Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тюрин, Неабелевы аналоги теоремы Абеля, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 1, 133–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:29:50

УДК 512.7

А. Н. Тюрин

Неабелевы аналоги теоремы Абеля

В работе [29] К. Вафа расширил версию зеркальной симметрии на пары, состоящие из многообразия Калаби–Яо и фиксированного векторного расслоения на нем, а в работе [30] обосновал общематематический смысл этого обобщения. В настоящей работе доказаны основные факты, связанные с геометрией векторных расслоений на многообразиях Калаби–Яо, и описаны все конструкции, позволяющие вложить их в общий контекст современных физических концепций.

Библиография: 30 наименований.

§ 1. Введение

Согласно старой идее В.И. Арнольда каждое понятие и конструкция вещественной геометрии имеет неформальный комплексный аналог (см. [1]). Хорошо известны многочисленные таблицы, иллюстрирующие эти аналогии, относящиеся к собственным числам и векторам эрмитовых матриц, фазе Берри, адиабатическим связностям, квантовому эффекту Холла, теореме фон Ноймана–Вигнера о сохранении электронных уровней и т. д. Сравнительно недавно появилась “Оксфордская программа” Дональдсона–Томаса (см. [10]), содержащая приложения идеи комплексификации к тонким конструкциям калибровочной теории. В этой статье предложено скромное развитие этой “Оксфордской программы” в нечетномерном случае. В этом случае оказывается возможным свести основные “бесконечномерные” конструкции программы, использующие калибровочные теории, к “обычным” конструкциям конечномерной симплектической или алгебраической геометрии. То, что мы предлагаем добавить к упомянутому разделу программы, можно назвать аналогом абелева интеграла в неабелевых калибровочных теориях.

Классический абелев интеграл принимает значения в якобиане кривой. Параллельно с этим некоммутативный аналог абелева интеграла принимает значения на среднем якобиане комплексного трехмерного многообразия (см. [12]). Подобный интеграл определен и для вещественных трехмерных многообразий, он хорошо известен как функционал Черна–Саймонса, принимающий значения на окружности. Только для получения топологических инвариантов трехмерного многообразия дозволено (и чрезвычайно полезно) рассматривать его возмущения. Наша же точка зрения аналитико-геометрическая, инспирированная комплексным случаем, диктует рассмотрение именно этого функционала как аналога абелева интеграла в неабелевой калибровочной теории. При этом свойства этого аналога, конечно, зависят от конкретной геометрии пространства представлений фундаментальной группы 3-многообразия. При этом мы вполне резонно можем ожидать потерю трансверсальности для целого класса многообразий таких, например, как

гомологические сферы Зейферта (см. [5]). Аналогичный эффект нас ожидает и в комплексном случае трехмерных многообразий Калаби–Яо, например при деформациях касательного расслоения.

Основанием для реализации аналога теоремы Абеля для классического функционала Черна–Саймонса являются эквивариантная теорема фон Ноймана–Вигнера об электронных уровнях и ее обобщения в том виде и с теми же аргументами, как и в статье [1].

Обращаясь к геометрии трехмерных многообразий Калаби–Яо, мы не можем обойти конструкции, приходящие из современной квантовой теории поля, связанные с эффектом *зеркальной симметрии* в ее геометрической трактовке. Поэтому в этой работе мы имеем дело с двумя сортами геометрических объектов и конструкций: результаты и доказательства относятся к аналогам теоремы Абеля, а параллельное описание конструкций зеркальной симметрии, как правило, остается без подробных доказательств (если только доказательства не абсолютно очевидны из контекста). Доказательства можно найти в специальной работе [26], где эти темы меняются местами.

В любом случае полезно начать описание конструкций с уже привычного трехмерного вещественного случая. Исследование этого случая занимает большую часть современных приложений неабелевых калибровочных теорий. Все аналитические детали прекрасно и полно описаны в фундаментальных работах [24], [9]. Поэтому мы можем себе позволить в следующем параграфе сосредоточиться на геометрии, обходя серьезные аналитические трудности или отсылая читателя к специальной литературе, посвященной соответствующей технике их преодоления.

В заключение остается заметить, что предварительная электронная версия этой работы появилась на сайте Интернационального Центра Теоретической Физики (г. Триест) в 1997 г. Я чрезвычайно благодарен всем, отзывавшимся на его появление и обогатившим его содержание в процессе многих дискуссий. Я особенно благодарен Саймону Дональдсону, многочисленные дискуссии с которым инициировали мой интерес к этой теме и который снабдил меня ранней версией концептуальной работы [10], Кумруну Вафе, электронная переписка с которым привела к прояснению общей физической концепции, а также Владимиру Арнольду и Борису Хесину за прояснение связи с “классической” концепцией комплексификации.

§ 2. Интеграл от формы Черна–Саймонса

Пусть Y – компактное, гладкое, 3-мерное многообразие и E_h – эрмитово расслоение фиксированного топологического типа (r, c_1) , где r – ранг, а $c_1 \in H^2(Y, \mathbb{Z})$ – первый класс Черна расслоения. Пусть, как обычно, $\mathcal{A}(E_h)$ – аффинное пространство (над векторным пространством $\Omega^1(\text{End } E_h)$) эрмитовых связностей и $\mathcal{G}_h$ – группа унитарных калибровочных преобразований¹. Тогда пространство орбит

$$\mathcal{B}_Y(E_h) = \mathcal{A}(E_h) / \mathcal{G}_h \quad (2.1)$$

будет бесконечномерным банаховым орбиформом.

¹Напомним, что в физической литературе $U(r)$ называется *калибровочной группой*, а $\mathcal{G}_h$ – *группой калибровочных преобразований*. В этой статье мы будем использовать эту терминологию как более удобную.

Сопоставляя связности ее тензор кривизны, получаем $\mathcal{G}_h$ -эquivариантное отображение

$$F: \mathcal{A}(E_h) \rightarrow \Omega^2(\text{End } E_h), \quad (2.2)$$

множество нулей которого корректно определено как подмножество пространства орбит $\mathcal{B}_Y(E_h)$, и

$$(F)_0 = \text{Rep}(\pi_1(Y)) \in \mathcal{B}_Y(E_h) \quad (2.3)$$

– пространство классов $U(r)$ -представлений фундаментальной группы многообразия Y . Этот конечномерный орбифолд расслоен:

$$\det: \text{Rep}(\pi_1(Y)) \rightarrow H^1(Y, \mathbb{R})/H^1(Y, \mathbb{Z}) = \text{Alb}(Y), \quad (2.4)$$

сопоставлением представлению его детерминантного характера.

Тогда на всем пространстве орбит $\mathcal{B}_Y(E_h)$ определена дифференциальная 1-форма Черна–Саймонса δCS_Y как $\mathcal{G}_h$ -инвариантная 1-форма на $\mathcal{A}(E_h)$, значение которой на касательном векторе $\omega \in \Omega^1(\text{End } E_h)$ в точке a задается формулой

$$\delta \text{CS}_Y(\omega) = \int_Y \text{tr}(\omega \wedge F_a), \quad (2.5)$$

где F_a – 2-форма кривизны связности a . (Здесь мы пользуемся двойственностью между 1- и 2-формами на 3-многообразии.)

Множество нулей этой формы $(\delta \text{CS}_Y)_0$ совпадает с множеством (2.3) плоских связностей:

$$(\delta \text{CS}_Y)_0 = (F)_0 = \text{Rep}(\pi_1(Y)). \quad (2.6)$$

Эту форму можно интегрировать по любому пути в пространстве орбит (2.1) и, в частности, вдоль пути, спущенного из аффинного пространства связностей $\mathcal{A}(E_h)$. В этом пространстве любая пара связностей $(a_0, a_0 + \omega)$ соединена интервалом $[0, 1]$ прямой $a_0 + t \cdot \omega$, так что, интегрируя форму (2.5) вдоль такого интервала, мы получаем функцию

$$\text{CS}_Y(a_0 + \omega) = \int_Y \text{tr} \left(\omega \wedge F_{a_0} - \frac{2}{3} \cdot \omega \wedge \omega \wedge \omega \right) \quad (2.7)$$

на пространстве $\Omega^1(\text{End } E_h)$ (отождествленного с $\mathcal{A}(E_h)$ при помощи выбора начальной точки a_0).

Если исходное векторное расслоение тривиально, то

$$\mathcal{G}_h = \text{Map}(Y, U(r))$$

и функция Черна–Саймонса (2.7) удовлетворяет соотношению

$$\text{CS}_Y(g(a)) = \text{CS}_Y(a) + \alpha_Y \cdot \deg g, \quad (2.8)$$

где g – любой элемент калибровочной группы, который мы рассматриваем как отображение. Такого же типа формула справедлива и для любого векторного расслоения.

Таким образом, наш интеграл определяет непрерывное отображение

$$\text{CS}_Y: \mathcal{B}_Y(E_h) \rightarrow \mathbb{R}/\alpha_Y \cdot \mathbb{Z} \quad (2.9)$$

однозначно с точностью до сдвига окружности $\mathbb{R}/\alpha_Y \cdot \mathbb{Z}$, определяемого выбором начальной точки a_0 .

Для специалиста по алгебраической геометрии естественно называть число α_Y *периодом* трифолда Y , а окружность

$$J^3(Y) = \mathbb{R}/\alpha_Y \cdot \mathbb{Z} = H^3(Y, \mathbb{R})/H^3(Y, \mathbb{Z}) \quad (2.10)$$

– *промежуточным якобианом* 3-многообразия Y .

Как и в комплексном случае, геометрический смысл периода заключается в следующем: рассмотрим универсальную связность A на прямом произведении $Y \times \mathcal{B}_Y(E_h)$, класс когомологий

$$\text{ch}_2(A) = [\text{tr } F_A \wedge F_A] \in H^4(Y \times \mathcal{B}_Y(E_h)) \quad (2.11)$$

и его компоненту разложения Кюннета

$$\text{ch}_2(A)^{3,1}: H_3(Y) \rightarrow H^1(\mathcal{B}_Y(E_h)). \quad (2.12)$$

Тогда значение образа фундаментального класса ориентированного многообразия Y на естественной образующей группы $H^1(\mathcal{B}_Y(E_h))$ и является периодом многообразия Y .

Таким образом, отображения (2.9) и (2.4) определяют (покомпонентно) отображение

$$\text{CSJ}_Y \cdot \det: \text{Rep}(\pi_1(Y)) \rightarrow J^3(Y) \times \text{Alb}(Y). \quad (2.13)$$

Это отображение естественно назвать *отображением Черна–Саймонса–Якоби* (CSJ-отображением для краткости).

В регулярном случае, т.е. при наличии свойства трансверсальности решений нашей системы уравнений, многообразие модулей $\text{Rep}(\pi_1(Y))$ гладко как орби-фолд (в частности, его размерность совпадает с его виртуальной размерностью), проекция $\det$, ограниченная на подпространство $\text{Rep}(\pi_1(Y))^{\text{irr}}$ неприводимых представлений, является собственным отображением (см. [24]), и степень этой проекции называется *инвариантом Кассона* многообразия Y .

Геометрические свойства отображения (2.13), которое по своим формальным свойствам является аналогом Абелева интеграла, и составляют предмет нашего исследования, в частности возникает вопрос: является ли отображение $(\text{CSJ} \cdot \det)^{\text{irr}}$ вложением?

Положительный ответ на этот вопрос естественно называть *аналогом теоремы Абеля*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Объясним более подробно, в чем состоит эта аналогия. Пусть Σ – риманова поверхность рода $g > 0$ и ω – любой голоморфный дифференциал на

ней с простыми нулями $p_1, \dots, p_{2g-2}$, $p_i \neq p_j$. Тогда образы этих нулей при отображении Абеля в якобиан кривой различны (как различны образы любых двух точек кривой в силу теоремы Абеля).

Если мы рассмотрим сравнительно хорошо исследованный случай, когда Y – гомологическая сфера, а калибровочная группа – простейшая неабелева группа $SU(2)$, то в регулярном, т.е. трансверсальном случае, множество нулей дифференциала Черна–Саймонса, лежащих в $\text{Rep}(\pi_1(Y))^{\text{irr}}$, есть конечное множество (инфинитезимально) изолированных точек

$$(\delta \text{CS}_Y)_0^{\text{irr}} = \{a_1, \dots, a_{n_+}\} \cup \{b_1, \dots, b_{n_-}\}, \quad (2.14)$$

где $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ – множества неприводимых представлений с одинаковой ориентацией. Тогда инвариант Кассона многообразия Y есть полусумма

$$\text{Cas}(Y) = \frac{1}{2}(n_+ - n_-) \quad (2.15)$$

(полусумма [24] вводится по топологическим соображениям для того, чтобы по модулю 2 инвариант Кассона совпадал с инвариантом Рохлина). Для нас же будет важна только аналитическая калибровочная конструкция этого инварианта. Поэтому мы будем называть инвариантом Кассона именно арифметическое число нулей формы Черна–Саймонса, т.е. *удвоенный* топологический инвариант. В этом случае $\text{Alb}(Y) = 0$ и $\text{CSJ}_Y \cdot \det = \text{CS}_Y$ отображает наше конечное множество в окружность $J^3(Y)$. Если образы пары точек с различной ориентацией совпадают, т.е. $\text{CS}_Y(a_i) = \text{CS}_Y(b_j)$, мы просто эту пару “сокращаем”, т.е. исключаем эту точку из образа нашего “интеграла”. Так что точная формулировка аналога теоремы Абеля для этого случая утверждает:

$$a_i \neq a_j \implies \text{CS}_Y(a_i) \neq \text{CS}_Y(a_j), \quad (2.16)$$

и то же самое верно для множества $\{b_i\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Как мы знаем, инвариант Кассона 3-многообразия является корреляционной функцией топологической квантовой теории поля. Следовательно, доказательство аналога теоремы Абеля “должно” быть чисто топологическим, например использующим только топологию расслоения

$$\text{CSJ}_Y: \mathcal{B}_Y(E_h) \rightarrow J^3(Y). \quad (2.17)$$

В частности, любая информация о топологии гладких слоев этого расслоения, т.е. слоев вне критических точек $\{\text{CSJ}(a_i)\} \cup \{\text{CSJ}(b_j)\}$, чрезвычайно полезна для доказательства того, что каждый особый слой содержит только одну простейшую особую точку. Предположим, что мы можем доказать, что топологическая структура неособого слоя очень проста, а именно

$$H^*(\text{CSJ}_Y^{-1}(a), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\nu], \quad (2.18)$$

где ν – некоторый специальный класс когомологий (как, например, в случае, когда гладкий слой расслоения – гомотопический цилиндр). Тогда монодромия вокруг особой точки меняет знак у ν и каждый особый слой может содержать только одну особую точку, где исчезает один цикл.

Во всяком (но трансверсальном) случае (удвоенный) инвариант Кассона может быть интерпретирован как топологическая эйлерова характеристика пространства $\mathcal{B}_Y(E_h)^*$ орбит неприводимых связностей:

$$\text{Cas}(Y) = \chi_{\text{top}}(\mathcal{B}_Y(E_h)^*), \quad (2.19)$$

вычисленная с помощью теории Морса–Новикова для CSJ – функции, являющейся отображением в окружность. Аналог теоремы Абеля утверждает, что CSJ-функция регулярна как функция Морса, т. е. на каждой поверхности уровня лежит не более одной критической точки одного знака.

Другой способ решения этой проблемы – свести ее к проблеме конечномерной геометрии лагранжевых подмногообразий стандартных симплектических орбит-фолдов таких, как пространства классов унитарных представлений фундаментальных групп римановых поверхностей.

§ 3. Геометрия диаграмм Хегора

Метод, использованный для исходного определения инварианта Кассона, не содержал бесконечномерного анализа калибровочной теории. Он опирался на простые геометрические конструкции “разрезания и склеивания” (хирургии) в конечномерной ситуации (см. [2]). Рассматривалась ориентированная гладкая риманова поверхность Σ в Y , разделяющая Y на два 3-мерных многообразия $Y_{\pm}$ с краем

$$\partial Y_{\pm} = \pm \Sigma, \quad (3.1)$$

т. е. Y склеивалось из двух кусков $Y_{\pm}$ вдоль их общего края Σ .

Следуя работам Таубса, можно повторить описание отображения Черна–Саймонса для любого 3-многообразия, скажем M , с краем $\partial M = \Sigma$, являющимся гладкой ориентированной римановой поверхностью рода $g > 1$. Мы ограничимся здесь случаем тривиального векторного расслоения с эрмитовой структурой прямого произведения, которое мы обозначим через E_0 . Повторяя конструкцию для компактного случая, рассмотрим аффинное пространство $\mathcal{A}(E_0)$ (над векторным пространством $\Omega^1(\text{End } E_0)$) гладких эрмитовых связностей, на которое действует группа эрмитовых калибровочных преобразований $\mathcal{G}_0$. Эти пространства рассматриваются как пространства Фреше в C^∞ -топологии или как предгильбертовы многообразия со структурой L^2_1 -пространств Соболева или с L^p_k -структурой с $p \geq 2$, $k \geq 1$. Тогда пространство орбит

$$\mathcal{B}_M(E_0) = \mathcal{A}(E_0)/\mathcal{G}_0 \quad (3.2)$$

обладает подобной же структурой (с другими p и q).

Как и выше (см. (2.2)), сопоставляя связности ее тензор кривизны, мы получаем $\mathcal{G}_0$ -эквивариантное отображение

$$F: \mathcal{A}(E_0) \rightarrow \Omega^2(\text{End } E_0), \quad (3.3)$$

нули которого (как и в (2.3)) корректно определены в пространстве орбит

$$(F)_0 = \text{Rep}(\pi_1(M)) \in \mathcal{B}_M(E_0). \quad (3.4)$$

Это пространство имеет интерпретацию пространства классов представлений фундаментальной группы многообразия M . Этот конечномерный орбифолд может быть расслоен:

$$\det: \text{Rep}(\pi_1(Y_{\pm})) \rightarrow H^1(Y_{\pm}, \mathbb{R})/H^1(Y_{\pm}, \mathbb{Z}) = \text{Alb}(Y_{\pm}). \quad (3.5)$$

Пусть

$$\mathcal{A}(E_0)^{\text{irr}}, \mathcal{B}_M(E_0)^{\text{irr}}, \dots \quad (3.6)$$

– подпространства связностей с неприводимым ограничением на край Σ .

Снова на пространстве орбит имеется 1-форма Черна–Саймонса δCS_M , определяемая $\mathcal{G}_0$ -инвариантной формой на $\mathcal{A}(E_0)$, значения которой на касательном векторе $\omega \in \Omega^1(\text{End } E_0)$ в точке a задаются той же формулой (2.5).

Снова, как и выше, мы интегрируем эту форму вдоль путей в пространстве орбит (3.2) и получаем функцию со значениями в окружности

$$\text{CS}_M: \mathcal{B}_M(E_0) \rightarrow \mathbb{R}/\alpha_M \cdot \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

Константу α_M опять назовем *периодом* 3-многообразия M , а окружность

$$J^3(M) = \mathbb{R}/\alpha_M \cdot \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

– его *промежуточным якобианом*.

Однако в случае многообразия с краем период α_M допускает немного другую интерпретацию: точная последовательность вырезания пары (M, Σ) дает изоморфизм

$$H_3(M, \Sigma) = H_2(\Sigma). \quad (3.9)$$

Рассматривая, как и раньше, универсальную связность A на прямом произведении $M \times \mathcal{B}_M(E_0)$ и класс когомологий

$$\text{ch}_2(A) = [\text{tr } F_A \wedge F_A] \in H^4(M \times \mathcal{B}_M(E_0), \partial M \times \mathcal{B}_M(E_0)) \quad (3.10)$$

с его кюннетовской компонентой, мы получаем гомоморфизм

$$\text{ch}_2(A)^{3,1}: H_3(M, \Sigma) \rightarrow H^1(\mathcal{B}_M). \quad (3.11)$$

При отождествлении (3.9) значение образа фундаментального класса $[\Sigma] \in H_2(\Sigma)$ ориентированной римановой поверхности Σ на естественной образующей группы $H^1(\mathcal{B}_M(E_0))$, задаваемой степенью отображения $g \rightarrow \text{SU}(2)$, и определяет период многообразия M .

Таким образом, промежуточный якобиан многообразия M приобретает новую интерпретацию:

$$J^3(M) = H^2(\Sigma, \mathbb{R})/H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) = J^2(\Sigma), \quad (3.12)$$

и последнюю окружность мы иногда будем называть *вторым якобианом римановой поверхности*.

Применяя эту конструкцию к трехмерным частям диаграммы Хегора (3.1), т.е. полагая $M = Y_{\pm}$, где $\partial Y_{\pm} = \pm \Sigma$,

$$E_0 = E_{\pm}, \quad \mathcal{B}_M(E_0) = \mathcal{B}_{Y_{\pm}}(E_{\pm}) \quad \text{и т.д.}, \quad (3.13)$$

мы имеем из (3.9)

$$H_3(Y_{\pm}, \Sigma) = \pm H_2(\Sigma). \quad (3.14)$$

Далее, пусть $\mathcal{B}_Y(E_h)^{\text{irr}} \subset \mathcal{B}_Y(E_h)$ – подпространство связностей с неприводимым ограничением на край Σ (как в (3.6)); тогда получаем “точную последовательность”

$$\mathcal{B}_Y(E_h)^{\text{irr}} \xrightarrow{I} \mathcal{B}_{Y_+}(E_+)^{\text{irr}} \times \mathcal{B}_{Y_-}(E_-)^{\text{irr}} \xrightarrow{J} \mathcal{B}_{\Sigma}(E|_{\Sigma})^{\text{irr}} \times \mathcal{B}_{\Sigma}(E|_{\Sigma})^{\text{irr}}, \quad (3.15)$$

где I индуцировано естественным вложением, а J – ограничением на границу. “Точность” означает, что I – вложение, J – субмерсия и

$$\text{Im}(I) = J^{-1}(\Delta), \quad (3.16)$$

где Δ – диагональ. (Детали этой конструкции описаны в [24, § 4].)

Теперь если наша начальная связность a_0 лежит в $\mathcal{B}_Y(E_h)$, то периоды левой и правой частей связаны равенством

$$\alpha_{Y_+} - \alpha_{Y_-} = \alpha_Y. \quad (3.17)$$

Более того, точная последовательность вырезания пары (Y, Σ) дает

$$H_3(Y, \Sigma) = H_3(Y) \oplus H_2(\Sigma), \quad (3.18)$$

и эта группа содержит выделенный элемент $([Y], \pm[\Sigma])$. Следовательно, параллельно с (3.15) мы имеем точную последовательность промежуточных якобианов

$$J^3(Y) \rightarrow J^3(Y_+) \times J^3(Y_-) \rightarrow J^2(\Sigma) \times J^2(\Sigma) \quad (3.19)$$

(см. (3.12)).

Таким образом, мы имеем естественную идентификацию промежуточных якобианов

$$J^3(Y_+) = J^3(Y_-) = J^2(\Sigma) = J^3(Y). \quad (3.20)$$

Трехмерные компоненты диаграммы Хегора определяют отображения Черна–Саймонса–Якоби:

$$\text{CS}_{Y_{\pm}} \cdot \det_{\pm}: \text{Rep}(\pi_1(Y_{\pm})) \rightarrow J^3(Y) \times \text{Alb}(Y_{\pm}). \quad (3.21)$$

Фундаментальная группа края каждой трехмерной компоненты $\pi_1(\Sigma)$ допускает эпиморфизмы

$$\phi_{\pm}: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(Y_{\pm}), \quad (3.22)$$

и пространства классов представлений

$$(F_{\pm})_0 = \text{Rep}(\pi_1(Y_{\pm})) \in \mathcal{B}_{Y_{\pm}}(E_{\pm}) \quad (3.23)$$

вложены в пространство представлений фундаментальной группы римановой поверхности Σ :

$$\phi_{\pm}^*: \text{Rep}(\pi_1(Y_{\pm})) \rightarrow \text{Rep}(\pi_1(\Sigma)). \quad (3.24)$$

Отождествим пространства представлений с их образами:

$$\phi^*(\text{Rep}(\pi_1(Y_{\pm}))) = \mathcal{L}_{\pm}. \quad (3.25)$$

Напомним, что на пространстве орбит $\mathcal{B}_{\Sigma}(E_h)$ эрмитова расслоения E_h на римановой поверхности Σ существует каноническая симплектическая структура. Эта структура индуцирована канонической 2-формой, задаваемой на касательном пространстве $\Omega^1(\text{End } E_h)$ в точке a формулой

$$\int_{\Sigma} \text{tr}(\omega_1 \wedge \omega_2).$$

Хорошо известно (см. следующий параграф), что эта форма замкнута, $\mathcal{G}_h$ -инвариантная и не вырождена. Более того, отображение кривизны $F: \mathcal{A}(E_h) \rightarrow \Omega^2(\text{End } E_h)$ есть отображение моментов для действия группы калибровочных преобразований. Следовательно, симплектическая редукция определяет симплектическую структуру ω_{Σ} на $\mathcal{B}_{\Sigma}(E_h)$.

С другой стороны, повторяя конструкции (3.11), (3.12) “ μ -классов”, рассмотрим универсальную связность A на прямом произведении $\Sigma \times \mathcal{B}_{\Sigma}(E_h)$, класс когомологий $\text{ch}_2(A)$ (2.11) и его компоненту Кюннета $\text{ch}_2(A)^{2,2}: H_2(\Sigma) \rightarrow H^2(\mathcal{B}_{\Sigma}(E_h))$ (2.12). Ограничение на фундаментальный класс римановой поверхности Σ равно

$$\text{ch}_2(A)^{2,2}([\Sigma])|_{\text{Rep}(\pi_1(\Sigma))} = [\omega_0]. \quad (3.26)$$

Легко видеть, что подмногообразия

$$\mathcal{L}_{\pm} \subset \text{Rep}(\pi_1(\Sigma)) \quad (3.27)$$

лагранжевы относительно канонической симплектической структуры ω_{Σ} .

Ограничиваясь только неприводимыми представлениями

$$\text{Rep}^{\text{irr}}(\pi_1(\Sigma)) \subset \text{Rep}(\pi_1(\Sigma)), \quad (3.28)$$

имеем пересечение

$$\mathcal{L}_{\pm}^{\text{irr}} = \mathcal{L}_{\pm} \cap \text{Rep}^{\text{irr}}(\pi_1(\Sigma)). \quad (3.29)$$

Тогда можно показать, что пересечение

$$\mathcal{L}_{+}^{\text{irr}} \cap \mathcal{L}_{-}^{\text{irr}} \quad (3.30)$$

компактно (см. [2]) и инвариант Кассона (2.15) есть число пересечения

$$\text{Cas}(Y) = \text{alg} \#(\mathcal{L}_+^{\text{irr}} \cap \mathcal{L}_-^{\text{irr}}), \quad (3.31)$$

где точки пересечения снабжены ориентацией (и кратностями).

Это число не зависит от диаграммы Хегора (см. [2]).

Эту классическую конструкцию конечномерной геометрии мы хотим дополнить таким же описанием отображения Черна–Саймонса, так что наша основная проблема может быть сформулирована и решена в рамках классической конечномерной симплектической геометрии.

§ 4. Предквантование Черна–Саймонса

Чтобы применить к нашей задаче общую процедуру квантования, мы должны представить пространство классов представлений $\text{Rep}(\pi(\Sigma)) = R_g$ как классическое фазовое пространство некоторой механической системы. Кратко напомним все шаги этой процедуры.

Каждая классическая теория поля на многообразии M имеет три ингредиента:

- 1) набор $\mathcal{A}$ полей на M , которые являются геометрическими объектами такими, как сечения векторных расслоений, связности на векторных расслоениях, отображения M в другое многообразие-цель и так далее;
- 2) функционал действия $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ – интеграл функции L (лагранжиана) полей;
- 3) набор наблюдаемых, т.е. функционалов на пространстве полей

$$\mathcal{W}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}.$$

В нашем случае мы имеем следующие ингредиенты: M – любое 3-многообразие, набор полей

$$\mathcal{A} = \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{su}(2)$$

и

$$S(a) = \frac{1}{8}\pi^2 \int_M \text{tr} \left(ada + \frac{2}{3}a^3 \right) \quad (4.1)$$

– тот самый функционал Черна–Саймонса (2.7), который мы рассмотрели выше, но только для тривиального расслоения ранга 2 и группы $\text{SU}(2)$.

Наблюдаемые задаются петлями Вильсона, т.е. узлами $K \subset M$. Сами функционалы задаются формулой

$$\mathcal{W}_K(a) = \text{tr}(\text{Hol}_K(a)),$$

т.е. являются следами голономии связности a вдоль узла K (см. [3]).

Теперь наше пространство

$$R_g = \text{Rep}(\Sigma) = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), \text{SU}(2))/\text{PU}(2), \quad (4.2)$$

т. е. пространство классов $SU(2)$ -представлений фундаментальной группы римановой поверхности рода g , стратифицировано подпространствами приводимых представлений:

$$R_g^{\text{red}} \subset R_g, \quad R_g^{\text{irr}} = R_g - R_g^{\text{red}}. \quad (4.3)$$

(Заметим, что наши пространства зависят только от рода g , что и отражено в сокращении обозначений.) Чтобы представить это пространство как фазовое пространство некоторой механической системы, рассмотрим компактную риманову поверхность Σ рода $g > 1$ и тривиальное эрмитово векторное расслоение E_h ранга 2 на ней. Как обычно, пусть $\mathcal{A}_h$ – аффинное пространство (над векторным пространством $\Omega^1(\text{End } E_h)$) эрмитовых связностей и $\mathcal{G}_h$ – группа эрмитовых калибровочных преобразований. Это пространство стратифицируется:

$$\mathcal{A}_h^{\text{red}} \subset \mathcal{A}_h,$$

где слева стоит пространство приводимых связностей. Как обычно, положим

$$\mathcal{A}_h^{\text{irr}} = \mathcal{A}_h - \mathcal{A}_h^{\text{red}}.$$

Сопоставление связности ее тензора кривизны определяет $\mathcal{G}_h$ -эквивариантное отображение

$$F: \mathcal{A}(E_h) \rightarrow \Omega^2(\text{End } E_h) = \text{Lie}(\mathcal{G}_h)^* \quad (4.4)$$

в коалгебру Ли группы калибровочных преобразований.

Мы можем рассматривать это отображение как отображение моментов действия $\mathcal{G}_h$. Подпространство

$$F^{-1}(0) = \mathcal{A}_F \quad (4.5)$$

– подпространство плоских связностей, и

$$\mathcal{A}_F^{\text{irr}} = \mathcal{A}_F \cap \mathcal{A}_h^{\text{irr}}$$

– подпространство неприводимых плоских связностей.

Для связности $a \in \mathcal{A}_F$ и касательного вектора ω к $\mathcal{A}_h$ в a ,

$$\omega \in \Omega^1(\text{End } E_h) = T\mathcal{A}_h,$$

имеем

$$\omega \in T\mathcal{A}_F \iff \nabla_a(\omega) = 0. \quad (4.6)$$

Тривиальное векторное расслоение E_h допускает тривиальную связность θ , интересную и важную со многих точек зрения, предоставляющую возможность идентифицировать $\mathcal{A}_h$ с $\Omega^1(\text{End } E_h)$, сопоставляя связности a форму $a - \theta$. Мы будем идентифицировать таким образом связности и формы.

Тогда пространство $\mathcal{A}_h = \Omega^1(\text{End } E_h)$ мы можем рассматривать как *набор полей* классической системы YM-QFT с *функционалом Янга–Миллса*

$$S(a) = \int_{\Sigma} |F_a|^2.$$

Тогда $\mathcal{A}_F$ – классическое фазовое пространство, т.е. пространство решений уравнения Эйлера–Лагранжа $\delta S(a) = 0$.

Как уже отмечалось, существует симплектическая структура на аффинном пространстве $\mathcal{A}_h$, индуцированная канонической 2-формой на касательном пространстве $\Omega^1(\text{End } E_h)$ в точке a , задаваемая формулой

$$\Omega_0(\omega_1, \omega_2) = \int_{\Sigma} \text{tr}(\omega_1 \wedge \omega_2). \quad (4.7)$$

Эта форма $\mathcal{G}_h$ -инвариантна и ее ограничение на $\mathcal{A}_F^{\text{irr}}$ вырождено вдоль $\mathcal{G}_h$ -орбит: действительно, в точке a для касательного вектора $\omega \in \Omega^1(\text{End } E_h)$ имеем

$$\omega \in T\mathcal{G}_h \iff \omega = \nabla_a \varphi \quad \text{для } \varphi \in \Omega^0(\text{End } E_h) = \text{Lie}(\mathcal{G}_h)^*,$$

и

$$\int_{\Sigma} \text{tr}(\nabla_a \varphi \wedge \omega) = \int_{\Sigma} \text{tr}(\varphi \wedge \nabla_a \omega) = 0.$$

Следовательно,

$$\omega \in T\mathcal{A}_F \iff \Omega_0(\nabla_a \varphi, \omega) = 0. \quad (4.8)$$

Интерпретируя (4.4) как отображение моментов и используя аргументы симплектической редукции, мы получаем невырожденную замкнутую симплектическую форму Ω на пространстве

$$\mathcal{A}_F / \mathcal{G}_h = R_g$$

классов $\text{SU}(2)$ -представлений фундаментальной группы римановой поверхности и описанную стратификацию этого пространства. Эта форма определяет симплектическую структуру на R_g^{irr} и структуру симплектического орбифолда на R_g .

С другой стороны, форма Ω_0 на $\mathcal{A}_h$ является дифференциалом 1-формы D , задаваемой формулой

$$D(\omega) = \int_{\Sigma} \text{tr}((a) \wedge \omega). \quad (4.9)$$

Мы рассмотрим эту форму как унитарную связность A_0 на тривиальном $\text{U}(1)$ -расслоении L_0 на $\mathcal{A}_h$.

Для того чтобы спустить это эрмитово расслоение и эту связность на пространство орбит, определим Θ -коцикл (или Θ -торсер) на тривиальном линейном расслоении (см. [22]). Этот коцикл есть $\text{U}(1)$ -значная функция Θ на $\mathcal{A}_h \times \mathcal{G}_h$, определяемая следующим образом: для любой тройки (Σ, a, g) , где $(a, g) \in \mathcal{A}_h \times \mathcal{G}_h$, найдем тройку (Y, A, G) , где Y – гладкое компактное 3-многообразие, A – $\text{SU}(2)$ -связность на тривиальном векторном расслоении $\mathcal{E}$ ранга 2 на Y и калибровочное преобразование G на нем такие, что

$$\partial Y = \Sigma, \quad a = A|_{\Sigma} \quad \text{и} \quad g = G|_{\Sigma}.$$

Тогда

$$\Theta(a, g) = e^{i(\text{CS}(A^G) - \text{CS}(A))}. \quad (4.10)$$

Напомним, что функционал Черна–Саймонса на пространстве $\mathcal{A}(\mathcal{E}_h)$ унитарных связностей на тривиальном расслоении задается формулой (2.7). Легко проверить, что функция (5.10) не зависит от выбора тройки (Y, A, G) (см. [22, § 2]).

Дифференциал функции Θ в точке (a, g) задается формулой

$$d\Theta(\omega, \varphi) = \frac{\pi i}{4} \Theta \int_{\Sigma} (\text{tr}(g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g) - \text{tr}(a \wedge \nabla_{a^g}\varphi) + 2 \text{tr}(F_{a^g} \wedge \varphi)), \quad (4.11)$$

где $\omega \in \Omega^1(\text{End } E_h)$ и $\varphi \in \Omega^0(\text{End } E_h) = \text{Lie}(\mathcal{G}_h)$.

Но ограничение этого дифференциала на пространство плоских связностей выглядит гораздо проще:

$$d\Theta(\omega, \varphi) = \frac{\pi i}{4} \Theta \int_{\Sigma} \text{tr}(g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g), \quad (4.12)$$

и не зависит от второй координаты.

То, что эта функция действительно определяет коцикл, следует из функционального уравнения

$$\Theta(a, g_1 g_2) = \Theta(a, g_1) \Theta(a^{g_1}, g_2). \quad (4.13)$$

Используя эту функцию как торсер на $\mathcal{A}_h \times_{\Theta} \text{U}(1)$, получаем главное $\text{U}(1)$ -расслоение $S^1(L)$ на пространстве орбит $\mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h$:

$$S^1(L) = (\mathcal{A}_h \times S^1)/\mathcal{G}_h, \quad (4.14)$$

где группа калибровочных преобразований $\mathcal{G}_h$ действует по формуле

$$g(a, z) = (a^g, \Theta(a, g)z).$$

Это – главное линейное расслоение L с эрмитовой структурой.

Следуя [22], ограничим это расслоение на подпространство плоских связностей $\mathcal{A}_F$. Можно проверить, что ограничение формы D на $\mathcal{A}_F$ определяет $\text{U}(1)$ -связность A_{CS} на линейном расслоении L , а тем самым и контактную структуру на нечетномерном многообразии (4.14).

По определению кривизна этой связности есть

$$F_{A_{\text{CS}}} = 2\pi i \cdot \Omega. \quad (4.15)$$

Следовательно, четверка

$$(R_g, \Omega, L, A_{\text{CS}}) \quad (4.16)$$

дает *структуру предквантования* на фазовом пространстве R_g , и мы готовы включить аппарат келерова квантования (см. [13]) механической системы (4.16).

§ 5. Квантование. Проблема вакуумного вектора

Как первый шаг этой процедуры мы должны задать комплексную поляризацию нашего классического фазового пространства (4.16). Для этого достаточно снабдить комплексной структурой риманову поверхность Σ рода g . Такая комплексная структура I индуцирует комплексную структуру на пространстве классов

представлений R_g следующим образом. Пусть E – комплексное векторное расслоение и $\mathcal{A}$ – пространство всех связностей на нем. Каждая связность $a \in \mathcal{A}$ задается ковариантной производной $\nabla_a: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*X)$ – дифференциальным оператором первого порядка с обыкновенным дифференцированием d в качестве главного символа. Комплексная структура задается тогда разложением $d = \partial + \bar{\partial}$. Поэтому ковариантная производная может быть разложена в виде $\nabla_a = \partial_a + \bar{\partial}_a$, где $\partial_a: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes \Omega^{1,0})$ и $\bar{\partial}_a: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes \Omega^{0,1})$. Следовательно, пространство связностей допускает разложение

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'', \quad (5.1)$$

где $\mathcal{A}'$ – аффинное пространство над $\Omega^{1,0}(\text{End } E)$, а $\mathcal{A}''$ – аффинное пространство над $\Omega^{0,1}(\text{End } E)$.

Группа $\mathcal{G}$ всех автоморфизмов расслоения E действует как группа калибровочных преобразований, и проекция $\text{pr}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}''$ на компоненту $\mathcal{A}''$ $\bar{\partial}$ -операторов на E эквивариантна относительно $\mathcal{G}$ -действия.

Снабжая расслоение E эрмитовой структурой h , получаем подпространство $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$ эрмитовых связностей, а ограничение проекции pr на $\mathcal{A}_h$ взаимно однозначно. Относительно нашей эрмитовой структуры h каждый элемент $g \in \mathcal{G}$ определяет элемент $\bar{g} = (g^*)^{-1}$ такой, что

$$\bar{g} = g \iff g \in \mathcal{G}_h.$$

Далее, для $g \in \mathcal{G}$ действие группы $\mathcal{G}$ на компоненту $\mathcal{A}''$ стандартно:

$$\bar{\partial}_{g(a)} = g \cdot \bar{\partial}_a \cdot g^{-1} = \bar{\partial}_a - (\bar{\partial}_a g) \cdot g^{-1},$$

и действие на первую компоненту $\mathcal{A}'$ ∂ -операторов задается формулой

$$\partial_{g(a)} = \bar{g} \cdot \partial_a \cdot \bar{g}^{-1} = \partial_a - ((\bar{\partial}_a g) \cdot g^{-1})^*.$$

Легко увидеть, что это действие сохраняет унитарные связности:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_h) = \mathcal{A}_h, \quad (5.2)$$

и что отождествление $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}''$ эквивариантно относительно этого действия.

Легко видеть, что $\bar{\partial}_a^2 \in \Omega^{0,2}(\text{End } E) = 0$. Следовательно, пространство орбит

$$\mathcal{A}''/\mathcal{G} = \cup \mathcal{M}_i \quad (5.3)$$

является объединением всех компонент пространств модулей топологически тривиальных I -голоморфных расслоений на Σ_I . (Это объединение не допускает никакой хорошей структуры, так как содержит все нестабильные расслоения.) Наконец, образ подпространства $\mathcal{A}_F \in \mathcal{A}_h$ – компонента $\mathcal{M}^{ss}$ максимальной размерности $(3g - 3)$ s -классов полустабильных векторных расслоений. Классический результат техники геометрической теории инвариантов – теорема Кемпфа–Несс – влечет один из самых фундаментальных результатов теории векторных расслоений на римановых поверхностях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (Нарасиман–Шешадри). *Имеем*

$$R_\Sigma = R_g = \mathcal{M}^{ss}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Форма F_{ACS} (4.15) имеет тип Ходжа $(1,1)$, и линейное расслоение L допускает единственную голоморфную структуру, совместимую с эрмитовой связностью A_{CS} .*

С другой стороны, комплексная структура I на Σ определяет келерову метрику на $\mathcal{M}^{ss}$ (метрику Вейля–Петерсона) с келеровой формой

$$\omega_{\text{WP}} = iF_{\text{ACS}} = i \cdot \Omega. \quad (5.4)$$

Эта метрика определяет связность Леви–Чивита на комплексном касательном расслоении $T\mathcal{M}^{ss}$ и, тем самым, эрмитову связность A_{LC} на линейном расслоении

$$\det T\mathcal{M}^{ss} = L^{\otimes 4}. \quad (5.5)$$

Мы получаем отсюда эрмитову связность “ $(1/4)A_{\text{LC}}$ ” на L , совместимую с голоморфной структурой на L . Таким образом, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Имеем*

$$\frac{1}{4}A_{\text{LC}} = A_{\text{CS}}.$$

Наконец, рассматривая многообразие $\mathcal{M}^{ss}$ как базу семейства $\bar{\partial}$ -операторов, мы получаем детерминантное линейное расслоение Квиллена L с эрмитовой связностью A_Q с формой кривизны

$$F_{A_Q} = 2\pi i \cdot \Omega. \quad (5.6)$$

Мы можем продолжить идентификации предложения 5.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Имеем*

$$\frac{1}{4}A_{\text{LC}} = A_{\text{CS}} = A_Q.$$

Как результат келерова квантования предквантовой системы (5.15) мы получаем пространство волновых функций уровня k , т. е. пространство I -голоморфных сечений

$$\mathcal{H}_I^k = H^0(L^k). \quad (5.7)$$

Мы знаем, что система этих пространств и мономорфизмов связана с системой представлений классической алгебры $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$ в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена SQFT. Конкретно, для полуцелого числа i рассмотрим неприводимое представление V_i размерности $2i + 1$ алгебры $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$. Тензорное произведение двух таких представлений раскладывается согласно правилу Клебша–Гордона:

$$V_i \otimes V_j = V_{i+j} \oplus V_{i+j-1} \oplus \cdots \oplus V_{i-j}, \quad i \geq j, \quad (5.8)$$

где уровень представления V_i равен $2i$.

Тогда *кольцо слияния* (fusion ring) $R_k(\mathfrak{su}(2, \mathbb{C}))$ уровня k есть факторкольцо

$$R_k(\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})) = R(\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})) / \langle V_{(k+1)/2} \rangle \quad (5.9)$$

кольца представлений $R(\mathfrak{su}(2, \mathbb{C}))$ по идеалу, порожденному $V_{(k+1)/2}$.

Более того, каждый характер кольца $R(\mathfrak{su}(2, \mathbb{C}))$ задается комплексным числом $z \in \mathbb{C}$, которое мы изображаем диагональной (2×2) -матрицей $\text{diag}(iz, -iz)$. Эта матрица действует на $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$ и на V_i . Имеем

$$\chi_z(V_i) = \text{tr}(\exp(\text{diag}(iz, -iz))) = \frac{\sin((2i+1)z)}{\sin z}. \quad (5.10)$$

Следовательно,

$$\chi_z(V_i) = 0 \iff z = \frac{n\pi}{k+2} \quad \text{для } 1 \leq n \leq 2i+1. \quad (5.11)$$

В этих терминах получаем

$$\text{rk } \mathcal{H}_I^k = \frac{(k+2)^{g-1}}{2^{g-1}} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{n\pi}{k+2}\right)\right)^{2g-2}} \quad (5.12)$$

(см. [4] для математического вывода этой формулы).

Напомним, что процесс квантования механической системы не должен зависеть от выбора комплексной поляризации, т. е. от выбора комплексной структуры I из предыдущего параграфа. Физическая формулировка этого принципа выражается в символической форме следующим образом: $\partial \mathbb{P} \mathcal{H}_I^k / \partial I = 0$, т. е. *проективизация* пространства волновых функций не зависит от выбора комплексной поляризации (т. е. комплексной структуры). Чтобы сформулировать корректное математическое утверждение, мы должны напомнить, что выбор комплексной структуры I определяет точку $I \in \mathcal{M}_{\text{pol}}$ многообразия модулей *поляризованных* комплексных структур на симплектическом многообразии (R_g, Ω, L, a) . Это многообразие модулей само является алгебраическим многообразием (над полем комплексных чисел), а объединение всех пространств волновых функций (5.7) составляет голоморфное векторное расслоение $\pi: \mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{M}_{\text{pol}}$, а его проективизация

$$\pi: \mathbb{P} \mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{M}_{\text{pol}} \quad (5.13)$$

— расслоение на полные локальные системы поляризации уровня k . Математическая формулировка утверждения о независимости тогда следующая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *На каждом расслоении $\mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{M}_{\text{pol}}$ существует проективно плоская связность.*

Для предквантованной системы (R_g, Ω, L, a) такую связность на векторных расслоениях (5.13) над многообразием $\mathcal{M}_g$ модулей римановых поверхностей построил Хитчин [14].

Теперь для реализации аксиом топологической квантовой теории поля, предложенных Атья (см. [3]), оставалось только построить “вакуумный вектор”

$$v_{(\partial Y = \Sigma_g)} \in \mathcal{H}_I^k \quad (5.14)$$

для каждой реализации нашей римановой поверхности Σ_g в виде границы трехмерного многообразия Y . Этот вектор должен быть определен однозначно с точностью до преобразований монодромии проективно плоской связности Хитчина.

Несмотря на то, что “проблема вакуумного вектора” для квантования Черна–Саймонса стоит уже достаточно давно, ее решение еще не получено. Первый шаг в ее решении был предложен Лиз Джеффри и Вейцманом в [15]: пара (или флаг) $\partial Y = \Sigma_g$ определяет лагранжев цикл $\mathcal{L} \subset R_g$, состоящий из классов представлений $\pi_1(\Sigma)$, которые тривиальны как представления $\pi_1(Y)$, в точности как циклы (3.30) в рассмотренной ранее ситуации. Они же проверили, что этот цикл является циклом Бора–Зоммерфельда относительно предквантования (4.16) (см. [27]). Точное геометрическое описание этого цикла дает возможность снабдить его канонической полуформой θ (см. [27, § 5]).

Далее конструкция Бортсвика–Поля–Урибе (см. [27]) сопоставляет каждому такому *полуэвешенному* циклу $(\mathcal{L}, \theta)$ вектор

$$\text{BPU}_k(\mathcal{L}, \theta) \in \mathcal{H}_I^k. \quad (5.15)$$

Однако этот вектор – лишь первое приближение к “вакуумному” вектору $v_{(\partial Y = \Sigma_g)}$: легко видеть, что этот вектор не реагирует на операцию связной суммы 3-многообразия Y с любым компактным 3-многообразием.

Для определения корректирующих членов мы можем воспользоваться теперь изоморфизмами между пространствами волновых функций двух, на первый взгляд различных, теорий, задаваемыми базисами Бора–Зоммерфельда (см. [27]). Первая теория, описанная нами выше, называется *теорией конформных блоков* – это название пространств волновых функций (5.7). Вторую теорию мы условно назовем *комбинаторной*, и отсылаем читателя к работам [17] и [18].

Комбинаторная теория более геометрична и гораздо ближе к геометрии 3-многообразий. Мы можем воспользоваться ее конструкциями для определения поправок к первому приближению (5.15) вакуумного вектора. Эти конструкции используют хорд-диаграммы и брейд-инварианты (см., например, [6] для компактного изложения соответствующей техники). Для их построения и нужны аналоги теоремы Абеля для функционала Черна–Саймонса: трансверсальный набор точек на окружности (образы относительно функционала Черна–Саймонса плоских связностей (2.14)) продолжается до класса хорд-диаграмм, брейд-инварианты которых и дают нужные поправки. Однако для работы с брейд-инвариантами необходима информация о поведении самих точек на окружности промежуточного якобиана. Абсолютно идеальная ситуация возникает, если аналог теоремы Абеля имеет место. Этим объясняется наш интерес к этой теме.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Заметим, что без аналога теоремы Абеля построение брейд-инвариантов технически усложняется: мы деформируем функционал Черна–Саймонса и исследуем коразмерность регулярных деформаций во всем пространстве

деформаций. Если эта коразмерность больше 1, построение ничем не отличается от предыдущего случая. Если коразмерность равна 1, то мы получим камерную структуру и относительный инвариант, аналогичный относительному инварианту Дональдсона гладкости 4-многообразия с $b_2^+ = 1$. Справедливость аналога теоремы Абеля избавила бы нас от нагромождения технических трудностей, знакомых специалистам по применению калибровочной теории к исследованию гладкой структуры 4-многообразий.

Комплексификация этой задачи возвращает нас в стандартную ситуацию алгебраической геометрии, к стандартной технике стабильных голоморфных векторных расслоений (не стандартны только постановки задач). Однако общая методика комплексификации (см., например, [1]) помимо получения алгебро-геометрических результатов имеет и другую цель: наработку нужной интуиции для решения проблемы вакуумного вектора.

§ 6. Пространство орбит комплексной калибровки

К стандартному набору алгебро-геометрических понятий мы должны добавить только понятие *связности* на векторном расслоении над комплексным многообразием. Мы отсылаем читателя к простому и полному тексту по этой теме – книге [9]. Здесь мы используем лишь малую часть этого текста.

Пусть X – комплексное многообразие (гладкое или со структурой гладкого орбифолда) и E – комплексное векторное расслоение на нем. Пусть $\mathcal{A}$ – аффинное пространство связностей на этом расслоении. Каждая связность $a \in \mathcal{A}$ задается *ковариантной производной*

$$\nabla_a: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*X) \quad (6.1)$$

как дифференциальный оператор степени 1 с обыкновенной производной d в качестве главного символа. Как мы уже отмечали (см. (5.1)–(5.3)), комплексная структура задает разложение $d = \partial + \bar{\partial}$ и любая ковариантная производная раскладывается в сумму

$$\nabla_a = \partial_a + \bar{\partial}_a, \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} \partial_a: \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E \otimes \Omega^{1,0}), \\ \bar{\partial}_a: \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E \otimes \Omega^{0,1}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Следовательно, в комплексном случае пространство связностей допускает разложение (5.1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \times \mathcal{A}''$. Группа автоморфизмов расслоения $\mathcal{G}$ действует эквивариантно при проекции $\text{pr}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}''$. Пространство $\mathcal{A}''$ называется *пространством $\bar{\partial}$ -операторов* на E (а пространство $\mathcal{A}'$ – *пространством ∂ -операторов*).

Введение на E эрмитовой структуры h выделяет подпространство $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$ эрмитовых связностей во всем пространстве связностей. При этом ограничение проекции $\text{pr}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}''$ на $\mathcal{A}_h$ отождествляет это пространство с $\mathcal{A}''$ (см., например, [9]), задает сечение проекции. Подгруппа $\mathcal{G}_h \subset \mathcal{G}$ сохраняет это сечение. Чтобы рассматривать группу $\mathcal{G}$ как комплексификацию $\mathcal{G}_h^{\mathbb{C}} = \mathcal{G}$, мы должны напомнить, как комплексная группа действует на прямом произведении (5.1). Как и ниже, мы должны использовать эрмитову структуру h на E . Как было замечено в (5.1), (5.2), для любого $g \in \mathcal{G}$ имеем элемент $\tilde{g} = (g^*)^{-1}$ (заметим, что $*$ опреде-

ляется h) и $\tilde{g} = g \equiv g \in \mathcal{G}_h$. Действие группы $\mathcal{G}$ на компоненту $\mathcal{A}''$ стандартное:

$$\tilde{\partial}_{g(a)} = g \cdot \tilde{\partial}_a \cdot g^{-1} = \tilde{\partial}_a - (\tilde{\partial}_a g) \cdot g^{-1},$$

а на компоненту $\mathcal{A}'$ ∂ -операторов действие задается формулой

$$\partial_{g(a)} = \tilde{g} \cdot \partial_a \cdot \tilde{g}^{-1} = \partial_a - ((\tilde{\partial}_a g) \cdot g^{-1})^*.$$

Если $g = \tilde{g}$, то такой элемент действует как элемент группы $\mathcal{G}_h$ на каждую ковариантную производную ∇_a . Как уже отмечалось (см. (5.2)), такое действие сохраняет эрмитовы связности.

Далее, легко видеть (так как $(d')^2 = 0$), что

$$\tilde{\partial}_a^2 \in \Omega^{0,2}(\text{End } E) \quad (6.4)$$

есть тензор и

$$\tilde{\partial}_a^2 = F_a^{0,2} \quad (6.5)$$

есть $(0, 2)$ -компонента разложения Ходжа тензора кривизны связности.

Теперь по аналогии с пространством орбит (2.1) мы рассматриваем пространство

$$\mathcal{D}_X''(E) = \mathcal{A}''/\mathcal{G} = \mathcal{A}_h''\mathcal{G}, \quad (6.6)$$

которое, впрочем, не обладает столь регулярной структурой, как $\mathcal{B}_X(E_h)$. Но мы будем рассматривать “хорошие” подпространства этого пространства орбит, имитирующие поверхности нулевого уровня отображения моментов.

Во всяком случае мы имеем отображение

$$p: \mathcal{B}_X(E_h) \rightarrow \mathcal{D}_X''(E), \quad (6.7)$$

и во многих конструкциях на $\mathcal{D}_X''(E)$ мы будем выбирать нужные нам подпространства “хорошего” пространства $\mathcal{B}_X(E_h)$ и проверять, что они $\mathcal{G}$ -инвариантны.

Диагональное действие группы $\mathcal{G}$ на прямом произведении $\mathcal{A}'' \times \Omega^{0,2}(\text{End } E)$ определяет векторное расслоение

$$\overline{\Omega^{0,2}(\text{End } E)} = (\mathcal{A}'' \times \Omega^{0,2}(\text{End } E))/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}_X''(E) \quad (6.8)$$

с бесконечномерным пространством $\Omega^{0,2}(\text{End } E)$ в качестве слоя.

Сопоставление $\tilde{\partial}$ -оператору $\tilde{\partial}_a$ его квадрата $(\tilde{\partial}_a)^2$ определяет $\mathcal{G}$ -эквивариантное отображение

$$F: \mathcal{A}'' \rightarrow \Omega^{0,2}(\text{End } E),$$

т. е. сечение

$$F = (\tilde{\partial})^2: \mathcal{D}_X''(E) \rightarrow \overline{\Omega^{0,2}(\text{End } E)} \quad (6.9)$$

этого расслоения.

Множество нулей этого сечения

$$(F)_0 = ((\tilde{\partial})^2)_0 = \cup \mathcal{M}_i \quad (6.10)$$

– объединение всех компонент многообразия модулей голоморфных расслоений на X топологического типа [E]. Конечно, это объединение не допускает никакой достаточно хорошей структуры, так как оно содержит все нестабильные расслоения. Оно не трансверсально ни в каком смысле.

Точно так же мы можем поступить со стандартным пространством $\mathcal{B}_X(E_h)$ эрмитовых связностей и рассмотреть диагональное действие группы $\mathcal{G}_h$ на прямом произведении $\mathcal{A}_h \times \Omega^2(\text{End } E_h)$, определяющее векторное расслоение

$$\overline{\Omega^2(\text{End } E_h)} = (\mathcal{A}_h \times \Omega^2(\text{End } E_h)) / \mathcal{G}_h \rightarrow \mathcal{B}_X(E_h) \quad (6.11)$$

с гильбертовым пространством $\Omega^2(\text{End } E_h)$ в качестве слоя.

Сопоставление эрмитовой связности a $(0, 2)$ -компоненты разложения Ходжа определяет сечение

$$F^{0,2}: \mathcal{B}_X(E_h) \rightarrow \overline{\Omega^2(\text{End } E_h)} \quad (6.12)$$

этого расслоения. Множество нулей этого сечения есть объединение бесконечномерных компонент. Легко видеть, что векторное расслоение содержит прообраз относительно отображения p (6.7) расслоения (6.8) и

$$(F^{0,2})_0 = p^{-1}((\tilde{\partial})^2)_0. \quad (6.13)$$

Для того чтобы сделать это пространство конечномерным, достаточно наложить условия Хитчина–Кобаяши. Для этого фиксируем поляризацию H на многообразии X с келеровой формой ω_H (и, следовательно, келерову метрику) и рассмотрим подпространство

$$\mathcal{A}_{\text{asd}} = \{a \in \mathcal{A}_h \mid F_a \cdot \omega_H = 0\}. \quad (6.14)$$

Легко видеть, что $\mathcal{A}_{\text{asd}}$ $\mathcal{G}_h$ -инвариантно (но не $\mathcal{G}$ -инвариантно) и пересечение

$$(F^{0,2})_0 \cap S_h / \mathcal{G}_h = \cup \mathcal{M}_i^s \quad (6.15)$$

есть объединение всех компонент многообразия модулей всех компонент H -стабильных голоморфных расслоений на X топологического типа [E]. Это объединение допускает хорошую структуру, а сечение трансверсально. Все технические детали вышесказанного можно найти в [9, § 6].

§ 7. Голоморфные дифференциалы на пространстве орбит

Рассмотрим гладкое компактное *трехмерное* многообразие X и пространство комплексных орбит $\mathcal{D}_X''(E)$. В этом случае любая голоморфная $(3, 0)$ -форма θ на X определяет комплексный аналог 1-формы Черна–Саймонса на пространстве орбит $\mathcal{D}_X''(E)$ почти по той же самой формуле, как (2.5). А именно, мы определяем $\mathcal{G}$ -инвариантную 1-форму на $\mathcal{A}''$, значение которой на касательном векторе $\omega \in \Omega^{0,1}(\text{End } E)$ в ∂ -операторе $\tilde{\partial}_a$ задается формулой

$$D_\theta(\omega) = \int_X \text{tr}(\omega \wedge (\tilde{\partial}_a)^2) \wedge \theta. \quad (7.1)$$

Тем же символом мы будем обозначать соответствующую форму на пространстве орбит $\mathcal{D}''_X(E)$.

Таким образом мы получаем линейный изоморфизм между комплексными пространствами $H^{3,0}(X)$ и $H^{1,0}(\mathcal{D}''_X(E))$ (мы опускаем скучное рассуждение о смысле разложения Ходжа в бесконечномерном случае: голоморфность форм (7.1) ясна и без того). Предположим теперь, что пересечение нулей всех форм

$$\bigcap_{\theta \in H^{3,0}(X)} (\theta)_0 = \emptyset \quad (7.2)$$

пусто, т. е. каноническая полная линейная система не имеет базисных точек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *При условии (7.2) пересечение*

$$\bigcap_{\theta \in H^{3,0}(X)} (D_\theta)_0 = \bigcup \mathcal{M}_i \quad (7.3)$$

есть объединение всех компонент многообразия модулей всех голоморфных расслоений на X топологического типа $[E]$.

Для доказательства достаточно заметить, что условие (7.2) и левая сторона равенства (7.3) для $\tilde{\partial}$ -оператора $\tilde{\partial}_a$ влекут равенство $(\tilde{\partial}_a)^2 = 0$, эквивалентное интегрируемости голоморфной структуры на расслоении.

Мы можем интегрировать эти формы вдоль любого пути в пространстве $\tilde{\partial}$ -операторов $\mathcal{A}''$. В этом пространстве любая пара $\tilde{\partial}$ -операторов $(\tilde{\partial}_{a_0}, \tilde{\partial}_{a_0} + \omega)$ связана интервалом $[0, 1]$ на прямой $\tilde{\partial}_{a_0} + t \cdot \omega$.

Рассмотрим некоторый базис $\theta_1, \dots, \theta_{h^{3,0}}$ пространства $H^{3,0}$ голоморфных дифференциальных форм и вектор

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_{h^{3,0}} \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Он определяет вектор 1-форм на $\mathcal{D}''_X(E)$

$$\begin{pmatrix} D_{\theta_1} \\ \dots \\ D_{\theta_{h^{3,0}}} \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Интегрируя этот вектор из форм вдоль описанного интервала, получаем отображение пространства $\Omega^{0,1}(\text{End } E)$ (отождествленного с пространством $\mathcal{A}''$ выбором связности a_0) в векторное пространство $\mathbb{C}^{h^{3,0}}$. Это отображение $\mathcal{G}$ -эквивариантно и определяет отображение универсальной накрывающей пространства $\mathcal{D}''_X(E)$:

$$I_X: \widetilde{\mathcal{D}''_X(E)} \rightarrow \mathbb{C}^{h^{3,0}}, \quad (7.6)$$

с группой накрытия, содержащейся в $H^3(X, \mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Ограничение этого отображения на любую компоненту $\mathcal{M}_i$ (6.10) многообразия модулей голоморфных расслоений на X называется *аналогом абелева интеграла*.

Геометрическая ситуация подсказывает, что, поскольку классические абелевы интегралы определяют отображение в якобиан кривой, аналог абелева интеграла может быть продолжен до отображения в промежуточный якобиан многообразия X . Для реализации этой программы вернемся к “эрмитовой ситуации”.

Для нашего 3-многообразия X рассмотрим векторное пространство $H^{3,0} \oplus H^{2,1}$ как пространство дифференциальных 3-форм на X , и пусть $\theta_1, \dots, \theta_{h^{3,0}}, \Omega_1, \dots, \Omega_{h^{2,1}}$ – базис этого пространства. Рассмотрим вектор

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_{h^{3,0}} \\ \Omega_1 \\ \dots \\ \Omega_{h^{2,1}} \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Этот вектор определяет вектор из форм на $\mathcal{A}''$, значение которого на касательном векторе $\omega \in \Omega^1(\text{End } E_h)$ задается формулой

$$\begin{pmatrix} D_{\theta_1}(\omega) = \int_X \text{tr}(\omega \wedge F_a) \wedge \theta_1 \\ \dots \\ D_{\theta_{h^{3,0}}}(\omega) = \int_X \text{tr}(\omega \wedge F_a) \wedge \theta_{h^{3,0}} \\ D_{\Omega_1}(\omega) = \int_X \text{tr}(\omega \wedge F_a) \wedge \Omega_1 \\ \dots \\ D_{\Omega_{h^{2,1}}}(\omega) = \int_X \text{tr}(\omega \wedge F_a) \wedge \Omega_{h^{2,1}} \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Компоненты этого вектора $\mathcal{G}_h$ -инвариантны и определяют вектор 1-форм (с тем же обозначением) на пространстве орбит $\mathcal{B}_X(E_h)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Мы должны повторить определение для голоморфных компонент, потому что мы находимся в другом пространстве связностей, но мы будем различать их специальными обозначениями.

Теперь уже нетрудно проверить, что наши интегралы определяют отображение

$$J_E: \mathcal{B}_X(E_h) \rightarrow J^3(X) = H^3(X, \mathbb{R})/H^3(X, \mathbb{Z}) \quad (7.9)$$

(мы используем здесь двойственность Пуанкаре в средних когомологиях многообразия X).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Ограничение этого отображения на любую компоненту $\mathcal{M}_i^s$ многообразия модулей расслоений на X называется *отображением Абеля–Якоби*.

Снова по аналогии с классическим абелевым случаем мы можем спросить: *пересекаются ли J_E -образы различных компонент многообразия модулей голоморфных расслоений в $J^3(X)$?*

Более того, если ограничение отображения J_E на одну из компонент является вложением в общей точке, то мы назовем этот эффект *неабелевым аналогом теоремы Абеля*.

Классическое отображение Абеля сопоставляет каждому линейному голоморфному расслоению L класс рациональной эквивалентности дивизора $c_1(L)$, а классическая теорема Абеля утверждает, что на кривой C рода $g > 0$ для двух точек на кривой

$$p \neq p' \implies c_1(\mathcal{O}(p - p_0)) \neq c_1(\mathcal{O}(p' - p_0)).$$

Для алгебраической поверхности S роль якобиана играет группа Чжоу рациональной эквивалентности нульмерных циклов $\mathrm{CH}^2(S)$. Сопоставляя голоморфному расслоению E класс рациональной эквивалентности $c_2(E) \in \mathrm{CH}^2(S)$, мы получаем аналог отображения Абеля. Однако аналогом теоремы Абеля в этом случае естественно считать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если канонический класс поверхности S весьма обилен, а компонента $\mathcal{M}_i$ многообразия модулей достаточно общая, то отображение Абеля этой компоненты имеет степень 1.*

Трудность исследования отображения Абеля в этом случае объясняется тем, что группа $\mathrm{CH}^2(S)$ бесконечномерна и мы не имеем еще достаточного опыта работы с такими объектами. Однако частичный результат в этом направлении получен в работе [28]: доказано, что при перечисленных предположениях отображение Абеля имеет *конечную степень*. В этой же статье содержится обзор результатов и техники, связанных с отображениями Абеля для многомерных расслоений на поверхностях.

В случае трехмерного многообразия X для любой компоненты многообразия модулей $\mathcal{M}_i$ аналог отображения Абеля также сопоставляет голоморфному расслоению E набор классов рациональной эквивалентности классов Черна расслоения. Например, двумерная компонента этого набора $c_2(E) \in \mathrm{CH}^2$. Но в этом случае существует отображение Абеля–Якоби

$$a: \mathrm{CH}^2 \rightarrow J^3(X) = H^3(X, \mathbb{R})/H^3(X, \mathbb{Z}). \quad (7.10)$$

Легко проверить следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Композиция отображения Абеля и Абеля–Якоби совпадает с отображением J_E (7.9).*

Таким образом, предложенный нами аналог теоремы Абеля для 3-многообразий – самое сильное из возможных таких утверждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Мы описали две конструкции: отображение Абеля $a: \mathcal{M}_i \rightarrow \mathrm{CH}^2$ и аналог отображения Абеля $J_E: \mathcal{M}_i \rightarrow J^3(X)$. Названия их почти неразличимы, но опасаться путаницы не следует: во многих случаях для многообразий Калаби–Яо Клэр Вуазен доказала, что $\mathrm{CH}^2 = J^3(X)$ (для многообразий Фано этот факт был установлен значительно раньше).

В следующем параграфе мы опишем универсальную конструкцию когомологического соответствия, которая дает подобные отображения для любой размерности.

§ 8. Когомологические соответствия

Когомологические соответствия, сопоставляющие 3-классам когомологий многообразия X 1-классы пространства $\mathcal{B}_X(E_h)$, строятся точно так же, как (2.11)–(2.13): рассматривается универсальная связность A на прямом произведении $X \times \mathcal{B}_X(E_h)$, класс когомологий

$$\text{ch}_2(A) = [\text{tr } F_A \wedge F_A] \in H^4(X \times \mathcal{B}_X(E_h)) \quad (8.1)$$

и его $(3, 1)$ -компонента Кюннета

$$\text{ch}_2(A)^{3,1}: H_3(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{B}_X(E_h), \mathbb{Z}). \quad (8.2)$$

Этот класс когомологий мы можем интерпретировать как гомоморфизм комплексных торов

$$\begin{aligned} (\text{ch}_2(A)^{3,1})^*: \text{Alb}(\mathcal{B}_X(E_h)) &= H^1(\mathcal{B}_X(E_h), \mathbb{R})/H^1(\mathcal{B}_X(E_h), \mathbb{Z}) \rightarrow J^3(X) \\ &= H_3(Y, \mathbb{R})/H_3(Y, \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (8.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. При использовании характеров Черна мы должны делить наши классы на 2. Ясно, как поднять эту конструкцию до целых чисел.

Как обычно, интегрирование 1-форм дает отображение Якоби

$$J: \mathcal{B}_X(E_h) \rightarrow \text{Alb}(\mathcal{B}_X(E_h)) \quad (8.4)$$

и композиция отображений (8.3) и (8.4) дает отображение

$$\mathcal{B}_X(E_h) \rightarrow J^3(X), \quad (8.5)$$

ограничение которого на компоненты модулей голоморфных расслоений совпадает с J_E (7.9).

Далее, промежуточный якобиан $J(X)$ допускает комплексную структуру Гриффитса (см., например, [12]). С другой стороны, любая компонента многообразия модулей $\mathcal{M}_i$ (7.3) тоже допускает комплексную структуру.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Отображение J_E голоморфно относительно этих комплексных структур.*

Для доказательства этого утверждения напомним, что комплексная структура на $J(X)$ определяется равенством

$$H^3(X, \mathbb{R}) = H^{3,0} \oplus H^{2,1} = (TJ^3(X))_0, \quad (8.6)$$

которое задается проекцией комплексификации $H^3(X, \mathbb{C})$ на “полусумму” компонент Ходжа. Но на компоненте Ходжа $H^{3,0}(X)$ отображение J_E пропускается через пространство $\mathcal{D}''_X(E)$ и определено отображением (7.5). Оно голоморфно, потому что комплексная структура на $\mathcal{M}_i$ индуцирована комплексной структурой

на $\mathcal{D}''_X(E)$. Чтобы проверить голоморфность на компоненте $H^{2,1}$, дадим другую интерпретацию этого отображения.

Пусть $\text{CH}^2(X)$ – пространство классов рациональной эквивалентности алгебраических 1-циклов на X топологического типа $\text{ch}_2(E)$. Как уже было замечено, существует отображение Абеля–Якоби

$$a: \text{CH}^2(X) \rightarrow J^3(X), \quad (8.7)$$

сопоставляющее классу $c - c_0$, где c_0 – фиксированный класс векторного расслоения, вектор

$$\begin{pmatrix} \int_{\delta} \theta_1 \\ \dots \\ \int_{\delta} \theta_{h^{3,0}} \\ \int_{\delta} \Omega_1 \\ \dots \\ \int_{\delta} \Omega_{h^{2,1}} \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

где δ – 3-мерный цикл с границей

$$\partial\delta = c - c_0. \quad (8.9)$$

Хорошо известно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Если алгебраические циклы c и c_0 могут быть соединены алгебраической кривой C , то локально образ $a(C)$ содержится в $H^{2,1}$ -компоненте.*

Как уже было замечено, любая компонента $\mathcal{M}_i$ многообразия модулей голоморфных расслоений допускает отображение

$$c: \mathcal{M}_i \rightarrow \text{CH}^2(X), \quad (8.10)$$

сопоставляющее векторному расслоению F класс рациональной эквивалентности алгебраического 1-класса $\text{ch}_2(F)$. Легко видеть, что отображение J_E задается классом ch_2 квазиуниверсального расслоения (8.1) и с точностью до сдвига является композицией двух отображений

$$c \cdot a: \mathcal{M}_i \rightarrow J^3(X). \quad (8.11)$$

Следовательно, отображение J_E голоморфно.

Более того, отображение J_E корректно определено на любой компоненте многообразия модулей голоморфных векторных расслоений, а не только на стабильных расслоениях.

Таким образом, отображение J_E на $H^{3,0}$ -часть есть ограничение аналога отображения Абеля всего пространства $\mathcal{D}''_X(E)$, но на $H^{2,1}$ -части отображение J_E определено только на подмножествах $\mathcal{M}_i$ всего пространства $\mathcal{D}''_X(E)$. Возникает вопрос: *можем ли мы исправить эту неоднородность?* Более точно, *может ли отображение c (8.10) быть продолжено до отображения*

$$C: \mathcal{D}''_X(E) \rightarrow \text{CH}^2(X)?$$

Рассмотрим локальный подъем $\widetilde{J_E(\mathcal{M}_i)}$ образа отображения J_E компоненты $\mathcal{M}_i$ до отображения в универсальную накрывающую $H^{3,0} \oplus H^{2,1}$ промежуточного якобиана $J(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Проекция $p_{3,0}$ такого поднятия отображения J_E в такое произведение $H^{3,0} \oplus H^{2,1}$ на первую компоненту есть отображение в точку, т. е. локально образ компоненты $\widetilde{J_E(\mathcal{M}_i)}$ содержится в аффинном пространстве

$$\widetilde{J_E(\mathcal{M}_i)} \subset \langle p_i, H^{2,1} \rangle. \quad (8.12)$$

Это утверждение сразу следует из предыдущего предложения.

ПРИМЕР 8.1. Пусть X – многообразие Калаби–Яо (т. е. $K_X = 0$) с $h^{2,1}(X) = 0$. Тогда X – инфинитезимально жесткое многообразие и промежуточный якобиан

$$J(X) = \mathcal{E}$$

– эллиптическая кривая. Найдено уже достаточное число многообразий такого типа. Лучший пример – многообразие Барта–Нieto [11] – многообразие модулей абелевых поверхностей с фиксированной тэта-структурой поляризации типа (2,6). Для многообразий такого типа образ отображения Абеля–Якоби J_E – конечное множество точек $\{e_1, \dots, e_{\text{Cas}(E)}\}$. Это множество определено с точностью до сдвига, и мы можем избежать этой неопределенности условием

$$\sum_i e_i = 0,$$

где сумма – сложение точек коммутативной группы эллиптической кривой. Арифметический смысл этих точек еще не исследован.

§9. Голоморфные расслоения на трехмерных многообразиях. Дискретные инварианты

Пусть X – гладкое компактное трехмерное многообразие и

$$H^{2*}(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^3 H^{2i}(X, \mathbb{Z}) \quad (9.1)$$

– алгебра его четномерных когомологий. Другая алгебра

$$A(X) = \bigoplus_{i=0}^3 A^i(X) \quad (9.2)$$

– алгебра алгебраических циклов по модулю алгебраической эквивалентности. Эти алгебры связаны естественным отображением

$$h: A(X) \rightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Z}), \quad (9.3)$$

но в трехмерном случае это не изоморфизм а priori в силу отрицательного решения проблемы Лефшеца и нетривиальности группы Гриффитса.

Инволюция $*$ действует покомпонентно:

$$*|_{H^{0,4}(X, \mathbb{Z})} = \text{id}, \quad *|_{H^{2,6}(X, \mathbb{Z})} = -\text{id}, \quad (9.4)$$

и таким же образом на $A(X)$, так что отображение h (9.3) $*$ -эквивариантно. Существуют естественные идентификации

$$H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = H^6(X, \mathbb{Z}),$$

так что любой элемент $u \in H^{2*}(X, \mathbb{Z})$ допускает разложение $u = u_0 + u_2 + u_4 + u_6$, i -компоненту которого мы обозначим через $[u]_i$. Пусть K_X – канонический класс многообразия X ,

$$K_X \in H^2(X, \mathbb{Z}), \quad K_X = (K_X)_2, \quad k_X = c_2(TX) = c_2(X) = (k_X)_4.$$

Тогда на $H^{2*}(X, \mathbb{Z})$ мы имеем две билинейные формы:

$$\langle u, v \rangle = -\frac{1}{2} K_X \cdot [u^* \cdot v]_4, \quad (u, v) = -[v^* \cdot u]_6, \quad (9.5)$$

первая из которых симметрична, а вторая кососимметрична.

Для алгебраического K -функтора K_{alg}^0 многообразия X характер Черна задает цепочку гомоморфизмов

$$K_{\text{alg}}^0 \rightarrow^{\text{ch}} A(X) \rightarrow^h H^{2*}(X, \mathbb{Q}),$$

эквивариантных относительно оператора $*$. Этот оператор сопоставляет векторному расслоению E расслоение E^* .

На K_{alg}^0 имеется билинейная форма

$$-\chi(E_1, E_2) = \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} \text{rk } H^i(X, E_1^* \otimes E_2), \quad (9.6)$$

где когомологии – когерентные когомологии пучков.

Конечно, эта форма – прообраз билинейной формы на $H^{2*}(X, \mathbb{Q})$. Это следует из теоремы Римана–Роха

$$\chi(E_1, E_2) = [\text{ch } E_2 \cdot \text{ch } E_1^* \cdot \text{td}_X]_6,$$

где td_X – род Тодда многообразия X .

Разложим эту форму на симметрическую и антисимметрическую части:

$$\chi(E_1, E_2) = \chi_+(E_1, E_2) + \chi_-(E_1, E_2).$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\text{td}_X^* = \text{td}_X \cdot \text{ch } K_X = \text{td}_X \cdot e^{K_X}.$$

Следовательно,

$$2 \operatorname{td}_X^\pm = \operatorname{td}_X \pm \operatorname{td}_X^* = \operatorname{td}_X \cdot (1 \pm e^{K_X})$$

и

$$\begin{aligned}\chi(E_1, E_2)_+ &= [\operatorname{ch} E_2^* \cdot \operatorname{ch} E_1 \cdot \operatorname{td}_X^-]_6, \\ \chi(E_1, E_2)_- &= [\operatorname{ch} E_2^* \cdot \operatorname{ch} E_1 \cdot \operatorname{td}_X^+]_6.\end{aligned}$$

Более того, мы имеем специальный класс в $A(X)$ (или в $H^{2*}(X, \mathbb{Q})$):

$$\sqrt{\operatorname{td}_X^+} = 1 + \frac{k_X}{24} = \sqrt{\frac{\operatorname{td}_X^-}{K_X}}, \quad (9.7)$$

однозначно определенный условием $\left[\sqrt{\operatorname{td}_X^+}\right]_0 = 1$.

Следуя идее Мукая, внесем небольшую коррекцию в характер Черна:

$$m(E) = \operatorname{ch} E \cdot \sqrt{\operatorname{td}_X^+}, \quad (9.8)$$

и назовем такой вектор *вектором Мукая* расслоения E .

Это дает возможность вычислить “нестандартную форму” (9.6) в терминах стандартных форм:

$$\chi(E_1, E_2)_+ = \langle m(E_1), m(E_2) \rangle \quad (9.9)$$

и

$$\chi(E_1, E_2)_- = (m(E_1), m(E_2)).$$

Имеют место точные формулы:

$$\begin{aligned}m(E) &= \operatorname{ch}(E) + \operatorname{rk} E \cdot \frac{k_X}{24} + \frac{c_1(E) \cdot k_X}{24} \cdot \chi(E_1, E_2)_+ \\ &= \frac{1}{2} \cdot K_X \cdot \left[c_1(E_1) \cdot c_1(E_2) - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{rk} E_2 \cdot (c_1(E_1)^2 - c_2(E_1)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{rk} E_1 \cdot (c_1(E_2)^2 - c_2(E_2)) - \operatorname{rk} E_1 \cdot \operatorname{rk} E_2 \cdot \frac{k_X}{12} \right], \\ \chi(E, E)_+ &= \frac{1}{2} \cdot K_X \left[c_1^2 - \operatorname{rk}(c_1^2 - 2c_2) - \operatorname{rk}^2 \cdot \frac{k_X}{12} \right] \\ &= \operatorname{rk} K_X \left[\left(c_2 - \frac{(\operatorname{rk} - 1) \cdot c_1^2}{2 \cdot \operatorname{rk}} \right) - \operatorname{rk} \cdot \frac{k_X}{24} \right].\end{aligned}$$

Как итог вычислений получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Виртуальная (ожидаемая) размерность многообразия модулей простых расслоений топологического типа $[E]$ задается формулой*

$$\operatorname{v. dim} \mathcal{M}_E = \operatorname{rk}(E) \left(c_2(E) - \frac{(\operatorname{rk}(E) - 1) \cdot c_1(E)^2}{2 \cdot \operatorname{rk}(E)} \right) \cdot (-K_X) - (\operatorname{rk}(E)^2 - 1) \cdot \chi(\mathcal{O}_X),$$

где, как обычно, $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - h^{1,0} + h^{2,0} - h^{3,0}$.

Напомним снова, что по теореме Римана–Роха

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{k_X \cdot K_X}{24}.$$

Введем стандартное обозначение

$$c_2(E) - \frac{\text{rk}(E) - 1}{2 \cdot \text{rk}(E)} \cdot c_1(E)^2 = \Delta(E) \quad (9.10)$$

для дискриминанта расслоения. Тогда неравенство Богомолова, необходимое для стабильности расслоения E , имеет вид

$$\Delta(E) \cdot H > 0$$

для любой поляризации H многообразия X .

Предположим для простоты, что канонический класс K_X многообразия X определен, так что мы имеем три случая (в точности, как для случая римановых поверхностей):

- 1) $K_X < 0$, т.е. X – многообразие Фано;
- 2) $K_X = 0$, т.е. X – многообразие Калаби–Яо;
- 3) $K_X > 0$, т.е. X – многообразие общего типа.

Второй случай представляет главную тему этой работы, и ему посвящен весь следующий параграф. Первый и третий случаи мы рассмотрим позже.

§ 10. Расслоения на трехмерных многообразиях Калаби–Яо

В этом случае

$$\text{td}_X = \text{td}_X^+, \quad (10.1)$$

и билинейная форма χ (9.6) кососимметрична:

$$\chi = \chi_-. \quad (10.2)$$

То, что эта форма спускается до формы на $H^{2*}(X, \mathbb{Q})$, – важный математический факт, эквивалентный теореме Римана–Роха. На пространстве расслоений форма χ представляется в виде

$$\chi(E_1, E_2) = h\chi(E_1, E_2) - h\chi(E_2, E_1),$$

где билинейная форма $h\chi$ определяется формулой

$$h\chi(E_1, E_2) = \text{rk } H^1(E_1^* \otimes E_2) - \text{rk } H^0(E_1^* \otimes E_2), \quad (10.3)$$

т.е. форма χ есть удвоенная кососимметрическая часть формы $h\chi$. Удвоенная симметрическая часть этой формы равна

$$2h\chi_+ = -\text{rk } H^0(E_1^* \otimes E_2) + \text{rk } H^1(E_1^* \otimes E_2) - \text{rk } H^3(E_1^* \otimes E_2) + H^2(E_1^* \otimes E_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Это число – аналог суммы чисел Бетти – заменяет обычную эйлерову характеристику когерентных пучков точно так же, как сумма чисел Бетти заменяет топологическую эйлерову характеристику в гипотезе Арнольда. И точно так же, как и в симплектической ситуации этой гипотезы, это уже не топологический инвариант.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. *Виртуальная размерность многообразия модулей го-ломорфного расслоения равна нулю. Для стабильных расслоений каждого топологического типа m многообразие модулей допускает естественную компактификацию $\mathcal{M}_X^s(m)$ и в трансверсальном случае допускает структуру нульмерной схемы. Как длина этой схемы число*

$$\mathrm{CD}_X(m) = \deg \mathcal{M}_X(m) = \#\{\mathcal{M}_X(m)\} \quad (10.4)$$

корректно определено.

Мы назовем его *числом Дональдсона–Кассона*, потому что, с одной стороны, это естественный аналог инварианта Кассона (см. § 2, 3), предложенный в [10], а с другой, – естественный аналог полинома Дональдсона степени 0 для 4-многообразия.

Более того, для каждого векторного расслоения E на X с вектором Мукая m пространство $H^1(\mathrm{ad} E)$ изображает пространство инфинитезимальных деформаций первого порядка расслоения E . Поэтому назовем число

$$\mathrm{i. dim} \mathcal{M}_X^s(E) = \mathrm{rk} H^1(\mathrm{ad} E) \quad (10.5)$$

инфинитезимальной размерностью пространства деформаций расслоения E . Тогда по определению для любого простого расслоения

$$\mathrm{i. dim} \mathcal{M}_X^s(E) = h\chi(E, E) - 1. \quad (10.6)$$

Это – геометрическая размерность многообразия модулей расслоений, если препятствия к деформациям отсутствуют, как, например, для касательного расслоения TX .

Гипотеза зеркальной симметрии (см. [26]) предписывает существование для каждого многообразия Калаби–Яо X зеркального партнера X' (другого многообразия Калаби–Яо) и изоморфизма

$$\mathrm{mir}: H^{2*}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^3(X', \mathbb{Q}),$$

переводящего форму χ (9.6) в форму пересечений трехмерных циклов:

$$\chi(m_1, m_2) = \mathrm{mir}(m_1) \cdot \mathrm{mir}(m_2).$$

Заметим, что $H^{2*}(X, \mathbb{Q})$ допускает градуировку, которая для трехмерных циклов (гипотетически) задается монодромией вокруг “большой предельной точки” деформации комплексной структуры на X' . Более точно, преобразования решетки Мукая, заданные подкруткой расслоений на дивизоры, могут быть описаны в терминах преобразований монодромии вокруг соответствующих дивизоров границы, проходящих через “большую предельную точку”. Однако форма пересечений на решетке 3-когомологий не может быть представлена канонически как кососимметрическая часть билинейной формы такой, как (10.3). В общем случае невозможно

восстановить симметрическую часть такой формы, используя только большое вырождение комплексной структуры. Эта форма сопоставляла бы 3-циклу число – значение этой формы на этом цикле.

Сопоставление вектору Мукая m числа $CD_X(m)$ определяет отображение

$$CD_X: H^{2*}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (10.7)$$

С другой стороны, применив изоморфизм mir , мы получим функцию на $H^3(X', \mathbb{Z})$. Естествен вопрос: как ее определить в терминах геометрии самих 3-мерных циклов? Гипотетический ответ заключается в том, что для каждого 3-мерного класса σ когомологий на X можно рассмотреть все реализации его гладкими трехмерными подмногообразиями $Y \subset X$, удовлетворяющими дополнительным условиям. В частности, если мы наложим на Y условие быть *специальным лагранжевым и бор-зоммерфельдовским циклом*, то виртуально существует конечное число таких реализаций (см. [27], [26] и [13]). Сопоставляя каждому 3-классу σ число таких реализаций, мы получаем функцию

$$BS_X: H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (10.8)$$

Гипотеза зеркальной симметрии предсказывает, что для любого $m \in H^{2*}(X, \mathbb{Z})$

$$CD_X(m) = BS_{X'}(\text{mir}(m)). \quad (10.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. Например, гомотопические сферы удовлетворяют условиям Бора–Зоммерфельда любого уровня. Поэтому все специальные лагранжевы сферы S^3 многообразия X' из одного и того же класса когомологий гипотетически соответствуют расслоениям на зеркальном партнере и конструкции работы [25] включаются в (10.9).

Мы видели, что разность между виртуальной размерностью и инфинитезимальной размерностью измеряется формой $h\chi$ (10.3). Полезно рассмотреть расслоения, для которых *эти размерности совпадают*. Такие простые расслоения называются *исключительными, асферическими или сферическими*, в зависимости от контекста, в котором они задействованы. Мы будем называть их *исключительными*, потому что они *простые и инфинитезимально жесткие*. Еще Мукай заметил, что такие расслоения играют роль корней в решетке Мукая и, в частности, для любого такого расслоения E

$$h\chi(E, E) = -1 \quad (10.10)$$

– минимально возможное для простого расслоения число.

Когерентные пучки и расслоения на любом многообразии допускают *модулярные операции*: универсальные расширения, универсальные деления и их групповые варианты (см. [28, гл. II]). Эти операции сохраняют свойства многообразий модулей и в том или ином виде встречаются почти во всех работах о расслоениях. Однако регулярное их использование начинается только с работы Мукая [20],

описавшего операцию “отражения”, которую естественно разделить на две операции: универсального деления и расширения (или “отскока” в специфической терминологии экспертов). Общематематический смысл этих операций чрезвычайно широк: от производных категорий пучков до категорий представлений квадратичных алгебр и колчанов. Они позволяют выделить в геометрических исследованиях комбинаторную часть (почти всегда – представление группы кос) и найти параллелизм на первый взгляд различных теорий.

Каждый вектор Мукая $m \in K_{\text{alg}}^0$ определяет преобразование всей решетки по формуле

$$\alpha_m(m') = -m' - \chi(m, m') \cdot m, \quad (10.11)$$

но нам хотелось бы получить преобразования вида

$$\alpha_m(m') = -m' - h\chi(m, m') \cdot m,$$

но а priori это невозможно, так как форма $h\chi$ (10.3) *не спускается на кольцо четных кохомологий*. Заметим, что ограниченная производная категория $D^b(X)$ когерентных пучков на X отображается на кольцо Атья:

$$r: D^b(X) \rightarrow K_{\text{alg}}^0, \quad (10.12)$$

и в случае, когда класс m реализуется исключительным расслоением E , А. Бондал и Д. Орлов показали, что нужное нам преобразование определено в виде функтора производной категории $\alpha_E: D^b(X) \rightarrow D^b(X)$. Конечно, этот подъем существенно зависит от выбора E .

Для любого расслоения E' определен пучок

$$\alpha_E(E') = \ker(\text{can}: H^0(E^* \otimes E') \times E \rightarrow E'). \quad (10.13)$$

Если это – стабильное расслоение и

$$[\alpha_E(E')] = \alpha_{[E]}([E']), \quad (10.14)$$

то полученное расслоение – результат модулярной операции, а именно универсального деления.

Пусть $H \in \text{Pic}(X)$ – поляризация многообразия X . Это одномерное расслоение определяет автоморфизм решетки Мукая

$$[T_{H^k}(E)] = T_H^k = [E \otimes H^k], \quad (10.15)$$

который поднимается и на производную категорию и на все другие образования, определяемые расслоениями. Используя стандартную гомологическую технику и дословно те же аргументы, как и в [28, гл. II], легко доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. Пусть m и m' – два топологических класса с голоморфными реализациями $\{E_1, \dots, E_{\text{CD}_X(m)}\}$ и $\{E'_1, \dots, E'_{\text{CD}_X(m')}\}$ исключительными стабильными расслоениями. Тогда существует уровень $k_0(m, m')$ такой, что:

- 1) все модулярные операции $\alpha_{E_i}(E'_j \otimes H^k)$ (10.13) для любого уровня $k \geq k_0(m, m')$ определены корректно;
- 2) все расслоения набора $\{\alpha_{E_i}(E'_j \otimes H^k)\}$ исключительны, стабильны и составляют голоморфные реализации топологического типа $\alpha_m(T_H^k(m'))$;
- 3) таким образом, число Дональдсона–Кассона равно

$$\text{CD}_X(\alpha_m(T_H^k(m'))) = \text{CD}_X(m) \cdot \text{CD}_X(m').$$

Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Числа Дональдсона–Кассона не ограничены.

Конечно, существуют специальные векторные расслоения, для которых число Дональдсона–Кассона равно 1:

$$\text{CD}_X(m(L)) = 1,$$

для любого линейного расслоения L на X (если $h^{1,0}(X) = 0$).

С другой стороны, существует много пучков со специальными векторами Мукая m , для которых многообразие модулей $M_X(m)$ компактно и гладко. Например, $F = \mathcal{O}_p$, где $p \in X$ – точка. В этом случае конструкция деформации к нормальному конусу дает

$$\text{CD}_X(m(\mathcal{O}_p)) = \chi_{\text{top}}(X) = \sum_i (-1)^i \text{rk } H^i(X, \mathbb{Z}),$$

где справа стоит топологическая эйлерова характеристика. Напомним интерпретацию многообразия модулей $M_X(m)$ в виде множества нулей голоморфного дифференциала (7.3) на пространстве $\mathcal{D}''_X(E)$. Это пространство зависит только от топологического типа расслоения $[E]$, т. е. от характера Черна или от вектора Мукая $m(E)$. Это приводит к интерпретации

$$\text{CD}_X(m(E)) = \chi_{\text{top}}(\mathcal{D}''_X(E))$$

(несмотря на то, что пространство $\mathcal{D}''_X(E)$ бесконечномерно).

При условии трансверсальности существует конечное множество инфинитезимально жестких расслоений $\{E_1, \dots, E_{\text{CD}(m)}\}$ топологического типа m . Отображение Абеля–Якоби отправляет этот набор в точки промежуточного якобиана:

$$\{J_m(E_1), \dots, J_m(E_{\text{CD}(m)})\} \subset J(X).$$

Этот набор точек определен однозначно с точностью до сдвига, и мы можем избежать этой неопределенности при условии

$$\sum_i J_m(E_i) = 0.$$

В некоторых случаях мы докажем аналог теоремы Абеля:

$$i \neq j \implies J_m(E_i) \neq J_m(E_j).$$

Закончим рассмотрение случая Калаби–Яо формулировкой гипотезы, аналогичной гипотезе Клеменса о рациональных кривых на общей квинтике в $\mathbb{P}^4$: на общей квинтике в $\mathbb{P}^4$ для любого m каждое стабильное двумерное расслоение E инфинитезимально жестко, т. е. $H^1(\text{ad } E) = 0$.

§ 11. Многообразия Фано и многообразия общего типа.

Полиномы положительной степени

Для квазимногообразий Фано число

$$\Delta(E) \cdot (-K_X) = D_X(E) > 0$$

положительно и виртуальная размерность многообразия модулей стабильных расслоений равна

$$\text{v. dim } \mathcal{M}_E^s = \text{rk}(E) \cdot D_X(E) - (\text{rk}(E)^2 - 1), \quad (11.1)$$

потому что

$$\frac{k_X(-K_X)}{24} = \chi(\mathcal{O}_X) = 1.$$

Мы видим, что существует бесконечное семейство модулей стабильных расслоений возрастающей до бесконечности (виртуальной) размерности.

Предположим для простоты, что

$$H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot H.$$

Тогда геометрическая ситуация описывается одной положительной константой – индексом многообразия Фано:

$$-K_X = i_X \cdot H.$$

Топологические классы Черна тогда мы можем задавать константами:

$$c_1(E) = c_1 \cdot \text{PD}(H), \quad c_2(E) = c_2 \cdot H$$

и

$$D_X(E) = \left(c_2 - \frac{\text{rk} - 1}{2 \cdot \text{rk}} c_1^2 \right) i_X.$$

Виртуальная размерность многообразия модулей равна тогда

$$\text{v. dim } \mathcal{M}_E = i_X \text{ rk} \left(c_2 - \frac{\text{rk} - 1}{2 \cdot \text{rk}} c_1^2 \right) - (\text{rk}^2 - 1).$$

Обычные аргументы показывают, что можно ограничиться случаем, когда $0 \leq c_1 < \text{rk}$. Тогда

$$\text{v. dim } \mathcal{M}_E > i_X \text{ rk} \cdot c_2 - \frac{(\text{rk} - 1)(\text{rk} + 3)}{2}. \quad (11.2)$$

Это позволяет увидеть все возможные векторы Мукая с положительной виртуальной размерностью многообразий модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Для алгебраической поверхности S имеются того же типа формулы для размерности многообразий модулей расслоений: кольцо четных когомологий $H^{2*}(S, \mathbb{Q})$ допускает стандартную билинейную форму $(u, v) = (u^* \cdot v)_4$ и нестандартную

$$-\chi(E_1, E_2) = \sum_{i=0}^2 (-1)^{i+1} \operatorname{rk} H^i(X, E_1^* \otimes E_2)$$

с симметрической $\chi(E_1, E_2)_+$ и кососимметрической $\chi(E_1, E_2)_-$ частями. Та же коррекция характера Черна $m(E) = \operatorname{ch} E \sqrt{\operatorname{td}_S^+}$ определяет вектор Мукая и редукцию нестандартной формы к стандартной (технические детали см. в [28], а геометрические – в [26]). Так что

$$\begin{aligned} \chi(E_1, E_2)_+ &= c_1(E_1)c_1(E_2) - \frac{1}{2} \operatorname{rk} E_2 (c_1(E_1)^2 - c_2(E_1)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{rk} E_1 \cdot (c_1(E_2)^2 - c_2(E_2)) - \operatorname{rk} E_1 \operatorname{rk} E_2 \cdot \chi(\mathcal{O}_S) \end{aligned}$$

и

$$\chi(E, E)_+ = 2 \operatorname{rk} \cdot \left(\Delta(E) - \operatorname{rk} \cdot \frac{\chi(\mathcal{O}_S)}{2} \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. *Виртуальная (ожидаемая) размерность многообразия модулей простых векторных расслоений на S задается формулой*

$$\operatorname{v. dim} \mathcal{M}_E = 2 \left[\operatorname{rk}(E) \cdot \Delta(E) - (\operatorname{rk}(E)^2 - 1) \cdot \frac{\chi(\mathcal{O}_S)}{2} \right],$$

где, как обычно, $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - h^{1,0} + h^{2,0}$.

Наконец, если $S \in |-K_X|$ – гладкая КЗ-поверхность из антиканонической системы на трехмерном многообразии Фано X и $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ (как, например, для квазимногообразий Фано – см. ниже), то

$$D_X(E) = \Delta(E|_S) \quad \text{и} \quad \frac{\chi(\mathcal{O}_S)}{2} = \chi(\mathcal{O}_X). \quad (11.3)$$

Отсюда легко проверить

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.2. *Если $S \in |-K_X|$ – гладкая КЗ-поверхность из антиканонической системы многообразия X , то для любой пары E_1, E_2 векторных расслоений на X*

$$\chi_+(E_1, E_2) = \frac{\chi(E_1|_S, E_2|_S)}{2}$$

и для любого простого векторного расслоения на X

$$\operatorname{v. dim} \mathcal{M}_E = \frac{\operatorname{v. dim} \mathcal{M}_{E|_S}}{2}.$$

Мы увидим в следующем параграфе, что это не простое численное совпадение.

Теперь рассмотрим случай многообразий общего типа. Условие стабильности Богомолова

$$\Delta(E) \cdot (-K) < 0$$

и формула для размерности многообразия модулей

$$\mathrm{v. dim} \mathcal{M}_E^s = (\mathrm{rk}(E)^2 - 1)\chi(\mathcal{O}_X) - \mathrm{rk}(E)D_X(E)K_X$$

влекут следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.3. *Виртуальная размерность многообразия модулей простых векторных расслоений топологического типа $[E]$ на X неотрицательна в том и только том случае, если*

$$(\mathrm{rk}(E)^2 - 1)\chi(\mathcal{O}_X) - \mathrm{rk}(E) \deg D_X(E) \geq 0,$$

где степень $\deg$ берется относительно канонической поляризации K_X .

Таким образом, набор векторов Мукая с положительной виртуальной размерностью многообразий модулей а priori ограничен.

Как иллюстрацию рассмотрим случай “Pic $X = \mathbb{Z} \cdot H$ ” с $K_X = d \cdot H$. Тогда

$$\mathrm{v. dim} \mathcal{M}_E = (\mathrm{rk}(E)^2 - 1)\chi(\mathcal{O}_X) - \mathrm{rk}(E) \left(c_2 - \frac{\mathrm{rk} - 1}{2 \cdot \mathrm{rk}} \cdot c_1^2 \right) \cdot d.$$

Снова, ограничиваясь случаем, когда ранг не превышает размерность базы, имеем

$$\mathrm{v. dim} \mathcal{M}_E \leq (\mathrm{rk}(E)^2 - 1)\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(\mathrm{rk} - 1)^2}{4} \cdot d - \mathrm{rk}(E)c_2d.$$

Отсюда легко видеть, что виртуальная размерность многообразия модулей неотрицательная в том и только том случае, если

$$0 < c_2 \leq \frac{(\mathrm{rk}(E)^2 - 1)\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(\mathrm{rk} - 1)^2}{4} \cdot d}{\mathrm{rk}(E) \cdot d}.$$

Очевидно, что имеется только конечное число решений этого неравенства.

Предыдущие грубые вычисления показывают, что многообразия модулей положительной виртуальной размерности возникают только в случае многообразий Фано (бесконечная серия) и многообразий общего типа (конечное число компонент). Однако требования определенности канонического класса слишком строгие для геометрии. Все наши численные прикидки сохраняются и в случае более общих многообразий, которые необходимы для наших геометрических конструкций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. 1) Многообразие Y называется *квазимногообразием Фано*, если антиканоническая линейная система содержит гладкую КЗ-поверхность и $\chi(\mathcal{O}_Y) = 1$.

2) Многообразие X называется *квазиобщего типа*, если канонический класс K_X численно эффективен, $h^{0,1}(X) = h^{0,2}(X) = 0$ и $h^{0,3} > 0$.

Хорошо известный пример квазимногообразий Фано представляют раздутия классических многообразий Фано с центрами на фиксированной поверхности из антиканонической системы.

Предположим, что для вектора Мукая m реализуется трансверсальная ситуация, т. е. многообразие модулей стабильных расслоений имеет конечное множество компонент “правильной” размерности $\mathcal{M}_X^s(m)$

$$\{\mathcal{M}_X^s(m)_1, \dots, \mathcal{M}_X^s(m)_N\}.$$

Тогда параллельно полиномам Дональдсона для 4-многообразий мы можем определить набор полиномов $D_X(m)_j$ степени $d = m^2 + \chi(\mathcal{O}_X)$ на обрезанном кольце четномерных когомологий

$$H^{2*}(X, \mathbb{Q})' = H^0(X, \mathbb{Q}) \oplus H^2(X, \mathbb{Q}),$$

используя пересечения μ -классов на компактификации компонент $\overline{\mathcal{M}_X^s(m)_j}$. Эта конструкция уже привычна и состоит в сопоставлении

$$D_j^m(\sigma) = \mu(\sigma)^d \quad (11.4)$$

на $\overline{\mathcal{M}_X^s(m)_j}$ для любого $\sigma \in H^2(X, \mathbb{Q})'$.

Отображение Абеля переводит каждую компоненту $\mathcal{M}_X^s(m)_j$ многообразия модулей в промежуточный якобиан X :

$$J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_j) \subset J^3(X). \quad (11.5)$$

Если коразмерность образа равна

$$\text{codim}_{J^3(X)} J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_j) = \text{cd}_j^m, \quad (11.6)$$

мы можем определить новый симметрический полином как на решетке $H^2(J^3(X), \mathbb{Z})$ степени $\text{cd} = \text{cd}_j^m$:

$$A_j^m(\sigma) = (\sigma)^{\text{cd}} \cdot [J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_j)], \quad (11.7)$$

так и на всем кольце когомологий тора $J^3(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2. Образ $J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_j)$ допускает естественную компактификацию в промежуточном якобиане, и фундаментальный класс когомологий $[J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_j)]$ определен корректно.

Далее, ограничение такого полинома на подпространство $\wedge^2 H^1(J^3(X), \mathbb{Z}) \subset H^2(J^3(X), \mathbb{Z})$ определяет тензор

$$A_j^m(X) \in S^{\text{cd}}(\wedge^2 H^3(X, \mathbb{Z})). \quad (11.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.3. Удивительный факт заключается в том, что число таких полиномов для всех векторов Мукая расслоений фиксированного ранга *конечно*. Это очевидно из наших вычислений для многообразий (квази) общего типа, а для квазимногообразий Фано нетрудно показать, что если виртуальная размерность компонент многообразий модулей достаточно велика, то отображение Абеля–Якоби сюръективно.

Из предложения 11.1 легко выводится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.4. Если X – многообразие квазиобщего типа и $\mathcal{M}_X^s(m)_j$ – трансверсальная компонента, то инвариант $A_j^m(X)$ (11.8) не тривиален.

(Действительно, в этом случае отображение Абеля–Якоби не сюръективно.)

Наконец, для положительной виртуальной размерности компонент многообразий модулей естественно определить инвариант Дональдсона–Кассона следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Для многообразия X и вектора Мукая m инвариант Дональдсона–Кассона $CD_X(m)$ равен числу связных компонент многообразия $\mathcal{M}_X^s(m)$.

Это, действительно, аналог инварианта Кассона в силу предложения 8.3.

В трансверсальной ситуации существует конечное число компонент правильной размерности многообразия модулей $\mathcal{M}_X^s(m)$

$$\{\mathcal{M}_X^s(m)_1, \dots, \mathcal{M}_X^s(m)_{CD(m)}\}$$

топологического типа $m = m(E)$. Отображение Абеля–Якоби этих компонент в промежуточный якобиан многообразия X :

$$\{J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_1), \dots, J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_{CD(m)})\} \subset J(X),$$

и проекция $\text{pr}_{H^{3,0}}$ (см. предложение 8.3) определяют конечное число нулей дифференциала (7.1). Поэтому их число и является аналогом инварианта Кассона.

В некоторых случаях мы докажем, что

$$i \neq j \implies J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_i) \cap J_m(\mathcal{M}_X^s(m)_j) = \emptyset$$

– аналог теоремы Абеля.

Переходим к описанию процедуры вычисления таких инвариантов методом “разрезаний и склейки”, аналогичным использованию диаграмм Хегора при вычислении обычного инварианта Кассона в § 3 (см. [2]).

§ 12. Геометрия векторных расслоений на флагах

Как и в обычной численной геометрии, при вычислении новых инвариантов естественно и продуктивно применить “принцип вырождения”. В нашем случае, когда дискретные инварианты сохраняются при непрерывных деформациях, естественно вырождать многообразие Калаби–Яо следующим образом:

$$X = Y_+ \cup_S Y_-,$$

где $Y_{\pm}$ – гладкие трехмерные многообразия, трансверсально пересекающиеся вдоль гладкой КЗ-поверхности S из антиканонической системы $S \in |-K_{Y_{\pm}}|$, т. е. мы склеиваем виртуальное многообразие Калаби–Яо из двух “флагов” квази-многообразий Фано с одной и той же поверхностью типа КЗ. Поэтому, прежде чем исследовать векторные расслоения на таких виртуальных многообразиях Фано, мы должны исследовать геометрию расслоений на паре $(S \subset Y)$, где $S \in |-K_Y|$ – гладкая КЗ-поверхность из антиканонической линейной системы на Y , являющейся комплексным аналогом трехмерного многообразия с границей.

Прежде всего, возвращаясь к численным инвариантам векторного расслоения на Y , легко видеть, что симметрическая форма $\chi_+(E_1, E_2)$ зависит только от трех первых компонент кольца четномерных когомологий.

Далее, $\mathcal{O}_Y(K_X) = \mathcal{O}_Y(-S)$. Любой обратимый пучок определяет автоморфизм T_{K_Y} решетки $K_{\text{top}}^0 = H^{2*}(Y, \mathbb{Z})$, которую мы рассматриваем как решетку Мукая с билинейной формой Мукая, по формуле

$$T_{K_Y}(m) = m \cdot e^{K_Y}.$$

Ограничение расслоения на поверхность S определяет отображение решеток Мукая

$$\text{res}: M_Y \rightarrow M_S = H^{2*}(S, \mathbb{Z}). \quad (12.1)$$

Образ этого отображения в решетке Мукая S совпадает с образом оператора

$$\text{im}(\text{id} - T_{-S}) = M_S. \quad (12.2)$$

Более подробно,

$$\begin{aligned} (\text{id} - T_{-S})(u_0, u_1, u_2, u_3) &= (0, -K_X \cdot u_0, u_1 \cdot S, u_2 \cdot S) \\ &= (u_0, u_1 \cdot S, u_2 \cdot S) \in H^*(S). \end{aligned}$$

Сравнивая формулы начала § 9, мы видим, что билинейная форма

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2} \text{res}^*(\cdot, \cdot) \quad (12.3)$$

– прообраз стандартной билинейной формы

$$(u, v) = -[v^* \cdot u]_4$$

на $H^*(S, \mathbb{Z})$.

Это ограничение и преобразование (приведенное выше) корня

$$(\text{id} - T_{-S})\left(\sqrt{\text{td}_X^+}\right) = (1, 0, 1) = \sqrt{\text{td}_S} \quad (12.4)$$

есть корень из рода Тодда поверхности типа КЗ, потому что для квазимногообразия Фано $k_Y \cdot K_Y / 24 = 1$. Для любого вектора Мукая векторного расслоения на Y

$$(\text{id} - T_{-S})(m(E)) = m(E|_S) = \text{ch}(E|_S) \cdot \sqrt{\text{td}_S} \quad (12.5)$$

есть вектор Мукая расслоения $E|_S$ на КЗ-поверхности S .

Более того, симметрическая билинейная форма $\chi(E_1, E_2)_+$ (9.9) на Y есть прообраз симметрической формы

$$\chi(E_1|_S, E_2|_S) = (m(E_1|_S), m(E_2|_S)). \quad (12.6)$$

(Мы уже видели это в предыдущем параграфе.)

По теореме Бертини имеется равенство

$$H^2(Y, \mathbb{Z}) = H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z}), \quad (12.7)$$

и по теореме Мукая для любого примитивного вектора $m = (u_0, u_2, u_4) \in H^{2*}(S, \mathbb{Z})$ имеем

$$u_0 > 0, \quad u_2 \in H^{1,1}(S), \quad m^2 \geq -2 \implies \mathcal{M}_S(m) \neq \emptyset, \quad (12.8)$$

т. е. существует стабильное векторное расслоение E_0 такое, что $m = m(E_0)$. Тогда

$$\dim \mathcal{M}_S(m) \geq m^2 + 2. \quad (12.9)$$

Предположим, что существует $(-K_Y)$ -стабильное расслоение E на Y такое, что $E_0 = E|_S$. Тогда

$$\mathcal{M}_Y(m) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \dim \mathcal{M}_Y(m) \geq \frac{1}{2}m^2 + 1 \quad (12.10)$$

(см. [20]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Векторное расслоение E на Y называется *регулярным*, если $H^2(\text{ad } E) = 0$. Неприводимая компонента $\mathcal{M}_Y(m)_0$ называется *регулярной*, если общее расслоение $E \in \mathcal{M}_Y(m)_0$ регулярно.

В этом случае (в силу результатов теории деформации)

$$\dim \mathcal{M}_Y(m)_0 = \text{v. dim } \mathcal{M}_Y(m)_0 = \frac{1}{2}m^2 + 1,$$

а отображение ограничения

$$r: \mathcal{M}_Y(m)_0 \rightarrow \mathcal{M}_S(m)$$

является вложением на регулярных расслоениях.

Оба эти утверждения следуют из короткой точной когомологической последовательности

$$0 \rightarrow H^1(\text{ad } E) \rightarrow^{\text{dr}} H^1(\text{ad } E|_S) \rightarrow H^2(\text{ad } E(K_X)) \rightarrow 0 \quad (12.11)$$

ограничения для $\text{ad } E$:

$$0 \rightarrow \text{ad } E(K_X) \rightarrow \text{ad } E \rightarrow \text{ad } E|_S \rightarrow 0. \quad (12.12)$$

Более того, продолжение ее когомологической последовательности

$$0 \rightarrow H^2(\text{ad } E|_S) \rightarrow H^3(\text{ad } E(K_X)) \quad (12.13)$$

показывает, что $H^2(\text{ad } E|_S) = 0$, если E просто:

$$H^0(\text{ad } E) = 0 \implies H^3(\text{ad } E(K_X)) = H^0(\text{ad } E)^* = 0.$$

Следовательно, для простого расслоения на Y

$$E \text{ регулярно} \implies E|_S \text{ регулярно}. \quad (12.14)$$

Отсюда имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.1. *Отображение ограничения r (10.12) – вложение в общей точке в регулярную компоненту $\mathcal{M}_S(m)_0$ и*

$$\dim \mathcal{M}_S(m)_0 = 2 \dim \mathcal{M}_Y(m)_0.$$

Главный геометрический факт заключается в том, что каждая регулярная компонента $\mathcal{M}_S(m)_0$ векторных расслоений на S допускает голоморфную симплектическую структуру Мукая

$$\omega_S: T\mathcal{M}_S(m)_0 \rightarrow T^*\mathcal{M}_S(m)_0,$$

определение которой абсолютно параллельно канонической симплектической структуре в случае римановой поверхности Σ (4.7).

Именно, для алгебраической поверхности S и топологического расслоения E с вектором Мукая m и пространством $\tilde{\partial}$ -операторов 2-форма на касательном пространстве $\Omega^{0,1}(\text{End } E)$ в $\tilde{\partial}$ -операторе $\tilde{\partial}_a$ задается формулой

$$\omega_S(\omega_1, \omega_2) = \int_{\Sigma} \text{tr}(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \theta, \quad (12.15)$$

где θ – любая $(2, 0)$ -форма на S .

Эта форма:

- 1) замкнута;
- 2) $\mathcal{G}$ -инвариантна;
- 3) невырождена.

Получаем отсюда $(2, 0)$ -форму на пространстве орбит $\mathcal{D}_S''(E)$ и, ограничивая ее на

$$((\tilde{\partial})^2)_0 = \bigcup \mathcal{M}_i \supset \mathcal{M}_S(m)_0, \quad (12.16)$$

получаем голоморфную симплектическую структуру ω_S на любой регулярной компоненте $\mathcal{M}_S(m)_0$ модулей векторных расслоений на S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2. *Образ отображения ограничения $r(\mathcal{M}_Y(m)_0) \in \mathcal{M}_S(m)_0$ – лагранжево подмногообразие многообразия модулей $\mathcal{M}_S(m)_0$ относительно ω_S .*

Действительно, касательное пространство к $\mathcal{M}_S(m)_0$ в любом регулярном расслоении $r(E)$ совпадает с $H^1(\text{ad } E|_S)$, и мы можем рассматривать мономорфизм (10.11) как дифференциал отображения ограничения:

$$0 \rightarrow (T\mathcal{M}_Y(m)_0)_E \xrightarrow{\text{dr}} (T\mathcal{M}_S(m)_0)_{E|_S}. \quad (12.17)$$

С другой стороны, эпиморфизм этой точной последовательности

$$(T^*\mathcal{M}_S(m)_0)_{E|_S} \xrightarrow{\text{dr}} (T^*\mathcal{M}_Y(m)_0)_E \rightarrow 0 \quad (12.18)$$

мы можем рассматривать как кодифференциал, сопряженный мономорфизму дифференциала, в силу идентификации

$$(T\mathcal{M}_S(m)_0)_{E|_S} = H^1(\text{ad } E|_S) = H^1(\text{ad } E|_S)^* = (T^*\mathcal{M}_S(m)_0)_{E|_S}, \quad (12.19)$$

задаваемой двойственностью Серра, которая есть ни что иное как ограничение симплектической формы ω_S на слой касательного расслоения (см. [20]). Но последовательность (12.11) точна и, значит,

$$\omega_S|_{(T\mathcal{M}_Y(m)_0)_E} = 0, \quad (12.20)$$

и утверждение доказано.

Более того, в регулярном случае нормальное расслоение

$$N_{r(\mathcal{M}_Y(m)_0) \in \mathcal{M}_S(m)_0} = T^*\mathcal{M}_Y(m)_0 \quad (12.21)$$

есть кокасательное расслоение многообразия модулей векторного расслоения на Y .

Напомним, что каждое многообразие модулей $\mathcal{M}_S(m)$ допускает μ -отображение

$$\mu: H^*(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{M}_S(m)) \oplus H^4(\mathcal{M}_S(m)), \quad (12.22)$$

определяемое при помощи слант-произведения на c_2 квазиуниверсального расслоения на $S \times \mathcal{M}_S(m)$, и полином на $H^2(S, \mathbb{Z})$:

$$D_{S \subset Y}[m]^{m^2+1}(\sigma) = \mu(\sigma)^{\frac{1}{2}m^2+1}[r(\mathcal{M}_Y(m))], \quad (12.23)$$

в точности такой же, как полином Дональдсона для 4-многообразия. (Мы не обсуждаем здесь технические проблемы, такие как компактность, корректность определения фундаментального цикла $[r(\mathcal{M}_S(m))]$ и т. д. Восполнение этого пробела – сейчас обычная процедура.)

Менее стандартным является другой целочисленный инвариант, приписываемый вектору Мукая m и паре $S \subset Y$:

$$\text{CD}_{S \subset Y}(m) = [r(\mathcal{M}_Y(m))]^2, \quad (12.24)$$

который мы назовем *относительным инвариантом Дональдсона–Кассона пары $S \subset Y$* .

В компактном и гладком случае это число совпадает со старшим классом Черна нормального расслоения:

$$\text{CD}_{S \subset Y}(m) = c_{\text{top}}(N_{r(\mathcal{M}_Y(m)) \subset \mathcal{M}_S(m)}). \quad (12.25)$$

В регулярном случае

$$N_{r(\mathcal{M}_Y(m)) \subset \mathcal{M}_S(m)} = T^*\mathcal{M}_Y(m) \quad (12.26)$$

– кокасательное расслоение многообразия модулей и

$$\text{CD}_{S \subset Y}(m) = \chi_{\text{top}} \mathcal{M}_Y(m). \quad (12.27)$$

Этот относительный инвариант будет использован для вычисления абсолютно-го инварианта Дональдсона–Кассона.

§ 13. Деформации флагов и векторных расслоений

Теория деформации флагов или пар совершенно аналогична теории деформаций комплексных многообразий: прежде всего мы строим векторное расслоение (или когерентный пучок) $T(S \subset Y)$ такой, что пространство его первых когомологий $H^1(T(S \subset Y))$ есть пространство формальных линейных деформаций пары, а пространство двумерных когомологий $H^2(T(S \subset Y))$ есть пространство препятствий к деформации. Эти пространства связаны отображением Кураниши

$$\Phi: H^1(T(S \subset Y)) \rightarrow H^2(T(S \subset Y)), \quad (13.1)$$

и локально пространство $\Phi^{-1}(0)$ моделирует многообразие модулей деформаций.

Ясно, как построить такой пучок $T(S \subset Y)$ для деформаций флагов (пар) вида $S \subset Y$: рассмотрим последовательность присоединения для касательного расслоения

$$0 \rightarrow TY(-S) \rightarrow TY \rightarrow TY|_S \rightarrow 0 \quad (13.2)$$

и стандартную точную последовательность на S

$$0 \rightarrow TS \rightarrow TY|_S \rightarrow N_{S \subset Y} \rightarrow 0, \quad (13.3)$$

где последнее линейное расслоение есть нормальный пучок поверхности в трехмерном многообразии. Ядро композиции эпиморфизмов этих последовательностей и есть искомый пучок, так что мы имеем точную тройку

$$0 \rightarrow T(S \subset Y) \rightarrow TY \rightarrow N_{S \subset Y} \rightarrow 0, \quad (13.4)$$

ядром эпиморфизма в которой и служит пучок векторных полей, необходимый для конструкции Кураниши (12.1) деформации пар. Напомним, что классическая модель Кураниши использует касательные расслоения TY для деформации многообразия Y и TS для деформации поверхности S . Мы можем предположить (и проверить, что это справедливо для флагов нашего типа (квазимногообразие Фано вместе с КЗ-поверхностью на нем)), что

$$H^1(S, N_{S \subset Y}) = 0. \quad (13.5)$$

Тогда часть длинной точной когомологической последовательности тройки (13.4) может быть дополнена отображениями Кураниши до диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(N_{S \subset Y}) & \longrightarrow & H^1(T(S \subset Y)) & \longrightarrow & H^1(TY) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & H^2(T(S \subset Y)) & \longrightarrow & H^2(TY) \rightarrow 0. \end{array} \quad (13.6)$$

Отсюда немедленно получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.1. *Если деформации многообразия Y свободны от препятствий, то деформации пары $S \subset Y$ свободны от препятствий.*

По определению пучка $T(S \subset Y)$ имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow TY(-S) \rightarrow T(S \subset Y) \rightarrow TS \rightarrow 0. \quad (13.7)$$

Если наша пара есть флаг требуемого типа, то длинная когомологическая последовательность тройки (12.7) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\wedge^2 \Omega Y) &\rightarrow H^1(T(S \subset Y)) \rightarrow H^1(\Omega S)^* \rightarrow H^1(\Omega Y)^* \\ &\rightarrow H^2(T(S \subset Y)) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (13.8)$$

(мы используем здесь равенство $E \otimes \wedge^3 E^* = \wedge^2 E^*$, справедливое, если $\operatorname{rk} E = 3$, и двойственность Серра). Очевидно, что гомоморфизм

$$H^1(\Omega S)^* \rightarrow H^1(\Omega Y)^*$$

точной последовательности (12.8) двойствен гомоморфизму ограничения

$$r: H^{1,1}(Y) \rightarrow H^{1,1}(S) \quad (13.9)$$

(мы используем здесь изоморфизм Дольбо).

Отсюда получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.2. *Пространство препятствий к деформациям задается равенством*

$$H^2(T(S \subset Y)) = (\ker r)^* \subset H^{2,2}(Y). \quad (13.10)$$

В частности, если $\operatorname{Pic} Y = \mathbb{Z}$, то деформации пар $S \subset Y$ свободны от препятствий и, следовательно, в силу (12.6) деформации многообразия Y свободны от препятствий тоже.

Действительно, гомоморфизм $H^1(\Omega S)^* \rightarrow H^1(\Omega Y)^*$ не нулевой, так что при наших условиях он – изоморфизм.

Более того, пространство

$$H^1(TY(K_Y)) = H^1(\wedge^2 \Omega Y) \quad (13.11)$$

есть пространство деформаций пар, сохраняющих комплексную структуру на S . С другой стороны, это пространство – касательное пространство в нуле промежуточного якобиана многообразия Y :

$$H^1(\wedge^2 \Omega Y) = (TJ_Y)_0. \quad (13.12)$$

Этот факт естествен с точки зрения деформаций приводимых многообразий Калаби–Яо.

Напомним, что существует набор препятствий для эквивалентности n -го порядка утолщения нашей КЗ-поверхности S в квазимногообразии Фано Y и его плоской модели. Первое препятствие есть класс

$$\omega_1 \in H^1(TS \otimes N_{S \subset Y}^*), \quad (13.13)$$

и стандартная точная последовательность дает

$$H^1(TS \otimes N_{S \subset Y}^*) = H^1(\wedge^2 \Omega Y|_S). \quad (13.14)$$

С другой стороны, в нашем случае по двойственности Серра

$$H^1(TS \otimes N_{S \subset Y}^*) = H^1(TS \otimes N_{S \subset Y})^*. \quad (13.15)$$

Мы используем это отождествление для “склейки”.

§ 14. Разрезание и склейка в почти комплексном и комплексном случаях

Здесь мы применим полученные результаты к вещественным 6-мерным почти комплексным многообразиям. Мы не будем контролировать для этого случая вопросы конечности (или компактности) пространств решений наших уравнений. Несмотря на то, что многие серьезные технические проблемы, такие как “условия стабильности”, могут быть преодолены и в этом общем случае (см. [7]), мы ограничим квантор общности в наших дальнейших приложениях только алгебро-геометрическим случаем. Интерпретация *комплексной ориентации* как голоморфной тривиализации детерминанта касательного расслоения ограничивает нас случаем многообразий Калаби–Яо (философия такого ограничения описана в [10]). Среди таких многообразий вырожденные многообразия чрезвычайно важны, как уже отмечалось, для описания эффекта зеркальной симметрии. Более того, большая предельная комплексная структура (максимальное вырождение) позволяет сравнить “взаимодействие” Юкавы с $(1, 1)$ -топологическим произведением в зеркальной симметрии. При исследовании расширенной зеркальной симметрии (см., например, [29]) нам потребуются исследования поведения векторных расслоений на многообразиях Калаби–Яо. Следуя методу работы [10], здесь мы ограничимся специальным типом вырождений многообразий Калаби–Яо (в точности как на дивизорах приводимых кривых в многообразии модулей стабильных кривых рода g):

$$X_0 = Y_+ \cup_S Y_-, \quad (14.1)$$

где $S \subset Y_{\pm}$ – флаг (пара) из гладкой КЗ-поверхности S из антиканонической системы квазимногообразия Фано $Y_{\pm}$. Мы имеем четыре уровня проблем при деформации такого многообразия в неособое:

- 1) как почти комплексного многообразия;
- 2) как комплексного многообразия, но без поляризации;
- 3) как поляризованного алгебраического многообразия;
- 4) допускающего гладкое пространство деформации.

ЗАМЕЧАНИЕ 14.1. Последнее условие необходимо при исследовании деформаций с расслоениями.

Все эти проблемы исследованы в [8] и [19]. Конечно, эти проблемы в высшей степени различны, но для них всех основная проблема выглядит одинаково:

Как много топологических типов реализуют гладкие деформации приводимых многообразий типа (14.1)?

Заметим, что множество топологических типов квазимногообразий Фано ограничено, так что мы можем ожидать, что и полученное множество топологических типов гладких 6-многообразий тоже ограничено.

Исходя из приводимой конфигурации (14.1), мы получаем прежде всего на КЗ-поверхности S два нормальных расслоения $\mathcal{O}_S(-K_{Y_{\pm}}) = N_{S \subset Y_{\pm}}$, а priori совершенно различных. Далее топологическая процедура сглаживания склейки совершенно параллельна топологической хирургии в вещественном случае: прежде вырежем малую окрестность подмногообразия особенностей S в приводимом многообразии X_0 и рассмотрим малые трубки

$$S^1(N_{S \subset Y_{\pm}}) \subset N_{S \subset Y_{\pm}} = L_{-K_{Y_{\pm}}} \quad (14.2)$$

в нормальных расслоениях

$$N_{S \subset Y_{\pm}} = L - K_{Y_{\pm}}, \quad (14.3)$$

удалим малые расслоения на диски

$$D^2(N_{S \subset Y_{\pm}}) \quad \text{с границей} \quad \partial D^2(N_{S \subset Y_{\pm}}) = -S^1(N_{S \subset Y_{\pm}}) \quad (14.4)$$

из квазимногообразий Фано $Y_{\pm}$ и получим открытое особое многообразие

$$V_0 = D^2(N_{S \subset Y_+}) \cup_S D^2(N_{S \subset Y_-}) \quad (14.5)$$

– пару расслоений на диски, склеенные вдоль нулевых сечений нормальных расслоений.

Мы получили 6-многообразия с границами:

$$\begin{aligned} V_0 & \quad \text{с границей} \quad \partial V_0 = S^1(N_{S \subset Y_+}) \cup S^1(N_{S \subset Y_-}), \\ Y_{\pm}^0 = Y_{\pm} - D^2(N_{S \subset Y_{\pm}}) & \quad \text{с границами} \quad S^1(N_{S \subset Y_{\pm}}), \end{aligned} \quad (14.6)$$

и наше многообразие X_0 есть склейка этих трех кусков вдоль соответствующих границ.

Теперь мы можем продеформировать особое 6-многообразие с границей V_0 , сохраняя границу ∂V_0 , при помощи следующей конструкции (см. [8]): рассмотрим квадратичное отображение расслоений на S

$$q: N_{S \subset Y_+} \oplus N_{S \subset Y_-} \rightarrow N_{S \subset Y_+} \otimes N_{S \subset Y_-} = L - K_{Y_+} - K_{Y_-}. \quad (14.7)$$

Выбирая любое сечение $s \in H^0(L - K_{Y_+} - K_{Y_-})$ и интерпретируя его как вложение

$$i_s: S \rightarrow L - K_{Y_+} - K_{Y_-} \quad (14.8)$$

базы S в тело линейного расслоения, получаем многообразие

$$V_s = q^{-1}(i_s(S)) \cap D^2(N_{S \subset Y_+}) \times_S D^2(N_{S \subset Y_-}). \quad (14.9)$$

Можно показать, что если выбранные окрестности достаточно малы, то граница диффеоморфна многообразию

$$\partial V_s = S^1(N_{S \subset Y_+}) \cup S^1(N_{S \subset Y_-}). \quad (14.10)$$

Наконец, склеивая многообразие V_s с $Y_{\pm}^0$ вдоль компонент границы, получаем компактное 6-многообразие X_s .

Более того, если множество нулей

$$(s)_0 = C \in |-K_{Y_+} - K_{Y_-}| \quad (14.11)$$

сечения s – гладкая кривая на S , то V_s (14.9) гладко и мы получаем гладкую топомодель многообразия Калаби–Яо. Если же C допускает некоторые простые особенности, то V_s особо, но малое разрешение этих особых точек дает топомодель многообразия Калаби–Яо уже другого топологического типа. Конечно, заманчиво получить полный список топомodelей многообразий Калаби–Яо, которые могут быть получены этой конструкцией. В частности, интересны топомodelи, получаемые подобной процедурой в случае, когда $(s)_0 = C$ – рациональная кривая с простейшими двойными точками.

ЗАМЕЧАНИЕ 14.2. Удивительно, что мы можем получить такой процедурой топомодель даже такого жесткого многообразия, как Барта–ван-Стратена–Нieto из приводимого многообразия вида (14.1) (см. ниже).

Ясно, что мы можем согласовать нашу процедуру сглаживания с почти комплексной структурой.

Теперь перейдем к описанию деформаций комплексной структуры над топомоделями описанного типа с использованием описанной канонической процедуры.

Напомним (см. [8] и [19]), что, как и для случая деформации флагов, существует один пучок $T(Y_+ \supset S \subset Y_-)$, который строится из подобных же пучков $T(S \subset Y_\pm)$ (13.1) и такой, что пространство $H^1(T(Y_+ \supset S \subset Y_-))$ есть пространство инфинитезимальных деформаций приводимых трехмерных многообразий типа (14.1), а пространство $\mathcal{H}^1$ всех инфинитезимальных деформаций более сложно:

$$0 \rightarrow H^1(T(Y_+ \supset S \subset Y_-)) \rightarrow \mathcal{H}^1 \rightarrow H^0(S, N_{S \subset Y_+} \otimes N_{S \subset Y_-}) \rightarrow 0. \quad (14.12)$$

Однако пространство препятствий имеет абсолютно тот же тип, а именно

$$\mathcal{H}^2 = H^2(T(Y_+ \supset S \subset Y_-)) \quad (14.13)$$

(см. [8, п. 5.1]).

Для описания пучка $T(Y_+ \supset S \subset Y_-)$ рассмотрим несвязное объединение двух флагов $S_\pm \subset Y_\pm$ и отображение отождествления

$$n_\pm: S_\pm \rightarrow S = \text{Sing } X_0. \quad (14.14)$$

Используя точную тройку (13.7) для каждого из флагов $S_\pm \subset Y_\pm$, получаем искомый пучок из точной последовательности

$$0 \rightarrow T(Y_+ \supset S \subset Y_-) \rightarrow T(S_+ \subset Y_+) \oplus T(S_- \subset Y_-) \xrightarrow{\frac{1}{2}(n_+ + n_-)_*} TS \rightarrow 0. \quad (14.15)$$

Следовательно, параллельно последовательности (13.7) для $T(Y_+ \supset S \subset Y_-)$ имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \oplus_\pm TY_\pm(-S) \rightarrow T(Y_+ \supset S \subset Y_-) \rightarrow TS = \ker \frac{1}{2}(n_+ + n_-)_* \rightarrow 0 \quad (14.16)$$

и длинную когомологическую последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \oplus_\pm H^1(\wedge^2 \Omega Y_\pm) &\rightarrow H^1(T(Y_+ \supset S \subset Y_-)) \rightarrow H^1(\Omega S)^* \rightarrow \oplus_\pm H^1(\Omega Y)^* \\ &\rightarrow H^2(T(Y_+ \supset S \subset Y_-)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Сумма композиций $(r_\pm \cdot (n_\pm)_*)$ дает отображение

$$(r_+ \cdot (n_+)_*) + (r_- \cdot (n_-)_*): H^{1,1}(Y_+) \oplus H^{1,1}(Y_-) \rightarrow H^{1,1}(S). \quad (14.18)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.1. *Пространство препятствий есть*

$$\begin{aligned} H^2(T(Y_+ \supset S \subset Y_-)) &= (\ker(r_+ \cdot (n_+)_*) + (r_- \cdot (n_-)_*))^* \\ &\subset H^{1,1}(Y_+)^* \oplus H^{1,1}(Y_-)^*. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Возвращаясь к (14.12), мы видим, что деформационный комплекс с отображением Кураниши есть

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(T(Y_+ \supset S \subset Y_-)) &\rightarrow \mathcal{H}^1 \\ &\rightarrow H^0(S, N_{S \subset Y_+} \otimes N_{S \subset Y_-}) \xrightarrow{\Psi} H^2(T(Y_+ \supset S \subset Y_-)) \\ &= (\ker(r_+ \cdot (n_+)_*) + (r_- \cdot (n_-)_*))^* \subset H^{1,1}(Y_+)^* \oplus H^{1,1}(Y_-)^* \\ &= H^{2,2}(Y_+) \oplus H^{2,2}(Y_-). \end{aligned} \quad (14.20)$$

Для детального описания отображения Ψ см. [8].

СЛЕДСТВИЕ 14.1. 1) *Если $\text{Pic } Y_{\pm} = \mathbb{Z}$ и $N_{S \subset Y_+} \otimes N_{S \subset Y_-}$ порождается сечениями и нетривиально, то размерность пространства M_{X_0} неособых деформаций равна*

$$\text{v. dim } M_{X_0} = h^{1,2}(Y_+) + h^{1,2}(Y_-) + h^0(N_{S \subset Y_+} \otimes N_{S \subset Y_-}) - 1. \quad (14.21)$$

2) *Если*

$$N_{S \subset Y_+} \otimes N_{S \subset Y_-} = \mathcal{O}_S, \quad (14.22)$$

то деформации свободны от препятствий и

$$\text{v. dim } M_{X_0} = h^{1,2}(Y_+) + h^{1,2}(Y_-) + 1, \quad (14.23)$$

а тело семейства деформаций гладко.

Второе утверждение хорошо известно (см. [8] и [19]). Чтобы доказать первое утверждение, рассмотрим росток первого порядка, т.е. первое препятствие пар $S_{\pm} \subset Y_{\pm}$ (13.13)

$$\omega_1^{\pm} \in H^1(TS \otimes N_{S_{\pm} \subset Y_{\pm}}^*), \quad (14.24)$$

и естественный гомоморфизм

$$\begin{aligned} H^0(N_{S_+ \subset Y_-} \otimes N_{S_- \subset Y_-}) \otimes H^1(TS \otimes N_{S_{\pm} \subset Y_{\pm}}^*) \\ \xrightarrow{c} H^1(TS \otimes N_{S_{\pm} \subset Y_{\pm}}) = H^1(TS \otimes N_{S_{\pm} \subset Y_{\pm}}^*)^* \end{aligned} \quad (14.25)$$

(см. (13.15)). Легко видеть, что 1-расширение деформации задается сечением $s \in H^0(N_{S_+ \subset Y_-} \otimes N_{S_- \subset Y_-})$ только с одним условием:

$$\omega_1^-(c(s \otimes \omega_1^+)) = 0. \quad (14.26)$$

Отсюда утверждение 1) сразу следует.

Предположим, что КЗ-поверхность S на квазимногообразии Фано $S \subset Y$ допускает инволюцию

$$i: S \rightarrow S \quad (14.27)$$

такую, что

$$i^*(K_Y|_S) = K_Y|_S. \quad (14.28)$$

Рассмотрим приводимое многообразие Калаби–Яо X_0 , задаваемое склейкой отображений (14.14) с

$$n_+ = \text{id} \quad \text{и} \quad n_- = i. \quad (14.29)$$

СЛЕДСТВИЕ 14.2. *При этих условиях дубль X_0 может быть продеформирован в гладкое многообразие Калаби–Яо.*

Для доказательства заметим, что эта ситуация дословно совпадает со склеиванием твисторного пространства вдоль неособой квадрики в [8]. Все аргументы этой работы, необходимые для доказательства существования гладкой деформации, работают и в нашем случае.

§ 15. Коллекция конструктивных многообразий Калаби–Яо

Рассмотрим все возможные квазифлаги Фано

$$\{(S \subset Y)\}, \quad (15.1)$$

все возможные склейки

$$\{(n_{\pm} : S_{\pm} \rightarrow S)\}, \quad (15.2)$$

все возможные деформации приводимых многообразий описанного типа и все малые разрешения особенностей таких деформаций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Класс полученных многообразий Калаби–Яо назовем *конструктивным*.

Рассмотрим приводимое многообразие, которое по определению является конструктивным многообразием

$$X = (Y_+ \supset S)n_+ \cdot (n_-)^{-1}(S \subset Y_-), \quad (15.3)$$

где склейка g равна $n_+ \cdot (n_-)^{-1}$. Получаем пару отображений ограничений решеток Мукая (см. (11.1)–(11.9))

$$\text{res}_+ : M_{Y_+} \rightarrow M_S \leftarrow M_{Y_-} : g^* \cdot \text{res}_- \quad (15.4)$$

и пересечение

$$\text{res}_+(M_{Y_+}) \cap g^* \cdot \text{res}_-(M_{Y_-}) = M_0. \quad (15.5)$$

Из (12.5) имеем

$$(\text{id} - T_{-S})\left(\sqrt{\text{td}_{Y_{\pm}^+}}\right) = (1, 0, 1) = \sqrt{\text{td}_S} \in M_0. \quad (15.6)$$

Отображения ограничения (12.4) определяют пару эпиморфизмов

$$p_{\pm} : M_{Y_{\pm}} \rightarrow M_0, \quad (15.7)$$

и решетка Мукая многообразия X описывается как

$$M_X = p_+^{-1}(M_0) \oplus_{M_0} \oplus p_-^{-1}(M_0). \quad (15.8)$$

В частности, каждый вектор Мукая имеет форму

$$m = (m_+, m_-), \quad (15.9)$$

и, используя двойственность Пуанкаре на $Y_{\pm}$ и S , мы получаем описание форм (9.9), из которых не равна нулю только одна кососимметрическая форма

$$\chi((m_+^1, m_+^1), (m_+^2, m_+^2)) = \langle m_+^1, m_+^2 \rangle - \langle m_-^2, m_-^1 \rangle. \quad (15.10)$$

Таким образом, конструктивное многообразие Калаби–Яо допускает и специальное описание решетки Мукая, т. е. кольца $H^{2*}(X)$.

Описание любого векторного расслоения на X вполне очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.1. *Пара векторных расслоений $E_{\pm}$ на паре квазимногообразий Фано $Y_{\pm}$ склеивается в векторное расслоение на X в том и только том случае, если*

$$E_+|_S = g^*(E_-|_S). \quad (15.11)$$

Точно так же мы можем склеивать классы когерентных когомологий такого расслоения.

Поскольку мы в праве ожидать, что векторное расслоение на X инфинитезимально жестко, наша задача – описать деформацию расслоения над деформацией многообразия X . С технической точки зрения эта проблема сводится к деформации проективизации компонент векторных расслоений (см. [8]). Поэтому много проще рассматривать деформации базы с гладким тотальным пространством. Критерий для таких деформаций прост:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.2. *Тотальное пространство деформаций приводимого многообразия Калаби–Яо гладко в том и только том случае, если имеет место условие 2) следствия 14.1, т. е. если тензорное произведение нормальных расслоений тривиально.*

Возвращаясь к описанию деформаций (см. предыдущий параграф), напомним, что касательный вектор s к деформации многообразия X (14.1) задан сечением

$$s \in H^0(S, N_{S \subset Y_+} \otimes N_{S \subset Y_-}), \quad (15.12)$$

и полученное многообразие гладко в том и только том случае, если нули этого сечения

$$(s)_0 = C \subset S \quad (15.13)$$

– гладкая кривая на нашей КЗ-поверхности S .

ЗАМЕЧАНИЕ 15.1. Легко видеть, что если C допускает простейшие особенности, то трехмерное многообразие имеет простейшие особенности в этих точках и малое разрешение дает новое гладкое многообразие Калаби–Яо.

Для того чтобы свести общую ситуацию к ситуации с тривиальным тензорным произведением (15.12), мы должны раздуть многообразие Фано Y_+ вдоль кривой C :

$$\sigma: \tilde{Y}_+ \rightarrow Y_+, \quad (15.14)$$

и получить квазимногообразие Фано $\tilde{Y}_+$ с антиканоническим классом $-K_{\tilde{Y}_+}$, представленным нашей поверхностью $S \subset \tilde{Y}_+$. Тогда нормальное расслоение удовлетворяет равенству

$$N_{S \subset \tilde{Y}_+} = N_{S \subset Y_-}^*, \quad (15.15)$$

и тензорное произведение (15.12) тривиально. Мы попадаем в нужную ситуацию.

В зеркальной симметрии согласно SYZ-гипотезе зеркальный партнер X' многообразия Калаби–Яо X допускает расслоение на специальные лагранжевы 3-торы

$$\pi: X' \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{X'}(\text{mir}(m))} \quad (15.16)$$

с базой – компактификацией пространства модулей специальных лагранжевых тор-
ров из класса 3-когомологий $\text{mir}(m)$, а X тогда – компактификация расслоения на
двойственные торы.

При вырождении трехмерного многообразия Калаби–Яо до приводимого мно-
гообразия описанного типа вышеописанное расслоение на торы тоже вырождается
в два расслоения Фано квазикомпонент $Y_{\pm}$, которые могут быть компактифициро-
ваны до расслоений

$$\pi_{\pm}: (Y_{\pm} - S) \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{Y_{\pm}}(\text{mir}(m))} \quad (15.17)$$

с базой – трехмерным многообразием с границей, которая (при естественных пред-
положениях) совпадает с кривой C (15.13).

Следовательно, процедура вырождения трехмерного многообразия Калаби–Яо
 X' до приводимого многообразия описанного типа X'_0 приводит к представлению
базы этого расслоения в виде склейки диаграммы Хегора баз расслоений многооб-
разий Фано вдоль римановой поверхности. Геометрию этой склейки моделирует
вырождение эллиптического пучка на квартике в $\mathbb{P}^3$, когда она вырождается в две
квадрики.

Заметим, что сложность реализации программы Стромингера–Заслова–Яо не
в последнюю очередь связана с трехмерной гипотезой Пуанкаре: если X' в (15.16)
односвязно, то многообразие модулей $\overline{\mathcal{M}_{X'}(\text{mir}(m))}$ должно быть *гомотопичес-*
кой сферой. Ее представление в виде склейки диаграммы Хегора указывает на од-
ну из трех возможностей относительного результата Гаруфолидиса (см. [16, с. 234]).

Вернемся к приводимым многообразиям. Наша последняя проблема – описание
нечетномерных циклов на конструктивном многообразии X (15.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.3. Пусть $X_{\epsilon s}$ – гладкая общая деформация конструк-
тивного многообразия, заданного сечением s (15.12) с гладкой кривой C
(15.13). Тогда существует неканонический изоморфизм

$$H^3(X_{\epsilon s}, \mathbb{Q}) = H^3(Y_+, \mathbb{Q}) \oplus H^3(Y_-, \mathbb{Q}) \oplus H^1(C, \mathbb{Q}) \oplus H^2(S, \mathbb{Q})_0, \quad (15.18)$$

где $H^2(S, \mathbb{Q})_0$ – примитивная часть когомологий $H^2(S, \mathbb{Q})$, т. е.

$$H^2(S, \mathbb{Q})_0 = (H^2(S, \mathbb{Q}) \cap M_0)^{\perp}. \quad (15.19)$$

3-циклы, приходящие из $H^2(S, \mathbb{Q})_0$, соответствуют части V_s (13.9).

Легко видеть, что в ситуации 2) следствия 14.1 геометрия та же самая в силу
равенства

$$H^3(\tilde{Y}_+, \mathbb{Z}) = H^3(Y_+, \mathbb{Z}) \oplus H^1(C, \mathbb{Z}). \quad (15.20)$$

Теперь опишем промежуточный якобиан конструктивного многообразия X
(15.3) в комбинаторных терминах. Деформация структур Ходжа вдоль деформа-
ции $X_{\epsilon s}$ показывает, что как комплексно-аналитическая группа промежуточный
якобиан равен

$$J^3(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J^3(X_{\epsilon s}) = J^3(Y_+) \times J^3(Y_-) \times J(C) \times (\mathbb{C})^{h^2(S)_0+1}, \quad (15.21)$$

где $h^2(S)_0$ – ранг примитивной части пространства когомологий $H^2(S, \mathbb{Q})$ (15.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 15.2. Существует гораздо более точное описание вырождения семейства $J^3(X_{\epsilon s})$ в терминах модели Нерона этого семейства, приведенное в неопубликованной работе Р. Донаги и Ф. Гриффитса. Благодаря этому описанию коэффициенты $\mathbb{Q}$ допускают уточнение.

ПРИМЕР 15.1. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^4$ и пересечение общих квадрики и кубики

$$S = Q \cap F_3 \subset \mathbb{P}^4. \quad (15.22)$$

Конечно, объединение

$$X = Q \cup_S F_3 \quad (15.23)$$

есть конструктивное многообразие Калаби–Яо. Пусть F_5 – гладкая квинтика такая, что пересечение

$$C = S \cap F_5 \quad (15.24)$$

– гладкая кривая. Тогда существует сечение

$$s \in H^0(N_{S \subset Q} \otimes N_{S \subset F_3}) = H^0(\mathcal{O}_S(5)) \quad (15.25)$$

с нулями

$$(s)_0 = C \subset S, \quad (15.26)$$

и описанная нами деформация $X_{\epsilon s}$ совпадает с деформацией в пучке

$$\langle Q \cup F_3, F_5 \rangle \quad (15.27)$$

и в силу (14.18)

$$\begin{aligned} 102 &= \dim J^3(F_5) = \dim J^3(Q) + \dim J^3(F_3) + g(C) + h^2(S)_0 \\ &= 0 + 5 + 76 + 21 = 102. \end{aligned} \quad (15.28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15.3. Это может показаться парадоксальным, но даже жесткая десингуляризация квинтики Барта–Ньетто–ван Стратена [11] есть конструктивное многообразие: рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^5$ с однородными координатами $(z_0, \dots, z_6)$ и систему гиперповерхностей Ньютона

$$S_k = \sum_{i=0}^5 z_i^k. \quad (15.29)$$

Тогда пучок квинтик

$$\langle S_5, S_2 \cdot S_3 \rangle \quad (15.30)$$

в $\mathbb{P}^4$, заданном линейным уравнением $S_1 = 0$, содержит единственную квинтику с 130 нодами. Это и есть квинтика ван Стратена. У нее пропадает почти весь якобиан: при деформации вида (15.27) исчезает $J(C)$, если мы рассмотрим рациональную кривую с 76 нодами, и пропадает $J^3(F_3)$, если мы рассмотрим кубик Сегре с 10 нодами. После этого мы “убиваем” 16 алгебраических 2-циклов на КЗ-поверхности и получаем новое жесткое гладкое многообразие Калаби–Яо с эллиптической кривой в качестве промежуточного якобиана.

В следующем параграфе появятся новые примеры конструктивных многообразий Калаби–Яо.

§ 16. Векторные расслоения на конструктивных многообразиях Калаби–Яо

Самый простой способ построить конструктивное многообразие – взять *дубль* флага: рассмотрим два экземпляра флага $S \subset Y$, описанного в предыдущих параграфах, и склеим их вдоль КЗ-поверхности:

$$2_S Y = (Y \supset S, \text{id}, S \subset Y), \quad (16.1)$$

как в (15.3). Конечно, это приводимое многообразие можно деформировать в гладкое конструктивное многообразие Калаби–Яо X , тип которого мы будем обозначать тем же символом $2_S Y$.

Любой вектор с $m^2 \geq 0$ из решетки M_Y определяет вектор

$$m \in M_{2_S Y} \quad \text{с} \quad m^2 = 0 \quad (16.2)$$

в решетке Мукая дубля.

Для каждой регулярной компоненты $\mathcal{M}_Y(m)_0$ многообразия модулей стабильных расслоений на Y и каждого векторного расслоения $E \in \mathcal{M}_Y(m)_0$ мы можем построить его *дубль* $2_S E$, склеивая две копии расслоения E вдоль ограничения $E|_S$. Вместо ожидаемого конечного множества векторных расслоений мы получим не-трансверсальную компоненту многообразия модулей расслоений

$$\mathcal{M}_{2_S Y}(m) = \{2_S E\} \quad (16.3)$$

положительной размерности, параметризованную тем же многообразием $\mathcal{M}_Y(m)_0$.

Эта аномально большая компонента распадается до конечного множества расслоений при описанной выше деформации приводимого дубля $2_S Y$ в гладкий дубль X . Степень этого конечного множества совпадает с числом $\text{CD}_{S \subset Y}(m)$ (12.24)–(12.27). Удивительным фактом является совпадение двух топологических эйлеровых характеристик:

$$\chi_{\text{top}}(\mathcal{D}_X''(2_S E)) = \chi_{\text{top}}(\mathcal{M}_Y(m)_0) \quad (16.4)$$

(см. (12.23) и (12.27)).

ПРИМЕР 16.1. Рассмотрим гладкую кваттику S в $\mathbb{P}^3$ и дубль $2_S \mathbb{P}^3$ Фано флага $S \subset \mathbb{P}^3$. Рассмотрим векторное расслоение E на $\mathbb{P}^3$ ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, так что вектор Мукая этого расслоения на проективном пространстве есть

$$m(E) = 2 - \frac{1}{2} \text{PD}(H), \quad (16.5)$$

а виртуальная размерность соответствующего многообразия модулей равна

$$\text{v. dim } \mathcal{M}_{\mathbb{P}^3} \left(2, 0, -\frac{1}{2} \text{PD}(H), 0 \right) = m^2 + 1 = 5. \quad (16.6)$$

Хорошо известно, что каждое стабильное расслоение E такого типа есть математический инстантон, он задается сечением расслоения $\Omega\mathbb{P}^3(2)$, т.е. *монадой*:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{s(-1)} \Omega\mathbb{P}^3(-1) \rightarrow E \rightarrow 0. \quad (16.7)$$

Следовательно, компактификация многообразия модулей есть

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^3}(2, 0, -\frac{1}{2} \text{PD}(H), 0)} = \mathbb{P}^5 = \wedge^2 \mathbb{P}^3. \quad (16.8)$$

Ограничение каждого векторного расслоения на кваттику S задается монадой с дисплеем

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-1) \xrightarrow{s(-1)} \Omega\mathbb{P}^3(-1)|_S \rightarrow E|_S \rightarrow 0. \quad (16.9)$$

Отсюда ясно видно, что отображение ограничения

$$\text{res}: \overline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^3}(2, 0, -\frac{1}{2} \text{PD}(H), 0)} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_S(2, 0, -2)} \quad (16.10)$$

является вложением. Следовательно,

$$\text{CD}_{S \subset \mathbb{P}^3} \left(2, 0, -\frac{1}{2} \text{PD}(H), 0 \right) = 6. \quad (16.11)$$

Чтобы представить более геометрически выпуклую картину, рассмотрим общее линейное преобразование

$$g: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \quad (16.12)$$

и построим *косой дубль*:

$$\mathbb{P}^3 \cup_S g(\mathbb{P}^3) = (\mathbb{P}^3 \supset S, \text{id}, S \subset g(\mathbb{P}^3)). \quad (16.13)$$

Тогда векторное расслоение $E \in \overline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^3}(2, 0, -(1/2) \text{PD}(H), 0)}$ определяет некоторое векторное расслоение на приводимом косом дубле в том и только том случае, если

$$g^*(E) = E. \quad (16.14)$$

Далее, компактификацию $\overline{\mathcal{M}_{\mathbb{P}^3}(2, 0, -(1/2) \text{PD}(H), 0)}$ мы можем идентифицировать с проективным пространством $\wedge^2 \mathbb{P}^3$ (см. (16.8)). Пусть $\wedge^2 g$ – действие преобразования g на $\wedge^2 \mathbb{P}^3$. Тогда

$$g^*(E) = E \implies E \text{ — неподвижная точка } \wedge^2 g. \quad (16.15)$$

Таким образом, множество расслоений $E_1, \dots, E_6$ на $\mathbb{P}^3$

$$\{g^*(E_i) = E_i\} = \{\wedge^2 g(p) = p\} \quad (16.16)$$

есть шесть ребер симплекса с вершинами в неподвижных точках преобразования g пространства $\mathbb{P}^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16.1. Первое впечатление от этой картинки заключается в том, что образы этих шести расслоений в промежуточном якобиане совпадают. Но это относится только к промежуточному якобиану приводимого дубля.

Теперь рассмотрим гладкую кривую

$$C = (s)_0, \quad s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(8)), \quad (16.17)$$

и раздуем ее в $\mathbb{P}^3$:

$$\sigma: \tilde{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3. \quad (16.18)$$

Тогда процедура склейки дает нам приводимое конструктивное многообразие Ка-лаби–Яо

$$\tilde{\mathbb{P}}^3 \cup_S g(\mathbb{P}^3), \quad (16.19)$$

которое мы можем продеформировать в гладкое многообразие X , так что тотальное пространство деформации будет гладким (см. (14.15)).

Тогда шесть векторных расслоений (16.16) дадут шесть дублей

$$\sigma^*(E_i) \cup_{E_i|_S} E_i. \quad (16.20)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.1. *Эти векторные расслоения инфинитезимально жестки.*

Это можно проверить непосредственно, используя описание склейки когерентных когомологий пучков

$$\text{End}(\sigma^*(E_i) \cup_{E_i|_S} E_i) = (\sigma^*(E_i) \cup_{E_i|_S} E_i)^* \otimes (\sigma^*(E_i) \cup_{E_i|_S} E_i). \quad (16.21)$$

СЛЕДСТВИЕ 16.1. *Для гладкого дубля X приводимого дубля (16.19)*

$$\text{CD}_X \left(\left(2, 0, -\sigma^* \left(\frac{1}{2} \text{PD}(H) \right), 0 \right), \left(2, 0, -\frac{1}{2} \text{PD}(H), 0 \right) \right) = 6 \quad (16.22)$$

(см. (14.26) и (16.10)).

Это следует из конструкций теории деформации пар (X, E) , рассматриваемых как деформации алгебраических многообразий $\mathbb{P}(E)$ (см. [8] и [20]).

ЗАМЕЧАНИЕ 16.2. Легко видеть, что при проекции промежуточного якобиана многообразия X на якобиан кривой C образы этих шести точек совпадают.

ПРИМЕР 16.2. Если мы рассмотрим теперь многообразие модулей MI_k математических инстантов заряда k , т. е. многообразие модулей стабильных расслоений E на $\mathbb{P}^3$ ранга 2, $c_1 = 0$, $c_2 = k$, удовлетворяющих *инстантовому условию*

$$h^1(E(-2)) = 0, \quad (16.23)$$

то отображение ограничения на S будет вложением, потому что каждое такое расслоение описывается монадой, аналогичной (15.10). Это монадное описание показывает, что для общего линейного преобразования (16.12) действие

$$g^*: \text{MI}_k \rightarrow \text{MI}_k \quad (16.24)$$

допускает конечное множество

$$E_1, \dots, E_N \quad (16.25)$$

неподвижных точек, которые определяют конечное число векторных расслоений (в случае (16.20) их ровно шесть):

$$\{\sigma^*(E_i) \cup_{E_i|_S} E_i\} \quad (16.26)$$

на дубле (16.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 16.3. Любое общее линейное преобразование определяет $\mathbb{C}^*$ -действие на $\mathbb{P}^3$ и на многообразии модулей инстантов MI_k . Вычисление числа N неподвижных точек этого действия на MI_k и “инстантных векторных расслоений” на дубле (16.19) совершенно аналогично вычислению эйлеровой характеристики многообразия MI_k при помощи формулы Ботта. То же справедливо и для “неинстантных компонент” многообразия модулей расслоений на трехмерных проективных пространствах.

Конечно, число N (16.25) – лишь часть CD-инварианта дубля. Как мы уже отмечали, существуют другие компоненты многообразия модулей расслоений на $\mathbb{P}^3$. Напомним, что любое голоморфное расслоение E с $c_1 = 0$ на любом многообразии Фано Y четного индекса i_Y имеет инвариант Атьи–Риса

$$\text{AR}(E) = h^1\left(E\left(\frac{1}{2}K_Y\right)\right) \pmod{2}, \quad (16.27)$$

который разделяет компоненты многообразия модулей. Но с другой стороны, если $c_1(E) = 0$, то E ранга 2 кососимметрично автодуально и по двойственности Серра существует кососимметрическая форма на $H^1(E)$. Следовательно,

$$h^1(E|_S) = 0 \pmod{2} \quad (16.28)$$

всегда. Так что для любого инстантона

$$\text{AR}(E) = 0, \quad (16.29)$$

и кроме MI_k существует другая компонента M_k (полезно разобрать пример $k = 3$). Для малых k можно проверить, что отображение ограничения и на этой компоненте является вложением в многообразие модулей расслоений на поверхности S . Следовательно,

$$\text{res}_S(\text{MI}_k) \cap \text{res}_S(M_k) = \emptyset. \quad (16.30)$$

Вычисление эйлеровой характеристики многообразия модулей по формуле Ботта дает ответ:

$$\begin{aligned} \text{CD}_X\left(\left(2, 0, -\sigma^*\left(\frac{5}{2}\text{PD}(H)\right), 0\right), \left(2, 0, -\frac{5}{2}\text{PD}(H), 0\right)\right) \\ = \chi_{\text{top}}(\text{MI}_3) + \chi_{\text{top}}(M_3). \end{aligned} \quad (16.31)$$

В следующем параграфе мы рассмотрим более однородный способ склейки.

§ 17. Случай рода два

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^5$ и любую гладкую квадрику

$$\text{Gr} \in \mathbb{P}^5, \quad (17.1)$$

которую мы можем рассматривать как грассманиан прямых в некотором $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$H^*(\text{Gr}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot H \oplus (\mathbb{Z} \cdot p_+ \oplus \mathbb{Z} \cdot p_-) \oplus \mathbb{Z} \cdot l \oplus \mathbb{Z}, \quad (17.2)$$

где классы $p_{\pm}$ реализуются проективными плоскостями прямых, проходящих через точку в $\mathbb{P}^3$, и прямыми в фиксированной плоскости. Имеются два спинорных расслоения: E_+ – тавтологическое расслоение и E_- – антитавтологическое расслоение. Они связаны точной последовательностью

$$0 \rightarrow E_-^* \rightarrow \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{O}_{\text{Gr}} \rightarrow E_+ \rightarrow 0, \quad (17.3)$$

где $\mathbb{P}\mathbb{C}^4 = \mathbb{P}^3$. Классы Черна этих расслоений равны

$$c_1(E_{\pm}) = H, \quad c_2(E_{\pm}) = p_{\pm}, \quad (17.4)$$

так что эти расслоения топологически различны в силу различий c_2 .

Для общей кватрики F_4 в $\mathbb{P}^5$ пересечение

$$X = \text{Gr} \cap F_4 \quad (17.5)$$

– гладкое многообразие Калаби–Яо.

Ограничение векторных расслоений $E_{\pm}$ на X дает нам пару векторных расслоений $E_{\pm}|_X$, которые топологически идентичны:

$$[p_+ \cdot F_4] = [p_- \cdot F_4] \in H^4(X, \mathbb{Z}). \quad (17.6)$$

Однако в силу результата Клэр Вуазен верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17.1. *Для общей кватрики F_4 классы $(p_{\pm} \cdot F_4)$ различны относительно рациональной эквивалентности.*

Имеем

СЛЕДСТВИЕ 17.1. *Для общей кватрики F_4 голоморфные векторные расслоения $E_{\pm}|_X$ различны.*

Теперь мы докажем, что для общей кватрики образы этих расслоений в промежуточном якобиане тоже различны. Для этого рассмотрим вырождение многообразия X в приводимое многообразие рассмотренного типа.

Пусть $Q_{\pm}$ – пара квадрик в $\mathbb{P}^5$ в общем положении относительно Gr . Тогда пересечение

$$S = \text{Gr} \cap Q_+ \cap Q_- \quad (17.7)$$

– гладкая КЗ-поверхность, а пересечения

$$Y_{\pm} = \text{Gr} \cap Q_{\pm} \quad (17.8)$$

– рациональные многообразия Фано индекса 2. Следовательно,

$$X_0 = Y_+ \cup_S Y_- \quad (17.9)$$

– приводимое многообразие Калаби–Яо.

Для каждого многообразия Фано $Y_{\pm}$ из этой пары рассмотрим пучок квадрик в $\mathbb{P}^5$ через $Y_{\pm}$:

$$|2H - Y_{\pm}| = \langle \text{Gr}, Q_{\pm} \rangle = \mathbb{P}_{\pm}^1 \quad (17.10)$$

и шесть особых квадрик этого пучка

$$\{\lambda_1^{\pm}, \dots, \lambda_6^{\pm}\} \subset \mathbb{P}_{\pm}^1. \quad (17.11)$$

Тогда двойное накрытие прямой $\mathbb{P}_{\pm}^1$, разветвленное в шести точках (17.11), является кривой рода 2

$$\phi_{\pm}: C_{\pm} \rightarrow \mathbb{P}_{\pm}^1, \quad (17.12)$$

параметризующей пары (E_t, Q_t) , где Q_t – квадрика пучка (17.10), а E_t – тавтологическое или антитавтологическое расслоение на ней (см. (17.3)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17.2 (Нарасиман и Раманан). *Кривая $C_{\pm}$ – многообразие модулей $\mathcal{M}_{Y_{\pm}}$ расслоений на $Y_{\pm}$ топологического типа $c_1 = H$, $c_2 = p_{\pm} \cdot Q_{\pm}$.*

Более точно:

1) многообразие Фано $Y_{\pm}$ (17.8) есть многообразие модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на кривой $C_{\pm}$ с фиксированным детерминантом нечетной степени;

2) существует универсальное расслоение U на $C_{\pm} \times Y_{\pm}$ и для любой точки $c \in C_{\pm}$ векторное расслоение

$$E = U|_{c \times Y_{\pm}} \quad (17.13)$$

является одним из пары спинорных расслоений (17.3) на квадрике

$$Q = \phi_{\pm}(c) \in |2H - Y_{\pm}| = \mathbb{P}_{\pm}^1, \quad (17.14)$$

ограниченным на $Y_{\pm}$.

Теперь рассмотрим КЗ-поверхность S (17.7) как базисное множество связки квадрик

$$|2H - S| = \langle \text{Gr}, Q_+, Q_- \rangle = \mathbb{P}^2. \quad (17.15)$$

Множество особых квадрик этой связки есть плоская кривая

$$D \subset |2H - S| = \mathbb{P}^2. \quad (17.16)$$

Тогда двойное накрытие плоскости связки $\mathbb{P}^2$, разветвленное в кривой D (17.16), есть гладкая КЗ-поверхность S_D :

$$\phi: S_D \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad (17.17)$$

параметризующая пары (E_t, Q_t) , где Q_t – квадрика связки (17.15) и E есть тавтологическое или антитавтологическое расслоение на ней (см. (17.3)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17.3 [20]. КЗ-поверхность S_D – многообразие модулей $\mathcal{M}_{S_D}$ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)$ -стабильных расслоений на КЗ-поверхности S топологического типа $c_1 = H$, $c_2 = 4$.

Каждый пучок квадрик (17.10) погружен в связку (17.15):

$$\langle \text{Gr}, Q_+ \rangle \cup \langle \text{Gr}, Q_- \rangle \subset |2H - S| = \langle \text{Gr}, Q_+, Q_- \rangle = \mathbb{P}^2, \quad (17.18)$$

а кривые $C_{\pm}$ (17.12) погружены в КЗ-поверхность S_D :

$$i_{\pm}: C_{\pm} \rightarrow S_D, \quad (17.19)$$

и двойные накрытия (17.12) есть ограничения двойного накрытия (17.17) на эти кривые:

$$i_{\pm} \cdot \phi_{\pm} = \phi|_{C_{\pm}}. \quad (17.20)$$

Геометрическая интерпретация показывает, что погружения (17.19) есть отображения ограничения многообразий модулей расслоений на многообразиях Фано в многообразие модулей расслоений на КЗ-поверхности:

$$i_{\pm}(C_{\pm}) = \text{res}_S(\mathcal{M}_{Y_{\pm}}). \quad (17.21)$$

Наконец, отметим, что вектор Мукая наших векторных расслоений на $Y_{\pm}$ есть

$$m(E|_{Y_{\pm}}) = (2, H, -l) \quad \text{и} \quad m(E|_S) = (2, H, -2). \quad (17.22)$$

СЛЕДСТВИЕ 17.2. Инвариант Дональдсона–Кассона (9.12) равен

$$\text{CD}_{S \subset Y_{\pm}}(2, H, -\text{PD}(H)) = g(C_{\pm}) = 2. \quad (17.23)$$

Действительно, род кривой $C_{\pm} = \mathcal{M}_{Y_{\pm}}$ равен 2.

СЛЕДСТВИЕ 17.3. Инвариант Дональдсона–Кассона многообразия Калаби–Яо X_0 (17.9) равен

$$\text{CD}_{X_0}((2, H, -l_+), (2, H, -l_-)) = (C_+ \cdot C_-)_S = 2. \quad (17.24)$$

Далее, в силу известного результата Ньюстеда промежуточный якобиан есть

$$J^3(Y_{\pm}) = J(C_{\pm}). \quad (17.25)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17.4. *Отображение Абеля–Якоби (7.9) совпадает со стандартным отображением Абеля*

$$(J_{(2,H,-l_{\pm})}: \mathcal{M}_{Y_{\pm}}(2, H, -l_{\pm}) \rightarrow J^3(Y_{\pm})) = (a: C_{\pm} \rightarrow J(C_{\pm})). \quad (17.26)$$

Это дает прямая геометрическая интерпретация отображения (7.9) в терминах отображения Абеля–Якоби для 2-циклов, представляющих классы $c_2(E)$.

Далее, компоненты многообразия модулей равны

$$\mathcal{M}_{X_0}((2, H, -l_+), (2, H, -l_-)) = \phi^{-1}(\text{Gr}) = \{E_{\pm}|_{X_0}\}. \quad (17.27)$$

Вычисления промежуточного якобиана, проводимые в § 14, дают

$$J^3(X_0) = J(C_+) \times J(C_-) \times \mathbb{C}^{21}, \quad (17.28)$$

и образы компонент многообразия модулей (17.27) в промежуточном якобиане

$$\{J_m(E_{\pm}|_{X_0})\} = \{(\phi_+^{-1}(\text{Gr}), \phi_-^{-1}(\text{Gr}))\} \quad (17.29)$$

дают две различные точки.

СЛЕДСТВИЕ 17.4. *Для многообразия Калаби–Яо X_0 и вектора Мукая (17.24) аналог теоремы Абеля имеет место.*

Из предложения 17.1 для общей кватрики F_4 и вектора Мукая m (17.24) имеем

$$\text{CD}(\text{Gr} \cap F_4, m) \geq 2. \quad (17.30)$$

Используя общие аргументы принципа вырождения, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 17.1. *Для общей квадрики F_4 и вектора Мукая m (17.24)*

- 1) $\text{CD}(\text{Gr} \cap F_4, m) = 2$;
- 2) *справедлив аналог теоремы Абеля.*

Для того чтобы воспользоваться стандартными аргументами теории деформаций пар (X, E) , где E – инфинитезимально жесткое векторное расслоение на X , т. е. теорией деформаций проективизации расслоения E как многообразия, мы должны продеформировать приводимое многообразие Калаби–Яо X_0 в гладкое многообразие (того же типа) с гладким тотальным пространством деформации. Для того чтобы обойти эту скучную процедуру, мы используем здесь геометрический трюк.

На гладком пересечении X (17.5) рассмотрим векторное расслоение E топологического типа $E_{\pm}|_X$. Когерентная эйлерова характеристика равна

$$\chi(E) = 4. \quad (17.31)$$

Простые геометрические аргументы показывают, что если E имеет сечение, то оно имеет четыре сечения и индуцировано отображением базы X в грассманиан Gr , а E – одно из описанных расслоений.

Если же E вовсе не имеет сечений, то

$$h^2(E) = h^1(E^*) \leq 4. \quad (17.32)$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $h^2(E) = 4$. Рассмотрим общую гиперплоскость $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$ и гладкую поверхность

$$Z = X \cap \mathbb{P}^4 = (\text{Gr} \cap \mathbb{P}^4) \cap (F_4 \cap \mathbb{P}^4). \quad (17.33)$$

Это – каноническая поверхность в $\mathbb{P}^4$, т. е.

$$\mathbb{P}^4 = |K_Z|, \quad (17.34)$$

и ограничение расслоения E на Z дает расслоение ранга 2 с $c_1 = K_Z$ и $c_2 = 4$. Точная тройка

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow E \rightarrow E|_Z \rightarrow 0 \quad (17.35)$$

и двойственность Серра дают изоморфизм

$$H^0(E|_Z) = H^1(E^*) = H^2(E)^* = H^2(E|_Z)^*. \quad (17.36)$$

А общее сечение $\mathcal{O}_Z \rightarrow E|_Z$ может быть продолжено до точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow E|_Z \rightarrow J_\xi(K_Z) \rightarrow 0, \quad (17.37)$$

где J_ξ – пучок идеалов нульмерной подсхемы ξ поверхности Z . Следовательно,

$$h^0(E|_Z) = 4 \implies h^0(J_\xi(K_Z)) = 3$$

и

$$\langle \xi \rangle = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^4 = |K_Z|. \quad (17.38)$$

Но ограничение $E_\pm|_Z$ допускает ту же точную последовательность, как (17.3), и, значит,

$$E|_Z = E_\pm|_Z$$

для любой общей гиперплоскости $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$. Отсюда видно, что

$$E = E_\pm|_Z$$

для некоторого выбора знака. Утверждение доказано.

§ 18. Заключение

Суммируя полученные результаты, мы видим, что:

1) процедура склейки трехмерных многообразий Калаби–Яо совершенно аналогична процедуре склейки твисторных пространств вещественных четырехмерных многообразий, как это описано в работе [8]. А именно, твисторное пространство связной суммы 4-многообразий есть деформация склейки соответствующих твисторных пространств вдоль комплексной квадрики вместо КЗ-поверхности в нашем случае. Деформация склейки многообразий индекса 2, описанная в предыдущем параграфе, делает эту аналогию особенно выразительной, потому что пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ есть деформация и малое разрешение особенностей твисторного пространства связной суммы двух копий проективной плоскости $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{P}^2$ (см. [8]);

2) с другой стороны, представление многообразия Калаби–Яо в виде расслоения на специальные лагранжевы торы (15.16) подсказывает, как построить аналог твисторного пространства для любого компактного гладкого 3-многообразия Y , снабженного римановой метрикой g .

Мы заканчиваем эту статью грубым описанием этой конструкции для случая, когда метрика g достаточно общая: пусть (Y, g) – общее риманово 3-многообразие. Тогда, рассматривая комплексификацию и проективизацию касательного пространства в точке $p \in Y$

$$\mathbb{C}^3 = TY_p^{\mathbb{C}}, \quad \mathbb{P}^2_p = \mathbb{P}TY_p^{\mathbb{C}}, \quad (18.1)$$

получаем две коники

$$q_p, q_p^{\text{Ric}} \subset \mathbb{P}^2_p, \quad (18.2)$$

первая из которых есть комплексификация метрической квадрики, а вторая – проективизация тензора Риччи нашей метрики в точке $p \in Y$.

Пересечение этих коник дает четыре точки на конике q_p :

$$q_p \cap q_p^{\text{Ric}} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \subset q_p. \quad (18.3)$$

Наконец, рассматривая двулистное накрытие

$$\phi: C_p \rightarrow q_p, \quad (18.4)$$

разветвленное в четырех точках (18.3), получаем эллиптическую кривую C_p , т. е. 2-тор.

Модуль этой кривой называется *локальным инвариантом* риманова 3-многообразия Y в точке $p \in Y$.

Наша кривая поляризована поляризацией подлежащей коники, индуцированной поляризациями плоскости. Рассмотрим расслоение на единичные окружности линейного расслоения поляризации $S^1(L_p)$. Заметим, что это расслоение снабжено эрмитовой структурой и эрмитовой связностью. Степень поляризации равна 4, поэтому мы получаем в каждой точке 3-тор

$$S^1(L_p) = T^3. \quad (18.5)$$

Глобализация этой конструкции дает:

1) $\mathbb{P}^1$ -расслоение на Y :

$$\pi: T \rightarrow Y, \quad \pi^{-1}(p) = q_p, \quad p \in Y, \quad (18.6)$$

– классическое твисторное пространство многообразия (Y, g) ;

2) двулистное накрытие

$$\phi: \mathcal{C} \rightarrow T, \quad \phi^{-1}(\pi^{-1}(p)) = C_p, \quad (18.7)$$

послойно совпадающее с накрытиями (18.4);

3) S^1 -расслоение на $\mathcal{C}$

$$\mathcal{T}(g) = S^1(L) \rightarrow \mathcal{C}, \quad S^1(L)|_{C_p} = S^1(L_p). \quad (18.8)$$

Таким образом,

$$\bar{\pi}: \mathcal{T}(g) = S^1(L) \rightarrow Y \quad (18.9)$$

– T^3 -расслоение над точками, над которыми пересечение $q_p \cap q_p^{\text{Ric}}$ трансверсально.

Пусть Y_0 – плотное подмножество таких точек, а $\mathcal{T}(g)_0$ – ограничение T^3 -расслоения (18.9) на Y_0 . Легко видеть, что $\mathcal{T}(g)_0$ снабжено почти комплексной структурой $I: T\mathcal{T}(g)_0 \rightarrow T\mathcal{T}(g)_0$ и метрикой. Вопрос об интегрируемости этой почти комплексной структуры сводится к аналогичному вопросу в теории локальных деформаций калиброванных циклов.

Остается традиционный вопрос: *как много многообразий Калаби–Яо можно получить этой конструкцией?*

Список литературы

1. Арнольд В. И. Замечания о собственных числах и векторах эрмитовых матриц, фазе Берри, адиабатических связностях и квантовом эффекте Холла // Избранное-60. М.: Фазис, 1997. С. 583–604.
2. Akbulut S., McCarthy J. Casson's invariant for oriented homology 3-spheres. Michigan State Univ., 1986.
3. Atiyah M. F. The geometry and physics of knots. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
4. Beauville A. Vector bundles on Riemann surfaces and conformal field theory // Algebraic geometric methods in math. physics. Caciely, 1993. P. 145–166.
5. Bauer S., Okonek Ch. The algebraic geometry of representation spaces associated to Seifert fibered homology 3-spheres. Preprint/Max-Planck-Institut für Math. MPI/89–27. S. 1–33.
6. Bar-Natan. On associators and the Grothendieck–Teichmüller groups. I. q-alg/9606021.
7. De Bartolomeis, Tian G. Stability of complex vector bundles // J. Diff. Geom. 1996. V. 43. P. 231–275.
8. Donaldson S. K., Friedman R. Connected sums of self-dual manifolds and deformations of singular spaces // Nonlinearity. 1989. V. 2. P. 197–239.
9. Donaldson S. K., Kronheimer P. The geometry of four-manifolds. Oxford UP, 1990.
10. Donaldson K., Thomas R. P. Gauge theory in higher dimensions. Preprint / Oxford, 1996. P. 1–15.
11. Van Straten Duco. A quintic hypersurface in $\mathbb{P}^4$ with 130 nodes // Topology. 1993. V. 32. № 4. P. 857–862.

12. *Griffiths P. A.* Periods of integrals on algebraic manifolds: summary of main results and discussion // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1970. V. 75. P. 228–296.
13. *Gorodentsev A., Tyurin A.* ALAG. Preprint / Max-Planck-Institut für Mathematik, 1999. № 130. P. 1–34.
14. *Hitchin N. J.* Flat connections and geometric quantization // *Commun. Math. Phys.* 1990. V. 131. P. 347–380.
15. *Jeffrey L. C., Weitsman J.* Bohr–Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula // *Commun. Math. Phys.* 1992. V. 150. P. 593–630.
16. *Kirbi R.* Problems in low-dimensional topology // *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. 1997. V. 2 (Part 2).
17. *Kohno T.* Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class group. I // *Topology*. 1992. V. 31. P. 203–217.
18. *Kohno T.* Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class group. II. Estimating tunnel number of knots // *Contemporary mathematics*. 1994. V. 175. P. 193–217.
19. *Lee Y.* Smoothing of simple normal crossing surfaces. Preprint/Solt Lake, 1997. P. 1–11.
20. *Mukai S.* On the moduli space of bundles on K3-surface. I // *Vector bundles on algebraic varieties*. Bombay: Tata Inst. of Fund., Res. Studies 11, Oxford Univ. Press, 1987. P. 341–413.
21. *Narasimhan M. S., Ramanan S.* Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface // *Ann. of Math.* 1969. V. 89. P. 19–51.
22. *Ramadas T. R., Singer I. M., Weitsman J.* Some comments on Chern–Simons gauge theory // *Commun. Math. Phys.* 1989. V. 126. P. 409–420.
23. *Strominger A., Yau S.-T., Zaslow E.* Mirror Symmetry is T-Duality // *Nucl. Phys.* 1996. V. 479. P. 243–259.
24. *Taubes C. H.* Casson’s invariant and gauge theory // *J. Diff. Geom.* 1990. V. 31. P. 547–599.
25. *Thomas R. P.* Mirror symmetry and action of braid groups on derived categories. AG/0001044.
26. *Тюрин А. Н.* Специальная лагранжева геометрия как малая деформация алгебраической геометрии (GQR и зеркальная симметрия) // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2000. Т. 64. № 2. С. 141–242.
27. *Тюрин А. Н.* О бор-зоммерфельдовских базисах // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2000. Т. 64. № 5. С. 180–243.
28. *Тюрин А. Н.* Симплектические структуры на многообразиях модулей векторных расслоений на алгебраических поверхностях // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1987. Т. 33. № 1. С. 139–177.
29. *Vafa C.* Extending mirror conjecture to Calabi–Yau with bundle. hep-th/9804131.
30. *Vafa C.* Geometric Physics. hep-th/9810149.

Поступило в редакцию
16.V.2000