Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, К теореме Куликова о гипотезе Кизини, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 1, 77–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:11:30

УДК 512.7+515.1

С. Ю. Немировский

К теореме Куликова о гипотезе Кизини

В работе доказано, что общее разветвленное накрытие $\mathbb{P}^2$ степени ≥ 12 однозначно определяется своей кривой ветвления.

Библиография: 5 наименований.

В этой заметке устанавливается следствие результатов Вик. С. Куликова о гипотезе Кизини [1]. А именно доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Общее разветвленное накрытие $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени ≥ 12 однозначно определяется своей кривой ветвления в $\mathbb{P}^2$. Иначе говоря, гипотеза Кизини справедлива для общих морфизмов степени ≥ 12 .*

Формулировка этой теоремы и собственно гипотеза Кизини обсуждаются в п. 1. Затем в п. 2 дано доказательство теоремы 1 и нескольких других приложений нашего подхода.

Автор искренне признателен Виктору Куликову за ценные обсуждения. Данная работа была выполнена во время пребывания автора в Математическом институте им. Макса Планка в Бонне.

1. Общие морфизмы поверхностей и гипотеза Кизини. *Разветвленным накрытием $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ мы называем конечный морфизм неособой неприводимой проективной поверхности на проективную плоскость. Кривая ветвления морфизма f есть множество точек в $\mathbb{P}^2$, над которыми f не является локально обратимым.*

Конечный морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени $\deg f \geq 3$ называется *общим*, если выполнены следующие условия:

- i) кривая ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ неприводима и имеет только обыкновенные каспы и двойные точки;
- ii) дивизор нулей якобиана $\text{Jac } f$ есть неособая кривая $R \subset S$;
- iii) отображение $f|_R: R \rightarrow B$ совпадает с нормализацией кривой B .

Два общих морфизма $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ *эквивалентны*, если существует изоморфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$, для которого $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

Таким образом, утверждение теоремы 1 состоит в том, что два общих морфизма (вообще говоря, различных поверхностей!) с одной и той же кривой ветвления эквивалентны при условии, что хотя бы один из них имеет степень не меньше 12.

Данное выше определение общего морфизма аналогично классическому случаю римановых поверхностей. Напомним, что согласно работам Римана и Гурвитца разветвленное накрытие $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ называется *общим*, если над каждой точкой $\mathbb{P}^1$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-00969).

лежит не более одной квадратичной точки ветвления накрытия f . В то же время теорема 1 показывает, что случай комплексных поверхностей является по существу жестким.

Заметим, что любая алгебраическая поверхность S допускает общий морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$, или, другими словами, может быть представлена общим разветвленным накрытием $\mathbb{P}^2$. Например, если $S \subset \mathbb{P}^r$, то почти любая проекция $\mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^2$ определяет общий морфизм $p: S \rightarrow \mathbb{P}^2$. Поэтому теорема 1 может быть в принципе использована для изучения пространств модулей поверхностей в терминах геометрии плоских кривых.

Гипотеза о том, что общее разветвленное накрытие над $\mathbb{P}^2$ степени не меньше 5 полностью определяется своей кривой ветвления, была высказана О. Кизини [2], который также предложил неполное доказательство этого утверждения.

Условие $\deg f \geq 5$ действительно необходимо, как показывает следующий пример, рассмотренный Кизини и Катанезе [3]. Пусть $B = C^*$ – двойственная кривая к неособой плоской кубике C (B является секстикой с 9 каспами). В этом случае существуют четыре неэквивалентных общих морфизма, для которых B будет кривой ветвления. Три таких отображения степени 4 задаются проекциями поверхности Веронезе. Четвертое отображение имеет степень 3 и представляет собой проекцию эллиптической линейчатой поверхности (прообраза кубики C в подмногообразии инцидентности в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*}$) на двойственную плоскость $\mathbb{P}^{2*}$. В настоящее время, за исключением этого примера (и его расслоенных произведений с разветвленными накрытиями), не известно других случаев неединственности общего морфизма с заданной кривой ветвления.

В важной работе [4] Б. Г. Мойшезон доказал гипотезу Кизини для общих проекций неособых гиперповерхностей в $\mathbb{P}^3$ с помощью введенного им метода изучения фундаментальной группы дополнения к кривой ветвления.

Недавно эти идеи были весьма существенно развиты Вик. С. Куликовым [1]. Им было показано, что общий морфизм с данной кривой ветвления B единствен при условии, что степень этого морфизма больше некоторого числа, зависящего от кривой B (явное выражение приведено ниже в формуле (1)). Этот результат позволил доказать гипотезу Кизини для широкого класса общих морфизмов (например, для плюриканонических морфизмов поверхностей общего типа).

Основной результат нашей работы состоит в том, что найденное Куликовым число всегда можно оценить сверху с помощью известного неравенства Богомолова–Мияоки–Яу (БМЯ).

Для краткости мы будем говорить, что для некоторого класса общих морфизмов справедлива гипотеза Кизини, если любой морфизм из этого класса определяется своей кривой ветвления с точностью до эквивалентности.

2. Число каспов на кривых ветвления и неравенство БМЯ. Пусть $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – общий морфизм степени $\deg f = N$ с кривой ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$. Обозначим через $2d$ степень кривой B (она всегда четна), через g – род десингуляризации B и через c – число каспов на B .

В [1] доказано, что морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ однозначно определяется кривой B при

$$N > \frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c}. \quad (1)$$

Мы применим неравенство Богомолова–Мияоки–Яу на алгебраической поверхности S для оценки числа каспов на кривой B через род g и полустепень d , что позволит получить априорную оценку сверху на правую часть неравенства (1).

Нам понадобятся следующие “формулы Римана–Гурвитца” (см. леммы 6 и 7 в [1]) для квадрата канонического класса и топологической эйлеровой характеристики поверхности S :

$$\begin{aligned} K_S^2 &= 9N - 9d + g - 1, \\ e(S) &= 3N + 2(g - 1) - c. \end{aligned} \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала рассмотрим случай, когда поверхность S удовлетворяет неравенству БМЯ

$$K_S^2 \leq 3e(S). \quad (3)$$

(Напомним, что из классификации проективных поверхностей и теоремы Мияоки следует, что неравенство (3) выполнено для всех поверхностей S , за исключением раздутий иррациональных линейчатых поверхностей иррегулярности > 1 ; см. [5].) Подставляя выражения (2) в неравенство БМЯ, находим

$$9N - 9d + g - 1 \leq 9N + 6(g - 1) - 3c,$$

и, следовательно,

$$c \leq 3d + \frac{5}{3}(g - 1).$$

Таким образом,

$$\frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c} \leq 4 + \frac{8(g - 1)}{9d + (g - 1)} < 12, \quad (4)$$

откуда вытекает утверждение теоремы в этом случае.

Пусть теперь поверхность S является раздутием иррациональной линейчатой поверхности. Тогда $K_S^2 \leq 2e(S)$. (Использованное выше неравенство БМЯ отсюда не следует, поскольку обе части могут быть отрицательными.) Рассуждая так же, как и раньше, получаем

$$c \leq -\frac{3}{2}N + \frac{9}{2}d + \frac{3}{2}(g - 1) < \frac{3}{2}(3d + g - 1).$$

Отсюда немедленно следует (более сильная) оценка

$$\frac{4(3d + g - 1)}{2(3d + g - 1) - c} < 8.$$

Теорема доказана.

В действительности все поверхности не общего типа, за исключением $\mathbb{P}^2$, удовлетворяют неравенству $K_S^2 \leq 2e(S)$. Кроме того, по теореме 3 работы [1] гипотеза Кизини справедлива для общих эндоморфизмов $\mathbb{P}^2$ степени ≥ 5 . Поэтому вторая часть нашего доказательства дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Гипотеза Кизини справедлива для общих морфизмов степени ≥ 8 поверхностей не общего типа.*

Возвращаясь к поверхностям, которые удовлетворяют “общему” неравенству БМЯ (3), мы можем в некоторых случаях уточнить последнюю оценку в формуле (4). Из формул (2) для K_S^2 находим

$$9d = -K_S^2 + 9N + (g - 1).$$

Используя это выражение в оценке (4), мы получаем следующий результат (включающий в себя, кстати, и случай эндоморфизмов $\mathbb{P}^2$).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Гипотеза Кизини справедлива для общих морфизмов $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени ≥ 8 , для которых $K_S^2 < 9 \deg f$.*

Приведем еще одно утверждение, дополняющее теорему 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Гипотеза Кизини справедлива для общих морфизмов степени ≥ 8 , у которых род кривой ветвления меньше 64.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя обычную формулу Римана–Гурвитца к прообразу проективной прямой, мы получаем неравенство $\deg f \leq d + 1$ (см. лемму 1 работы [1]). Однако если $d \geq 7$ и $g \leq 63$ (так что $9d > g - 1$), то оценка (4) улучшается до < 8 .

Список литературы

1. Куликов Вук. С. О гипотезе Кизини // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №6. С. 83–116.
2. Chisini O. Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione // Rend. Ist. Lombardo. 1944. V. 77. P. 339–356.
3. Catanese F. On a problem of Chisini // Duke Math. J. 1986. V. 53. P. 33–42.
4. Moishezon B. G. Stable branch curves and braid monodromies // Lecture Notes Math. 1981. V. 862. P. 107–192.
5. Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stefan@mccme.ru

Поступило в редакцию
28.II.2000