Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соловьев, О субдифференциале и производных по направлениям максимума семейства выпуклых функций. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 1, 107–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:55:33

УДК 519.7

В. Н. Соловьев

О субдифференциале и производных по направлениям максимума семейства выпуклых функций. II

В работе вычисляются производные по направлениям и субдифференциалы максимума выпуклых функций при отсутствии каких-либо условий компактности на множество индексов. Даны приложения полученных результатов к теории минимакса, в которых не предполагается вогнутости функции Лагранжа, а также приложения к теории двойственности невыпуклых экстремальных задач, которые усиливают аналогичные результаты, полученные ранее автором, В. А. Якубовичем и А. С. Матвеевым. Полученные результаты иллюстрируются на одной задаче оптимального планирования эксперимента.

Библиография: 33 наименования.

§ 1. Введение

В теории экстремальных задач и ее приложениях важную роль играет задача вычисления производной по направлениям и субдифференциала функции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x) := \sup_{s \in S} f_s(x), \quad (1.1)$$

где S – множество индексов, $f_s(x)$ – выпуклые функции, определенные на линейном пространстве X (которые могут принимать значения $\pm\infty$). Поскольку функция $f(x)$ выпукла, то в любой точке x_0 , в которой она конечна, существуют производные по направлениям $f'(x_0; \psi)$ (возможно, равные $\pm\infty$). Как известно [14], при определенных условиях компактности

$$f'(x_0; \psi) = \sup_{s \in S(x_0)} f'_s(x_0; \psi), \quad (1.2)$$

где

$$S(x) := \{s \in S \mid f_s(x) = f(x)\}. \quad (1.3)$$

В данной работе производные по направлениям и субдифференциалы максимума выпуклых функций вычисляются при отсутствии каких-либо условий компактности на множество индексов. Напомним, что если X – линейное топологическое пространство и X^* – его сопряженное пространство, т. е. множество всех линейных непрерывных функционалов $\langle x^*, x \rangle$ на X , то множество

$$\partial f(x_0) := \{x^* \in X^* \mid f(x) \geq f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle \forall x \in X\}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-01-00727).

называется *субдифференциалом функции* f в точке x_0 . Если A – некоторое подмножество пространства X , то множества

$$\begin{aligned} N(x_0 | A) &:= \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - x_0 \rangle \leq 0 \ \forall x \in A\}, \\ K(x_0 | A) &:= \{\psi \in X \mid \exists \varepsilon > 0: x_0 + \varepsilon\psi \in A\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

называются *нормальным конусом* и *конусом допустимых направлений* множества A в точке $x_0 \in A$ соответственно. Через $\text{dom } f := \{x : f(x) < +\infty\}$ обозначается эффективное множество функции $f(x)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $f(s, x) := f_s(x) : S \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ выпуклы по $x \in X$ при каждом $s \in S$ и что $f(x) \neq -\infty$ при всех $x \in X$ (обычно просто полагают $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, но для рассмотренной в § 6 прикладной задачи этого было бы недостаточно). Все топологии будут предполагаться хаусдорфовыми. Кроме того, обычно предполагается, что множество $S(x)$, определенное в (1.3), не пусто при всех x из множества $\text{dom } f$ (или из некоторого его подмножества), т. е. что максимум в (1.1) достигается для тех x , для которых он конечен.

В § 2 для произвольного семейства выпуклых функций $f_s(x)$ таких, что максимум в (1.1) достигается для всех точек x , для которых он конечен, получены необходимые и достаточные условия справедливости формулы (1.2) в терминах правой части той же формулы. С ее помощью в § 3 получены новые усиления теорем о субдифференциале максимума семейства выпуклых функций. Для компактного множества индексов эта задача была решена ранее в работах [4], [5], [9]–[11]. В некомпактном случае общая формула для субдифференциала максимума была установлена М. Валадье [31]. В § 3 даны некоторые усиления теорем, полученных М. Валадье [31] и автором [18], [19], [21]. Близкая задача о субдифференцировании функции

$$p(\bar{x}) = \text{vrai max}\{p(s, x(s)) : s \in \Omega\},$$

где (Ω, μ) – пространство с конечной мерой, $\bar{x} = x(s) \in L^\infty(\Omega, \mu)(X)$, X – банахово пространство, функция $p(s, x)$ измерима по s и сублинейна по x , изучалась в работе [8].

§ 2. Производные по направлениям максимума выпуклых функций

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $f_s(x) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на линейном пространстве X , и множество $S(x)$ не пусто для всех точек x из отрезка $[x_0, x_1] \subset \text{dom } f$, где $x_1 = x_0 + \delta\psi$, $\delta > 0$, и $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$. Кроме того, пусть выполнено любое из следующих условий:

- а) верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi)$ полунепрерывна сверху по переменной x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$ (при фиксированном ψ);
- б) для всех x из отрезка $[x_0, x_1]$ существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что функция $f'_{s(x)}(x; \psi)$ (равная производной $f'_s(x; \psi)$ при $s = s(x)$) полунепрерывна сверху по переменной x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$;

в) для всех $x \in [x_0, x_1]$ существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что при любом $z \in [x_0, x_1]$ функция $f(s(x), z)$ полунепрерывна сверху по переменной x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$.

Тогда для данной точки $x_0 \in \text{dom } f$ и направления $\psi \in K(x_0 \mid \text{dom } f)$ справедливо равенство (1.2), причем в случаях б) и в)

$$f'(x_0; \psi) = f'_{s(x_0)}(x_0; \psi). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва рассмотрим случай б). Как известно [14], для любой точки $x \in X$ и элемента $s \in S(x)$ имеем

$$f'(x; \psi) \geq f'_s(x; \psi). \quad (2.2)$$

С учетом выпуклости функций $f_s(x)$ для любой точки $x \in [x_0, x_1]$ и любого элемента $s \in S(x)$ отсюда получаем неравенства

$$f'(x; \psi) \geq f'_s(x; \psi) \geq -f'_s(x; -\psi) \geq -f'(x; -\psi). \quad (2.3)$$

По условию б) имеем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f'_s(x; \psi) \leq f'_{s(x_0)}(x_0; \psi), \quad (2.4)$$

если точка x стремится к точке x_0 вдоль отрезка $[x_0, x_1]$. Поэтому согласно (2.3) и (2.4) получаем

$$f'(x_0; \psi) \geq f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f'_s(x; \psi) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (-f'(x; -\psi)). \quad (2.5)$$

Кроме того, поскольку функция $f(x)$ выпукла, то для точек $x = x_0 + \lambda\psi \in [x_0, x_1]$ при $\lambda > 0$ справедливы неравенства (см. [15, теорема 23.1])

$$f'(x_0; \psi) \leq \frac{f(x_0 + \lambda\psi) - f(x_0)}{\lambda} = -\frac{f(x_0 + \lambda(-\psi)) - f(x_0)}{\lambda} \leq -f'(x_0; -\psi).$$

Таким образом, для точек $x = x_0 + \lambda\psi$ имеем

$$f'(x_0; \psi) \leq -f'(x_0; -\psi) \quad (2.6)$$

и в силу (2.5) окончательно получаем

$$f'(x_0; \psi) \geq f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (-f'(x; -\psi)) \geq -f'(x_0; -\psi).$$

Это доказывает равенство (2.1). Из (2.2) тогда следует формула (1.2).

Пусть теперь выполнено условие а), т. е.

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi) \leq \sup_{s \in S(x_0)} f'_s(x_0; \psi), \quad (2.7)$$

если x стремится к x_0 вдоль отрезка $[x_0, x_1]$. Тогда в силу соотношений (2.2), (2.7), (2.3) и (2.6) соответственно имеем неравенства

$$\begin{aligned} f'(x_0; \psi) &\geq \sup_{s \in S(x_0)} f'_s(x_0; \psi) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi) \\ &\geq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} (-f'(x; -\psi)) \geq f'(x_0; \psi). \end{aligned}$$

Это доказывает равенство (1.2) в случае а).

Наконец, пусть выполнено условие в). Можно считать, что выпуклая функция $f(x_0 + t\psi)$ непрерывна по t справа в нуле (иначе $f'(x_0; \psi) = -\infty$, и поэтому в силу (2.2) правые части в формулах (1.2) и (2.1) тоже равны $-\infty$). Докажем, что в этом случае из условия в) следует условие б). Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из [15, теорема 23.1] с учетом (1.3) при всех $s \in S(x)$ имеем

$$f'_s(x; \psi) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f_s(x + \lambda\psi) - f_s(x)}{\lambda} = \inf_{\lambda > 0} \frac{f_s(x + \lambda\psi) - f(x)}{\lambda}.$$

Поэтому для некоторого числа $\lambda_1 \in (0, \delta)$ будет

$$\frac{f(s(x_0), x_0 + \lambda_1\psi) - f(x_0)}{\lambda_1} \leq f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.8)$$

Так как по условию функция $f(s(x), x_0 + \lambda_1\psi)$ полунепрерывна сверху по переменной x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$, то найдется число $\delta_1 \in (0, \delta)$ такое, что при всех $x = x_0 + t\psi$, $t \in (0, \delta_1)$, будет выполнено неравенство

$$f(s(x), x_0 + \lambda_1\psi) \leq f(s(x_0), x_0 + \lambda_1\psi) + \frac{\varepsilon\lambda_1}{4}. \quad (2.9)$$

Кроме того, поскольку по предположению функция $f(x_0 + t\psi)$ непрерывна по t справа в нуле, то найдется число $\delta_2 \in (0, \delta)$ такое, что при всех $x = x_0 + t\psi$, $t \in (0, \delta_2)$, будет также выполнено неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) - \frac{\varepsilon\lambda_1}{4}. \quad (2.10)$$

Пусть $\delta_3 > 0$ будет минимальным из положительных чисел δ , δ_1 , δ_2 и λ_1 . Тогда в силу (2.8)–(2.10) при всех $x = x_0 + t\psi$, $t \in (0, \delta_3)$, будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) + \varepsilon &\geq \frac{[f(s(x), x_0 + \lambda_1\psi) - f(x)] + [f(x) - f(x_0)]}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \left(1 - \frac{t}{\lambda_1}\right) \frac{f(s(x), x_0 + (\lambda_1 - t)\psi) - f(x)}{\lambda_1 - t} + \frac{\varepsilon}{4} \geq \left(1 - \frac{t}{\lambda_1}\right) f'_{s(x)}(x; \psi) + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

(в последнем из них опять использовалась теорема 23.1 из [15]). Отсюда заключаем, что

$$f'_{s(x)}(x; \psi) \leq \left(f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) + \frac{3\varepsilon}{4}\right) : \left(1 - \frac{t}{\lambda_1}\right) \leq f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) + \varepsilon$$

при всех $x = x_0 + t\psi$, $t \in (0, \delta_0)$, где δ_0 – некоторое положительное число. Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из условия в) следует условие б), если функция $f(x)$ полунепрерывна снизу в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Условие б) равносильно следующему условию:

г) для всех x из отрезка $[x_0, x_1]$ существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что функция $f'_{s(x)}(x; \psi)$ непрерывна по переменной x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$.

Действительно, из неравенств (2.3) и (2.6) следует, что $f'_{s(x)}(x; \psi) \geq f'(x_0; \psi)$ для точек $x = x_0 + \lambda\psi$ при $\lambda > 0$. А тогда по теореме 2.1 в силу (2.1) из условия б) следует г). Обратное очевидно.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на линейном пространстве X , каждая из которых полунепрерывна снизу на любом отрезке в $\text{dom } f$, и множество $S(x)$ не пусто для всех точек $x \in \text{dom } f$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) формула (1.2) справедлива для всех точек $x_0 \in \text{dom } f$ и допустимых направлений $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$;
- б) верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; x_1 - x_0)$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на любом отрезке $[x_0, x_1] \subset \text{dom } f$;
- в) верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; x_1 - x_0)$ непрерывна по x в точке x_0 на любом отрезке $[x_0, x_1] \subset \text{dom } f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) следует из б) и определения (1.4) по теореме 2.1. Наоборот, пусть выполнено утверждение а). Тогда верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi)$ равна производной выпуклой функции f в точке x по направлению $\psi = x_1 - x_0$. Так как выпуклые функции $f_s(x)$, $s \in S$, полунепрерывны снизу на любом отрезке в $\text{dom } f$, то их верхняя грань $f(x)$ тоже полунепрерывна снизу на любом отрезке в $\text{dom } f$. Тогда по теореме 24.1 из [15] производная выпуклой функции $f(x)$ по направлению ψ будет полунепрерывна сверху по переменной x в точке x_0 на любом отрезке $[x_0, x_1] \subset \text{dom } f$, если $x_1 = x_0 + \varepsilon\psi$, $\varepsilon > 0$ (так как производная $f'(x; \psi)$ равна правой производной в нуле для функции одной переменной $\lambda \rightarrow f(x + \lambda\psi)$). Для доказательства того, что из а) следует б), нужно вспомнить, что производная $f'(x; \psi)$ равна верхней грани $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi)$.

Аналогично доказывается, что из а) следует в) (производная $f'(x; \psi)$, равная правой производной функции одной переменной $\lambda \rightarrow f(x + \lambda\psi)$, не убывает по переменной x при изменении точки x от x_0 до x_1). Наконец, очевидно, что из в) следует б).

Условие б) дает необходимые и достаточные условия справедливости формулы (1.2) в терминах правой части той же самой формулы для допустимых направлений $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$ (очевидно, что $f'(x_0; \psi) = +\infty$ при $\psi \notin K(x_0 | \text{dom } f)$). В §3 будет показано, что условие б) дает необходимые и достаточные условия также и для справедливости формулы (3.1).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на линейном пространстве X , и существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что при любом $x_1 \in \text{dom } f$ функция

$f'_{s(x)}(x; x_1 - x_0)$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда в точке $x_0 \in \text{dom } f$ справедливо равенство

$$f'(x_0; \psi) = f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) \quad \forall \psi \in K(x_0 \mid \text{dom } f). \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае условие б) из теоремы 2.1 выполнено для данной точки $x_0 \in \text{dom } f$ и любого направления $\psi \in K(x_0 \mid \text{dom } f)$, причем в этом условии элемент $s(x_0)$ не зависит от направления ψ . Поэтому справедливо равенство (2.1), в котором элемент $s(x_0)$ не зависит от ψ .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на линейном пространстве X , и существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что при любых $x_1 \in \text{dom } f$, $z \in [x_0, x_1]$ функции $f(s(x), z)$ полунепрерывны сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда в точке $x_0 \in \text{dom } f$ справедливо равенство (2.11).

Доказательство аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Условия б) и в) в теореме 2.1 практически полностью заменяют любые условия компактности, поскольку при этих условиях в равенствах (1.1) и (1.2) достигается максимум. Ранее нами было показано [21], что в равенствах (1.1) и (1.2) также достигается максимум, если функция $f(s, x) := f_s(x)$ полунепрерывна сверху по переменной s на множестве S при всех $x \in X$ и выполнено одно из следующих условий:

- 1) множество S – компактное топологическое пространство;
- 2) многозначное отображение $S(x): \text{dom } f \rightarrow S$ имеет непустые компактные значения и полунепрерывно сверху на любом отрезке в $\text{dom } f$;
- 3) множество S относительно компактно в топологическом пространстве Y , а функция $f(s, x)$ коэрцитивна по s в точке $x_0 \in \text{dom } f$ (функция $f(s, x)$ называется коэрцитивной по s в точке x_0 , если $\lim f(s, x_0) = -\infty$ при $s \in S$, $s \rightarrow s_0 \notin S$, когда множество S не замкнуто, и если $\lim f(s, x_0) = -\infty$ при $s \in S$, $\|s\| \rightarrow \infty$, когда оно не ограничено (и является подмножеством нормированного пространства Y ; в этих условиях S снабжается относительной топологией, индуцируемой на S из Y)) [21];
- 4) множество S является подмножеством конечномерного пространства $Y = \mathbb{R}^m$, а функция $f(s, x)$ коэрцитивна по s в точке x_0 ;
- 5) множество S – выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства Y , а функция $f(s, x)$ коэрцитивна по s в точке x_0 и вогнута на множестве S при всех $x \in X$.

В отличие от условий 1) и 2), при которых максимум в (1.1) достигается для всех $x \in X$, для которых он конечен, в условиях 3)–5) фактически требуется, чтобы максимум в (1.1) достигался только для точки $x_0 \in \text{dom } f$. Ниже мы приведем дальнейшие результаты такого рода. Как обычно, через $o(t)$ обозначается бесконечно малая величина, имеющая более высокий порядок малости, чем t (т.е. $o(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на линейном пространстве X , и задан отрезок $[x_0, x_1] \subset \text{dom } f$, где $x_1 = x_0 + \delta\psi$, $\delta > 0$. Пусть для всех $x = x_0 + t\psi \in [x_0, x_1]$ элементы $s(t) \in S$ выбраны из условия

$$f(s(t), x_0 + t\psi) \geq f(x_0 + t\psi) - o(t) \quad (2.12)$$

и при любом $z \in [x_0, x_1]$ функция $f(s(t), z)$ полунепрерывна сверху по переменной t в нуле на отрезке $[0, \delta]$. Тогда либо

1) $s(0) \in S(x_0)$ и справедливы равенства (1.2) и (2.1) при $s(x_0) := s(0)$, либо

2) $s(0) \notin S(x_0)$, функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$ и $f'(x_0; \psi) = -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва рассмотрим тот случай, когда элемент $s_0 := s(0) \in S(x_0)$. Докажем, что в этом случае справедливо равенство (2.1) при $s(x_0) := s(0)$ и, следовательно, справедливо также (1.2). Можно считать, что производная $f'(x_0; \psi)$ конечна (если $f'(x_0; \psi) = -\infty$, то в правой части неравенства (2.2) тоже стоит $-\infty$, и формула (2.1) доказана). Отметим сразу же, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(x_0 + t\psi) = f(x_0) \quad (2.13)$$

(в противном случае $f'(x_0; \psi) = -\infty$ в силу выпуклости функции $f(x)$ и конечности ее значения в точке x_0) и что можно считать δ равным 1 (этого можно добиться заменой вектора ψ на $\delta\psi$).

В силу выпуклости функции $f(s, x)$ по x имеем

$$(1-t)f(s(t), x_0) + tf(s(t), x_0 + \psi) \geq f(s(t), x_0 + t\psi),$$

поэтому согласно (2.12) и (1.1) при $t \in (0, 1)$ будет

$$\begin{aligned} (1-t)f(s(t), x_0) &\geq f(x_0 + t\psi) - o(t) - tf(s(t), x_0 + \psi) \\ &\geq f(x_0 + t\psi) - o(t) - tf(x_0 + \psi). \end{aligned}$$

Поскольку по условию число $f(x_0 + \psi)$ конечно, то с учетом (2.13) отсюда получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(s(t), x_0) \geq f(x_0).$$

Но так как $s(t) \in S$, то $f(s(t), x_0) \leq f(x_0)$, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(s(t), x_0) = f(x_0). \quad (2.14)$$

Предположим теперь, что формула (2.1) не верна. Тогда

$$f'(x_0; \psi) \geq f'_{s_0}(x_0; \psi) + \varepsilon \quad (2.15)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Если производная $f'_{s_0}(x_0; \psi)$ конечна, то для некоторого числа $\lambda_1 \in (0, 1)$ будет

$$\frac{f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0)}{\lambda_1} \leq f'_{s_0}(x_0; \psi) + \frac{\varepsilon}{4},$$

и поэтому в силу (2.15)

$$f'(x_0; \psi) \geq \frac{f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0)}{\lambda_1} + \frac{3\varepsilon}{4}. \quad (2.16)$$

Иначе $f'_{s_0}(x_0; \psi) = -\infty$, и неравенство (2.16) тоже будет выполняться для некоторого числа $\lambda_1 \in (0, 1)$.

С учетом (2.12), (2.16) и выпуклости $f(x)$ в обоих случаях

$$\begin{aligned} \frac{f(s(t), x_0 + t\psi) - f(s(t), x_0)}{t} &\geq \frac{f(x_0 + t\psi) - o(t) - f(x_0)}{t} \geq f'(x_0; \psi) - \frac{o(t)}{t} \\ &\geq \frac{f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0)}{\lambda_1} + \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{o(t)}{t}. \end{aligned}$$

Поэтому при $0 < t < \lambda_1$ в силу выпуклости функции $f(s(t), x)$ по x имеем

$$\begin{aligned} \frac{t}{\lambda_1} f(s(t), x_0 + \lambda_1 \psi) + \left(1 - \frac{t}{\lambda_1}\right) f(s(t), x_0) &\geq f(s(t), x_0 + t\psi) \\ &\geq f(s(t), x_0) + t \left(\frac{f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0)}{\lambda_1} + \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{o(t)}{t} \right) \end{aligned}$$

или после сокращений

$$f(s(t), x_0 + \lambda_1 \psi) \geq f(s(t), x_0) + f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) - f(s_0, x_0) + \left(\frac{3\varepsilon}{4} - \frac{o(t)}{t} \right) \lambda_1.$$

Но поскольку $s_0 \in S(x_0)$, то $f(s_0, x_0) = f(x_0)$ и из (2.14) следует, что найдется число $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ такое, что $f(s(t), x_0) \geq f(s_0, x_0) - \varepsilon \lambda_1 / 4$, $0 < t \leq \lambda_2$. Поэтому

$$f(s(t), x_0 + \lambda_1 \psi) \geq f(s_0, x_0 + \lambda_1 \psi) + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{o(t)}{t} \right) \lambda_1, \quad 0 < t \leq \lambda_2. \quad (2.17)$$

Так как $o(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, полученное неравенство противоречит полунепрерывности сверху функции $f(s(t), x_0 + \lambda_1 \psi)$ по переменной t в нуле.

Теперь еще рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$. Докажем, что в этом случае $s_0 := s(0) \in S(x_0)$ и, следовательно, как только что было показано, тоже справедливы равенства (1.2) и (2.1). Действительно, согласно предположению справедливо равенство (2.13), из которого, как мы видели, вытекает ключевое соотношение (2.14). Поскольку по условию функция $f(s(t), x_0)$ полунепрерывна сверху по t в нуле, то из (2.14) получаем

$$f(s_0, x_0) \geq \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} f(s(t), x_0) = f(x_0).$$

Но так как $s_0 \in S$, то согласно (1.1) $f(s_0, x_0) = f(x_0)$, т.е. $s_0 \in S(x_0)$.

Остается заметить, что если второе утверждение теоремы 2.3 не выполнено, то либо $s(0) \in S(x_0)$, либо функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$, и, следовательно, как выше было показано, будут справедливы равенства (1.2) и (2.1). Теорема 2.3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если в условиях теоремы 2.3 либо $o(t) = 0$ при $t = 0$, либо все функции $f_s(x)$, $s \in S$, полунепрерывны снизу на отрезке $[x_0, x_1]$, то $s(x_0) := s(0) \in S(x_0)$ и справедливы равенства (1.2) и (2.1).

Важный частный случай, когда все функции $f_s(x)$, $s \in S$, линейны по x , будет рассмотрен в § 5.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если в условиях теоремы 2.3 точка x_0 алгебраически внутренняя в $\text{dom } f$, то $s(x_0) := s(0) \in S(x_0)$ и справедливы равенства (1.2) и (2.1).

В этом случае выпуклая функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$ (см. [15]).

Условие (2.12) автоматически выполнено, когда $s(t) \in S(x_0 + t\psi)$ при всех $t \in [0, \delta]$. Это дает второе доказательство теоремы 2.1 для случая в).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть функция $f(s, x): S \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла по x на линейном пространстве X при каждом $s \in S$ и полунепрерывна сверху по s на топологическом пространстве S при каждом x из заданного отрезка $[x_0, x_1] \subset \text{dom } f$, где $x_1 = x_0 + \delta\psi$, $\delta > 0$. Пусть многозначное отображение $\tilde{S}(x): [x_0, x_1] \rightarrow S$ имеет непустые компактные значения и полунепрерывно сверху и существуют элементы $s(t) \in \tilde{S}(x_0 + t\psi)$, которые при всех $t \in (0, \delta)$ удовлетворяют условию (2.12). Тогда либо

- 1) справедлива формула (1.2) и для некоторого $s_0 \in S(x_0)$ в ней достигается максимум,

либо

- 2) функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$ и $f'(x_0; \psi) = -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выпуклая функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$, где $x_1 = x_0 + \delta\psi$ и $\delta > 0$, то $f'(x_0; \psi) = -\infty$. В противном случае выполнено равенство (2.13). Тогда опять будет выполнено ключевое соотношение (2.14) (и можно считать $\delta = 1$).

Определим множество $\tilde{S}$, равное объединению множеств $\tilde{S}(x_0 + t\psi)$, $t \in [0, 1]$. Так как отображение $\tilde{S}(x + t\psi): [0, 1] \rightarrow S$ имеет непустые компактные значения и полунепрерывно сверху, то множество $\tilde{S}$ компактно (см. [13, с. 119]). Поэтому из направленности $s(t) \in \tilde{S}$, $1 \geq t \geq 0$, можно выбрать поднаправленность $s(t(\mu))$, $\mu \in M$, сходящуюся к элементу $s_0 \in \tilde{S} \subset S$. Тогда из полунепрерывности сверху функции $f(\cdot, x_0)$ в точке s_0 и соотношения (2.14) следует, что

$$f(s(t(\mu)), x_0) \xrightarrow{M} f(x_0) \leq f(s_0, x_0).$$

Но из (1.1) очевидно обратное, поэтому $f(s_0, x_0) = f(x_0)$ и $s_0 \in S(x_0)$.

Если $f'(x_0; \psi) = -\infty$, то в силу (2.2) правые части в формулах (1.2) и (2.1) тоже равны $-\infty$. Иначе производная $f'(x_0; \psi)$ конечна. Тогда, как и в теореме 2.3, мы получим соотношения (2.15)–(2.17), последнее из которых противоречит полунепрерывности сверху функции $f(\cdot, x_0 + \lambda_1\psi)$ в точке $s_0 \in S$. Теорема доказана.

Условие (2.12) автоматически выполнено, когда $\tilde{S}(x) \subset S(x)$, например, если $\tilde{S}(x) = \{s(x)\}$, где $s(x)$ – непрерывная однозначная ветвь многозначного отображения $S(x): [x_0, x_1] \rightarrow S$. В частном случае $\tilde{S}(x) \equiv S(x)$ теорема 2.4 была доказана в [21].

§ 3. Субдифференциал максимума семейства выпуклых функций

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X и непрерывных в некоторой точке $x_1 \in X$. Пусть x_0 – алгебраически внутренняя точка в $\text{dom } f$ и для любого вектора $\psi \in X$ выполнено одно из следующих условий:

- а) верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; \psi)$ полунепрерывна сверху по переменной x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \psi]$;
- б) существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что функция $f'_{s(x)}(x; \psi)$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \psi]$;
- в) существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что функции $f(s(x), z)$ полунепрерывны сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon\psi]$ при всех $z \in [x_0, x_0 + \varepsilon\psi]$, где $\varepsilon = \varepsilon(\psi) > 0$.

Тогда имеет место равенство

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{con}} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0), \quad (3.1)$$

где замыкание берется в слабой* топологии пространства X^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как x_0 – алгебраически внутренняя точка $\text{dom } f$, то $K(x_0 \mid \text{dom } f) = X$. Тогда из включений $\text{dom } f \subset \text{dom } f_s$ вытекает, что $K(x_0 \mid \text{dom } f_s) = X$, $s \in S$, т.е. точка x_0 является алгебраически внутренней для множеств $\text{dom } f_s$, $s \in S$. Но поскольку каждая из функций $f_s(x)$ непрерывна в точке $x_1 \in X$, то она не принимает значения $-\infty$ и ее эффективное множество имеет непустую внутренность. Легко показать, что тогда $x_0 \in \text{int } \text{dom } f_s$ при всех $s \in S$. Кроме того, поскольку выпуклая функция непрерывна внутри своего эффективного множества, если она непрерывна хотя бы в одной точке x_1 [4], то все функции $f_s(x)$ непрерывны в точке x_0 , а потому в ней субдифференцируемы: $\partial f_s(x_0) \neq \emptyset$, $s \in S$.

Для доказательства формулы (3.1) воспользуемся тем, что всякое непустое выпуклое слабо* замкнутое множество $A \subset X^*$ можно представить в виде [13]

$$A = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle \leq \delta^*(x \mid A), x \in X\},$$

где

$$\delta^*(x \mid A) = \sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle$$

– опорная функция множества $A \subset X^*$. Отсюда следует, что непустые выпуклые слабо* замкнутые множества, имеющие одинаковые опорные функции, совпадают. При вычислении опорных функций будем использовать равенства [1], [13]

$$\delta^*(x \mid \overline{\text{conv}} A) = \delta^*(x \mid \text{conv } A) = \delta^*(x \mid A).$$

Опорная функция субдифференциала $\partial f(x_0)$ равна замыканию $\text{cl } f'(x_0; x)$ производной по направлению $f'(x_0; x)$ [14], [15]. А опорная функция правой части (3.1) равна верхней грани опорных функций субдифференциалов $\partial f_s(x_0)$, $s \in S(x_0)$. Поэтому формула (3.1) эквивалентна равенству

$$\text{cl } f'(x_0; x) = \sup_{s \in S(x_0)} \text{cl } f'_s(x_0; x), \quad x \in X, \quad (3.2)$$

ибо обе ее части являются непустыми выпуклыми слабо* замкнутыми подмножествами в X^* (слабая* замкнутость субдифференциала $\partial f(x_0)$ вытекает непосредственно из его определения, а его непустота – из включения [14])

$$\bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) \subset \partial f(x_0). \quad (3.3)$$

Согласно теореме 2.1 для любого направления $\psi \in X = K(x_0 \mid \text{dom } f)$ справедлива формула (1.2). Геометрически это означает, что надграфик производной по направлению $f'(x_0; \cdot)$ равен пересечению надграфиков производных $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$. Поскольку по определению надграфик замыкания функции равен замыканию ее надграфика, то для доказательства равенства (3.2) необходимо проверить, что замыкание пересечения надграфиков производных по направлению $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$, равно пересечению их замыканий.

Как мы видели, все функции $f_s(x)$ непрерывны в точке x_0 . Поэтому их производные $f'_s(x_0; \cdot)$ непрерывны на всем пространстве X [4]. Следовательно, точка $(f'(x_0; \psi_1) + 1, \psi_1)$, где $\psi_1 := x_1 - x_0$, является внутренней для надграфика каждой из функций $f'_s(x_0; \cdot)$, $s \in S(x_0)$ (см. неравенство (2.2)). Поэтому по теореме 6.5 из [15] (точнее, по ее очевидному бесконечномерному расширению) замыкание пересечения этих надграфиков совпадает с пересечением их замыканий, что доказывает равенство (3.2), а вместе с ним и формулу (3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условие в) в теореме 3.1 можно заменить более слабым условием

г) *существуют элементы $s(t) \in S$ такие, что при всех $t \in [0, \varepsilon]$, где $\varepsilon = \varepsilon(\psi) > 0$, выполнено условие (2.12), и функции $f(s(t), z)$ полунепрерывны сверху по t в нуле на отрезке $[0, \varepsilon]$ при любом $z \in [x_0, x_0 + \varepsilon\psi]$.*

Это вытекает из следствия 2.4. Отметим, что в условиях б), в) и г) элементы $s(x)$ (или $s(t)$) зависят от направления ψ (для разных направлений ψ возможен выбор различных элементов $s(x_0)$).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X , таких, что функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке $\bar{x} \in X$ и множество $S(x)$ не пусто при всех $x \in \text{int dom } f$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) при всех $x_0 \in \text{int dom } f$ справедливо равенство (3.1);
- б) верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; x_1 - x_0)$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на любом отрезке $[x_0, x_1] \subset \text{int dom } f$;
- в) верхняя грань $\sup_{s \in S(x)} f'_s(x; x_1 - x_0)$ непрерывна по x в точке x_0 на любом отрезке $[x_0, x_1] \subset \text{int dom } f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия б) для а) следует из теоремы 3.1. Необходимость была доказана в [21, теорема 7.3]. Эквивалентность б) и в) доказана в теореме 2.2.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X и непрерывных в некоторой точке $x_1 \in \text{int dom } f$. Пусть в точке $x_0 \in \text{dom } f$ для любого вектора $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$ выполнено хотя бы одно из условий а)–г) из теоремы 3.1. Тогда справедлива формула

$$\partial f(x_0) = \overline{\text{conv} \bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) + N(x_0 | \text{dom } f)}. \quad (3.4)$$

Этот результат доказывается по той же схеме, что и теорема 3.1 (подробности см. в [21]). Заметим только, что в случае г) можно считать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \delta\psi]$, поскольку иначе $f'(x_0; \psi) = -\infty$, и поэтому $\partial f(x_0) = \emptyset$, что в силу включения (3.3) делает тривиальным равенство (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Условие $x_1 \in \text{int dom } f$ можно заменить на условие [21]

$$K(x_0 | \text{dom } f) = \bigcap_{s \in S} K(x_0 | \text{dom } f_s).$$

Последнее условие заведомо выполнено, если функция $f(\cdot, x)$ полунепрерывна сверху и коэрцитивна во всех точках $x \in X$, для которых $f(s, x) < +\infty$ при всех $s \in S$ (см. [21], замечания 2.3 и 3.3; данное замечание относится и к теореме 3.2 из [21]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_1 \in X$, то $x_1 \in \text{int dom } f$ и условие непрерывности функций $f_s(x)$ в точке x_1 заведомо выполнено.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $f_s(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и найдется точка $x_1 \in \text{ri dom } f$, принадлежащая относительной внутренней $\text{ri dom } f_s$ всех множеств $\text{dom } f_s$, $s \in S$. Если в точке $x_0 \in \text{dom } f$ для любого вектора $\psi \in K(x_0 | \text{dom } f)$ выполнено хотя бы одно из условий а)–г) теоремы 3.1, то справедливо равенство (3.4).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если в условиях теоремы 3.4 множество

$$\bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f) \quad (3.5)$$

замкнуто, то субдифференциал $\partial f(x_0)$ можно записать в виде

$$\partial f(x_0) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j^* + x_0^* \mid x_j^* \in \partial f_{s_j}(x_0), s_j \in S(x_0), \alpha_j \geq 0, \right. \\ \left. j = 1, \dots, n+1, \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1, x_0^* \in N(x_0 \mid \text{dom } f) \right\}.$$

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательству теоремы 6.1 из [21]. Множество (3.5) будет замкнуто, когда функция $f(s, x)$ полунепрерывна сверху по s на множестве S при всех $x \in X$ и выполнено одно из условий 1)–5), указанных в § 2 (см. [21]).

Необходимо отметить, что ранее формула для субдифференциала верхней грани произвольного семейства выпуклых функций $f_s(x)$ была получена М. Валадьё [31] (тоже без каких-либо условий компактности на множество индексов). В частности, в нормированном пространстве X в любой точке x_0 , в которой функция $f(x)$ непрерывна, имеет место равенство

$$\partial f(x_0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{s \in S_\varepsilon(x_0)} \bigcup_{\|x - x_0\| \leq \varepsilon} \partial f_s(x) \right\}, \quad (3.6)$$

где

$$S_\varepsilon(x_0) := \{s \in S \mid f_s(x_0) \geq f(x_0) - \varepsilon\}.$$

При тех же условиях субдифференциал функции $f(x)$ можно выразить через ε -субдифференциалы $\partial_\varepsilon f_s(x_0)$ функций $f_s(x)$, вычисленные лишь в точке x_0 [32]:

$$\partial f(x_0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{conv}} \left\{ \bigcup_{s \in S_\varepsilon(x_0)} \partial_\varepsilon f_s(x_0) \right\}, \quad (3.7)$$

где

$$\partial_\varepsilon g(x_0) := \{x^* \in X^* \mid g(x) \geq g(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle - \varepsilon \quad \forall x \in X\}.$$

Формулы (3.1), (3.4), (3.6), (3.7) содержат операции слабого* замыкания и поэтому мало удобны для практического применения. Здесь мы отметим некоторые случаи, когда из (3.4) можно снять операции замыкания и (или) выпуклой оболочки.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть функции $f_s(x)$ вогнуты по s на выпуклом множестве $S(x_0)$ при всех $x \in \text{dom } f$ и удовлетворяют условиям теоремы 3.3. Тогда в точке $x_0 \in \text{dom } f$ имеет место равенство

$$\partial f(x_0) = \overline{\bigcup_{s \in S(x_0)} \partial f_s(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f)}.$$

Это вытекает из [21, лемма 8.5]. В следствии 4.1 из [21] были указаны случаи, когда из (3.4) можно снять не только операцию выпуклой оболочки, но и операцию замыкания. В такой упрощенной форме формула для субдифференциала очень удобна для практического применения (см. пример в §6).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X и непрерывных в некоторой точке $x_1 \in \text{int dom } f$. Пусть существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что для всех векторов $\psi \in K(x_0 \mid \text{dom } f)$ выполнено одно из следующих условий:

б) функция $f'_{s(x)}(x; \psi)$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \psi]$;

в) функции $f(s(x), z)$ полунепрерывны сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon\psi]$ при всех $z \in [x_0, x_0 + \varepsilon\psi]$, где $\varepsilon = \varepsilon(\psi) > 0$.

Тогда в точке $x_0 \in \text{dom } f$ справедливо равенство

$$\partial f(x_0) = \partial f_{s(x_0)}(x_0) + N(x_0 \mid \text{dom } f).$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3.3 и опирается на равенство (2.11).

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X и дифференцируемых по Гато на $\text{int dom } f$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_1 \in X$ и существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что при любом $\psi \in X$ функция $\langle \nabla f_{s(x)}(x), \psi \rangle$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \psi]$. Тогда функция $f(x)$ дифференцируема по Гато в точке $x_0 \in \text{int dom } f$ и $\nabla f(x_0) = \nabla f_{s(x_0)}(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функции $f_s(x)$ дифференцируемы по Гато, то $f'_s(x; \psi) = \langle \nabla f_s(x), \psi \rangle$ [24], поэтому формула (2.11) имеет вид

$$f'(x_0; \psi) = f'_{s(x_0)}(x_0; \psi) = \langle \nabla f_{s(x_0)}(x_0), \psi \rangle \quad \forall \psi \in X.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $\text{int dom } f$, то она дифференцируема по Гато в точке x_0 [24].

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $f_s(x): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $s \in S$, – произвольное семейство выпуклых функций, определенных на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X и дифференцируемых по Гато в точке $x_0 \in \text{int dom } f$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_1 \in X$ и существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что при любом $\psi \in X$ функции $f(s(x), z)$ полунепрерывны сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon\psi]$ при всех $z \in [x_0, x_0 + \varepsilon\psi]$, где $\varepsilon = \varepsilon(\psi) > 0$. Тогда функция $f(x)$ дифференцируема по Гато в точке $x_0 \in \text{int dom } f$ и $\nabla f(x_0) = \nabla f_{s(x_0)}(x_0)$.

Доказательство аналогично.

§4. Теоремы о минимаксе без условия вогнутости

Согласно теореме фон Неймана если функция $f(s, x)$ выпукла по x на множестве A при фиксированных $s \in S$ и вогнута по s на множестве S при фиксированных $x \in A$, то при дополнительных топологических предположениях на функцию Лагранжа $f(s, x)$ справедливо минимаксное соотношение (4.1). В [20] было показано, что условие вогнутости можно заменить на условие дифференцируемости функции максимума (1.1) в точке ее минимума на множестве A . Здесь мы дадим приложения полученных результатов к теории минимакса, не предполагая вогнутости функции Лагранжа $f(s, x)$ по переменной s и выпуклости множества A .

Множество A будет называться *звездным* относительно точки $x_0 \in A$, если $x - x_0 \in K(x_0 \mid A)$ для любой точки $x \in A$, т.е. если для любой точки $x \in A$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in A$ при всех $\lambda \in (0, \varepsilon)$. Выпуклое множество является звездным относительно любой своей точки.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть функция Лагранжа $f(s, x): S \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла по x при фиксированном $s \in S$ на линейном пространстве X и $x_0 \in A$ – точка минимума функции (1.1) на множестве $A \subset X$, которое является звездным относительно x_0 . Кроме того, пусть выполнено одно из следующих условий:

а) функция (1.1) имеет двусторонние производные $f'(x_0; x_1 - x_0)$ в любом допустимом направлении $x_1 - x_0$, $x_1 \in A$, и существует элемент $s(x_0) \in S(x_0)$;

б) существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что для любого $x_1 \in A$ функция $f'_{s(x)}(x; x_1 - x_0)$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$;

в) существуют элементы $s(x) \in S(x)$ такие, что для любых $x_1 \in A$, $z \in [x_0, x_1]$ функция Лагранжа $f(s(x), z)$ полунепрерывна сверху по x в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$.

Тогда (s_0, x_0) , где $s_0 := s(x_0)$, – это седловая точка функции Лагранжа $f(s, x)$ на множестве $S \times A$ и справедливо равенство

$$\min_{x \in A} \sup_{s \in S} f(s, x) = \max_{s \in S} \inf_{x \in A} f(s, x). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (1.1) достигает своего минимума на множестве A в точке $x_0 \in A$, поэтому для любой точки $x \in A$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) \geq f(x_0)$ для всех $\lambda \in (0, \varepsilon)$ и, следовательно, $(f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0))/\lambda \geq 0$. При $\lambda \rightarrow 0$ отсюда получаем

$$f'(x_0; x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in A. \quad (4.2)$$

Сначала разберем случай а). Поскольку функция (1.1) имеет двусторонние производные (4.2) и по условию

$$f(s_0, x_0) = \max_{s \in S} f(s, x_0), \quad (4.3)$$

то по лемме 1.3.1 из [20] производная функции $f(s_0; \cdot)$ в точке x_0 по любому направлению $x - x_0$, $x \in A$, равна соответствующей производной по направлению функции $f(\cdot)$:

$$f'(x_0; x - x_0) = f'_{s_0}(x_0; x - x_0) \quad \forall x \in A. \quad (4.4)$$

В силу этого и выпуклости лагранжиана $f(s_0, \cdot)$ имеем

$$f(s_0, x) - f(s_0, x_0) \geq f'_{s_0}(x_0; x - x_0) = f'(x_0; x - x_0), \quad x \in A,$$

что ввиду (4.2) преобразуется к

$$f(s_0, x_0) = \min_{x \in A} f(s_0, x). \quad (4.5)$$

Соотношения (4.3), (4.5) означают, что (s_0, x_0) – седловая точка лагранжиана $f(s, x)$ на множестве $S \times A$, и поэтому справедлива двойственность (4.1).

В случаях б) и в) равенство (4.4), которое использовалось в доказательстве теоремы 4.1, вытекает из следствий 2.1 и 2.2.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть функция Лагранжа $f(s, x): S \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выпукла по x на линейном пространстве X и полунепрерывна сверху по s на топологическом пространстве S , и пусть $x_0 \in A$ – точка минимума функции (1.1) на множестве $A \subset X$, которое является звездным относительно x_0 . Кроме того, пусть выполнено любое из условий 1)–5) из § 2, а также одно из следующих условий:

а) при фиксированных $x_1 \in A$ функции $f(s, \cdot)$, $s \in S(x_0)$, имеют двусторонние производные в точке x_0 в направлении $x_1 - x_0$, которые совпадают для всех элементов $s \in S(x_0)$;

б) функции $f(s, \cdot)$ совпадают для всех элементов $s \in S(x_0)$.

Тогда существует седловая точка (s_0, x_0) функции Лагранжа $f(s, x)$ на множестве $S \times A$ и выполнено равенство (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию функция $f(x)$ конечна в точке x_0 , поэтому из [21, теоремы 2.1–2.5] вытекает, что при $x = x_0$ максимум в (1.1) достигается на некотором элементе $s_0 \in S$, т.е. $s_0 \in S(x_0)$, и что производные по всем направлениям $\psi \in K(x_0 | A)$ для функции $f(x)$ в точке x_0 имеют вид (1.2). Тогда из условий а) и б) теоремы 4.2 получаем, что эти производные равны соответствующим производным функции $f(s_0; \cdot)$, что дает равенство (4.4), которое использовалось в доказательстве теоремы 4.1.

Для компактного множества индексов этот результат получен в [20].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В теореме 4.2 условие 2) § 2 можно заменить на следующее условие (см. теорему 2.4):

б) для любого $x_1 \in A$ существуют многозначное отображение $\tilde{S}(x): [x_0, x_1] \rightarrow S$, которое имеет непустые компактные значения и полунепрерывно сверху, и элементы $s(t) \in \tilde{S}((1-t)x_0 + tx_1)$, которые при всех $t \in [0, 1]$ удовлетворяют условию (2.12).

§ 5. Лагранжева схема двойственности для невыпуклых экстремальных задач

Пусть действительные функции $g_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, m$, определены на произвольном множестве S . Исходная задача состоит в нахождении

$$P := \sup_{s \in S} \{g_0(s) \mid g_i(s) \geq 0, i = 1, \dots, k, g_i(s) = 0, i = k+1, \dots, m\}. \quad (5.1)$$

Распространенный подход к этой задаче заключается в том, чтобы ввести функцию Лагранжа

$$f(s, x) := g_0(s) + \sum_{i=1}^m x_i g_i(s) \quad (5.2)$$

и затем попытаться решить вспомогательную задачу

$$f(x) := \sup_{s \in S} f(s, x), \quad (5.3)$$

которая не имеет функциональных ограничений. В отличие от исходной задачи (5.1), вспомогательную задачу (5.3) часто можно решить аналитически.

Двойственная вариационная задача состоит в нахождении

$$D := \inf_{x \in A} f(x), \quad (5.4)$$

где $A := \{x \in \mathbb{R}^m: x_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}$.

Как известно [14], в общем случае справедливо неравенство $P \leq D$. Равенство достигается в задачах выпуклого программирования и в линейных задачах оптимального управления.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть двойственная задача (5.4) имеет решение $x_0 \in A$ и для любого вектора $x \in A$ из некоторой окрестности точки x_0 вспомогательная задача (5.3) имеет решение $s = s(x) \in S$. Если каждая из функций $g_i(s(x)): A \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, непрерывна по переменной x_i в точке $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, то $P = D$ и элемент $s_0 := s(x_0)$ дает абсолютное решение исходной задачи (5.1) [30].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия б) теоремы 2.1 вытекает, что производные по всем координатным направлениям $\psi = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0) \in K(x_0 | A)$ в точке $x = x_0$ для функции $f(s_0, \cdot)$ равны соответствующим производным функции $f(x)$, так как для i -го координатного направления ψ производная $f'_{s(x)}(x; \psi) = \pm g_i(s(x))$ будет полунепрерывна сверху в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon\psi] \subset A$. Поскольку точка x_0 дает минимум функции $f(x)$ на множестве A , то если при $i \leq k$ i -я координата точки $x = x_0$ равна нулю, то правые производные функций $f(\cdot)$ и $f(s_0, \cdot)$ по переменной x_i в точке x_0 совпадают и неотрицательны, т. е.

$$g_i(s_0) \geq 0, \quad \text{если } 1 \leq i \leq k \text{ и } x_i^0 = 0.$$

Если же $i > k$ или i -я координата точки $x = x_0$ положительна, то правые и левые производные функций $f(\cdot)$ и $f(s_0, \cdot)$ по переменной x_i в точке x_0 совпадают и поэтому равны нулю, т. е.

$$g_i(s_0) = 0, \quad \text{если } i > k \text{ или } x_i^0 > 0.$$

В обоих случаях выполнены так называемые “условия дополняющей нежесткости”

$$g_i(s_0)x_i^0 = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

так что согласно (5.2) и определению элемента $s_0 := s(x_0)$ получаем

$$D = f(x_0) := f(s_0, x_0) = g_0(s_0).$$

Но, как фактически только что было показано, элемент s_0 удовлетворяет всем ограничениям исходной задачи (5.1), поэтому $g_0(s_0) \leq P$, откуда получаем $D = g_0(s_0) \leq P$. Так как $D \geq P$, то $P = D$ и элемент s_0 дает абсолютное решение исходной задачи (5.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Это утверждение будет верно и в том случае, если вспомогательная задача (5.3) имеет решения $s = s(x) \in S$ только для тех точек $x \in A$, которые отличаются от x_0 по одной координате (и достаточно близки к x_0). Если $1 \leq i \leq k$ и $x_i^0 = 0$, то подразумевается, что при фиксированных $x_j = x_j^0$, $j \neq i$, функция $g_i(s(x))$ непрерывна по x_i в нуле справа от $x_i = x_i^0 = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть двойственная задача (5.4) имеет решение $x_0 \in A$ и для любого вектора $x \in A$ из некоторой окрестности точки $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ вспомогательная задача (5.3) имеет решение $s = s(x) \in S$. Если для любых $i = 1, \dots, m$ и точек $z = (z_1, \dots, z_m) \in A$ из этой окрестности с координатами $z_j = x_j^0$, $j \neq i$, функция Лагранжа $f(s(x), z): A \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху по переменной x_i в точке x_0 , то $P = D$ и элемент $s_0 := s(x_0)$ дает абсолютное решение исходной задачи (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве теоремы 5.1 вместо условия б) из теоремы 2.1 на самом деле использовалось условие г). Но согласно замечанию 2.2 условия б) и г) эквивалентны. Кроме того, функция $f(x)$, являющаяся верхней гранью линейных функций, полунепрерывна снизу, поэтому согласно замечанию 2.1 из условия в) следует условие б). Согласно условиям следствия 5.1 для всех координатных направлений $\psi = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0) \in K(x_0 \mid A)$ в точке $x = x_0$ выполнено условие в) теоремы 2.1. Следовательно, выполнено условие г), а тем самым выполнены все условия теоремы 5.1.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть функции $g_i(s): S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, t$, при $i \leq k$ полунепрерывны сверху, а при $i > k$ непрерывны на компактном топологическом пространстве S . Если двойственная задача (5.4) имеет решение x_0 такое, что абсолютный максимум (5.3) лагранжиана $f(\cdot, x_0)$ достигается на единственном элементе $s_0 \in S$, то $P = D$ и элемент s_0 дает абсолютное решение исходной задачи (5.1) [17].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию функция Лагранжа (5.2) полунепрерывна сверху по s на компактном топологическом пространстве S при любом $x \in A$, поэтому по теореме Вейерштрасса при всех $x \in A$ в (5.3) достигается максимум, т.е. множество $S(x)$ не пусто при всех $x \in A$. Докажем, что многозначное отображение $S(x)$, рассматриваемое как многозначная функция переменной x_i , имеет замкнутый график. Действительно, пусть $s_\mu \in S(x_\mu)$, $s_\mu \rightarrow s$ и $x_\mu \rightarrow x$, причем направленность $x_\mu \in A$ сходится к точке x вдоль i -й координатной прямой. Согласно определению (1.3)

$$f(x_\mu) = f(s_\mu, x_\mu) \quad \forall \mu.$$

Как верхняя грань линейных по переменной x функций (5.2), функция $f(x)$ выпукла и полунепрерывна снизу. Поэтому она непрерывна на любой прямой в множестве A [15]. С учетом полунепрерывности сверху функций $g_i(s): S \rightarrow \mathbb{R}$ отсюда находим

$$f(x) = \overline{\lim} f(x_\mu) = \overline{\lim} f(s_\mu, x_\mu) \leq f(s, x).$$

В силу замкнутости компактного множества S имеем $s \in S$, а тогда согласно (1.1) полученное неравенство означает, что $s \in S(x)$.

Таким образом, рассматриваемое как функция переменной x_i многозначное отображение $S(x)$ имеет замкнутый график. Так как $S(x)$ принадлежит компакту S , то это отображение полунепрерывно сверху по переменной x_i (см. [13, с. 117]). Но по условию множество $S(x_0) = \{s_0\}$ состоит из одной точки, следовательно, любая однозначная ветвь $s(x) \in S(x)$ непрерывна по переменной x_i в точке x_0 . Поэтому для всех $i = 1, \dots, t$ и $z \in A$ функция Лагранжа $f(s(x), z): A \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху по переменной x_i в точке x_0 .

Иными методами этот результат был получен в [17, теорема 4]. Другим следствием теоремы 5.1 является также теорема 3 из [28], в которой предполагалось,

что S – аффинное подпространство линейного нормированного пространства, функции $g_i(s)$ дифференцируемы по Фреше в точке $s_0 \in S$ и существуют частные производные решения $s(x)$ вспомогательной задачи (5.3) по любой переменной x_i в точке x_0 (правые частные производные при $x_i^0 = 0$ и $i \leq k$). Наряду с [17], [28] отметим также более ранние работы [26], [27], [29]. Дальнейшие ссылки имеются в обзоре [20] и работе [28].

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть функции $g_i(s): S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, при $i \leq k$ полунепрерывны сверху, а при $i > k$ непрерывны на топологическом пространстве S . Пусть двойственная задача (5.4) имеет решение x_0 и функция $f(x)$ конечна для любого $x \in A$ из некоторой окрестности точки x_0 . Кроме того, пусть выполнено одно из условий 1)–5) § 2 и все функции $g_i(s)$, $i = 1, \dots, m$, постоянны на множестве $S(x_0)$. Тогда $P = D$ и абсолютный максимум (5.3) лагранжиана $f(\cdot, x_0)$ достигается на некотором элементе $s_0 \in S$, который дает абсолютное решение исходной задачи (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию функция Лагранжа (5.2) полунепрерывна сверху по s на топологическом пространстве S при любом $x \in A$, функция $f(x)$ конечна в точке x_0 и выполнено одно из условий 1)–5) § 2. Поэтому из теорем 2.1–2.5 [21] вытекает, что при $x = x_0$ максимум в (1.1) достигается на некотором элементе $s_0 \in S(x_0)$, т. е. множество $S(x_0)$ не пусто, и что производные по всем координатным направлениям $\psi = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0) \in K(x_0 | A)$, $i = 1, \dots, m$, имеют вид (1.2) ($f(x) < +\infty$ для любого $x \in A$ из некоторой окрестности точки x_0). Так как все функции $g_i(s)$, $i = 1, \dots, m$, постоянны на множестве $S(x_0)$, то для любого координатного направления $\psi \in K(x_0 | A)$

$$f'(x_0; \psi) = f'_{s_0}(x_0; \psi) = \pm g_i(s_0).$$

Дальнейшие рассуждения те же, что и в теореме 5.1.

В случае компактного множества индексов отсюда получаем второе доказательство следствия 5.2.

Пусть теперь Y – локально выпуклое линейное топологическое пространство и функции $F(s): S \rightarrow Y$, $g_i(s): S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, k$, определены на произвольном множестве S . Исходная задача имеет вид

$$P := \sup_{s \in S} \{g_0(s) \mid g_i(s) \geq 0, i = 1, \dots, k, F(s) = 0\}. \quad (5.5)$$

Соответствующая функция Лагранжа равна

$$f(s, x) := g_0(s) + \sum_{i=1}^k x_i g_i(s) + \langle y^*, F(s) \rangle, \quad (5.6)$$

где $x := (x_1, \dots, x_k, y^*)$ и вектор y^* принадлежит сопряженному пространству Y^* . Двойственная вариационная задача по-прежнему имеет вид (5.3), (5.4), где

$$A := \{x := (x_1, \dots, x_k, y^*) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, k, y^* \in Y^*\}. \quad (5.7)$$

В отличие от (5.1) допускается бесконечное число ограничений типа равенств, поэтому теперь двойственная задача бесконечномерна.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть двойственная задача (5.4) имеет решение $x_0 \in A$ и выполнено одно из условий а)–в) теоремы 4.1. Тогда $P = D$ и элемент $s_0 := s(x_0)$ дает абсолютное решение исходной задачи (5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция Лагранжа $f(s, x): S \times X \rightarrow \mathbb{R}$ линейна по x при фиксированном $s \in S$, и множество (5.7) выпукло. По теореме 4.1 (s_0, x_0) – это седловая точка функции Лагранжа $f(s, x)$ на множестве $S \times A$, и справедливо равенство (4.1). Из (5.6), (5.7) получаем, что

$$\inf_{x \in A} f(s, x) = g_0(s), \quad \text{если } g_i(s) \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad F(s) = 0. \quad (5.8)$$

В противном случае $\inf_{x \in A} f(s, x) = -\infty$. Поэтому (4.1) переходит в равенство $P = D$. Кроме того, так как (s_0, x_0) – седловая точка, из (5.8) также следует, что точка s_0 удовлетворяет всем ограничениям исходной задачи (5.5) и что

$$P = D = \inf_{x \in A} f(s_0, x) = g_0(s_0),$$

т. е. элемент s_0 дает абсолютное решение исходной задачи (5.5).

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть двойственная задача (5.4) имеет решение $x_0 \in A$ и для любого вектора $x \in A$ из некоторой окрестности точки x_0 вспомогательная задача (5.3) имеет решение $s = s(x) \in S$. Кроме того, пусть для любой точки $x_1 \in A$ выполнены условия

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(s((1-t)x_0 + tx_1), x_i) = f(s(x_0), x_i), \quad i = 0, 1. \quad (5.9)$$

Тогда $P = D$ и элемент $s_0 := s(x_0)$ дает абсолютное решение исходной задачи (5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что выполнено условие в) теоремы 4.1. Функция Лагранжа $f(s, z)$ линейна по z при фиксированном $s \in S$, поэтому для точек $z = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in [x_0, x_1]$ имеем

$$f(s, z) = (1-\lambda)f(s, x_0) + \lambda f(s, x_1).$$

Следовательно, в силу (5.9) при фиксированных $z \in [x_0, x_1]$ функция Лагранжа $f(s(x), z)$ полунепрерывна сверху по переменной $x = (1-t)x_0 + tx_1$ в точке x_0 на отрезке $[x_0, x_1]$.

Самым обременительным условием является то, что для любого вектора $x \in A$ из некоторой окрестности точки x_0 вспомогательная задача (5.3) должна иметь решение $s(x) \in S$. В действительности при применении лагранжевой схемы двойственности часто появляются неявные ограничения $f(x) < +\infty$, которые фактически должны быть включены во множество (5.7) всех допустимых значений двойственных переменных x . Тем не менее, указанные результаты представляют большой интерес, так как они не предполагают никаких условий выпуклости. В [28] даны применения такого рода результатов к невыпуклым линейно квадратичным задачам оптимального управления.

§ 6. Одна задача оптимального планирования эксперимента

Первоначально необходимость в вычислении производных по направлениям максимума выпуклых функций возникла у автора в связи с задачей так называемого MV-оптимального планирования эксперимента [22]

$$P := \inf_{p \in \Sigma_n} \max_{1 \leq j \leq s} \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle, \quad (6.1)$$

где $\Sigma_n := \{p \in \mathbb{R}^n: p_i \geq 0, i = 1, \dots, n, p_1 + \dots + p_n = 1\}$ – симплекс в $\mathbb{R}^n$, $b_j, j = 1, \dots, s$, – заданные векторы в $\mathbb{R}^m$ и $M(p)^+$ – псевдообратная матрица к неотрицательно определенной матрице

$$M(p) := \sum_{i=1}^n p_i H_i H_i^T$$

порядка $m \times m$ (матрица $M(p)$ называется *информационной матрицей*, а числа $p_1, \dots, p_n$ называются *весами плана* p). По смыслу этой задачи $\langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle = +\infty$, если вектор b_j не принадлежит образу матрицы $M(p)$ (величина $\langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle$ равна дисперсии оценки заданного скалярного параметра, определяемого вектором b_j , а этот параметр невозможно определить, если вектор b_j не принадлежит образу матрицы $M(p)$). Поэтому фактически

$$P = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \max_{1 \leq j \leq s} \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \max_{\mu \in \Sigma_s} \sum_{j=1}^s \mu_j \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle,$$

где

$$\mathcal{P}_n := \{p \in \Sigma_n : \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle < +\infty, j = 1, \dots, s\}$$

– незамкнутое выпуклое подмножество симплекса Σ_n , а μ – искусственно вводимый вектор переменных, который принадлежит симплексу Σ_s .

Нетрудно доказать, что

$$P = \max_{\mu \in \Sigma_s} \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{j=1}^s \mu_j \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle \quad (6.2)$$

и что двойственные задачи (6.1) и (6.2) имеют решения. Однако вследствие некомпактности множества $\mathcal{P}_n$ для вывода необходимых и достаточных условий оптимальности в этих задачах пришлось применять специальные методы [22] (простые примеры показывают, что при фиксированных $\mu \in \Sigma_s$ задача минимизации по переменной $p \in \mathcal{P}_n$ может не иметь решения; ниже мы обойдем эту трудность ценой рассмотрения несобственных функций).

Целевой функционал в двойственной задаче (6.2), который можно представить в виде [22]

$$L(\mu) := \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{j=1}^s \mu_j \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle = \inf_{p \in \Sigma_n} \sum_{\mu_j > 0} \mu_j \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle, \quad (6.3)$$

представляет собой так называемую задачу L -оптимального планирования эксперимента, решение которой можно найти известными методами [22]. Поэтому для численного решения двойственной задачи (6.2) нужно уметь находить производные по направлениям от вогнутой функции (6.3), которая зависит от переменной μ . В обозначениях § 2 имеем $x = \mu$, $s = p$, $S = \Sigma_n$ и

$$-f(s, x) = -f(p, \mu) := \sum_{\mu_j > 0} \mu_j \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle : \Sigma_n \times \Sigma_s \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}.$$

Для вычисления производных по направлениям воспользуемся равенством (6.3), в котором учтено принятое соглашение о том, что $\langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle = +\infty$, если вектор b_j не принадлежит образу матрицы $M(p)$. Тогда функция $-f(p, \mu)$ при фиксированных $\mu \in \Sigma_s$ является выпуклой и полунепрерывной снизу функцией переменной p на симплексе Σ_n (которая может принимать значение $+\infty$). Покажем, что при фиксированных $p \in \Sigma_n$ она является вогнутой функцией переменной μ на симплексе Σ_s (вогнутая функция, которая может принимать значение $+\infty$, называется *несобственной*). Действительно, пусть

$$J := \{j : 1 \leq j \leq s, \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle = +\infty\}. \quad (6.4)$$

Тогда если $\mu_j = 0$ при всех $j \in J$, то

$$-f(p, \mu) = \sum_{j \notin J} \mu_j \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle < +\infty. \quad (6.5)$$

Иначе значение этой функции бесконечно:

$$-f(p, \mu) = +\infty, \quad \text{если } \exists j \in J : \mu_j > 0. \quad (6.6)$$

Иными словами, при фиксированных $p \in \Sigma_n$ функция $-f(p, \mu)$ является линейной функцией переменной μ на выпуклом подмножестве $\{\mu \in \Sigma_s : \mu_j = 0, j \in J\}$ симплекса Σ_s , а в остальных точках этого симплекса она равна $+\infty$ (вне симплекса равна $-\infty$).

В терминах § 2 при фиксированных $s \in S$ функция $f(s, x) = f(p, \mu)$ является несобственной выпуклой функцией переменной x , которая может принимать значение $-\infty$. При фиксированных $x \in \Sigma_s$ эта функция является вогнутой и полунепрерывной сверху функцией переменной s на симплексе $S = \Sigma_n$. Поэтому выполнены условия теоремы 2.1 из [21], и по формуле (1.2) получаем

$$L'(\mu_0; \psi) = \inf_{p \in S(\mu_0)} (-f'_p(\mu_0; \psi)),$$

где $S(\mu_0)$ – множество всех L -оптимальных планов (т. е. решений задачи (6.3) при фиксированном $\mu = \mu_0$) и производная по направлениям $-f'_p(\mu_0; \psi)$ согласно (6.4) – (6.6) равна

$$\begin{aligned} -f'_p(\mu_0; \psi) &= \sum_{j \notin J} \psi_j \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle, & \text{если } \psi_j = 0 \quad \forall j \in J, \\ -f'_p(\mu_0; \psi) &= +\infty, & \text{если } \exists j \in J : \psi_j > 0. \end{aligned}$$

Для вывода необходимых и достаточных условий оптимальности в задаче (6.2) воспользуемся теоремой 3.2 из [21] в случае условия 2.1 (для компактного множества индексов). При фиксированных $\mu \in \Sigma_s$ функция $f(p, \mu)$ является вогнутой и полунепрерывной сверху функцией переменной p на симплексе $S = \Sigma_n$. Поэтому с учетом следствия 4.1 из [21] субдифференциал выпуклой функции $f(\mu) := -L(\mu) + \delta(\mu \mid \Sigma_s)$ в точке ее глобального минимума $\mu_* := (\mu_1^*, \dots, \mu_s^*)$ равен

$$\partial f(\mu_*) = \partial(-L(\mu_*)) + \partial\delta(\mu_* \mid \Sigma_s) = \bigcup_{p \in S(\mu_*)} \partial f_p(\mu_*) + N(\mu_* \mid \Sigma_s).$$

Нормальный конус $N(\mu_* \mid \Sigma_s)$ к симплексу Σ_s в точке $\mu_* \in \Sigma_s$ состоит из всех векторов $v = (v_1, \dots, v_s)$ таких, что $v_j = \lambda$, если $\mu_j^* > 0$, и $v_j \leq \lambda$, если $\mu_j^* = 0$, $j = 1, \dots, s$, где λ – произвольное число. А субдифференциал $\partial f_p(\mu_*)$ согласно (6.4)–(6.6) должен быть пустым множеством, если $f_p(\cdot)$ – несобственная функция. Однако $0 \in \partial f(\mu_*)$ в точке минимума μ_* , поэтому найдется такой элемент $p_* \in S(\mu_*)$, что субдифференциал $\partial f_{p_*}(\mu_*)$ не пуст. Согласно (6.4)–(6.6) в этом случае он состоит из единственного вектора $v = (v_1, \dots, v_s)$ с координатами $v_j = -\langle M(p_*)^+ b_j, b_j \rangle$, $j = 1, \dots, s$ (в этом случае $J = \emptyset$).

Таким образом, из условия $0 \in \partial f(\mu_*)$ получаем, что необходимым и достаточным условием оптимальности точки $\mu_* \in \Sigma_s$ в задаче (6.2) является существование такого элемента $p_* \in S(\mu_*)$, что $\max_{1 \leq j \leq s} \langle M(p_*)^+ b_j, b_j \rangle$ достигается для всех индексов $j = 1, \dots, s$ таких, что $\mu_j^* > 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq s} \langle M(p_*)^+ b_j, b_j \rangle &= \sum_{j=1}^s \mu_j^* \langle M(p_*)^+ b_j, b_j \rangle \\ &= \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{j=1}^s \mu_j^* \langle M(p)^+ b_j, b_j \rangle := L(\mu_*) \end{aligned}$$

(ибо включение $p_* \in S(\mu_*)$ означает, что p_* – это L -оптимальный план, т. е. решение задачи (6.3) при $\mu = \mu_*$). Поэтому

$$P = D = L(\mu_*) = \max_{1 \leq j \leq s} \langle M(p_*)^+ b_j, b_j \rangle.$$

Поскольку $p_* \in S(\mu_*) \subset \Sigma_n$, то p_* – MV-оптимальный план (решение исходной задачи (6.1)).

Окончательно, точка $\mu_* \in \Sigma_s$ тогда и только тогда дает решение двойственной задачи (6.2), когда найдется L -оптимальный план $p_* \in S(\mu_*)$ такой, что $\max_{1 \leq j \leq s} \langle M(p_*)^+, b_j, b_j \rangle$ достигается для всех индексов $j = 1, \dots, s$ таких, что $\mu_j^* > 0$. В этом случае p_* – искомый MV-оптимальный план. Вместе с необходимыми и достаточными условиями L -оптимальности плана $p_* \in S(\mu_*)$, полученными в [22], это дает другое доказательство теоремы 5 из [22].

Список литературы

1. *Благодатский В. И.* Теория дифференциальных включений. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1979.
2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
3. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. №3. С. 395–453.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
5. *Иоффе А. Д., Левин В. Л.* Субдифференциалы выпуклых функций // Тр. Моск. матем. общ-ва. 1972. Т. 26. С. 3–72.
6. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
7. *Курсаев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 1992.
8. *Левин В. Л.* Об одной задаче выпуклого анализа, возникающей в теории оптимального управления // Матем. заметки. 1990. Т. 47. С. 45–51.
9. *Левин В. Л.* Применение теоремы Э. Хелли в выпуклом программировании, задачах наилучшего приближения и смежных вопросах // Матем. сб. 1969. Т. 79. №2. С. 250–263.
10. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций. М.: Наука, 1985.
11. *Левин В. Л.* О некоторых свойствах опорных функционалов // Матем. заметки. 1968. Т. 4. №6. С. 685–696.
12. *Минченко Л. И., Борисенко О. Ф.* Дифференциальные свойства маргинальных функций и их приложения к задачам оптимизации. Минск: Наука и техника, 1992.
13. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
14. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. 2-е изд. М.: Наука, 1982.
15. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Наука, 1973.
16. *Силин Д. Б.* Субдифференциалы выпуклых функций и интегралы от многозначных отображений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычис. математика и кибернетика. 1984. №1. С. 55–59.
17. *Соловьев В. Н.* Двойственность невыпуклых экстремальных задач // ДАН СССР. 1990. Т. 314. №1. С. 135–138.
18. *Соловьев В. Н.* О субдифференциале максимума семейства выпуклых функций // УМН. 1996. Т. 51. №2. С. 175–176.
19. *Соловьев В. Н.* О субдифференциале максимума выпуклых функций // Докл. РАН. 1997. Т. 357. №1. С. 24–25.
20. *Соловьев В. Н.* Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания // УМН. 1997. Т. 52. №4. С. 49–86.
21. *Соловьев В. Н.* О субдифференциале и производных по направлениям максимума семейства выпуклых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №4. С. 173–200.
22. *Бахшиян В. Ц., Соловьев В. Н.* Теория и алгоритмы решения задач L - и MV-оптимального планирования эксперимента // Автоматика и телемеханика. 1998. №8. С. 80–96.
23. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

24. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
25. Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. Nonsmooth Analysis and Control Theory. Graduate Texts in Mathematics. V. 178. N. Y.: Springer-Verlag, 1998.
26. Lindberg P. O. Optimeringslära, en Introduktion // Kungl Tekniska Högskolan, Institutionen för Matematik. Stockholm, 1988.
27. Mangasarian O. L. Pseudo-Convex Functions // SIAM J. Control. Ser. A. 1965. V. 3. P. 281–290.
28. Matveev A. S., Yakubovich V. A. Nonconvex Problems of Global Optimization: Linear-Quadratic Control Problems with Quadratic Constraints // Dynamics and Control. 1997. V. 7. P. 99–134.
29. Rissanen J. On Duality without Convexity // J. Math. Anal. and Appl. 1967. V. 18. P. 269–275.
30. Soloviov V. Lagrangian's Duality Scheme in the Absence of Convexity // International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L. S. Pontryagin. Abstracts: Optimal Control and Appendices. Moscow State University, 1998, August 31 – September 6. P. 180–181.
31. Valadier M. Sous-différentiels d'une borne supérieure et d'une somme continue de fonctions convexes // C. R. Acad. Sci. Paris. Série A. 1969. V. 268. P. 39–42.
32. Volle M. Sous-différentiel d'une enveloppe supérieure de fonctions convexes // C. R. Acad. Sci. Paris. Série I. 1993. V. 317. P. 845–849.
33. Borwein J. M., Zhu Q. A survey of smooth subdifferential calculus with applications // CECM Research Report 98:105 (to appear in J. Nonlinear Analysis: Th. Meth., Appl.).

E-mail: solovio@orc.ru

Поступило в редакцию
29.IX.1999