально свободное действие $\Psi(\alpha) = \psi_2(\psi_1(\alpha))$ подгруппы Леви F группы $N_G(H)/H$.

Из лемм 1 и 4 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Ψ – биекция.

Легко доказываются следующие два свойства отображения Ψ :

- 1) α и $\Psi(\alpha)$ имеют одно и то же поле инвариантов;
- 2) пусть α и β – действия $G : X$ и $G : Y$ со стабилизаторами общего положения H и $\Psi(\alpha)$ и $\Psi(\beta)$ – локально свободные действия $F : X'$ и $F : Y'$; если задано G -эquivариантное доминантное отображение $\iota : X \rightarrow Y$, то канонически определено F -эquivариантное доминантное отображение $\varphi_*(\iota) : X' \rightarrow Y'$, сопоставление $\iota \rightarrow \varphi_*(\iota)$ функториально, т.е. если $\iota_1 \circ \iota_2 = \iota$, то $\varphi_*(\iota_1) \circ \varphi_*(\iota_2) = \varphi_*(\iota)$.

§ 3. Действия над алгебраически незамкнутыми полями

Обозначим через $K \supset k$ произвольное поле, а через $\bar{K}$ его алгебраическое замыкание.

Алгебраическое многообразие, определенное над K , мы будем отождествлять с множеством его $\bar{K}$ -точек.

3.1. Однородные пространства и когомологии Галуа. Пусть G – алгебраическая группа над K и Q, Q' – однородные пространства группы G , определенные над K . Многообразие Q' называется $\bar{K}/K$ -формой однородного пространства Q , если Q как однородное пространство группы G изоморфно Q' над $\bar{K}$. Классы таких форм по отношению эквивалентности, определенному K -изоморфизмами, образуют множество $E(\bar{K}/K, Q)$.

Обозначим через $\text{Aut}_G(Q)$ группу G -эquivариантных автоморфизмов однородного пространства Q .

ТЕОРЕМА 2 [7]. Существует каноническая биекция между множеством $E(\bar{K}/K, Q)$ и множеством когомологий Галуа $H^1(K, \text{Aut}_G(Q))$.

Пусть A – некоторая группа, определенная над K . Пусть B – ее нормальная подгруппа, также определенная над K . Рассмотрим естественное отображение $\psi : H^1(K, A) \rightarrow H^1(K, A/B)$.

ТЕОРЕМА 3 [17], [6]. Если группа B унитарна, то ψ – биекция.

Обозначим через $R_u A$ унитарный радикал группы A .

Положим $F = \text{Aut}_G(Q)/R_u \text{Aut}_G(Q)$. Тогда по теореме 3 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Существует каноническая биекция между множествами $E(\bar{K}/K, Q)$ и $H^1(K, F)$.

Пусть $H \subset G$ – стабилизатор некоторой точки $q \in Q$. Тогда существует определенный над $\bar{K}$ изоморфизм групп $N_G(H)/H$ и $\text{Aut}_G(Q)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $H \subset G$ определена над K . Тогда существует каноническая биекция между множествами $E(\bar{K}/K, Q)$ и $H^1(K, (N_G(H)/H)/R_u(N_G(H)/H))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q' - \bar{K}/K$ -форма однородного пространства Q . Многообразию $(Q')^H$ является главным однородным пространством группы $N_G(H)/H$, определенным над K .

Обратно, пусть Z – главное однородное пространство группы $N_G(H)/H$, определенное над K . Многообразие $G \times_{N_G(H)} Z$ является однородным пространством группы G , определенным над полем K . Кроме того, $G \times_{N_G(H)} Z - \bar{K}/K$ -форма однородного пространства Q . Поэтому множество $E(\bar{K}/K, Q)$ канонически биективно множеству $E(\bar{K}/K, N_G(H)/H)$.

Применение теорем 4 и 3 завершает доказательство теоремы.

3.2. Редуктивные и параболические подгруппы.

ТЕОРЕМА 6. Всякая редуктивная или параболическая подгруппа группы $G(\bar{K})$ сопряжена в $G(\bar{K})$ некоторой подгруппе, определенной над k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема следует из того, что классификация редуктивных и параболических подгрупп данной группы с точностью до сопряженности не зависит от алгебраически замкнутого поля [8].

§ 4. Случай действия с произвольными стабилизаторами

4.1. Действия и однородные пространства. Пусть α – действие алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X , K – поле инвариантов, Y – рациональный фактор, π – отображение факторизации.

В этом параграфе нам придется несколько изменить определение квазисечения. А именно, *квазисечением* действия α мы будем называть отображение σ некоторого неприводимого алгебраического многообразия Z в многообразие X , для которого отображение $\rho = \pi \circ \sigma: Z \rightarrow Y$ является рациональным накрытием. *Сечением* действия α называется такое отображение $\sigma: Y \rightarrow X$, что $\sigma \circ \pi = \text{id}_Y$.

Несколько квазисечений по новому определению могут задавать одно и то же квазисечение по определению, данному во введении.

Рассмотрим действие $\kappa(\alpha)$ группы $G(\bar{K})$ на многообразии Q квазисечений действия α . Известно [3], что Q является однородным пространством группы $G(\bar{K})$, определенным над K . Более того [3], отображение κ биективно отображает множество классов бирационально эквивалентных действий группы G с полем инвариантов K во множество однородных пространств группы $G(\bar{K})$, определенных над K . Основную идею, используемую при построении отображения κ^{-1} , см. в [3].

Сечения действия α суть в точности K -точки многообразия Q [3]. Поэтому теорему Розенлихта (см. введение к данной работе) можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА РОЗЕНЛИХТА. Любое однородное пространство связной разрешимой группы имеет рациональную точку.

4.2. Классификация действий. Рассмотрим многообразие Q квазисечений некоторого действия α_0 группы G . Положим $F = \text{Aut}_G(Q)/R_u \text{Aut}_G(Q)$.

Согласно сказанному в предыдущем пункте, теорему 4 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 7. Пусть α_0 – действие группы G с полем инвариантов K и H – стабилизатор квазисечения q действия α_0 . Тогда существует каноническое биективное отображение Ψ множества действий группы G с полем инвариантов K и стабилизатором квазисечения H во множество $H^1(K, F)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Не произвольная подгруппа $H \subset G(\overline{K})$ может быть реализована как стабилизатор квазисечения некоторого действия группы G с полем инвариантов K . Для построения контрпримера достаточно найти такую подгруппу $H \subset G(\overline{K})$, что однородное пространство $G(\overline{K})/H$ группы $G(\overline{K})/H$ не может быть определено над K . В частности, H не может являться стабилизатором квазисечения в случае, когда H и H^γ не сопряжены при каком-нибудь $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ для некоторого $K' \supset K$. Рассмотрим группу $G = k \times k$, поля $K' = k(x)$, $K = k(x^2)$ и группу $H \subset G(K') \subset G(\overline{K})$, определяемую как семейство подгрупп $H(x) = \{(a, -ax) | a \in k\} \subset G$, параметризованных $x \in k$. Ввиду коммутативности группы G подгруппы $H(x_1)$ и $H(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$ не сопряжены. Следовательно, для нетривиального элемента $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ подгруппа H^γ не сопряжена H . Аналогичный пример можно построить и для редуктивной группы G^1 .

Если подгруппа $H \subset G(\overline{K})$ определена над K , то в теореме 7 нет необходимости в выборе “начального действия” α_0 . А именно, согласно сказанному в предыдущем пункте теорему 5 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 8. Пусть K – некоторое функциональное поле, подгруппа $H \subset G(\overline{K})$ определена над K . Тогда существует каноническое биективное отображение Ψ множества действий группы G с полем инвариантов K и стабилизатором квазисечения H во множество

$$H^1(K, (N_G(H)/H)/R_u(N_G(H)/H)).$$

§ 5. Существование сечений

5.1. Случай одномерного фактора. В силу теоремы 8 особый интерес для бирациональной классификации действий представляет вопрос о существовании сечений.

Результаты [3] (см. п. 4.1 данной работы) позволяют сформулировать теоремы, касающиеся рациональной теории действий, ранее известные автору только на языке когомологий Галуа (см. [7]).

¹А именно, возьмем группу $G = \text{SL}_6$ и поля $K' = k(x)$, $K = k(x^2)$. Рассмотрим такую унитарную подгруппу $H(x)$ группы G , что ее касательная алгебра $\mathfrak{h}(x)$ порождена матрицами $E_{25} + E_{56}$, $E_{13} + xE_{34}$, $E_{12} + E_{46}$, E_{15} , E_{36} и E_{16} , где $x \in k$ фиксирован и через E_{ij} обозначены матричные единицы. Согласно результатам [5] группы $H(x)$ не изоморфны при различных x . Рассмотрим группу $H \subset G(K') \subset G(\overline{K})$, определяемую как семейство подгрупп $H(x) \subset G$, параметризованных $x \in k$. Легко видеть, что для нетривиального элемента $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ подгруппа H^γ не изоморфна, а значит, и не сопряжена H , что и требовалось показать. (Данный пример любезно предоставлен автору Е. А. Тевелевым.)

Предположим, что $\text{tr. deg}_k K \leq 1$. Тогда K квазиалгебраически замкнуто (см., например, [11]).

ТЕОРЕМА 9. *Любое действие связной группы G с полем инвариантов K допускает сечение.*

ТЕОРЕМА 10. *Пусть α – действие группы G с полем инвариантов K и стабилизатором сечения H .*

Тогда существует каноническое биективное отображение множества действий β с полем инвариантов K и стабилизатором квазисечения H на множество локально свободных действий группы $(N_G(H)/H)/(N_G(H)/H)^0$ с полем инвариантов K .

Таким образом, бирациональная классификация действий групп с одномерным фактором сводится к бирациональной классификации действий конечных групп с тем же фактором.

Пусть A – K -группа и X – ее однородное пространство, определенное над K .

Теоремы 9 и 10 являются переформулировками следующих результатов [7, гл. III, следствия 1 и 3 теоремы 3].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\text{tr. deg}_k K \leq 1$ и $H^1(K, A) = 0$, то X имеет K -точку.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $\text{tr. deg}_k K \leq 1$, то каноническое отображение $H^1(K, A) \rightarrow H^1(K, A/A^0)$ биективно.*

5.2. Специальные группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Алгебраическая группа G называется *специальной*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1) любое локально свободное действие группы G допускает сечение;
- 2) для любого поля алгебраических функций K все локально свободные действия группы G с полем инвариантов K бирационально изоморфны;
- 3) для любого поля $K \supset k$ выполнено $H^1(K, G) = 0$.

Эквивалентность 1) и 2) очевидна, эквивалентность 2) и 3) опирается на связь между действиями алгебраических групп и однородными пространствами над алгебраически незамкнутыми полями (см. п. 4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что условия:

- 1') любое действие группы G со стабилизатором общего положения H и полем инвариантов K допускает сечение,
- 2') все действия группы G со стабилизатором общего положения H и полем инвариантов K бирационально изоморфны,

не равносильны (см. [12]).

Приведем основной классификационный результат.

ТЕОРЕМА 11 [15]. *Группа G специальна тогда и только тогда, когда G – связная группа, максимальная полупростая подгруппа которой есть прямое произведение групп типов SL и Sp .*

5.3. Действия специальных групп с унитарными стабилизаторами.

ТЕОРЕМА 12. *Любое действие специальной группы $G : X$ с унитарными стабилизаторами точек из некоторого густого подмножества $W \subset X$ допускает сечение.*

Доказательство этой теоремы может быть получено на основе результатов [7] и [3]. В настоящей работе мы предлагаем геометрическое доказательство, которое будет дано ниже.

§ 6. Доказательство теоремы 12

6.1. Правильное вложение произвольной подгруппы в параболическую подгруппу. Пусть H – некоторая алгебраическая подгруппа группы связной алгебраической группы G . Тогда по H можно однозначно построить параболическую подгруппу. А именно, положим $N^0(H) = H$ и рассмотрим $U^1(H) = R_u H$ – унитарный радикал группы H , а также $N^1(H) = N_G(U^1(H))$ – нормализатор группы U^1 в G . Далее определим индуктивно $U^i(H) = R_u N^{i-1}(H)$ и $N^i(H) = N_G(U^i(H))$. Этот процесс стабилизируется начиная с некоторого k . Обозначим через $\mathcal{P}(H)$ подгруппу, равную $N^k(H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Подгруппа H группы G называется *правильно вложенной*, если $R_u H \subset R_u G$.

Заметим, что для всех $g \in G$ выполняется равенство $\mathcal{P}(gHg^{-1}) = g\mathcal{P}(H)g^{-1}$ и что H правильно вложена в $\mathcal{P}(H)$.

ТЕОРЕМА 13 [1], [9]. *Если G – связная редуктивная группа, то группа $\mathcal{P}(H)$ является параболической подгруппой группы G для любой подгруппы $H \subset G$.*

ЛЕММА 5. *Для любой алгебраической группы G и любой подгруппы $H \subset G$ выполняется $R_u G \subset \mathcal{P}(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = R_u \mathcal{P}(H)$ и $U = R_u G$. Предположим, что $U \not\subset V$. Тогда по теореме Энгеля естественное действие V на алгебре $\text{Lie}(U/(U \cap V))$ имеет ненулевой неподвижный вектор u . Следовательно, $u \in \text{Lie}(R_u N_G(V))$. Но это противоречит предположениям $\text{Lie}(V) = \text{Lie}(R_u N_G(V))$ и $u \notin \text{Lie}(V)$.

ТЕОРЕМА 14. *Для любой подгруппы H связной группы G подгруппа $\mathcal{P}(H)$ параболическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что $R_u G \subset R_u \mathcal{P}(H)$.

Обозначим через M группу $G/R_u G$, через ψ – естественное отображение $G \rightarrow M$, через P – группу $\psi(\mathcal{P}(H))$. По построению $\text{Ker } \psi = R_u G \subset R_u \mathcal{P}(H) \subset \mathcal{P}(H)$ и, значит, $P = N_M(R_u P)$. По теореме 13 группа P является параболической подгруппой группы M , а значит, группа $\mathcal{P}(H) = \psi^{-1}(P)$ является параболической подгруппой группы G .

Теорема 14 легко обобщается на случай произвольной группы G , а именно верен следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой подгруппы H группы G подгруппа $\mathcal{P}(H)$ является конечным расширением параболической подгруппы.

6.2. Относительные сечения и параболические подгруппы. Пусть α – действие группы G на многообразии X . Обозначим через G_x стабилизатор точки $x \in X$.

ЛЕММА 6. Существует такое густое подмножество $W \subset X$, что для любой точки $x \in W$ подгруппа $\mathcal{P}(G_x)$ сопряжена некоторой фиксированной подгруппе P_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теоремам 6 и 14 можно выбрать квазисечение S действия α , чтобы для всех точек $x \in S$ подгруппы $\mathcal{P}(G_x)$ были бы равны. Обозначим эту подгруппу через P_α и положим $W = GS$. По определению квазисечения подмножество W густо в X .

ЛЕММА 7. Всякое действие α группы G на многообразии X допускает P_α -сечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S множество неприводимых компонент максимальной размерности многообразия $\{x \in X \mid \mathcal{P}(G_x) = P_\alpha\}$. Проверим условия относительного сечения:

1) по лемме 6 существует такое густое подмножество $W \subset X$, что GS густо в W , а значит, $\overline{GS} = X$;

2) для любых $g \in P_\alpha$ и $x \in S$ имеем

$$\mathcal{P}(G_{gx}) = \mathcal{P}(gG_xg^{-1}) = g\mathcal{P}(G_x)g^{-1} = gP_\alpha g^{-1} = P_\alpha;$$

3) для любых $x, y \in S$ и $g \in G$ таких, что $gx = y$, имеем

$$P_\alpha = \mathcal{P}(G_y) = g\mathcal{P}(G_x)g^{-1} = gP_\alpha g^{-1}$$

(это означает, что $g \in N_G(P_\alpha) = P_\alpha$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Действия группы G на многообразии X будем называть *действием с правильно вложенными стабилизаторами*, если для любой точки $x \in X$ и всех $i \geq 0$ подгруппы $N^i(G_x)$ (см. п. 6.1) правильно вложены в G и, следовательно, группы $\mathcal{P}(G_x)$ равны G .

Легко видеть, что действие группы P_α на P_α -сечении является действием с правильно вложенными стабилизаторами.

ТЕОРЕМА 15. Существует естественная биекция между классами бирационально изоморфных действий группы G с полем инвариантов K и классами бирационально изоморфных действий группы P_α с правильно вложенными стабилизаторами и тем же полем инвариантов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $H \subset G(\overline{K})$ стабилизатор квазисечения действия α .

Для доказательства этой теоремы надо заметить, что P_α -сечение из леммы 7 строится каноническим образом для всех действий β группы G с полем инвариантов K и стабилизатором квазисечения H . Таким образом каждому такому действию мы поставили в соответствие действие группы P_α с теми же полем инвариантов и стабилизатором квазисечения.

Отображение в обратную сторону получается применением предложений 1 и 2.

6.3. Окончание доказательства теоремы 12.

ЛЕММА 8. Пусть α – действие группы G на многообразии X . Тогда если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) действие некоторой подгруппы P на P -сечении обладает сечением,
- 2) естественное действие $M : X/V$, где $G = M \ltimes V$ – разложение Леви, обладает сечением,

то действие $G : X$ обладает сечением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Легко видеть, что сечение действия группы P на P -сечения будет и сечением действия $G : X$.

2) По теореме Розенлихта действие унипотентной группы V на X допускает сечение, т. е. существует такое отображение Π , что $\pi \circ \Pi = \text{id}_Z$ (см. коммутативную диаграмму):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/V = Z \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X/G = Y & \xlongequal{\quad} & Y = Z/M \end{array}$$

По условию существует такое отображение Π_2 , что $\pi_2 \circ \Pi_2 = \text{id}_Y$. Отображение $\Pi_1 = \Pi \circ \Pi_2$ и определяет искомое сечение действия α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Пусть вначале α – действие с правильно вложенными стабилизаторами.

По теореме 11 из того, что группа G специальна, следует, что и ее подгруппа Леви M специальна². Значит, действие $M : X/V$ допускает сечение. По лемме 8, 2) действие $G : X$ допускает сечение.

Из теоремы 11 и из явного описания параболических подгрупп следует, что параболическая подгруппа специальной группы специальна. Поэтому случай произвольного действия сводится к случаю действия с правильно вложенными стабилизаторами с помощью лемм 7 и 8, 1).

§ 7. Существование относительного сечения

7.1. Относительные сечения и разложение Леви. Пусть $G = M \ltimes V$ – разложение Леви группы G , и пусть α – действие $G : X$ с правильно вложенными стабилизаторами. Обозначим через L_x^0 подгруппу Леви стабилизатора G_x точки $x \in X$. Аналогично обозначим через L_x^i подгруппу Леви группы $N^i(G_x)$.

По теореме 6 (см. также [13]) для любого $i \geq 0$ существует такое густое подмногообразие $W^i \subset X$, что для всех $x \in W^i$ группы L_x^i сопряжены некоторой подгруппе $L^i \subset M$. Без ограничения общности можно также считать, что $L = L^0 \subset L^1 \subset L^2 \subset \dots \subset L^k = M$.

ЛЕММА 9. Для любого $i \geq 0$ действие α допускает $N_M(L^i) \ltimes V$ -сечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что объединение компонент подмногообразия $S^i = \{x \in W^i \mid L_x^i = L^i\} \subset X$ максимальной размерности является $N_M(L^i) \ltimes V$ -сечением.

²Специальность M можно доказать исходя из теоремы 3 или предложения 5.

7.2. Действия без относительных сечений. Пусть $G : X$ – некоторое действие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. P -сечение действия α называется *собственным* относительным сечением, если $P \subsetneq G$.

Зададимся вопросом: как описать все действия алгебраических групп G на неприводимых многообразиях, не допускающие собственного относительного сечения? Полученные в этой работе результаты дают некоторый ответ на этот вопрос.

Воспользуемся обозначениями п. 7.1.

ТЕОРЕМА 16. *Для того чтобы действие α группы G на многообразии X не допускало собственного относительного сечения, необходимо выполнение следующих условий:*

- 1) α – действие с правильно вложенными стабилизаторами;
- 2) $N_M(L^i) = M$ для всех i ;
- 3) если для некоторого густого подмножества $W \subset X$ подгруппы $U^i(G_x) \subset G$ сопряжены некоторой подгруппе $U \subset G$ при некотором целом i , то $U = V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если действие α не является действием с правильно вложенными стабилизаторами, то P_α -сечение (лемма 7) будет собственным.

Дальше в доказательстве ограничимся действиями с правильно вложенными стабилизаторами.

2) Если для какого-то i выполнено $N_M(L^i) \neq M$, то $N_M(L^i) \times V$ -сечение (лемма 9) будет собственным.

3) Пусть для всех x из некоторого густого подмногообразия $W \subset X$ подгруппы $U^i(G_x) \subset G$ сопряжены некоторой подгруппе U при некотором целом i . Объединение S неприводимых компонент максимальной размерности многообразия $\{x \in W \mid U^i(G_x) = U\} \subset X$ является $N_G(U)$ -сечением. Группа L^i является подгруппой Леви группы $N_G(U)$. По предложению 4 действие $U^2(U) : S$ допускает L^i -инвариантное сечение S' . Подмногообразие $S'' = U \cdot S' \subset S \subset X$ является $L^i \times U$ -сечением. Если $U \neq V$, то построенное $L^i \times U$ -сечение будет собственным.

Покажем, что указанные необходимые условия не являются достаточными. А именно, отдельный случай, когда выполняются условия теоремы 16, составляют локально свободные действия редуктивных групп. В частности, для любого такого действия нетривиальной специальной группы всегда существует собственное $\{e\}$ -сечение (в качестве такового можно взять любое сечение).

7.3. Относительные сечения и бирациональная классификация действий. Воспользуемся обозначениями предыдущего пункта.

Рассмотрим некоторое действие α группы G на многообразии X с правильно вложенными стабилизаторами и с полем инвариантов K . Пусть $M \times V$ – разложение Леви группы G .

Обозначим через G' группу, определяемую следующим образом. Унипотентный радикал группы G' равен V , а подгруппа Леви равна $\cap_i N_M(L^i)$.

ЛЕММА 10. *Любое действие α допускает G' -сечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через M^0 группу M , а через M^{j+1} – группу $N_{M^j}(L^j)$. По лемме 9 действие $G = (M^0 \ltimes V) : X$ допускает $(M^1 \ltimes V)$ -сечение X^1 .

Также по лемме 9 действие $M^j \ltimes V : X^j$ допускает $(M^{j+1} \ltimes V)$ -сечение X^{j+1} .

Для продолжения доказательства нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 11. *Возьмем вложение групп $H^2 \subset H^1 \subset G$. Пусть действие $G : X$ допускает H^1 -сечение X^1 , а действие $H^1 : X^1$ допускает относительно H^2 -сечение X^2 . Тогда X^2 является H^2 -сечением действия $G : X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение условий из определения относительного сечения.

1) Множество $GX^2 = G(H^1X^2)$ густо в X , так как H^1X^2 густо в X^1 , а GX^1 густо в X .

2) Если $gx = y$, где $g \in G$, а $x, y \in X^2$, то $g \in H^1$, так как $x, y \in X^2 \subset X^1$. Но $g \in H^2$, так как $g \in H^1$ и $x, y \in X^2$. $\square$

Воспользовавшись теперь леммой 11, получаем, что действие $G : X$ допускает $(M^j \ltimes V)$ -сечения для любого j .

В то же время для $j > 0$ группа M^j равна группе $\bigcap_{i \leq j} N_M(L^i)$. Так как $M^j = M^{j+1}$ начиная с некоторого k , то $M^k = \bigcap_i N_M(L^i)$ и, следовательно, $(M^k \ltimes V) = G'$.

Но, как было показано выше, действие $G : X$ допускает $(M^k \ltimes V)$ -сечение.

Теперь выберем у этого G' -сечения стабилизатор H некоторого квазисечения.

ТЕОРЕМА 17. *Существует естественная биекция между классами бирационально изоморфных действий группы G с правильно вложенными стабилизаторами и с полем инвариантов K и классами бирационально изоморфных действий группы G' с теми же стабилизатором квазисечения и полем инвариантов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через H стабилизатор квазисечения действия α .

Для доказательства этой теоремы надо заметить, что G' -сечение из леммы 10 строится каноническим образом для всех действий β группы G с полем инвариантов K и стабилизатором квазисечения H . Таким образом, каждому такому действию мы поставили в соответствие действие группы G' с теми же полем инвариантов и стабилизатором квазисечения.

Отображение в обратную сторону получается применением предложений 1 и 2.

Автор выражает благодарность профессору Э.Б. Винбергу за постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Вейсфейлер Б. Ю. Об одном классе унипотентных подгрупп полупростых алгебраических групп // УМН. 1966. Т. 21. № 2. С. 222–223.
2. Винберг Э. Б., Онищук А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
3. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направл. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.

4. *Каццло П. И.* Рациональность пространств модулей гиперэллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 4. С. 705–710.
5. *Морозов В. В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли 6-го порядка // Изв. вузов. Матем. 1958. № 4. С. 161–174.
6. *Платонов В. П., Рапинчук А. С.* Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.
7. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
8. *Спрингер Т. А.* Линейные алгебраические группы // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–136.
9. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
10. *Kraft H., Schwarz G. W.* Reductive Group Actions with one-dimensional quotient // Publ. Math. IHES. 1992. V. 76. P. 1–97.
11. *Lang S.* On quasi-algebraic clouser // Ann. Math. 1952. V. 55. P. 373–390.
12. *Popov V. L.* Sections in Invariant Theory // The Sophus Lie Memorial Conference. Oslo, 1992. Proceedings. Scandinavian University Press, 1994. P. 315–361.
13. *Richardson R. U.* Deformations of Lie subgroups and the variation of isotropy subgroups // Acta Math. 1972. V. 129. № 1–2. P. 35–73.
14. *Rosenlicht M.* Some basic theorems on algebraic groups // Amer. J. Math. 1956. V. 178. P. 401–443.
15. Séminaire C. Chevalley. Anneaux de Chow et applications. 2nd année, IHP, 1958.
16. *Serre J.-P.* Cohomologie Galoisienne: Progrès et Problèmes: Séminaire BOURBAKI. 46ème, année. 1993–94. № 783.
17. *Sansuc J. J.* Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres // J. Reine Angew. Math. 1981. V. 327. P. 12–80.
18. *Vinberg E. B.* On invariants of a set of matrices // J. of Lie Theory. 1996. V. 6. P. 249–269.

Поступило в редакцию
16.X.1997