Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, О классификации стягиваний Мори: случай эллиптической кривой, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 1, 81–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/im321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:38:04

УДК 512.7

Ю. Г. Прохоров

О классификации стягиваний Мори: случай эллиптической кривой

Изучаются трехмерные стягивания Мори $f: X \rightarrow Z$. Доказано, что на “хорошей” модели $(\bar{X}, \bar{S})$ не существует эллиптических компонент дивизора $\text{Diff}_{\bar{S}}$ с коэффициентами $\geq 6/7$.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

1.1. Пусть $f: X \rightarrow Z \ni o$ – экстремальное логтерминальное стягивание над $\mathbb{C}$. Это означает, что X – нормальное алгебраическое $\mathbb{Q}$ -факториальное трехмерное многообразие с особенностями не хуже чем логтерминальные, f – проективный морфизм такой, что $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$, $\rho(X/Z) = 1$ и $-K_X$ является f -обильным.

Мы предположим, что $\dim(Z) \geq 1$ и рассмотрим многообразие $(Z \ni o)$ как достаточно малую окрестность в топологии Зарисского. Такие стягивания естественно появляются в программе минимальных моделей [4]. Через $\text{Exc}(f) \subset X$ мы обозначим исключительное множество морфизма f .

Согласно общему принципу, подмеченному Шокуровым [11], все такие стягивания могут быть отнесены к одному из двух классов: *исключительные* или *неисключительные*. Говорят, что стягивание $f: X \rightarrow Z \ni o$ такое, как определено выше, является *исключительным*, если для любого дополнения $K_X + D$ вблизи $f^{-1}(o)$ существует не более одного дивизора E поля функций $\mathcal{K}(X)$ с дискрепантностью $a(E, D) = -1$. Следующее утверждение является частным случаем теоремы, доказанной в [12] и [7] (см. также [9]).

ТЕОРЕМА 1.1. *В приведенных выше обозначениях предположим, что $f: X \rightarrow Z \ni o$ неисклчительно. Тогда для некоторого $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ существует элемент $F \in |-nK_X|$ такой, что пара $(X, \frac{1}{n}F)$ логканонична вблизи $f^{-1}(o)$.*

Таким образом, неисклительные стягивания имеют “хороший” элемент в $|-nK_X|$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Наиболее важным является случай *стягиваний Мори*, т.е. когда X имеет только терминальные особенности.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS-OPEN-97-2072 и РФФИ № 99-01-01132.

ГИПОТЕЗА 1.2. В приведенных выше обозначениях предположим, что X имеет не хуже чем терминальные особенности. Тогда стягивание $f: X \rightarrow Z \ni o$ не исключительно.

Аналогично классификации трехмерных терминальных особенностей, этот факт должен играть центральную роль в классификации стягиваний Мори. Например, он очень полезен в изучении трехмерных флипов [3], [5], [11].

Методы работ [12], [7], [9] используют индуктивную процедуру построения дивизоров в линейной системе $| -nK|$. Эта процедура работает на так называемой *хорошей* модели многообразия X над Z . Грубо говоря, хорошая модель – это бирациональная модель $\bar{Y}$ вместе с простым дивизором $\bar{S}$ таким, что пара $(\bar{Y}, \bar{S})$ чисто логтерминальна и дивизор $-(K_{\bar{Y}} + \bar{S})$ численно эффективен и обижен над Z .

Если f исключительно, то $\bar{S}$ – проективная поверхность. Формула присоединения (2.1) (см. ниже) дает нам то, что $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}})$ – *логтерминальная по Кавамате логповерхность дель Пеццо*. Более того, исключительность f влечет, что *проективная* логпара $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}})$ *исключительна*, по определению это означает, что любое дополнение $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}^+$ логтерминально по Кавамате [7, предложение 2.4]. Таким образом, наша конструкция сопоставляет каждому исключительному стягиванию $f: X \rightarrow Z$, рассмотренному выше, исключительную логповерхность дель Пеццо $(\bar{S}, \Delta = \text{Diff}_{\bar{S}})$.

1.2. Для исключительных логповерхностей дель Пеццо $(\bar{S}, \Delta)$ Шокуров определил следующий инвариант:

$$\delta = \delta(\bar{S}, \Delta) = \begin{array}{l} \text{число дивизоров } E \text{ поля } \mathcal{K}(\bar{S}) \\ \text{с дискрепантностью } a(E, \Delta) \leq -6/7. \end{array}$$

Он доказал, что $\delta \leq 2$, классифицировал логповерхности с $\delta = 2$ и показал, что в случае $\delta = 1$ (единственный) дивизор E с $a(E, \Delta) \leq -6/7$ представлен кривой арифметического рода ≤ 1 (см. [12], [8]).

Цель этой краткой заметки – исключить случай стягиваний Мори с $\delta = 1$ и эллиптической кривой E .

ТЕОРЕМА 1.3. Используя обозначения п. 1.1, предположим, что $\delta(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}) = 1$. Запишем $\text{Diff}_{\bar{S}} = \sum \delta_i \bar{\Delta}_i$, где $\bar{\Delta}_i$ – неприводимые кривые. Если $\delta_{i_0} \geq 6/7$ для некоторого i_0 , то $p_a(\bar{\Delta}_{i_0}) = 0$.

Следующий пример показывает, что теорема 1.3 не имеет обобщений на логтерминальный по Кавамате случай.

ПРИМЕР 1.4 [2]. Пусть $(Z \ni o)$ – гиперповерхностная каноническая особенность $x_1^2 + x_3^3 + x_3^{11} + x_4^{12} = 0$, и пусть $f: X \rightarrow Z$ – взвешенное раздутие с весами $(66, 44, 12, 11)$. Тогда f удовлетворяет условиям п. 1.1, и мы имеем случай, рассмотренный в п. 3.2. В работе [2] было вычислено, что S является взвешенной проективной плоскостью $\mathbb{P}(3, 2, 1)$ и $\text{Diff}_S = \frac{10}{11}C + \frac{1}{2}L$, где C – эллиптическая кривая.

Логповерхности дель Пеццо эллиптического типа (как $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}})$ из теоремы 1.3) были классифицированы Т. Абе [1]. Наше доказательство использует другие, довольно простые, методы.

§ 2. Предварительные сведения

В этой статье мы используем терминологию программы минимальных моделей [4], [13]. Определение *дополнений* и их свойства можно найти в [11, §5], [13, гл. 19] и [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [11, §3], [13, гл. 16]. Пусть X – нормальное многообразие, и пусть $S \neq \emptyset$ – эффективный приведенный дивизор на X . Пусть B – $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что S и B не имеют общих компонент. Предположим, что $K_X + S$ логканоничен в коразмерности два. Тогда *дифферента* дивизора B на S определяется как

$$K_S + \text{Diff}_S(B) \equiv (K_X + S + B)|_S. \quad (2.1)$$

Обычно мы будем писать просто Diff_S вместо $\text{Diff}_S(0)$.

ТЕОРЕМА 2.2 (обращение присоединения [13, теорема 17.6]). Пусть X – нормальное многообразие, и пусть D – граница на X . Запишем $D = S + B$, где $S = \lfloor D \rfloor$. Предположим, что дивизор $K_X + S + B$ является $\mathbb{Q}$ -картье. Тогда пара $(X, S + B)$ чисто логтерминальна вблизи S тогда и только тогда, когда многообразие S нормально и пара $(S, \text{Diff}_S(B))$ логтерминальна по Кавамате.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 [6]. Пусть X – нормальное многообразие, и пусть $g: Y \rightarrow X$ – бирациональное стягивание такое, что исключительное множество морфизма g содержит в точности один неприводимый дивизор S . Предположим, что дивизор $K_Y + S$ чисто логтерминален и дивизор $-(K_Y + S)$ является f -обильным. Тогда $g: (Y \supset S) \rightarrow X$ называется *чисто логтерминальным раздутием* многообразия X .

Ключевым местом в доказательстве теоремы 1.3 является следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $(X \ni P)$ – трехмерная терминальная особенность, и пусть $g: (Y, S) \rightarrow X$ – чисто логтерминальное раздутие такое, что $f(S) = P$. Запишем $\text{Diff}_S = \sum \delta_i \Delta_i$, где Δ_i – неприводимые кривые, и предположим, что $\delta_{i_0} \geq 6/7$ для некоторого i_0 . Далее, предположим, что поверхность S является гладкой в особых точках Δ_{i_0} . Тогда $p_a(\Delta_{i_0}) = 0$.

ЛЕММА 2.5 (ср. [6, следствие 5]). Пусть $(X \ni P)$ – трехмерная терминальная особенность, и пусть $g: (Y, S) \rightarrow X$ – чисто логтерминальное раздутие такое, что $f(S) = P$. Тогда существует граница $\Upsilon \geq \text{Diff}_S$ на S такая, что:

- (i) $[\Upsilon] \neq 0$;
- (ii) дивизор $-(K_S + \Upsilon)$ обилеен.

Более того, $K_S + \text{Diff}_S$ имеет нелогтерминальное по Кавамате 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим особенность $(X \ni P)$ как аналитический росток. В [10, п. 6.4] было доказано, что общий элемент $F \in | -K_X |$ имеет нормальную дювалевскую особенность в точке P . По обращению присоединения (теорема 2.2) $K_X + F$ является чисто логтерминальным. Рассмотрим крепантный

прообраз $K_Y + aS + F_Y = f^*(K_X + F)$, где F_Y – собственный прообраз дивизора F и $a < 1$. Так как оба дивизора $K_Y + S$ и g^*K_X являются $\mathbb{Q}$ -картье, то таковыми же являются S и F_Y . Ясно, что $-(K_Y + S + F_Y)$ f -обилен. Положим $\Upsilon' := \text{Diff}_S(F_Y)$. Тогда $[\Upsilon'] \neq 0$ и $-(K_S + \Upsilon')$ обилен. Поэтому Υ может быть найдено в виде $\Upsilon = \text{Diff}_S + t(\Upsilon' - \text{Diff}_S)$ для подходящего $0 < t \leq 1$.

Возьмем $\Delta = \text{Diff}_S + \lambda(\Upsilon - \text{Diff}_S)$ для $0 < \lambda \leq 1$ так, что $K_S + \Delta$ логканоничен, но не логтерминален по Кавамате (дивизор $-(K_S + \Delta)$ является обильным автоматически). По [12, §2] (см. также [8, утверждение 5.4.1]) существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение дивизора $K_S + \Delta$, которое не является логтерминальным по Кавамате.

Очень важная проблема – найти доказательство последней леммы без использования [10, п. 6.4], т.е. классификации терминальных особенностей. Возможно, это поможет обобщить классификацию терминальных особенностей в высшие размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.4. Положим $C := \Delta_{i_0}$, и пусть $\delta_0 = 1 - 1/m$, $m \geq 7$. Предположим, что $p_a(C) \geq 1$. Пусть дивизор Υ – такой, как в лемме 2.5, и пусть $K_S + \Theta$ – нелогтерминальное по Кавамате 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение дивизора $K_S + \text{Diff}_S$. Используя то, что коэффициенты Diff_S стандартные (см. [11, предложение 3.9]), легко получить $\Theta \geq \text{Diff}_S$ и $\Theta \geq C$ [8, п. 4.7]. В частности, $K_S + C$ логканоничен.

Далее, $C \not\subset [\Upsilon]$. Действительно, иначе по формуле присоединения мы имеем

$$-\deg K_C \geq -\deg(K_C + \text{Diff}_C(\Upsilon - C)) = -(K_S + \Upsilon) \cdot C > 0.$$

Это влечет $p_a(C) = 0$. Противоречие.

По лемме 2.6 (см. ниже) $\Theta = C$, $p_a(C) = 1$, поверхность S является гладкой вдоль C и имеет только дювалевские особенности вне C . Следовательно, $\text{Diff}_S = (1 - 1/m)C$ и $-K_S \equiv C \equiv -m(K_S + (1 - 1/m)C)$ обилен (см. определение 2.3). Таким образом, S является поверхностью дель Пеццо с не хуже чем дювалевскими особенностями. Так как $C \not\subset [\Upsilon]$, то мы можем записать $\Upsilon = \alpha C + L + \Upsilon^\circ$, где L – неприводимая кривая, $1 > \alpha \geq 1 - 1/m \geq 6/7$, $C \not\subset \text{Supp}(\Upsilon^\circ)$ и $\Upsilon^\circ \geq 0$. Далее,

$$\begin{aligned} 0 &< K_S \cdot (K_S + \Upsilon) = K_S \cdot (K_S + \alpha C + L + \Upsilon^\circ) \\ &\leq K_S \cdot ((1 - \alpha)K_S + L) \leq \frac{1}{7}K_S^2 + K_S \cdot L. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, $K_S^2 > -7K_S \cdot L \geq 7$.

Пусть $S^{\min} \rightarrow S$ – минимальное разрешение. По формуле Нётера

$$K_S^2 + \rho(S^{\min}) = K_{S^{\min}}^2 + \rho(S^{\min}) = 10.$$

Отсюда $8 \leq K_S^2 \leq 9$ и $\rho(S^{\min}) \leq 2$. В частности, S является гладкой или имеет в точности одну особую точку типа A_1 . Из неравенства (2.2) имеем $-K_S \cdot L = 1$. Аналогично (2.2) можем записать

$$0 < -(K_S + \Upsilon) \cdot L \leq -(1 - \alpha)K_S \cdot L - L^2.$$

Следовательно, $L^2 < 1 - \alpha \leq 1/7$. Таким образом, $L^2 \leq 0$. Это означает, что кривая L порождает экстремальный луч на S и $\rho(S) = 2$. Поэтому поверхность S является гладкой и $K_S^2 = 8$. В этом случае S – рациональная линейчатая поверхность ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или $\mathbb{F}_1$). Пусть ℓ – общий слой расслоения. Тогда

$$0 < -(K_S + \alpha C + L + \Upsilon^\circ) \cdot \ell \leq -(1 - \alpha)K_S \cdot \ell - L \cdot \ell \leq \frac{2}{7} - L \cdot \ell.$$

Следовательно, $L \cdot \ell = 0$. Таким образом, L является слоем $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $-K_S \cdot L = 2$. Это противоречит (2.2).

ЛЕММА 2.6 (см. [8, лемма 8.3.6]). *Пусть $(S, C + \Xi)$ – рациональная проективная логповерхность, где C – приведенный дивизор, а Ξ – произвольная граница. Предположим, что $K_S + C + \Xi$ логканоничен, поверхность S является гладкой в особых точках C , $K_S + C + \Xi \equiv 0$, C связно и $\rho_a(C) \geq 1$. Тогда $\Xi = 0$, $K_S + C \sim 0$, S является гладкой вдоль C и имеет только дувалевские особенности вне C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле присоединения

$$K_C + \text{Diff}_C(\Xi) = 0.$$

Следовательно, $\text{Diff}_C(\Xi) = 0$. Это показывает, что $C \cap \text{Supp}(\Xi) = \emptyset$ и S не имеет особенностей в точках $C \setminus \text{Sing } C$ (см. [13, предложение 16.6, следствие 16.7]). Пусть $\mu: \tilde{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение, и пусть $\tilde{C}$ – собственный прообраз кривой C на $\tilde{S}$. Определим $\tilde{\Xi}$ как крепантный прообраз:

$$K_{\tilde{S}} + \tilde{C} + \tilde{\Xi} = \mu^*(K_S + C + \Xi).$$

Достаточно показать, что $\tilde{\Xi} = 0$. Предположим противное. Заменим $(S, C + \Xi)$ на $(\tilde{S}, \tilde{C} + \tilde{\Xi})$. Легко видеть, что все предположения леммы выполнены на новом логмногообразии $(S, C + \Xi)$. Сягивания (-1) -кривых снова сохраняют все предположения. Так как C и $\text{Supp}(\Xi)$ не пересекаются, то весь дивизор Ξ не может быть стянут. Таким образом, мы получим $S \simeq \mathbb{P}^2$ или $S \simeq \mathbb{F}_n$ (рациональная линейчатая поверхность). В обоих случаях простейшие вычисления дают нам $\Xi = 0$.

§ 3. Построение хорошей модели

Далее используются обозначения п. 1.1. Напомним кратко конструкцию [7] (см. также [9]). Предположим, что стягивание $f: X \rightarrow Z \ni o$ исключительно. Пусть $K_X + F$ – нелогтерминальное по Кавамате дополнение. Существует дивизор S поля $\mathcal{K}(X)$ такой, что $a(S, F) = -1$. Так как f исключительно, то этот дивизор является единственным.

3.1. Во-первых, мы предположим, что центр S на X является кривой или точкой. Тогда $[F] = 0$. Пусть $g: Y \rightarrow X$ – минимальная логтерминальная модификация (X, F) [13, теорема 17.10], т.е. g – бирациональный проективный морфизм такой, что многообразие Y $\mathbb{Q}$ -факториально и $K_Y + S + A = g^*(K_X + F)$ дивизориально логтерминален, где A – собственный прообраз F . В нашей ситуации $K_Y + S + A$ чисто логтерминален. По [13, предложение 2.17] $K_Y + S + (1 + \varepsilon)A$ также чисто логтерминален для достаточно малого положительного ε .

3.2. Применим $(K + S + (1 + \varepsilon)A)$ -программу минимальных моделей над Z :

$$\begin{array}{ccc} Y & \dashrightarrow & \bar{Y} \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \quad (3.1)$$

Заметим, что $K_{\bar{Y}} + \bar{S} + (1 + \varepsilon)\bar{A} \equiv \varepsilon\bar{A} \equiv -\varepsilon(K_{\bar{Y}} + \bar{S})$. В конце мы получим так называемую *хорошую модель*, т.е. логпару $(\bar{Y}, \bar{S} + \bar{A})$ такую, что выполнено одно из следующих условий:

- А) $\rho(\bar{Y}/Z) = 2$ и $-(K_{\bar{Y}} + \bar{S})$ является численно эффективным и объемным над Z ;
- В) $\rho(\bar{Y}/Z) = 1$ и $-(K_{\bar{Y}} + \bar{S})$ является обильным над Z .

3.3. Теперь предположим, что центр S на X имеет коразмерность один. Тогда $S = \lfloor F \rfloor$. В этом случае мы положим $g = \text{id}$, $Y = X$ и $A = F - S$. Если дивизор $-(K_X + S)$ численно эффективен над Z , то мы также положим $\bar{Y} = X$, $\bar{S} = S$. Предположим, что $-(K_X + S) \equiv A$ не является численно эффективным над Z . Так как A эффективен, то f – бирациональное стягивание и $\text{Exc}(f) \subset \text{Supp}(A)$. Таким образом, S – некомпактная поверхность. Противоречие (см. [7, предложение 2.2]).

3.4. Так как f исключительно, то в обоих случаях пп. 3.1 и 3.2 мы имеем $f(g(S)) = q(\bar{S}) = o$ (см. [7, предложение 2.2]). Формула присоединения (2.1) дает нам, что $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}})$ является *логтерминальной по Кавамате логповерхностью дель Пеццо*, т.е. пара $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}})$ логтерминальна по Кавамате и дивизор $-(K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}})$ численно эффективен и объемен (см. [7, лемма 2.4]). Более того, исключительность f влечет то, что пара $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}})$ исключительна, т.е. любое дополнение $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{S}}^+$ логтерминально по Кавамате.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть стягивание $f: X \rightarrow Z \ni o$ удовлетворяет условиям п. 1.1. Предположим, что f исключительно. Далее:

- (i) если стягивание f является дивизориальным, то мы предположим, что особая точка $(Z \ni o)$ терминальна;
- (ii) в случае $\dim(Z) = 1$ мы предположим, что особенности $X \setminus f^{-1}(o)$ каноничны.

Тогда случай 3.2, В) невозможен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $\rho(\bar{Y}/Z) = 1$ и $q: \bar{Y} \rightarrow Z$ – также исключительное стягивание, как в п. 1.1. Во-первых, мы рассмотрим случай, когда f дивизориально. Тогда q является чисто логтерминальным раздутием терминальной точки $(Z \ni o)$ и $q(\bar{S}) = o$ (см. [7, предложение 2.2]). По лемме 2.5 пара $(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}})$ имеет нелогтерминальное по Кавамате дополнение. Это противоречит [7, предложение 2.4]. Ясно, что f не может быть малым стягиванием (так как в этом случае отображение $Y \dashrightarrow \bar{Y}$ должно быть изоморфизмом в коразмерности один). Если $\dim(Z) = 2$, то q не является равноразмерным. Противоречие.

Наконец, мы рассмотрим случай $\dim(Z) = 1$ (и $\bar{S}$ – центральный слой q). Пусть $\bar{F}$ – общий слой q (поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями). Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{Y}}(-K_{\bar{Y}} - \bar{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{Y}}(-K_{\bar{Y}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{F}}(-K_{\bar{F}}) \longrightarrow 0.$$

По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль [4, теорема 1-2-5] имеем $R^1 q_* \theta_{\bar{Y}}(-K_{\bar{Y}} - \bar{F}) = 0$. Следовательно, имеется сюръекция

$$H^0(\bar{Y}, \theta_{\bar{Y}}(-K_{\bar{Y}})) \longrightarrow H^0(\bar{F}, \theta_{\bar{F}}(-K_{\bar{F}})) \longrightarrow 0.$$

Здесь $H^0(\bar{F}, \theta_{\bar{F}}(-K_{\bar{F}})) \neq 0$ (так как $-K_{\bar{F}}$ – обильный дивизор Картье). Поэтому $H^0(\bar{Y}, \theta_{\bar{Y}}(-K_{\bar{Y}})) \neq 0$. Пусть $\bar{G} \in |-K_{\bar{Y}}|$ – любой элемент. Возьмем положительное рациональное c такое, что дивизор $K_{\bar{Y}} + \bar{S} + c\bar{G}$ логканоничен, но не чисто логтерминален. Ясно, что $c \leq 1$. Таким образом, дивизор $-(K_{\bar{Y}} + \bar{S} + c\bar{G}) \equiv -(1-c)K_{\bar{Y}}$ является q -численно эффективным. По теореме о стабильной свободе [4, теорема 3-1-1] существует дополнение $K_{\bar{Y}} + \bar{S} + c\bar{G} + L$, где $nL \in |-n(K_{\bar{Y}} + \bar{S} + c\bar{G})|$ для достаточно большого и делимого n , и это дополнение не является чисто логтерминальным – противоречие с исключительностью (см. [7, предложение 2.4]).

§ 4. Доказательство теоремы 1.3

В этом параграфе мы используем обозначения и предположения п. 1.1 и теоремы 1.3.

Если $g = \text{id}$, то $Y = X = \bar{Y}$ и многообразие $\bar{Y}$ имеет только терминальные особенности (см. п. 3.3). Тогда $\text{Diff}_{\bar{S}} = 0$. Противоречие. Далее мы предположим, что $g \neq \text{id}$. Обозначим $\bar{C} := \bar{\Delta}_{i_0}$, и пусть $\delta_{i_0} = 1 - 1/m$. Так как $\delta(\bar{S}, \text{Diff}_{\bar{S}}) = 1$, то не существует дивизоров $E \neq \bar{C}$ поля $\mathcal{K}(\bar{S})$ с $a(E, \text{Diff}_{\bar{S}}) \leq -6/7$. Это дает нам, что поверхность $\bar{S}$ является гладкой в $\text{Sing } \bar{C}$, если $\text{Sing } \bar{C} \neq \emptyset$ (см. [8, лемма 9.1.8]). По нашим предположениям многообразие $\bar{Y}$ особо вдоль $\bar{C}$. Более того, в общей точке кривой $\bar{C}$ мы имеем аналитический изоморфизм (см. [13, предложение 16.6]):

$$(\bar{Y}, \bar{S}, \bar{C}) \simeq (\mathbb{C}^3, \{x_3 = 0\}, \{x_1 - \text{ось}\}) / \mathbb{Z}_m(0, 1, q), \quad (m, q) = 1. \quad (4.1)$$

ЛЕММА 4.1. *В обозначениях п. 1.1 и теоремы 1.3 предположим, что $p_a(\bar{C}) \geq 1$. Тогда отображение $\bar{Y} \dashrightarrow Y$ является изоморфизмом в общей точке $\bar{C}$. Более того, если $\bar{P} \in \bar{C}$ – особая точка, то $\bar{Y} \dashrightarrow Y$ является изоморфизмом в $\bar{P}$. В частности, собственный прообраз $\bar{C}$ кривой C также является кривой с $p_a(C) \geq 1$.*

4.1. Во-первых, мы покажем, что лемма 4.1 влечет теорему 1.3. Предположим, что $p_a(\bar{C}) \geq 1$. Очевидно, $C \subset S$. По лемме 4.1 $p_a(C) \geq 1$ и

$$\# \text{Sing } C \geq \# \text{Sing } \bar{C}. \quad (4.2)$$

Изоморфизм (4.1) дает нам разложение

$$\text{Diff}_S = \left(1 - \frac{1}{m}\right) C + (\text{другие члены}).$$

4.2. Рассмотрим случай, когда $g(S)$ – точка. По лемме 2.5, как в доказательстве предложения 2.4, можно показать, что существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение вида $K_S + C + (\text{другие члены})$ на S . По формуле присоединения $p_a(C) = 1$. Поэтому $p_a(\bar{C}) = 1$, и мы имеем равенство в (4.2). Таким образом, S неособо в $\text{Sing } C$ (если $\text{Sing } C \neq \emptyset$). Мы имеем противоречие по предложению 2.4.

4.3. Рассмотрим случай, когда $g(S)$ – кривая. Заметим, что поверхность S рациональна (так как $(\bar{S}, \text{Diff } \bar{S})$ является логтерминальной по Кавамате логповерхностью дель Пешо; см., например, [8, п. 5.5]), и поэтому кривая $g(S)$ также рациональна. Рассмотрим ограничение $g_S: S \rightarrow g(S)$. Так как $p_a(C) \geq 1$, то C не является сечением морфизма g_S . Пусть ℓ – общий слой g_S . Тогда $\ell \simeq \mathbb{P}^1$ и

$$2 = -K_S \cdot \ell > \text{Diff}_S \cdot \ell \geq \left(1 - \frac{1}{m}\right) C \cdot \ell \geq \frac{6}{7} C \cdot \ell.$$

Таким образом, $C \cdot \ell = 2$ и C является 2-сечением g_S . Более того,

$$\left(\text{Diff}_S - \left(1 - \frac{1}{m}\right) C\right) \cdot \ell < 2 - 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{2}{m} < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, Diff_S не имеет горизонтальных компонент, отличных от C . Пусть $P := g(\ell)$, пусть X' – росток общего гиперплоского сечения, проходящего через P , и пусть $Y' := g^{-1}(X')$. Рассмотрим индуцированное (бirationальное) стягивание $g': Y' \rightarrow X'$. Так как особенности X изолированы, то поверхность X' является гладкой. По теореме Бертини $K_{X'} + \ell$ чисто логтерминально. Далее, Y' имеет в точности две особые точки $C \cap \ell$, и эти точки аналитически изоморфны $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_m(1, q)$ (см. (4.1)). Это противоречит следующей лемме.

ЛЕММА 4.2 (см. [8, §6]). *Пусть $\phi: Y' \rightarrow X' \ni o'$ – бирациональное стягивание поверхностей, и пусть $\ell := \phi^{-1}(o')_{\text{red}}$. Предположим, что дивизор $K_{Y'} + \ell$ является чисто логтерминальным и точка $X' \ni o'$ неособа. Тогда Y' имеет на ℓ не более двух особых точек. Более того, если Y' имеет на ℓ в точности две особые точки, то они имеют типы $\frac{1}{m_1}(1, q_1)$ и $\frac{1}{m_2}(1, q_2)$, где $\gcd(m_i, q_i) = 1$ и $\gcd(m_1, m_2) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется только вторая часть леммы. Таким образом, первая часть будет опущена. Пусть $\text{Sing } Y' = \{P_1, P_2\}$. Мы будем использовать топологические соображения. Рассмотрим Y' как аналитический росток вдоль ℓ . Так как $(X' \ni o')$ неособа, то $\pi_1(Y' \setminus \ell) \simeq \pi_1(X' \setminus \{o'\}) \simeq \pi_1(X') = \{1\}$. С другой стороны, для достаточно малой окрестности $Y' \supset U_i \ni P_i$ отображение $\pi_1(U_i \cap \ell \setminus P_i) \rightarrow \pi_1(U_i \setminus P_i)$ сюръективно (см. [3, доказательство теоремы 9.6]). Используя теорему ван Кампена, как в [5, п. 0.4.13.3], можно показать, что

$$\pi_1(Y' \setminus \{P_1, P_2\}) \simeq \langle \tau_1, \tau_2 \rangle / \{ \tau_1^{m_1} = \tau_2^{m_2} = 1, \tau_1 \tau_2 = 1 \}.$$

Эта группа нетривиальна, если $\gcd(m_1, m_2) \neq 1$. Противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Отображение $Y \dashrightarrow \bar{Y}$ является композицией логфлипов:

$$\begin{array}{ccccc} Y = Y_0 & & Y_1 & & Y_2 \dots Y_N = \bar{Y} \\ \downarrow g & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ X & & W_1 & & W_2 \end{array} \quad (4.3)$$

где каждое стягивание $\searrow$ является $(K + S + (1 + \varepsilon)A)$ -отрицательным, а каждое стягивание $\swarrow$ является $(K + S + (1 - \varepsilon)A)$ -отрицательным. Теорема Каваматы–Фивега об обращении в нуль [4, теорема 1-2-5] влечет, что исключительное множество каждого такого стягивания – дерево гладких рациональных кривых [5, следствие 1.3]. Таким образом, лемма 4.1 очевидна, если кривая $\bar{C}$ нерациональна. Далее мы предположим, что $\bar{C}$ – (особая) рациональная кривая.

ЛЕММА 4.3. В обозначениях диаграммы (4.3) пусть S_i – собственный прообраз S на Y_i . Если f не является малым стягиванием, то дивизор $-S_i$ обилен над W_i для $i = 1, \dots, N$. В частности, все нетривиальные слои морфизмов $Y_i \rightarrow W_i$ содержатся в S_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы утверждаем, что $-S_i$ не является численно эффективным над Z для $i = 1, \dots, N - 1$. Действительно, предположим сначала, что $\text{Exc}(f) \neq f^{-1}(o)$. Возьмем $o' \in f(\text{Exc}(f))$, $o' \neq o$, и пусть $\ell \subset g^{-1}(f^{-1}(o'))$ – любая неприводимая компактная кривая. Ясно, что $Y \dashrightarrow Y_i$ является изоморфизмом вдоль ℓ . Пусть ℓ_i – собственный прообраз ℓ на Y_i . Так как $S \cdot \ell = 0$, то $S_i \cdot \ell_i = 0$. Кривая ℓ_i не может порождать экстремальный луч (так как экстремальные стягивания на $Y_1, \dots, Y_{N-1}$ малые). Если $-S_i$ численно эффективен над Z , то, учитывая, что $\rho(Y_i/Z) = 2$, мы получим $S_i \equiv 0$. Противоречие. Таким образом, мы можем предполагать, что $\text{Exc}(f) = f^{-1}(o)$ – (простой) дивизор. Тогда исключительное множество морфизма $Y_i \rightarrow Z$ компактно. Если $-S_i$ численно эффективен, то это влечет $S_i = \text{Exc}(Y_i \rightarrow Z)$. Снова имеем противоречие (так как собственный прообраз $\text{Exc}(f)$ не совпадает с S_i).

Мы докажем лемму индукцией по i . Легко видеть, что $-S$ является обильным над $W_0 := X$. Конус Мори $\overline{NE}(Y_i)$ порожден двумя экстремальными лучами. Обозначим их через R_i и Q_i , где R_i (соответственно Q_i) задает стягивание $Y_i \rightarrow W_i$ (соответственно $Y_i \rightarrow W_{i+1}$). Предположим, что наше утверждение леммы имеет место на Y_{i-1} , т.е. $S_{i-1} \cdot R_{i-1} < 0$. По рассуждениям, приведенным выше, $S_{i-1} \cdot Q_{i-1} > 0$, и после флипа $Y_{i-1} \dashrightarrow Y_i$ мы имеем $S_i \cdot R_i < 0$. Это завершает доказательство леммы.

4.4. Рассмотрим случай, когда f не является малым стягиванием. Пусть $C^{(i)}$ – собственный прообраз $\bar{C}$ на Y_i . Если $p_a(C^{(i)}) \geq 1$, то $Y_i \rightarrow W_i$ не может стягивать $C^{(i)}$. Таким образом, кривая $C^{(i+1)}$ корректно определена. Теперь достаточно показать только, что на каждом шаге диаграммы (4.3) компоненты $\text{Exc}(Y_i \rightarrow W_i)$ не проходят через особые точки $C^{(i)}$. (Тогда $Y_i \dashrightarrow Y_{i+1}$ является изоморфизмом вблизи особых точек $C^{(i)}$, и все доказано.) По лемме 4.3 все компоненты $\text{Exc}(Y_i \rightarrow W_i)$ содержатся в S_i . Следовательно, проблема сводится к двумерному утверждению. Последнее (т.е. $\text{Exc}(Y_i \rightarrow W_i) \cap \text{Sing } C^{(i)} = \emptyset$) легко вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\varphi: S \rightarrow \widehat{S} \ni \hat{o}$ – бирациональное стягивание поверхностей, и пусть $\Delta = \sum \delta_i \Delta_i$ – граница на S такая, что дивизор $K_S + \Delta$ логтерминален по Кавамате и дивизор $-(K_S + \Delta)$ является φ -обильным. Положим $\Theta := \sum_{\delta_i \geq 6/7} \Delta_i$. Предположим, что φ не стягивает компонент Θ . Тогда кривая Θ является гладкой в точках $\varphi^{-1}(\hat{o}) \setminus \text{Sing}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть

$$P \in \text{Sing}(\Theta) \cap (\varphi^{-1}(\hat{o}) \setminus \text{Sing}(S)).$$

Пусть Γ – компонента $\varphi^{-1}(\hat{o})$, проходящая через P . Тогда $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1$. Существует n -дополнение $\Delta^+ = \sum \delta_i^+ \Delta_i$ дивизора $K_S + \Delta$ вблизи $\varphi^{-1}(\hat{o})$ для $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (см. [11, теорема 5.6], [13, следствие 19.10], или [8, §6]). По определению дополнений $\delta_i^+ \geq \min\{1, \lfloor (n+1)\delta_i \rfloor / n\}$ для всех i . В частности, $\delta_i^+ = 1$, если $\delta_i \geq 6/7$, т.е. $\Theta \leq \Delta^+$. Это означает, что дивизор $K_S + \Theta$ логканоничен. Так как $P \in \text{Sing}(\Theta)$, то $K_S + \Theta$ не является чисто логтерминальным в P . Следовательно, $\Theta = \Delta^+$ вблизи P и Γ не является компонентой Δ^+ . Мы утверждаем, что $K_S + \Gamma$ логканоничен. Действительно, $K_S + \Gamma$ логканоничен в P (так как Γ и S неособы в P). Предположим, что $K_S + \Gamma$ не логканоничен в $Q \neq P$. Тогда $K_S + (1 - \varepsilon)\Gamma + \Delta^+$ не логканоничен в P и Q для $0 < \varepsilon \ll 1$. Это противоречит лемме о связности [11, лемма 5.7], [13, теорема 17.4]. Таким образом, $K_S + \Gamma$ логканоничен, и мы можем применить формулу присоединения:

$$(K_S + \Delta^+ + \Gamma)|_{\Gamma} \geq (K_S + \Theta + \Gamma)|_{\Gamma} = K_{\Gamma} + \text{Diff}_{\Gamma}(\Theta).$$

Так как $K_S + \Delta^+ \equiv 0$ над $\widehat{S}$ и $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1$, то мы имеем $\deg \text{Diff}_{\Gamma}(\Theta) < 2$. С другой стороны, коэффициент $\text{Diff}_{\Gamma}(\Theta)$ в P равен $(\Theta \cdot \Gamma)_P \geq 2$. Противоречие.

4.5. Наконец, рассмотрим случай, когда f – малое стягивание. Если дивизор $-S_i$ является обильным над W_i для $i = 1, \dots, N$, то мы можем применить аргументы п. 4.4. Далее мы предположим, что S_I численно эффективен над W_I для некоторого $1 \leq I \leq N$.

Пусть L – эффективный дивизор на Z , проходящий через o . Возьмем $c \in \mathbb{Q}$ таким, что $K_X + cf^*L$ логканоничен, но не логтерминален по Кавамате. По теореме о стабильной свободе [4, теорема 3-1-1] существует элемент $M \in |-n(K_X + cf^*L)|$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ такой, что $K_X + cf^*L + \frac{1}{n}M$ логканоничен (но не логтерминален по Кавамате). Таким образом, мы можем предположить, что $F = cf^*L + \frac{1}{n}M$. Пусть $K_Y + S + B' = g^*(K_X + cf^*L)$ – крепантный прообраз. Запишем $B = B' + B''$, где $B', B'' \geq 0$. Тогда $-(K_Y + S + B')$ численно эффективен над Z и тривиален на слоях g . Применим $(K_Y + S + B')$ -программу минимальных моделей над Z . Так как $K_Y + S + B' \equiv -B'' \neq 0$, то этот $\mathbb{Q}$ -дивизор не может быть численно эффективным до тех пор, пока S не стянется. Таким образом, после некоторого числа флипов мы получим дивизориальное стягивание

$$Y \dashrightarrow Y_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow Y_N = \bar{Y} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow Y_{N'} \longrightarrow X'. \quad (4.4)$$

Так как $\rho(Y_i/Z) = 2$, то конус $\overline{NE}(Y_i/Z)$ имеет в точности два экстремальных луча. Следовательно, последовательность (4.3) содержится в (4.4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. Дивизор S_j численно эффективен над W_j , а $-S_j$ обилен над W_{j+1} для $I \leq j \leq N'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $-S_I$ обилен над W_{I+1} (так как S_I не численно эффективен над Z). После флипа $Y_I \dashrightarrow Y_{I+1}$ мы получим, что S_{I+1} является обильным над W_{I+1} . Продолжая процесс, мы получим наше утверждение.

Далее, X' имеет только терминальные особенности. Действительно, X' $\mathbb{Q}$ -факториально, $\rho(X'/Z) = 1$ и $X' \rightarrow Z$ является изоморфизмом в коразмерности один. Поэтому имеет место одно из следующих утверждений:

- (i) $-K_{X'}$ обилен над Z , тогда $X' \simeq X$;
- (ii) $K_{X'}$ численно тривиален над Z , тогда K_X также численно тривиален, что невозможно;
- (iii) $K_{X'}$ обилен над Z , тогда $X \dashrightarrow X'$ – флип и X' имеет только терминальные особенности [4, предложение 5-1-11].

Это показывает также, что $Y_{N'} \rightarrow X'$ является чисто логтерминальным раздутием. Тогда мы можем заменить X на X' и применить аргументы п. 4.4. Это завершает доказательство теоремы 1.3.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Классификация Шокурова исключительных логповерхностей дель Пеццо с $\delta \geq 1$ использует редукцию к случаю $\rho = 1$. Более точно, этот метод использует следующие модификации: $\bar{S} \leftarrow S^\bullet \rightarrow S^\circ$, где $S^\bullet \rightarrow \bar{S}$ – раздутие всех дивизоров с дискрепантностями $a(E, \text{Diff}_{\bar{S}}) \geq 6/7$, $S^\bullet \rightarrow S^\circ$ – композиция некоторых экстремальных стягиваний и $\rho(S^\circ) = 1$. Тогда все дивизоры с дискрепантностью $\geq 6/7$ неисклнучительны на S° . В нашем случае гладкая эллиптическая кривая с коэффициентом $\geq 6/7$ на S° не может быть стянута в точку на $\bar{S}$ (так как особенности $\bar{S}$ рациональны). По теореме 1.3 этот случай невозможен. Случай, когда особая рациональная кривая с коэффициентом $\geq 6/7$ на S° стягивается в точку на $\bar{S}$, является более сложным. Это случай будет изучен в другой работе.

Автор благодарен В. В. Шокурову за то, что он убедил его написать эту заметку. Автор работал над этой проблемой в Токийском технологическом институте в 1999–2000 гг. Я очень благодарен сотрудникам института и в особенности профессору Ш. Ишии за гостеприимство и прекрасные условия для работы.

Список литературы

1. Abe T. Classification of Exceptional Complements: Elliptic Curve Case. alg-geom/9711029.
2. Ishii S., Prokhorov Yu. G. Hypersurface exceptional singularities. Preprint/TITECH-MATH 06-99 (#92).
3. Kawamata Y. The crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to the degeneration of surfaces // Ann. Math. 1988. V. 127. P. 93–163.
4. Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model program // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
5. Mori S. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 117–253.
6. Prokhorov Yu. G. Blow-ups of canonical singularities // Algebra. Proc. Internat. Algebraic Conf. on the Occasion of the 90th Birthday of A. G. Kurosh, Moscow, Russia, May 25–30, 1998 / Ed. Yu. Bahturin. Berlin: Walter de Gruyter, 2000. P. 301–317.

7. *Prokhorov Yu. G.* Boundedness of nonbirational extremal contractions // Internat. J. Math. 2000. V. 11. № 3. P. 393–411.
8. *Prokhorov Yu. G.* Lectures on complements on log surfaces. e-print math.AG/9912111.
9. *Prokhorov Yu. G., Shokurov V. V.* The first main theorem on complements: from global to local. Preprint/TITECH-MATH 08-99 (#94).
10. *Reid M.* Young persons guide to canonical singularities // Algebraic Geometry, Bowdoin, 1985. Proc. Symp. Pure Math. 1987. V. 46. P. 345–414.
11. *Шокуров В. В.* Трехмерные лог-перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–201.
12. *Shokurov V. V.* Complements on surfaces // J. Math. Sci. 2000. V. 102. № 2. P. 3876–3932.
13. *Kollár J. et al.* Flips and abundance for algebraic threefolds // A summer seminar at the University of Utah, Salt Lake City, 1991. V. 211. Astérisque, 1992.

117234 Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра высшей алгебры
E-mail: prokhoro@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
12.IX.2000