Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Асимптотика коэффициентов ряда Тейлора функции $\xi(s)$,
Изв. РАН. Сер. матем., 2001, том 65, выпуск 1, 93–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/im322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 09:21:41

УДК 511

Л. Д. Пустыльников

Асимптотика коэффициентов ряда Тейлора функции $\xi(s)$

В работе получена асимптотическая формула для коэффициентов ряда Тейлора функции

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

в точке $s = 1/2$.

Библиография: 3 наименования.

В этой работе мы находим асимптотическую формулу для коэффициентов ряда Тейлора функции $\xi(s) = (1/2)s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ в точке $s = 1/2$. Здесь $\Gamma(s)$ и $\zeta(s)$ – соответственно гамма- и дзета-функции, а функция $\xi(s)$ является целой и в силу известного равенства $\xi(s) = \xi(1-s)$ разлагается в точке $s = 1/2$ в ряд Тейлора:

$$\xi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi_r \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2r},$$

только по четным степеням переменной $z = s - 1/2$. Нахождение явного асимптотического выражения для коэффициентов ξ_r ряда Тейлора функции $\xi(s)$ при $r \rightarrow \infty$ представляет как самостоятельный интерес, так и в связи с гипотезой Римана о нулях функции $\zeta(s)$ [1].

ТЕОРЕМА. При $r \rightarrow \infty$ справедливо следующее асимптотическое выражение:

$$\begin{aligned} \xi_r \sim & \frac{2^{-(2r-2)}}{(2r)!} \left(\ln \frac{2r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{2r-2}{\pi} + \beta \right)^{2r-2} \\ & \times \exp \left(-(2r-2) \left(\ln \frac{2r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{\beta} \right) (2r-2)^{1/4} (2r)(2r-1) \\ & \times \left(\ln \frac{2r-2}{\pi} \right)^{-1/4} \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{(r-1) \left(\frac{1}{(\ln \frac{2r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{2r-2}{\pi})^2} + \frac{1}{\ln \frac{2r-2}{\pi}} \right)}}, \end{aligned}$$

где $\beta = \beta(r)$ – такая функция, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) = 0$.

Доказательство теоремы проведено в § 4. Оно использует результаты, доказанные в § 1–3.

Статья посвящается светлой памяти С. М. Воронина.

§ 1. Функциональные уравнения

Рассмотрим два функциональных уравнения

$$u_1 + \ln u_1 = \lambda_1, \quad (1.1)$$

$$u_2 - \ln u_2 = \lambda_2, \quad (1.2)$$

где u_1 и u_2 – неизвестные величины, а λ_1, λ_2 – заданные величины.

ЛЕММА 1.1. *Решения $u_1 = u_1(\lambda_1)$ и $u_2 = u_2(\lambda_2)$ уравнений (1.1) и (1.2) можно представить следующим образом:*

$$u_1(\lambda_1) = \lambda_1 - \ln \lambda_1 + R_1(\lambda_1),$$

$$u_2(\lambda_2) = \lambda_2 + \ln \lambda_2 + R_2(\lambda_2),$$

где $\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} R_1(\lambda_1) = 0, \lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} R_2(\lambda_2) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы, относящееся к уравнению (1.1). Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$u_1 = \lambda_1(1 - \zeta_1(\lambda_1)). \quad (1.3)$$

В силу (1.3) и (1.1) имеем

$$\ln \lambda_1 + \ln(1 - \zeta_1) = \ln u_1 = \lambda_1 - u_1 = \lambda_1 \zeta_1,$$

где $\zeta_1 = \zeta_1(\lambda_1)$. Поэтому $\zeta_1 = (\ln \lambda_1)/\lambda_1 + (\ln(1 - \zeta_1))/\lambda_1$. Полагая $\varepsilon = (\ln \lambda_1)/\lambda_1, \delta = \lambda_1^{-1}$, получаем уравнение

$$\zeta_1 - (\varepsilon + \delta \ln(1 - \zeta_1)) = 0. \quad (1.4)$$

Рассмотрим два круга $K_\varepsilon = \{\zeta_1 : |\zeta_1| \leq 2\varepsilon\}, K = \{\zeta_1 : |\zeta_1| < \kappa\}$ и такое число κ , что $1 > \kappa \geq 2\varepsilon, (\delta\kappa)/(1 - \kappa) < \varepsilon$. В круге K функция $|\ln(1 - \zeta_1)|$ допускает оценку

$$|\ln(1 - \zeta_1)| \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa}. \quad (1.5)$$

Поэтому в круге K_ε

$$|\varepsilon + \delta \ln(1 - \zeta_1)| \leq \varepsilon + \frac{\delta\kappa}{1 - \kappa} < 2\varepsilon. \quad (1.6)$$

Пусть λ_0 – наименьшее положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{2 \ln \lambda_0}{\lambda_0} \leq \kappa, \quad \frac{\kappa}{\lambda_0(1 - \kappa)} < \frac{\ln \lambda_0}{\lambda_0} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_0. \quad (1.7)$$

Тогда при $\lambda_1 > \lambda_0$ в круге K_{ε_0} справедливо неравенство (1.6), в котором число ε заменено на число ε_0 , и по теореме Руше уравнение (1.4) имеет единственное решение в круге K_{ε_0} . Поэтому в силу (1.4) и (1.5) при $\lambda \geq \lambda_0$ имеем

$$\lambda_1 \zeta_1(\lambda_1) = \lambda_1(\varepsilon + \delta \ln(1 - \zeta_1)) = \ln \lambda_1 + \ln(1 - \zeta_1) = \ln \lambda_1 - R_1,$$

где $|R_1| < \kappa/(1 - \kappa)$, и таким образом

$$u_1 = \lambda_1 - \lambda_1 \zeta(\lambda_1) = \lambda_1 - (\ln \lambda_1 + \ln(1 - \zeta_1)) = \lambda_1 - \ln \lambda_1 + R_1, \quad (1.8)$$

где

$$|R_1| < \frac{\kappa}{1 - \kappa}. \quad (1.9)$$

Так как в силу (1.7) и (1.9) при $\lambda_0 \rightarrow \infty$ величину $\kappa = \kappa(\lambda_0)$ можно задать таким образом, чтобы $\lim_{\lambda_0 \rightarrow \infty} \kappa(\lambda_0) = \lim_{\lambda_0 \rightarrow \infty} |R_1| = 0$, то соотношения (1.8) и (1.9) приводят к утверждению леммы 1.1 применительно к уравнению (1.1).

Аналогичным образом, представляя решение u_2 уравнения (1.2) в виде $u_2 = \lambda_2(1 + \zeta_2(\lambda_2))$ (вместо (1.3)), доказывается утверждение леммы 1.1, относящееся к уравнению (1.2). Лемма доказана.

Пусть $r > 2$; рассмотрим уравнение

$$\frac{r-2}{u} = \pi e^u \quad (1.10)$$

относительно u .

ЛЕММА 1.2. *Решение $u = u(r)$ уравнения (1.10) представляется в виде*

$$u = \ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + R(r),$$

где $\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы получается в результате взятия логарифма от обеих частей равенства $\frac{r-2}{\pi} = u e^u$, эквивалентного равенству (1.10), и применения леммы 1.1.

§ 2. Интеграл

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}_\varepsilon(a) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-ax^2} dx,$$

где $a > 0$, $\varepsilon > 0$.

ЛЕММА 2.1. *Справедливо неравенство*

$$\left| \mathcal{J}_\varepsilon(a) - \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right| < \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{e^{-a\varepsilon^2}}{1 + \sqrt{1 - e^{-a\varepsilon^2}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = \sqrt{ax}$. Тогда

$$\mathcal{J}_\varepsilon(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\varepsilon\sqrt{a}}^{\varepsilon\sqrt{a}} e^{-y^2} dy, \quad \mathcal{J}_\varepsilon^2(a) = \frac{1}{a} \int_{-\varepsilon\sqrt{a}}^{\varepsilon\sqrt{a}} \int_{-\varepsilon\sqrt{a}}^{\varepsilon\sqrt{a}} e^{-(y^2+u^2)} dy du.$$

Поэтому

$$\frac{1}{a} \iint_{K_{\varepsilon\sqrt{a}}} e^{-(y^2+u^2)} dy du < \mathcal{J}_\varepsilon^2(a) < \iint_{K_{\varepsilon\sqrt{2a}}} e^{-(y^2+u^2)} dy du, \quad (2.1)$$

где K_r – круг радиуса r с центром в точке $(0,0)$ на плоскости y, u . Используя полярные координаты $y = r \cos \phi$, $u = r \sin \phi$, имеем

$$\iint_{K_r} e^{-(y^2+u^2)} dy du = \frac{1}{2} \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-r^2} d(r^2) = \pi(1 - e^{-r^2}).$$

Подставляя это равенство в (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{1 - e^{-a\varepsilon^2}} &< \mathcal{J}_\varepsilon(a) < \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{1 - e^{-2a\varepsilon^2}}, \\ \left| \mathcal{J}_\varepsilon(a) - \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right| &< \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(1 - \sqrt{1 - e^{-a\varepsilon^2}} \right), \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

§ 3. Неравенство

Пусть r целое, $r \geq 2$, $\hat{x}_r = e^r$, $\tilde{x}_r = e^{2\sqrt{r(r-1)}}$, $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$.

ЛЕММА 3.1. *Справедливо неравенство*

$$16r(r-1) \int_{\hat{x}_{r-2}}^{\tilde{x}_r} (\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx > \int_{\tilde{x}_r}^{\infty} (\ln^r x) x^{-3/4} \omega(x) dx. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения функции $\omega(x)$ для доказательства неравенства (3.1) достаточно доказать, что при любом натуральном числе u справедливо неравенство

$$16r(r-1) \int_{\hat{x}_{r-2}}^{\tilde{x}_r} (\ln^{r-2} x) x^{-3/4} e^{-\pi n^2 x} dx > \int_{\tilde{x}_r}^{\infty} (\ln^r x) x^{-3/4} e^{-\pi n^2 x} dx. \quad (3.2)$$

В области $x \geq 1$ функция $(\ln x)/x^{1/r}$ имеет единственный экстремум в точке $x = \hat{x}_r$, являющийся максимумом. Поэтому в силу неравенства $e < \hat{x}_r < \tilde{x}_r$ при $x \geq \tilde{x}_r$ справедливы неравенства

$$\frac{\ln^r x}{x} < \frac{\ln^r \tilde{x}_r}{\tilde{x}_r}, \quad \frac{x}{e^x} < \frac{\tilde{x}_r}{e^{\tilde{x}_r}},$$

перемножая которые, получаем неравенство

$$x^{-3/4} e^{-\pi n^2 x} \ln^r x \leq A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln^r \tilde{x}_r}{e^{\tilde{x}_r} \tilde{x}_r^{3/4}} e^{-(\pi n^2 - 1)x}, \quad x \geq \tilde{x}_r. \quad (3.3)$$

Точно так же доказывается, что в области $\hat{x}_{r-2} \leq x \leq \tilde{x}_r$ справедливо неравенство

$$x^{-3/4} e^{-\pi n^2 x} \ln^{r-2} x \geq B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln^{r-2} \tilde{x}_r}{e^{\tilde{x}_r} \tilde{x}_r^{3/4}} e^{-(\pi n^2 - 1)x}. \quad (3.4)$$

Далее, в силу определений чисел $\tilde{x}_r$ и $\hat{x}_r$ получаем

$$\int_{\hat{x}_{r-2}}^{\tilde{x}_r} e^{-(\pi n^2 - 1)x} dx > \int_{\tilde{x}_r}^{\infty} e^{-(\pi n^2 - 1)x} dx. \quad (3.5)$$

Поэтому из соотношения $A(x)/B(x) = \ln^2 \tilde{x} < 16r(r-1)$ и из (3.3)–(3.5) следуют неравенства (3.2) и (3.1). Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы

Доказательство проведено в последующих семи пунктах.

1°. Пусть $r \geq 2$, $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$,

$$I_r = \int_1^{\infty} (16r(r-1) - \ln^2 x) (\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx. \quad (4.1)$$

Пусть $u = \ln x$. Тогда

$$I_r = \int_0^{\infty} (16r(r-1) - u^2) u^{r-2} e^{u/4} \omega(e^u) du = \int_0^{\infty} e^{F(u)} du, \quad (4.2)$$

где

$$F(u) = (r-2) \ln u + \frac{u}{4} + \ln(16r(r-1) - u^2) - \pi e^u + \ln(1 + \psi(e^u)), \quad (4.3)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi x}.$$

Полагаем $u_r^* = 4\sqrt{r(r-1)}$, $I_r = I_r' + I_r''$, где $I_r' = \int_0^{u_r^*} e^{F(u)} du$, $I_r'' = \int_{u_r^*}^{\infty} e^{F(u)} du$. Дифференцируя (4.3), получаем равенства

$$\frac{dF}{du}(u) = \frac{r-2}{u} + \frac{1}{4} - \frac{2u}{16r(r-1) - u^2} - \pi e^u + \frac{d \ln(1 + \psi(e^u))}{du}, \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2 F}{du^2} = -\frac{r-2}{u^2} - \frac{2(16r(r-1) + u^2)}{(16r(r-1) - u^2)^2} - \pi e^u + \frac{d^2 \ln(1 + \psi(e^u))}{du^2}. \quad (4.5)$$

На отрезке $0 \leq u < u^*$ рассмотрим уравнение

$$\frac{dF}{du}(u) \equiv \frac{r-2}{u} + \frac{1}{4} - \frac{2u}{16r(r-1) - u^2} - \pi e^u + \frac{d \ln(1 + \psi(e^u))}{du} = 0. \quad (4.6)$$

Так как

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{dF}{du}(u) = +\infty, \quad \lim_{\substack{u \rightarrow u^* \\ u < u^*}} \frac{dF}{du}(u) = -\infty$$

и при больших r в области $0 < u < u^*$ справедливо неравенство $\frac{d^2 F}{du^2}(u) < 0$, то уравнение (4.6) в области $0 < u < u^*$ при больших r имеет единственное решение.

Рассмотрим приближенное уравнение

$$\frac{r-2}{u} - \pi e^u = 0. \quad (4.7)$$

Его решение $u = \hat{u}$ в силу леммы 1.2 имеет вид

$$\hat{u} = \ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_1, \quad (4.8)$$

где $c_1 = c_1(r)$ – функция, удовлетворяющая равенству $\lim_{r \rightarrow \infty} c_1(r) = 0$. Поэтому в силу (4.8), (4.6) и (4.5) решение $u = \tilde{u}$ уравнения (4.6) имеет вид

$$\tilde{u} = \ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2, \quad (4.9)$$

где $c_2 = c_2(r)$ – функция, также удовлетворяющая равенству

$$\lim_{r \rightarrow \infty} c_2(r) = 0. \quad (4.10)$$

Пусть ε_r – константа, удовлетворяющая неравенству $0 < \varepsilon_r < \min(\tilde{u}, u^* - \tilde{u})$. Представим интеграл I'_r в следующем виде:

$$I'_r = \int_0^{\tilde{u} - \varepsilon_r} e^{F(u)} du + \int_{\tilde{u} - \varepsilon_r}^{\tilde{u} + \varepsilon_r} e^{F(u)} du + \int_{\tilde{u} + \varepsilon_r}^{u^*} e^{F(u)} du.$$

Подставляя (4.9) в (4.3), получаем

$$\begin{aligned} e^{F(\tilde{u})} &= \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^{r-2} \\ &\times \exp \left\{ -(r-2) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right\} \left(\frac{r-2}{\pi} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right)^{1/4} \\ &\times \left(16r(r-1) - \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^2 \right) \\ &\times \left(1 + \psi \left(\frac{r-2}{\pi} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Далее, в силу (4.10) при $r \rightarrow \infty$ имеем следующие асимптотические равенства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r-2}{\pi} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right)^{1/4} &\sim \left(\frac{r-2}{\pi} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} \right)^{1/4}, \\ \ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 &\sim \ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi \left(\frac{r-2}{\pi} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (4.11) при $r \rightarrow \infty$ получаем асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} e^{F(\tilde{u})} &\sim \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^{r-2} \exp \left\{ -(r-2) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right\} \\ &\times \left(\frac{r-2}{\pi} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} \right)^{1/4} 16r(r-1). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подставляя (4.9) в (4.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u}) &= - \frac{r-2}{\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^2} \\ &- \frac{2(16r(r-1) + \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^2)}{\left(16r(r-1) - \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^2 \right)^2} \\ &- \pi \exp \left\{ \ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right\} \\ &+ \frac{d^2 \ln(1 + \psi(\exp \{ \ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \}))}{du^2} \\ &= - \frac{r-2}{\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^2} \\ &- (r-2) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} + o(r) < -c_3 \frac{r-2}{\ln \frac{r-2}{\pi}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $c_3 > 0$ не зависит от r и $\lim_{r \rightarrow \infty} o(r) = 0$.

Оценим величину $|d^3 F(u)/du^3|$ в области $\tilde{u} - \varepsilon_r \leq u \leq \tilde{u} + \varepsilon_r$. Дифференцируя равенство (4.5), имеем

$$\frac{d^3 F}{du^3}(u) = \frac{2(r-2)}{u^3} - \pi e^u - \frac{d}{du} \frac{2(16r(r-1) + u^2)}{(16r(r-1) - u^2)^2} + \frac{d^3 \ln(1 + \psi(e^u))}{du^3}.$$

Поэтому в силу (4.9)

$$\begin{aligned} &\sup_{\tilde{u} - \varepsilon_r \leq u \leq \tilde{u} + \varepsilon_r} \left| \frac{d^3 F}{du^3}(u) \right| \\ &< c_4 \left(\frac{r-2}{\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 - \varepsilon_r \right)^3} + \frac{(r-2)e^{\varepsilon_r}}{\ln \frac{r-2}{\pi}} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $c_4 > 0$ – константа, не зависящая от r .

В области $\tilde{u} - \varepsilon_r \leq u \leq \tilde{u} + \varepsilon_r$ имеем равенство

$$F(u) = \tilde{F}(u) + \hat{F}(u), \quad (4.15)$$

где

$$\tilde{F}(u) = F(\tilde{u}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2, \quad \hat{F}(u) = \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{du^3}(\zeta_1)(u - \tilde{u})^3, \quad (4.16)$$

где $\tilde{u} - \varepsilon_r \leq u \leq \tilde{u} + \varepsilon_r$. Применяя лемму 2.1 и (4.13), имеем

$$\int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2\right) du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\left|\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})\right|}} (1 + R_r),$$

где

$$|R_{\varepsilon_r}| < \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})\varepsilon_r^2\right)}{1 + \sqrt{1 - \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})\varepsilon_r^2\right)}}.$$

Поэтому в силу (4.13)

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2\right) du \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(r-2)\left(\frac{1}{2\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2\right)^2} + \frac{e^{c_2}}{2 \ln \frac{r-2}{\pi}} + o(r)\right)}} (1 + R_{\varepsilon_r}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$|R_{\varepsilon_r}| < \frac{\exp\left(-\frac{(r-2)\varepsilon_r^2}{2\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2\right)^2} - \frac{(r-2)e^{c_2}\varepsilon_r^2}{2 \ln \frac{r-2}{\pi}} + \varepsilon_r o(r)\right)}{1 + \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{(r-2)\varepsilon_r^2}{2\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2\right)^2} - \frac{(r-2)e^{c_2}\varepsilon_r^2}{2 \ln \frac{r-2}{\pi}} + \varepsilon_r o(r)\right)}}. \quad (4.18)$$

В силу (4.15) получаем

$$e^{F(u)} = e^{\tilde{F}(u) + \hat{F}(u)} = e^{\tilde{F}(u)} + e^{\tilde{F}(u)}(e^{\hat{F}(u)} - 1).$$

Следовательно,

$$\int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)} du = \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{\tilde{F}(u)} du + R'_{\varepsilon_r}, \quad (4.19)$$

где согласно (4.16)

$$\begin{aligned} |R'_{\varepsilon_r}| &< e^{F(\tilde{u})} \sup_{\tilde{u}-\varepsilon_r \leq u \leq \tilde{u}+\varepsilon_r} (e^{\hat{F}(u)} - 1) \\ &\times \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2\right) du. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Применяя равенство для $\widehat{F}(u)$ из (4.16) и оценку (4.14) и предполагая, что $\varepsilon_r^3 r$ не превосходит константы, не зависящей от r , получаем неравенство

$$\sup_{\tilde{u}-\varepsilon_r \leq u \leq \tilde{u}+\varepsilon_r} |e^{\widehat{F}(u)} - 1| < c_5 \varepsilon_r^3 \frac{r-2}{\ln \frac{r-2}{\pi}},$$

в котором c_5 – константа, не зависящая от r . Если же справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_r^3 r = 0, \quad (4.21)$$

то из предыдущего неравенства следует, что

$$|R'_{\varepsilon_r}| = e^{F(\tilde{u})} \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2\right) du \cdot o(r),$$

а в силу (4.19) при $r \rightarrow \infty$ имеет место следующее асимптотическое равенство:

$$\int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)} du \sim e^{F(\tilde{u})} \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 F}{du^2}(\tilde{u})(u - \tilde{u})^2\right) du. \quad (4.22)$$

Применяя теперь (4.22), (4.12), (4.17), (4.18) и предполагая, что выполнено равенство (4.21) и равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_r^2 r = \infty, \quad (4.23)$$

получаем при $r \rightarrow \infty$ следующее асимптотическое равенство:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)} du &\sim \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^2 \exp\left\{ -(r-2) \left(\frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right\} \\ &\times \left(\frac{r-2}{\pi} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} \right)^{1/4} 16r(r-1) \\ &\times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(r-2) \left(\frac{1}{2(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi})^2} + \frac{1}{2 \ln \frac{r-2}{\pi}} \right)}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $c_2 = c_2(r)$ – функция, удовлетворяющая равенству (4.10).

2°. Введем величины $u_+ = \tilde{u} + \varepsilon_r$, $u_- = \tilde{u} - \varepsilon_r$. Так как $u = \tilde{u}$ – решение уравнения (4.6), то

$$F(u_+) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_r^2}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_+), \quad F(u_-) = F(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon_r^2}{2} \frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_-), \quad (4.25)$$

где ζ_+ и ζ_- – числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\tilde{u} \leq \zeta_+ \leq \tilde{u} + \varepsilon_r, \quad \tilde{u} - \varepsilon_r \leq \zeta_- \leq \tilde{u}. \quad (4.26)$$

Применяя (4.5), (4.9) и (4.26), получаем

$$\max\left(\frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_-), \frac{d^2 F}{du^2}(\zeta_+)\right) < -\frac{r-2}{\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 + \varepsilon_r\right)^2} - \frac{r-2}{e^{c_2 + \varepsilon_r} \ln \frac{r-2}{2}} + c_6, \quad (4.27)$$

где c_6 – константа, не зависящая от r . Пусть теперь

$$\varepsilon_r = r^{-(1/2-\delta)}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{6}. \quad (4.28)$$

Тогда будут справедливы равенства (4.21) и (4.23), и в силу (4.25) и (4.27) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} F(\tilde{u}) - F(u_+) &> c_7 r^\delta, \quad F(\tilde{u}) - F(u_-) > c_7 r^\delta, \\ e^{F(u_+)} &= e^{F(\tilde{u}) - (F(\tilde{u}) - F(u_+))} < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 r^\delta}}, \\ e^{F(u_-)} &= e^{F(\tilde{u}) - (F(\tilde{u}) - F(u_-))} < \frac{e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 r^\delta}}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

в которых $c_7 > 0$ – константа, не зависящая от r .

Так как согласно (4.5) при больших r в области $0 \leq u \leq \tilde{u}$ справедливо неравенство $\frac{d^2 F(u)}{du^2} < 0$, $\frac{dF(\tilde{u})}{du} = 0$ и функция $F(u)$ монотонно возрастает с ростом u , то в силу (4.29) и (4.9) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{u}-\varepsilon_r} e^{F(u)} du &< c_8 \tilde{u} e^{F(u_-)} \\ &< c_8 \frac{\left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2\right) e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 r^\delta}}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

в котором c_8 – константа, не зависящая от r .

3°. Предположим, что положительное число $\tilde{x}_r$ удовлетворяет уравнению

$$\ln^{r-2} \tilde{x}_r = e^{\pi \delta \tilde{x}_r}, \quad (4.31)$$

где δ – число, введенное в (4.28). Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \frac{r-2}{\pi \delta} &= \frac{\tilde{x}_r}{\ln \ln \tilde{x}_r}, \\ \mu &\stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{r-2}{\pi \delta} = \ln \tilde{x}_r - \ln \ln \ln \tilde{x}_r = \tilde{y}_r - \ln \ln \tilde{y}_r \stackrel{\text{def}}{=} f(\tilde{y}_r), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$\tilde{y}_r = \ln \tilde{x}_r. \quad (4.33)$$

Пусть $\widehat{y}_r$ – решение уравнения

$$\mu = \widehat{y}_r - \ln \widehat{y}_r. \quad (4.34)$$

В силу (4.32) и (4.34) имеем неравенства

$$f(\widehat{y}_r) > \mu, \quad f(\mu) < \mu,$$

и так как функция $f(y)$ монотонно возрастает с ростом y , то в силу (4.32) $\widetilde{\widetilde{y}}_r$ удовлетворяет неравенству

$$\mu < \widetilde{\widetilde{y}}_r < \widehat{y}_r. \quad (4.35)$$

Согласно (4.32) и лемме 1.1 решение $\widehat{y}_r$ уравнения (4.34) имеет вид

$$\widehat{y}_r = \ln \frac{r-2}{\pi\delta} + \ln \ln \frac{r-2}{\pi\delta} + c_9,$$

а функция $c_9 = c_9(r)$ удовлетворяет равенству $\lim_{r \rightarrow \infty} c_9(r) = 0$, и поэтому в силу (4.35) и (4.33) справедливы соотношения

$$\ln \frac{r-2}{\pi\delta} < \ln \widetilde{\widetilde{x}}_r < \ln \frac{r-2}{\pi\delta} + \ln \ln \frac{r-2}{\pi\delta} + c_9, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} c_9(r) = 0. \quad (4.36)$$

Применяя теперь (4.29), (4.36), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left| \int_{u_+}^{\ln \widetilde{\widetilde{x}}_r} e^{F(u)} du \right| &< e^{F(u_+)} |\ln \widetilde{\widetilde{x}}_r - u_+| \\ &< \frac{e^{F(\widetilde{u})}}{e^{c_7 r \delta}} \left(\ln \frac{r-2}{\pi\delta} + \ln \ln \frac{r-2}{\pi\delta} + c_9 - u_+ \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

4°. Пусть $x_r^* = e^{4\sqrt{r(r-1)}}$. Оценим интеграл

$$\widetilde{\widetilde{I}}_r \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\widetilde{\widetilde{x}}_r}^{x_r^*} 16r(r-1)(\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx, \quad (4.38)$$

где $\widetilde{\widetilde{x}}_r$ – величина, определенная равенством (4.31), а $\omega(x)$ – функция, введенная в начале п. 1°. Согласно (4.31), (4.36) и определениям функции $\omega(x)$ и числа $\widetilde{\widetilde{x}}_r$ имеем

$$\begin{aligned} |\widetilde{\widetilde{I}}_r| &< \int_{\widetilde{\widetilde{x}}_r}^{x_r^*} 16r(r-1)x^{-3/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x(n^2 - \delta)} \right) dx \\ &< 16r(r-1) \int_{(r-2)/(\pi\delta)}^{\infty} x^{-3/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x(n^2 - \delta)} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.39)$$

5°. Оценим интеграл

$$\widehat{I}_r = \int_{x_r^*}^{\infty} (\ln^2 x - 16r(r-1))(\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx. \quad (4.40)$$

Пусть $\hat{x}_{r-2} = e^{r-2}$, $\tilde{x}_r = e^{2\sqrt{r(r-1)}}$. Тогда в силу леммы 3.1 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} 16r(r-1) \int_{\hat{x}_{r-2}}^{\tilde{x}_r} (\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx &> \int_{\tilde{x}_r}^{\infty} (\ln^r x) x^{-3/4} \omega(x) dx \\ &> \int_{x_r^*}^{\infty} (\ln^2 x - 16r(r-1)) (\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx. \end{aligned} \quad (4.41)$$

В силу (4.36) и определения числа $\hat{x}_{r-2}$ при больших r имеем $\tilde{\tilde{x}}_r < \hat{x}_{r-2}$. Поэтому из неравенства $\tilde{x}_r < x_r^*$ и неравенств (4.41) и (4.38) следует, что при больших r

$$\hat{I}_r < 16r(r-1) \int_{(r-2)/(\pi\delta)}^{\infty} x^{-3/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x(n^2-\delta)} \right) dx. \quad (4.42)$$

6°. Согласно определениям интегралов I_r , I_r' и I_r'' , введенных в начале п. 1°, имеем следующее равенство:

$$I_r = \int_0^{\tilde{u}-\varepsilon_r} e^{F(u)} du + \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)} du + \int_{\tilde{u}+\varepsilon_r}^{\ln \tilde{\tilde{x}}_r} e^{F(u)} du + \int_{\ln \tilde{\tilde{x}}_r}^{u_r^*} e^{F(u)} du + I_r'',$$

где $\tilde{u}$, ε_r — числа, введенные в п. 1°, а $\tilde{\tilde{x}}_r$ — величина, определенная в п. 3°. Предполагая, что выполнено равенство (4.28), в силу (4.30), (4.37)–(4.40) и (4.42) при больших r получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{\tilde{u}-\varepsilon_r} e^{F(u)} du + \int_{\tilde{u}+\varepsilon_r}^{u_r^*} e^{F(u)} du + I_r'' \right| \\ &< c_8 \frac{(\ln \frac{r-2}{\pi} + \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_{10}) e^{F(\tilde{u})}}{e^{c_7 r^\delta}} \\ &\quad + 32r(r-1) \int_{(r-2)/(\pi\delta)}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x(n^2-\delta)} \right) dx. \end{aligned} \quad (4.43)$$

В силу (4.22), (4.17) и (4.18) первое и второе слагаемые в правой части неравенства (4.43) при $r \rightarrow \infty$ есть

$$o\left(\int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)} du \right).$$

Поэтому при $r \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_r \sim \int_{\tilde{u}-\varepsilon_r}^{\tilde{u}+\varepsilon_r} e^{F(u)} du,$$

а в силу (4.24) справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}
 I_r &\sim 16 \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^{r-2} \exp \left\{ -(r-2) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right\} \\
 &\quad \times (r-2)^{1/4} r(r-1) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1/4} \\
 &\quad \times \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{(r-2) \left(\frac{1}{2 \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} \right)^2} + \frac{1}{2 \ln \frac{r-2}{\pi}} \right)}}, \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

где $c_2 = c_2(r)$ – функция, удовлетворяющая равенству (4.10).

7°. Мы воспользуемся известным равенством (см. [2], [3])

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + f(s) + g(s), \tag{4.45}$$

где $s \neq 0, 1$;

$$f(s) = \int_1^\infty x^{s/2-1} \omega(x) dx, \quad g(s) = \int_1^\infty x^{-s/2-1/2} \omega(x) dx.$$

Так как при любом натуральном числе r

$$\frac{d^r f}{ds^r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \int_1^\infty (\ln^r x) x^{s/2-1} \omega(x) dx$$

и справедливо равенство $f(s) = g(1-s)$, то для любого четного числа r имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^r f}{ds^r} \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{d^r g}{ds^r} \left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{d^r f}{ds^r} \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^r \int_1^\infty (\ln^r x) x^{-3/4} \omega(x) dx. \tag{4.46}$$

Далее, представляя число s в виде $s = 1/2 + z$, заметим, что $s(s-1) = z^2 - 1/4$. Поэтому, умножая обе части равенства (4.45) на величину $(1/2)s(s-1)$, в силу определения функции $\xi(s)$ и равенств (4.45), (4.46) получим для четной производной $\frac{d^r \xi}{ds^r} \left(\frac{1}{2}\right)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^r \xi}{ds^r} \left(\frac{1}{2}\right) &= r(r-1) \frac{d^{r-2} f}{ds^{r-2}} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \frac{d^r f}{ds^r} \left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= 2^{-(r+2)} \int_1^\infty (16r(r-1) - \ln^2 x) (\ln^{r-2} x) x^{-3/4} \omega(x) dx.
 \end{aligned}$$

Теперь, применяя (4.44) и (4.1), при $r \rightarrow \infty$ получаем следующее асимптотическое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d^r \xi}{ds^r} \left(\frac{1}{2} \right) &\sim 2^{-(r-2)} \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} + c_2 \right)^{r-2} \\ &\times \exp \left(-(r-2) \left(\frac{r-2}{\pi} \right)^{-1} e^{c_2} \right) (r-2)^{1/4} r(r-1) \left(\ln \frac{r-2}{\pi} \right)^{-1/4} \\ &\times \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{(r-2) \left(\frac{1}{2 \left(\ln \frac{r-2}{\pi} - \ln \ln \frac{r-2}{\pi} \right)^2} + \frac{1}{2 \ln \frac{r-2}{\pi}} \right)}}, \end{aligned}$$

где $c_2 = c_2(r)$ – функция, удовлетворяющая равенству (4.10). Из этого асимптотического равенства очевидно следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Пустыльников Л. Д. Об одном свойстве классической дзета-функции, связанном с гипотезой Римана о нулях // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 260–261.
2. Карацуба А. А. Основы теории чисел. М.: Наука, 1975.
3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

Поступило в редакцию
23.XII.1999