Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 2, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/im326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:09:15

УДК 517.5

В. В. Волчков

Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах

Изучаются различные классы функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса на гиперболических пространствах. Для таких классов получено описание в виде ряда по специальным функциям и доказана теорема единственности. Эти результаты позволили получить локальную теорему о двух радиусах в окончательной форме.

Библиография: 31 наименование.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$. Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(B)$ действует транзитивно на B посредством конформных отображений (см., например, [1, гл. 2, п. 2.4]). Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре гиперболического пространства, реализованного на шаре B . Гиперболическая метрика d на этом пространстве определяется равенством

$$d(0, x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |x|}{1 - |x|}, \quad x \in B,$$

и условием инвариантности относительно группы $\mathcal{M}(B)$.

Пусть $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ – локально суммируемая функция (обозначение $f \in L_{\text{loc}}(B)$), E – заданное множество положительных чисел. Предположим, что при всех $r \in E$, $g \in \mathcal{M}(B)$ имеет место равенство

$$\int_{gB_r} f(x) d\mu(x) = 0, \tag{1}$$

где $B_r = \{x \in B: d(0, x) < r\}$, $d\mu(x) = (1 - |x|^2)^{-n} dx$ – элемент объема, инвариантный относительно $\mathcal{M}(B)$. При каких E отсюда следует, что f – нулевая функция? Известная теорема Беренштейна–Зальцмана о двух радиусах утверждает [2], что $f = 0$, если E состоит из двух чисел $r_1, r_2 > 0$, для которых уравнения

$$P_z^{-n/2}(\text{ch } 2r) = 0, \quad r = r_1, r_2, \tag{2}$$

не имеют общих решений $z \in \mathbb{C}$ (здесь и далее $P_z^{-n/2}$ – функция Лежандра первого рода; см., например, [3, гл. 3, п. 3.2]). Простые примеры показывают (см. [2], а

Работа выполнена при частичной поддержке ISF (грант № U9D200), ISSEP (грант № APU071013) и МНОП (грант № YSU081012).

также § 6 данной работы), что указанное условие для r_1, r_2 является необходимым. Подобный результат для евклидовых пространств, где вместо $\mathcal{M}(B)$ рассматривается группа движений $\mathbb{R}^n$, принадлежит Л. Зальцману [4].

Получение локального варианта теоремы о двух радиусах (например, когда функция задана в шаре B_R , $R > \max(r_1, r_2)$) является существенно более трудной задачей. Возникающее при этом нарушение групповой структуры, действующей на множестве решений уравнения (1), создает серьезные препятствия для применения методов, использованных в [2], [4]. До недавнего времени исследования в этом направлении велись преимущественно в евклидовом случае с помощью аппарата многомерного комплексного анализа (см. [5]–[7], а также обзоры [8], [9] с обширной библиографией).

В последние годы автором данной работы разработана принципиально новая методика, позволяющая решать многие задачи, связанные с шаровыми средними (см. [10]–[19] и библиографию к этим работам). Для решения таких задач в [10]–[19] используются представления функций с условиями типа (1) рядами специального вида. В частности, в работе [10] таким методом получен окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах в евклидовом случае.

Первые локальные результаты для гиперболических пространств содержатся в [19]–[21], где рассмотрен случай, когда $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$, $R > r_1 + r_2$. Доказательства в [20], [21] основаны на идеях, использованных ранее К. А. Беренштейном, Р. Гэем и А. Ижером в работе [7]. Другой метод, предложенный автором в [19], дал возможность получить ряд результатов, из которых следовало, в частности, решение одной проблемы Л. Зальцмана, поставленной в 1972 г. (см., например, [4], а также библиографию в [19]).

В данной работе мы продолжаем изучение функций с условиями типа (1). Существенное развитие техники, предложенной в [19], позволило доказать локальную теорему о двух радиусах в окончательной форме (см. § 1). При этом обнаружены новые эффекты; например, при $R = r_1 + r_2$ важную роль играет скорость возможного “сближения” корней уравнений (2) при подходе к бесконечности. Некоторые промежуточные результаты работы представляют самостоятельный интерес (см. теоремы 2, 3 ниже).

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть $N(r)$ – множество положительных корней λ уравнения

$$P_{-(i\lambda+1)/2}^{-n/2}(\text{ch } 2r) = 0, \quad N(r_1, r_2) = N(r_1) \cap N(r_2).$$

Подробные сведения о структуре множества $N(r)$ содержатся в § 4. Обозначим Ω множество пар (r_1, r_2) положительных чисел со следующим свойством: для любого $m > 0$ существуют $\alpha \in N(r_1)$, $\beta \in N(r_2)$ такие, что $|\alpha - \beta| < (2 + \alpha + \beta)^{-m}$. Перечислим некоторые свойства множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω (доказательство см. в § 9):

- а) при любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0: N(r_1, r_2) \neq \emptyset\}$ является счетным и всюду плотным на $(0, +\infty)$;
- б) при любом $r_1 > 0$ пересечение множества $\{r_2 > 0: (r_1, r_2) \in \Omega\}$ с любым интервалом $(\alpha, \beta) \subset (0, +\infty)$ имеет мощность континуума;
- в) при любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0: (r_1, r_2) \in \Omega\}$ имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$;

г) если $(r_1, r_2) \in \Omega$ и $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то число r_1/r_2 иррационально.

Пусть $\overline{G}$ – замыкание области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r_1, r_2 > 0$, $R > \max(r_1, r_2)$, $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ и

$$\int_{gB_r} f(x) d\mu(x) = 0, \quad r = r_1, r_2, \quad (3)$$

при всех $g \in \mathcal{M}(B)$ таких, что $g\overline{B}_r \subset B_R$.

Тогда:

- 1) если $r_1 + r_2 < R$ и $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то $f = 0$;
- 2) если $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $f \in C^\infty(B_R)$, то $f = 0$;
- 3) если $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $(r_1, r_2) \in \Omega$, то $f = 0$;
- 4) если $r_1 + r_2 = R$ и $(r_1, r_2) \notin \Omega$, то для любого целого $m \geq 0$ существует ненулевая функция $f \in C^m(B_R)$, удовлетворяющая условию (3);
- 5) если $r_1 + r_2 > R$, то существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющая условию (3);
- 6) если $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$, то существует ненулевая вещественно-аналитическая на B функция f , для которой равенство (3) выполнено при всех $g \in \mathcal{M}(B)$.

Утверждения 1) и 6) теоремы 1 были известны ранее (см. [19]–[21]). Перечисленные выше свойства множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω показывают, что все ситуации, описанные в утверждениях 1)–6) теоремы 1, реализуются при подходящих $r_1, r_2 > 0$.

В § 2–4 данной работы содержатся необходимые в дальнейшем сведения и ряд вспомогательных утверждений, связанных с функциями Лежандра. В § 5–8 исследуются различные свойства функций с условием (1) при одном фиксированном r . В частности, в § 7 для таких функций доказана теорема единственности, а в § 8 получено описание решений уравнения (1) в виде ряда по сферическим гармоникам. В § 9 изучается структура множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω .

Доказательство основного результата приводится в § 10.

Автор благодарит Л. Зальцмана и М. Эл Харчаоуи за полезные обсуждения и предоставленную литературу.

§ 2. Основные обозначения

Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых, целых неотрицательных и рациональных чисел. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}$, ω_{n-1} – площадь сферы S^{n-1} , ρ , σ – полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho \in S^{n-1}$), $e = (1, 0, \dots, 0) \in S^{n-1}$.

Обозначим $\mathcal{H}_k$ пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1} , рассматриваемое как подпространство $L^2(S^{n-1})$ (см. [22, гл. 4, § 2]), a_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}$, $1 \leq l \leq a_k$, – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad 0 < \rho < \text{th } R, \quad (4)$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma.$$

Пусть $\mathrm{SO}(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $\mathrm{SO}(n)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ (см. [23, гл. 9, § 2, п. 7]), $\{t_{l,p}^k(\tau)\}$, $1 \leq l, p \leq a_k$, – матрица представления $T^k(\tau)$, т.е.

$$(T^k(\tau)Y_l^{(k)})(\sigma) = Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{a_k} t_{l,p}^k(\tau)Y_p^{(k)}(\sigma)$$

для любых $\tau \in \mathrm{SO}(n)$, $\sigma \in S^{n-1}$.

Далее все функции, определенные и непрерывные в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

Пусть $\mathcal{D}(B_R)$ – множество функций класса $C^\infty(B_R)$ с компактным носителем, $\mathfrak{N}_{k,l}(B_R)$ – подмножество $L_{\mathrm{loc}}(B_R)$, состоящее из произведений радиальных (т.е. зависящих только от $|\cdot|$) функций в B_R на гармонику $Y_l^{(k)}$, $\mathrm{supp} f$ – носитель функции f .

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим $V_r(B_R)$ множество функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$, для которых равенство (1) выполнено при всех $g \in \mathcal{M}(B)$ таких, что $g\overline{B}_r \subset B_R$. Для $s \in \mathbb{Z}_+$, а также для $s = \infty$ положим

$$V_r^s(B_R) = V_r(B_R) \cap C^s(B_R).$$

Для любого $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим дифференциальный оператор d_m , заданный на пространстве $C^1(0, 1)$ следующим образом:

$$(d_m f)(t) = \frac{t^m}{(1-t^2)^{m-1}} \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{1}{t} - t \right)^m f(t) \right), \quad f \in C^1(0, 1).$$

При $k \in \mathbb{N}$ положим $D_k = d_k d_{k-1} \dots d_1$. Пусть

$$\mathcal{L} = (1 - |x|^2)^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left((1 - |x|^2)^{2-n} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

– оператор Лапласа–Бельтрами, инвариантный относительно $\mathcal{M}(B)$ (см. [1, гл. 4, п. 4.12]), $\mathcal{L}_k = \mathcal{L} - 4(k-1)(n+k-2)I$, где I – тождественный оператор. Простые вычисления показывают, что если $f \in C^2(B_R)$ имеет вид $f(x) = u(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$, то

$$(\mathcal{L}_k f)(x) = (d_{k-1}d_{2-k-n}u)(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma). \quad (5)$$

Всюду в дальнейшем $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \frac{1}{2}(i\lambda + n - 1)$. При $k \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in [0, 1)$ обозначим

$$\Phi_{\lambda,k}(\rho) = \frac{\Gamma(\nu+k)\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \rho^k (1-\rho^2)^\nu F\left(\nu+k, \nu+1 - \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+k, \rho^2\right), \quad (6)$$

где Γ – гамма-функция и F – гипергеометрическая функция. Используя (6) и [3, гл. 2, п. 2.8, формулы (25), (26)], нетрудно получить равенства

$$(d_k \Phi_{\lambda,k})(\rho) = (i\lambda - 2k - n + 1) \Phi_{\lambda,k+1}(\rho), \quad (7)$$

$$(d_{1-k-n} \Phi_{\lambda,k+1})(\rho) = (i\lambda + 2k + n - 1) \Phi_{\lambda,k}(\rho). \quad (8)$$

Из (7), (8) и (5) имеем

$$(\mathcal{L} + (\lambda^2 + (n-1)^2)I)(\Phi_{\lambda,k}(\rho)Y(\sigma)) = 0 \quad (9)$$

при любом $Y \in \mathcal{H}_k$. При $k = 0$ из (9) следует, что $\Phi_{\lambda,0}(|x|)$ является сферической функцией на B (см., например, [21, п. 3.1]). Для функции $f \in L_{\text{loc}}(B)$ с компактным носителем сферическое преобразование $\tilde{f}(\lambda)$ определяется формулой

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_B f(x) \Phi_{\lambda,0}(|x|) d\mu(x)$$

(см. [21, п. 3.1]). Следуя [24, § 4 введения], для $x \in B$, $\eta \in S^{n-1}$ положим

$$\langle x, \eta \rangle = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - |x|^2}{|x - \eta|^2}.$$

Пусть также $h_r(\lambda) = \Phi_{\lambda,1}(\text{th } r)/\nu$.

§ 3. Вспомогательные утверждения о функциях $\Phi_{\lambda,k}$

ЛЕММА 1. Пусть $r > 0$. Тогда

$$h_r(\lambda) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) (\text{sh } r \text{ ch } r)^{1-n/2} P_{-(i\lambda+1)/2}^{-n/2}(\text{ch } 2r). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (6) при $k = 1$ и [21, формула (4.12)], получаем

$$n\Phi_{\lambda,1}(\text{th } r) = 2\nu F\left(\nu + 1 - \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - \nu, \frac{n}{2} + 1, -\text{sh}^2(2r)\right) \text{sh } r (\text{ch } r)^{1-n}.$$

Отсюда и из [3, гл. 3, п. 3.2, формула (3)] следует (10).

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda > 0$, $Y \in \mathcal{H}_k$ и $f(x) = \Phi_{\lambda,k}(\rho)Y(\sigma)$. Тогда при любых $r \in (0, 1)$, $s, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+$ имеют место оценки

$$\max_{\rho \in [0, r]} |\Phi_{\lambda,k}^{(s)}(\rho)| = O((1 + \lambda)^s), \quad (11)$$

$$\max_{|x| \leq r} \left| \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) f(x) \right| = O((1 + \lambda)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}), \quad (12)$$

в которых постоянные в знаках O не зависят от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства

$$\Phi_{\lambda,k}(\rho)Y(\sigma) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} e^{2\nu\langle x,\eta\rangle} Y(\eta) d\eta, \quad (13)$$

справедливого при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in B$ (см. [21, формулы (4.21), (4.23)]).

ЛЕММА 3. Пусть $\zeta(\lambda, r) = \int_{B_r} e^{2\nu\langle x,\mathbf{e}\rangle} d\mu(x)$. Тогда

$$\zeta(\lambda, r) = 2^{-n}(\operatorname{sh} 2r)^{n-1} \omega_{n-1} h_r(\lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из инвариантности меры $d\mu$ относительно вращений имеем

$$\zeta(\lambda, r) = \int_{B_r} e^{2\nu\langle x,\eta\rangle} d\mu(x)$$

для любого $\eta \in S^{n-1}$. Интегрируя это равенство на S^{n-1} , из формулы (13) при $k = 0$ получаем

$$\zeta(\lambda, r) = \int_{B_r} \Phi_{\lambda,0}(|x|) d\mu(x) = \omega_{n-1} \int_0^{\operatorname{th} r} \frac{\rho^{n-1} \Phi_{\lambda,0}(\rho)}{(1-\rho^2)^n} d\rho. \quad (14)$$

Отсюда и из (8) следует утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $r > 0$. Тогда

$$h_r(\lambda) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_{-r}^r \left(\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} r} \right)^{n-1} (\operatorname{th}^2 r - \operatorname{th}^2 t)^{(n-1)/2} e^{i\lambda t} dt. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (13) $k = 1$, $Y(\sigma) = \sigma_1$, $\sigma = \mathbf{e}$, имеем

$$\Phi_{\lambda,1}(\rho) = \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \int_{-1}^1 e^{2\nu\langle \rho\mathbf{e},\eta\rangle} (1-\eta_1^2)^{(n-3)/2} \eta_1 d\eta_1.$$

Интегрируя по частям и делая замену $t = \langle \rho\mathbf{e},\eta\rangle$, $\rho = \operatorname{th} r$, получаем (15).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u \in C[-r, r]$. Тогда

$$\int_{B_r} u(\langle x,\mathbf{e}\rangle) d\mu(x) = \int_{-r}^r u(t) \varkappa(t) dt, \quad (16)$$

где

$$\varkappa(t) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} e^{(1-n)t} (\operatorname{ch} r \operatorname{sh} t)^{n-1} (\operatorname{th}^2 r - \operatorname{th}^2 t)^{\frac{n-1}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $u(t) = e^{2\nu t}$, утверждение следует из (15) и леммы 3. Поскольку линейная оболочка множества функций вида $e^{2\nu t}$, $\nu \in \mathbb{C}$, является плотной в $C[-r, r]$, получаем (16) для любой $u \in C[-r, r]$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < \alpha < \beta$ и $\varepsilon \in (0, \pi)$ фиксировано. Тогда при $r \in [\alpha, \beta]$ и $\lambda \rightarrow \infty$ такиx, что $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\operatorname{sh} 2r)^{\frac{n-1}{2}} h_r(\lambda) &= \frac{\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(n+1)\right)}{(\sqrt{\lambda})^{n+1}} \\ &- \frac{n^2 - 1}{4} \operatorname{cth} 2r \frac{\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(n+1)\right)}{(\sqrt{\lambda})^{n+3}} + O\left(\frac{e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}}{|\lambda|^{\frac{n+5}{2}}}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\operatorname{sh} 2r)^{\frac{n-1}{2}} h'_r(\lambda) = -r \frac{\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(n+1)\right)}{(\sqrt{\lambda})^{n+1}} + O\left(\frac{e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}}{|\lambda|^{\frac{n+3}{2}}}\right), \quad (18)$$

в которых выбирается ветвь функции $\sqrt{\lambda}$, принимающая положительные значения при $\lambda > 0$, и постоянные в знаках O зависят только от $n, \alpha, \beta, \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из (15) и асимптотического разложения интегралов Фурье (см. [25, гл. 2, доказательство теоремы 10.2]).

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^\rho \frac{t^{n-1}}{(1-t^2)^n} \Phi_{\alpha,1}(t) \Phi_{\beta,1}(t) dt &= \\ &= \frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{n-1}} (\Phi_{\alpha,1}(\rho) \Phi'_{\beta,1}(\rho) - \Phi_{\beta,1}(\rho) \Phi'_{\alpha,1}(\rho)). \end{aligned} \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5) и (9) при $k = 1$ имеем

$$(d_0 d_{1-n} \Phi_{\lambda,1})(\rho) = -(\lambda^2 + (n-1)^2) \Phi_{\lambda,1}(\rho).$$

Из таких равенств при $\lambda = \alpha, \beta$ получаем

$$\Phi_{\alpha,1} \Phi_{\beta,1} (\alpha^2 - \beta^2) = d_{1-n} (\Phi_{\alpha,1} \Phi'_{\beta,1} - \Phi_{\beta,1} \Phi'_{\alpha,1}).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

§ 4. Свойства множества $N(r)$

Пусть $r > 0$. Из равенства (15) следует, что h_r является четной целой функцией переменной λ . Кроме того, $h_r(\bar{\lambda}) = \overline{h_r(\lambda)}$ и, в частности, h_r вещественнозначна на $\mathbb{R}^1$. Из (15) имеем также $h_r > 0$ на мнимой оси. Далее, $h_r \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ по вещественной оси и является функцией экспоненциального типа от r (см. (17)). Отсюда и из теоремы Адамара [26, гл. 1, теорема 13] заключаем, что h_r имеет бесконечно много корней.

ЛЕММА 6. Все корни функции h_r являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_r(\lambda) = 0$. Докажем, что $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и $h'_r(\lambda) \neq 0$. Предположим, что $\lambda \notin \mathbb{R}^1$; тогда $\lambda^2 \neq \bar{\lambda}^2$, поскольку $i\lambda \notin \mathbb{R}^1$. Полагая в (19) $\alpha = \bar{\beta} = \lambda$, $\rho = \text{th } r$ и учитывая, что $h_r(\bar{\lambda}) = 0$, получаем

$$\int_0^r (\text{sh } 2t)^{n-1} |h_t(\lambda)|^2 dt = 0, \quad (20)$$

что невозможно. Предположим теперь, что $h'_r(\lambda) = 0$. Полагая в (19) $\alpha = \lambda$, $\rho = \text{th } r$, при $\beta \rightarrow \alpha$ снова получим (20). Таким образом, все корни h_r вещественные и простые. Отсюда и из четности h_r имеем утверждение леммы.

Из равенства (10) и леммы 6 следует, что множество $N(r)$ имеет вид $N(r) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, где $\lambda_j = \lambda_j(r)$ – последовательность всех положительных корней h_r , занумерованных в порядке возрастания.

ЛЕММА 7. Пусть $0 < \alpha < \beta$, $r \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$r\lambda_j = \pi \left(\frac{n+3}{4} + j + q(r) \right) - \frac{n^2-1}{4\lambda_j} \text{cth } 2r + O(\lambda_j^{-3}), \quad (21)$$

где $q(r)$ принадлежит $\mathbb{Z}$ и не зависит от j , а постоянная в знаке O зависит только от α , β , n . В частности, для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1-\varepsilon} < \infty. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r \in [\alpha, \beta]$ количество корней h_r на отрезке $[-a, a]$ не превосходит $c_1(1+a)$, где $c_1 > 0$ зависит только от α , β , n (см. [26, формула (1.27)] и (17)). Отсюда и из (17), (18) получаем

$$r\lambda_j = \pi \left(\frac{n+3}{4} + j + q(r) \right) + \varepsilon_j(r, n), \quad (23)$$

где $q(r) \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon_j(r, n) \rightarrow 0$ равномерно по $r \in [\alpha, \beta]$ при $j \rightarrow \infty$. Далее, из (15) следует, что

$$\lambda_j > c_2 > 0, \quad (24)$$

где c_2 зависит только от α , β , n . Полагая в (17) $\lambda = \lambda_j$ и используя (23), (24), имеем

$$\varepsilon_j(r, n) = (1 - n^2) \frac{\text{cth } 2r}{4\lambda_j} + O(\lambda_j^{-3}).$$

Отсюда и из (23) получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 8. Пусть $u \in L[0, r]$ и $v(z) = \int_0^r (\text{sh } 2t)^{n-1} u(t) h_t(z) dt$. Тогда если $v(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in N(r)$, то $u = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и леммы 4 имеем

$$v(z) = \frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^r (\operatorname{ch} \alpha)^{n-1} u(\alpha) K(z, \alpha) d\alpha,$$

где

$$K(z, \alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{izt} \xi(\alpha, t) dt, \quad (25)$$

$$\xi(\alpha, t) = (\operatorname{ch} t)^{n-1} (\operatorname{th}^2 \alpha - \operatorname{th}^2 t)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (26)$$

Интегрируя (25) по частям, при $z \neq 0$ получаем

$$K(z, \alpha) = \left(\frac{i}{z}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{izt} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \xi_j(\alpha, t) (\operatorname{th}^2 \alpha - \operatorname{th}^2 t)^{\frac{n-1}{2}-j} dt,$$

где $\xi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $[\cdot]$ – целая часть. Отсюда $v(z) \leq c e^{r|\operatorname{Im} z|} |z|^{-[n/2]}$, где c не зависит от z .

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = v(z)/h_r(z)$. Из условия и леммы 6 следует, что φ – четная целая функция не выше первого порядка. Кроме того, из полученной оценки для v и из (17) вытекает, что $\varphi(z) = O(|z|)$ при $z \rightarrow \infty$ по прямым $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Re} z$. Отсюда и из принципа Фрагмена–Линделёфа следует, что φ – многочлен не выше первой степени. В силу четности φ имеем $\varphi(z) = \varphi(0)$ при всех z . Это означает (см. (25) и (15)), что

$$\varphi(0)(\operatorname{sh} r)^{1-n} K(z, r) = 2^{n-1} \int_{-r}^r e^{izt} (\operatorname{ch} t)^{n-1} \int_{|t|}^r \xi(\alpha, t) u(\alpha) d\alpha dt.$$

Тогда

$$\varphi(0)(2 \operatorname{sh} r)^{1-n} (\operatorname{th}^2 r - \operatorname{th}^2 t)^{\frac{n-1}{2}} = \int_t^r u(\alpha) \xi(\alpha, t) d\alpha \quad (27)$$

при всех $t \in [0, r]$. При $t \rightarrow r$ из (27) получаем $\varphi(0) = 0$ и $\int_t^r u(\alpha) \xi(\alpha, t) dt = 0$ на $[0, r]$. Отсюда следует (см. [24, гл. 1, § 2, доказательство теоремы 2.6]), что $u = 0$.

ЛЕММА 9. Пусть $\delta(\alpha, \beta) = \int_0^r (\operatorname{sh} 2t)^{n-1} h_t(\alpha) h_t(\beta) dt$ и $\alpha, \beta \in N(r)$. Тогда $\delta(\alpha, \beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $\delta(\alpha, \alpha) \alpha^{n+2} > c$, где $c > 0$ не зависит от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha \neq \beta$ утверждение следует из леммы 5. Далее, требуемое неравенство для $\delta(\alpha, \alpha)$ достаточно доказать при всех достаточно больших $\alpha \in N(r)$. Пусть $\alpha > \pi/(4r)$. Из (15) и (26) имеем

$$\begin{aligned} \delta(\alpha, \alpha) &= \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2})}{\pi \Gamma^2(\frac{n+1}{2})} \int_{-r}^r \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh}^2 t}\right)^{n-1} \left(\int_{-t}^t \xi(t, \theta) \cos \alpha \theta d\theta\right)^2 dt \\ &\geq \frac{1}{4} \int_0^{\pi/(4\alpha)} (\operatorname{sh} t)^{1-n} \left(\int_{-t}^t \xi(t, \theta) \cos \alpha \theta d\theta\right)^2 dt \\ &\geq \frac{1}{8} \int_0^{\pi/(4\alpha)} (\operatorname{sh} t)^{1-n} \left(\int_{t/2}^t \xi(t, \theta) d\theta\right)^2 dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из (26) получаем требуемую оценку для $\delta(\alpha, \alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $u(t) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda \Phi_{\lambda,k}(t)$, где $c_\lambda \in \mathbb{C}$ и

$$\sum_{\lambda \in N(r)} |c_\lambda| |\lambda|^{k-1} < \infty.$$

Тогда если $u = 0$ на $[0, \text{th } r]$, то все c_λ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 1$ утверждение следует из леммы 9 и оценки (11) для $s = 0$. Случай любого $k \in \mathbb{Z}_+$ сводится к случаю $k = 1$ применением операторов дифференцирования в левой части равенств (7), (8) с использованием (11).

§ 5. Простейшие свойства класса V_r

ЛЕММА 10. Пусть $f \in V_r^s(B_R)$. Тогда при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l, p \leq a_k$

$$f_{k,l}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) \in V_r^s(B_R).$$

Аналогичное утверждение верно и для класса $V_r(B_R)$.

Для доказательства достаточно заметить, что $\text{SO}(n)$ является подгруппой $\mathcal{M}(B)$, и использовать [14, формулы (5), (6)].

ЛЕММА 11. Пусть $f \in V_r^s(B_R)$, $s \geq 1$. Тогда при любом $p = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n x_p x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{1}{2} (1 + |x|^2) \frac{\partial f}{\partial x_p} \in V_r^{s-1}(B_R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \mathbb{R}^1$. Рассмотрим отображение $g_{t,p}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$g_{t,p}x = (y_1, \dots, y_n),$$

где $y_m = x_m u(x, t)$ при $m \neq p$ и

$$y_p = \left(x_p \text{ch } 2t + \frac{1}{2} (1 + |x|^2) \text{sh } 2t \right) u(x, t),$$

$$u(x, t) = (\text{ch}^2 t + x_p \text{sh } 2t + |x|^2 \text{sh}^2 t)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что при $t \neq 0$ $g_{t,p}$ есть суперпозиция двух инверсий с центрами на оси $0x_p$ и радиусами $R_1 = |\text{sh } t|^{-1}$, $R_2 = |\text{sh } 2t|^{-1}$. Отсюда следует (см. [1, гл. 2, п. 2.3]), что $g_{t,p} \in \mathcal{M}(B)$.

Пусть $g \in \mathcal{M}(B)$ и $g\bar{B}_r \subset B_R$. При достаточно малых $|t|$ из условия имеем

$$\int_{gB_r} f(g_{t,p}x) d\mu(x) = 0.$$

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получим утверждение леммы.

ЛЕММА 12. Пусть $s \geq 1$ и $f(\rho)Y(\sigma) \in V_r^s(B_R)$ при некотором $Y \in \mathcal{H}_k$. Тогда:

- а) $(d_k f)(\rho)Y_l^{(k+1)}(\sigma) \in V_r^{s-1}(B_R)$ при всех $l = 1, \dots, a_k$;
- б) если $k \geq 1$, то $(d_{2-k-n}f)(\rho)Y_l^{(k-1)}(\sigma) \in V_r^{s-1}(B_R)$ при всех $l = 1, \dots, a_k$;
- в) если $s \geq 2$, то $(d_{1-k-n}d_k f)(\rho)Y(\sigma) \in V_r^{s-2}(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(x) = \rho^k Y(\sigma)$, $G(\rho) = f(\rho)\rho^{-k}$. Применяя лемму 11 к функции $G(\rho)P(x)$ при $p = 1$, имеем

$$\left(G(\rho) \frac{\partial P}{\partial x_1} + G'(\rho)P(x)x_1\rho^{-1} \right) (1 + \rho^2) - 2x_1\rho G'(\rho)P(x) - 2kx_1G(\rho)P(x) \in V_r^{s-1}(B_R).$$

Учитывая, что при $k \geq 1$ имеем $x_1P(x) = \rho^{k+1}(U_1(\sigma) + U_2(\sigma))$, где $U_1 \in \mathcal{H}_{k-1}$, $U_2 \in \mathcal{H}_{k+1}$ (см. [22, гл. 6, лемма 3.4]), из леммы 10 получаем утверждение а).

Для доказательства б) предположим сначала, что $n \geq 3$. Пусть $m \neq 2, 3$; тогда по лемме 10 функция $G(\rho)(x_2 + ix_3)^{k-1}x_m \in V_r^s(B_R)$. По лемме 11 при $p = m$ функция

$$(x_2 + ix_3)^{k-1}(G(\rho)(1 + \rho^2) + x_m^2(G'(\rho)(1 - \rho^2)\rho^{-1} - 2kG(\rho)))$$

принадлежит $V_r^{s-1}(B_R)$. Суммируя по всем $m \neq 2, 3$, имеем

$$\begin{aligned} & ((n-2)G(\rho)(1 + \rho^2) + (\rho^2 - x_2^2 - x_3^2)(G'(\rho)(1 - \rho^2)\rho^{-1} - 2kG(\rho))) \\ & \times (x_2 + ix_3)^{k-1} \in V_r^{s-1}(B_R). \end{aligned} \quad (28)$$

Применяя теперь лемму 11 при $p = 2, 3$ к функции $G(\rho)(x_2 + ix_3)^k$, аналогично получаем

$$(2k(1 + \rho^2)G(\rho) + (x_2^2 + x_3^2)(G'(\rho)(1 - \rho^2)\rho^{-1} - 2kG(\rho)))(x_2 + ix_3)^{k-1} \in V_r^{s-1}(B_R).$$

Прибавляя (28), из леммы 10 имеем утверждение б) для $n \geq 3$. При $n = 2$ из леммы 11 следует

$$(x_1^2 - x_2^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + 2x_1x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \in V_r^{s-1}(B_R),$$

где $\varphi(x) = f(\rho)Y(\sigma)$. Переходя к полярным координатам, из леммы 10 получаем утверждение б) в случае $n = 2$.

Утверждение в) получается последовательным применением а) и б) к функции $f(\rho)Y(\sigma)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(\rho)Y(\sigma) \in V_r^1(B_R)$ при некотором $Y \in \mathcal{H}_1$. Тогда $f(\text{th } r) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения б) леммы 12 при $k = 1$ имеем

$$(1 - \rho^2)f'(\rho) + (n-1)f(\rho)(1 + \rho^2)\rho^{-1} \in V_r^0(B_R).$$

Интегрируя эту функцию на шаре B_R , получим $f(\text{th } r) = 0$.

§ 6. Примеры функций класса V_r

ЛЕММА 13. Пусть $f \in C^2(B)$ и $\mathcal{L}f = -(\lambda^2 + (n-1)^2)f$. Тогда для любой радиальной функции $\varphi \in L^1(B)$ с компактным носителем

$$\int_B f(x)\varphi(gx) d\mu(x) = \tilde{\varphi}(\lambda)f(g^{-1}0)$$

при всех $g \in \mathcal{M}(B)$. В частности, для любого $r > 0$

$$\int_{gB_r} f(x) d\mu(x) = \left(\frac{\operatorname{sh} 2r}{2}\right)^{n-1} \omega_{n-1} h_r(\lambda) f(g0). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство является следствием теоремы о среднем для собственных функций оператора $\mathcal{L}$ (см. [24, гл. 4, предложение 2.4]). Второе равенство следует из первого (см. (14) и лемму 3).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $Y \in \mathcal{H}_k$, $\lambda \in N(r)$. Тогда функция $\Phi_{\lambda,k}(\rho)Y(\sigma)$ принадлежит $V_r^\infty(B)$.

Доказательство следует из (29) и (9).

ЛЕММА 14. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ и каждый коэффициент ряда (4) имеет вид

$$f_{k,l}(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} \Phi_{\lambda,k}(\rho), \quad (30)$$

где $c_{k,l,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\lambda \in N(r)} |c_{k,l,\lambda}| < \infty$. Тогда $f \in V_r(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (11) имеем равномерную сходимость ряда (30) на B_R . Используя следствие к лемме 13, отсюда легко получить, что $f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r(B_R)$. Пусть $\tau \in \text{SO}(n)$, $g \in \mathcal{M}(B)$ и $g\bar{B}_r \subset B_R$. Положим

$$J(\tau^{-1}g) = \int_{gB_r} f(\tau^{-1}x) d\mu(x).$$

Умножая на $\overline{t_{l,p}^k(\tau)}$ и интегрируя на $\text{SO}(n)$, из [14, формулы (5), (6)] получаем

$$\int_{\text{SO}(n)} J(\tau^{-1}g) \overline{t_{l,p}^k(\tau)} d\tau = 0.$$

Из полноты системы $t_{l,p}^k(\tau)$ (см. [23, гл. 9, §2, п. 1.1]) следует, что $J = 0$ и $f \in V_r(B_R)$.

ЛЕММА 15. Для любого $s \in \mathbb{Z}_+$ существует функция $w \in V_r^s(B_R)$ со следующими свойствами:

- а) $w = 0$ в B_r ;
- б) при любом $\varepsilon > 0$ $\text{supp } w \cap B_{r+\varepsilon} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$, $p = s + n + 4$, $\mathbb{D} = d_0 d_{1-n}$. Тогда существуют константы $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+2}$, не все равные нулю, такие, что функция

$$u(\rho) = \sum_{m=1}^{p+2} \gamma_m \rho (1 - \rho^2)^{-m}$$

удовлетворяет условию $(\mathbb{D}^j u)(\text{th } r) = 0$, $j = 0, 1, \dots, p$. Для $\lambda \in N(r)$ положим

$$c_\lambda(u) = \int_0^{\text{th } r} \frac{t^{n-1}}{(1-t^2)^n} \Phi_{\lambda,1}(t) u(t) dt. \quad (31)$$

Интегрируя по частям с использованием (5) при $k = 1$ и следствия к лемме 12, получаем

$$c_\lambda(u) = (-1)^{p+1} (\lambda^2 + (n-1)^2)^{-p-1} c_\lambda(\mathbb{D}^{p+1} u).$$

Отсюда и из (11) имеем $c_\lambda(u) = O(\lambda^{-2p-2})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда функция

$$v(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda(u) c_\lambda^{-1}(\Phi_{\lambda,1}) \Phi_{\lambda,1}(\rho)$$

непрерывна в B и $c_\lambda(v) = c_\lambda(u)$ при всех $\lambda \in N(r)$ (см. (11), (22) и лемму 9). Из леммы 8 и (31) вытекает, что $v = u$ в B_r , и тогда $(D_{p+2}v)(\rho) = 0$ в B_r . Это означает, что

$$\sum_{\lambda \in N(r)} b_\lambda \Phi_{\lambda,p+3}(\rho) = 0 \quad \text{в } B_r,$$

где

$$b_\lambda = (-1)^p c_\lambda(u) c_\lambda^{-1}(\Phi_{\lambda,1}) \prod_{j=1}^{p+2} (i\lambda - n - 1 - 2j)$$

(см. (7), (22) и (11)). По лемме 9 $b_\lambda = O(\lambda^{-s-2})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда функция

$$w(x) = \sum_{\lambda \in N(r)} b_\lambda \Phi_{\lambda,p+3}(\rho) Y_1^{(p+3)}(\sigma) \quad (32)$$

принадлежит $V_r^s(B)$ и равна нулю в B_r (см. (22) и (12)). Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$ $\text{supp } w \cap B_{r+\varepsilon} = \emptyset$. Тогда из леммы 13, соотношений (9) и (32) получаем

$$\sum_{\lambda \in N(r)} b_\lambda \tilde{\varphi}(\lambda) \Phi_{\lambda,p+3}(\rho) = 0 \quad \text{в } B_r$$

для любой радиальной функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$. Поскольку $\tilde{\varphi}(\lambda) = O(\lambda^{-m})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и любом фиксированном $m > 0$ (см. [24, гл. 4, § 7, п. 2]), из (22) и следствия к лемме 9 имеем $b_\lambda \tilde{\varphi}(\lambda) = 0$ при всех $\lambda \in N(r)$. В силу произвольности φ все $b_\lambda = 0$, и тогда $c_\lambda(u) = 0$. По лемме 8 из (31) имеем $u = 0$ в B_r , что противоречит выбору констант $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+2}$. Таким образом, функция w удовлетворяет всем требуемым условиям.

§ 7. Теорема единственности

Теоремы единственности для функций с нулевыми шаровыми и сферическими средними в $\mathbb{R}^n$ изучались Ф. Йоном, Д. Смитом, А. Ситарамом и другими авторами (см. [27]–[29] и библиографию к этим работам). Более сильные результаты окончательного характера получены в [10], [12], [14], [16]. Приложения теорем единственности к экстремальным задачам о множествах Помпейю, проблеме носителя и некоторым вопросам теории кратных тригонометрических рядов см. в [30], [12], [31].

Основным результатом этого параграфа является

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in V_r^s(B_R)$ и $f = 0$ в B_r . Тогда $f_{k,l}(\rho) = 0$ в B_R при всех $0 \leq k \leq s$, $1 \leq l \leq a_k$.

Аналог теоремы 2 для евклидовых пространств был получен ранее, в [10]. Для доказательства потребуется ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 16. Пусть $f \in V_r(B_R) \cap \mathfrak{N}_{k,l}(B_R)$. Тогда для любого $p \in \mathbb{N}$ существует $\mathcal{F} \in V_r^p(B_R) \cap \mathfrak{N}_{k,l}(B_R)$ такая, что $\mathcal{L}_k^m \mathcal{F} = f$ в смысле распределений при некотором $m = m(p) \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ и имеет вид $f(x) = u(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$. По теореме Фубини для любого $\varepsilon \in (0, R)$

$$\int_0^{\text{th}(R-\varepsilon)} t^{n-1}|u(t)| dt < \infty. \quad (33)$$

Отсюда следует, что оператор

$$(A_1 f)(x) = \frac{\rho^k Y_l^{(k)}(\sigma)}{(1-\rho^2)^k} \int_{\text{th } r}^{\rho} \frac{(1-\xi^2)^{n+2k-2}}{\xi^{n+2k-1}} \int_0^{\xi} \frac{t^{n+k-1} u(t)}{(1-t^2)^{n+k}} dt d\xi \quad (34)$$

действует из $\mathfrak{N}_{k,l}(B_R)$ в $\mathfrak{N}_{k,l}(B_R)$ и $\mathcal{L}_k A_1 f = f$ в B_R в смысле распределений (см. (5)). Пусть $g \in \mathcal{M}(B)$ такое, что $g\bar{B}_r \subset B_R$ и $F(g0) = \int_{gB_r} (A_1 f)(x) d\mu(x)$. Тогда $F \in \mathfrak{N}_{k,l}(B_{R-r})$ (см. [10, лемма 5]) и $\mathcal{L}_k F = 0$, поскольку $f \in V_r(B_R)$. Используя (5), (9) и непрерывность в нуле функции F , отсюда имеем

$$F(x) = c \Phi_{\lambda,k}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma)$$

при некоторых $c, \lambda \in \mathbb{C}$. Тогда существует $c_1 \in \mathbb{C}$ такое, что функция

$$f_1 = A_1 f - c_1 \Phi_{\lambda,k}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r(B_R)$$

(см. лемму 13 и (9)). Повторяя подобное рассуждение с функцией f_1 вместо f и т.д., получим последовательность функций $f_1, \dots, f_q \in V_r(B_R) \cap \mathfrak{N}_{k,l}(B_R)$. Положим

$$q = 1 + \left\lceil \frac{n+k}{2} \right\rceil, \quad f_j(x) = u_j(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad j = 1, \dots, q.$$

Используя (33), (34), индукцией по j легко получить неравенства

$$|u_j(\rho)| \leq \alpha_j \rho^k \ln \rho + \beta_j \rho^{2j-n-2}, \quad 0 < \rho < \text{th}(R-\varepsilon), \quad (35)$$

где константы α_j, β_j не зависят от ρ . Теперь повторим описанное выше рассуждение с функцией f_q вместо f , заменив A_1 оператором

$$(A_2 f_q)(x) = \frac{\rho^k Y_l^{(k)}(\sigma)}{(1 - \rho^2)^k} \int_0^\rho \frac{(1 - \xi^2)^{n+2k-2}}{\xi^{n+2k-1}} \int_0^\xi \frac{t^{n+k-1} u_q(t)}{(1 - t^2)^{n+k}} dt d\xi. \quad (36)$$

Аналогично получаем последовательность функций $f_j(x) = u_j(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r(B_R)$, $j \geq q + 1$. При таких j из (36) и (35) имеем

$$|u_j(\rho)| \leq \gamma_j \rho^{j-1+(k-n)/2}, \quad 0 < \rho < \text{th}(R - \varepsilon),$$

где постоянная γ_j не зависит от ρ . Из этой оценки и равенства (36) следует, что для любого $p \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $f_m \in C^p(B_R)$. Полагая $\mathcal{F} = f_m$, получим утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $f \in V_r(B_R)$ радиальна и $f = 0$ в B_r . Тогда для любого $p \in \mathbb{N}$ существует радиальная функция $\mathcal{F} \in V_r^p(B_R)$ такая, что $\mathcal{F} = 0$ в B_r и $\mathcal{L}_0^m \mathcal{F} = f$ в смысле распределений при некотором $m = m(p) \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и равенств (34), (36) имеем $A_1 f = A_2 f = 0$ в B_r . Тогда $F(0) = 0$ (см. доказательство леммы 16) и, следовательно, $F = 0$ в B_R . Повторяя рассуждения из доказательства леммы 16 при $k = 0$, получаем, что все функции $f_1, f_2, \dots$ радиальны и равны нулю в B_r . Как и выше, отсюда следует существование функции $\mathcal{F}$ с требуемыми свойствами.

Далее будет использоваться отображение $g_{t,p}$ из доказательства леммы 11 при $p = 1$.

ЛЕММА 17. Пусть $R > r$, $u \in C[-r, R)$, $u = 0$ на $[-r, r]$ и при $0 \leq t < R - r$

$$\int_{g_{t,1} B_r} u(\langle x, \mathbf{e} \rangle) d\mu(x) = 0.$$

Тогда $u = 0$ на $[-r, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $R < 2r$. Из равенства (16) получаем

$$\int_{B_r} u(\langle g_{t,1} x, \mathbf{e} \rangle) d\mu(x) = \int_{-r}^r u(\xi + t) \varkappa(\xi) d\xi.$$

При $0 \leq t < r$ отсюда и из условия имеем

$$\int_r^{r+t} u(\xi) \varkappa(\xi - t) d\xi = 0.$$

По теореме Титчмарша о свертке [26, прил. 7, п. 12] $u = 0$ на $[r, R)$, и лемма доказана.

ЛЕММА 18. Пусть $R > r$, $u \in C(-R, R)$ и $u(\xi) = e^{2(n-1)\xi}u(-\xi)$ для любого $\xi \in (-R, R)$. Тогда при всех $\tau \in \text{SO}(n)$ и $|t| < R - r$ имеет место равенство

$$\int_{g_{t,1}B_r} u(\langle \tau x, \mathbf{e} \rangle) d\mu(x) = \psi(\langle (\text{th } t)\tau \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle), \quad (37)$$

где $\psi \in C(-R, R)$ и $\psi(\xi) = e^{2(n-1)\xi}\psi(-\xi)$ на $(-R, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл в левой части равенства (37) является непрерывной функцией точки, совпадающей с $(\text{th } t)\tau \mathbf{e}$ – (неевклидовым) центром шара $\tau g_{t,1}B_r$. Обозначим эту функцию символом w и докажем, что она имеет вид $w(x) = \psi(\langle x, \mathbf{e} \rangle)$, где ψ – функция с указанными свойствами. Пусть $\mathfrak{N}$ – подгруппа $\mathcal{M}(B)$, орбитами которой являются орисферы, касающиеся границы B в точке $\mathbf{e}$ (явный вид мёбиусовых преобразований, входящих в $\mathfrak{N}$, нетрудно получить из [24, введение, доказательство леммы 4.1]). Для любого $\eta \in \mathfrak{N}$ из тождества $\langle \eta x, \mathbf{e} \rangle = \langle x, \mathbf{e} \rangle$ и определения w имеем

$$w(\eta(\text{th } t)\tau \mathbf{e}) = w((\text{th } t)\tau \mathbf{e}).$$

Это означает, что для некоторой функции $\psi \in C(-R, R)$ имеет место равенство (37).

Полагая в (37) τ равным единице группы $\text{SO}(n)$, из (16) имеем $\psi(\xi) = e^{2(n-1)\xi} \times \psi(-\xi)$ на $(-R, R)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 19. Пусть $R > r$, $f \in C^{n+2}[0, \text{th } R]$ и $f = 0$ на $[0, \text{th } r]$. Тогда уравнение

$$\int_{\text{SO}(n)} h(\langle \rho \tau \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle) e^{(n-1)\langle \rho \tau \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle} d\tau = f(\rho), \quad \rho \in [0, \text{th } R], \quad (38)$$

имеет единственное решение h в классе четных непрерывных на $(-R, R)$ функций, при этом $h = 0$ на $[-r, r]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (38) можно переписать в виде

$$f(\rho) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} h(\langle \rho \sigma, \mathbf{e} \rangle) e^{(n-1)\langle \rho \sigma, \mathbf{e} \rangle} d\sigma$$

(см. [22, гл. 1, п. 4.14]). Полагая $h(t)e^{(n-1)t} = v(\text{th } t)$, при $\rho \in [0, \text{th } R]$ имеем

$$f(\rho) = \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \int_{-\rho}^{\rho} v(\xi)(1 + \xi)^{1-n}(\rho^2 - \xi^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi.$$

При четных h данное уравнение сводится к уравнению Абеля (см. [24, гл. 1, доказательство теоремы 2.6]), откуда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 20. Пусть функция $\varphi \in V_r(B_R)$ радиальна и $\varphi = 0$ в B_r . Тогда $\varphi = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(x) = f(|x|)$ в B_R , где $f \in C^{n+2}[0, \text{th } R]$ (см. следствие к лемме 16). По лемме 19 существует четная функция $h \in C(-R, R)$, удовлетворяющая (38). Полагая $h(t) \times e^{(n-1)t} = u(t)$, из леммы 18 имеем равенство (37). Учитывая, что $\varphi \in V_r(B_R)$, из (37) и (38) получаем

$$\int_{\text{SO}(n)} \psi(\langle (\text{th } t)\tau \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle) d\tau = \int_{g_{t,1}B_r} f(|x|) d\mu(x) = 0$$

при $|t| < R - r$. По лемме 19 $\psi(t) = 0$ при $|t| < R - r$, и тогда

$$\int_{g_{t,1}B_r} u(\langle x, \mathbf{e} \rangle) d\mu(x) = 0$$

при таких t . Кроме того, $u = 0$ на $[-r, r]$ (см. лемму 19). Из леммы 17 и четности h получаем $u = h = 0$ на $(-R, R)$. Отсюда и из (38) следует, что $\varphi = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По лемме 10 $f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r^s(B_R)$. При $k = 0$ утверждение теоремы следует из леммы 20. При $0 < k \leq s$ утверждение получается индукцией по k с использованием утверждения б) леммы 12.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 15 видно, что при любом $s \in \mathbb{Z}_+$ существует ненулевая функция $f \in V_r^s(B_R)$ такая, что $f = 0$ в B_r . При этом $f(x) = u(\rho)Y_1^{(k)}(\sigma)$ в B_R , где $k = s + O(1)$ и постоянная в знаке O не зависит от s . Таким образом, утверждение теоремы 2 нельзя существенно усилить.

§ 8. Описание гладких функций класса V_r

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s \geq n + 3$ и $f \in V_r^s(B_R)$. Тогда при $|k - 1| \leq s - n - 3$ и всех $1 \leq l \leq a_k$ имеет место равенство (30), где $c_{k,l,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{n-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 10 $f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r^s(B_R)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$. Сначала рассмотрим случай, когда $k = 1$. Положим $f_{1,l}(\rho) = u(\rho)$ и $c_{1,l,\lambda} = c_\lambda(u)c_\lambda^{-1}(\Phi_{\lambda,1})$, где c_λ определяется равенством (31). Повторяя рассуждения из доказательства леммы 15, получаем, что $c_{1,l,\lambda} = O(\lambda^{n-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и ряд в правой части равенства (30) при $k = 1$ сходится равномерно на B_R . Из лемм 8, 9 следует, что его сумма равна $u(\rho)$ в B_r . Используя оценку $s \geq n + 3$ и леммы 2, 14, из теоремы 2 получаем равенство (30) на всем B_R . Таким образом, теорема 3 доказана при $k = 1$. При $k > 1$ утверждение получается индукцией по k с использованием (8) и утверждения б) леммы 12. Аналогично, при $k = 0$ утверждение следует из случая $k = 1$, равенства (7) и утверждения а) леммы 12.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in V_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство (30), причем $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{-\alpha})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$.

Доказательство следует из теоремы 3 и леммы 14.

§ 9. Структура множества Ω

ЛЕММА 21. Пусть $r_1, r_2 > 0$, $r_1 \neq r_2$. Предположим, что существует возрастающая последовательность $\{\xi_m\}$ положительных чисел такая, что $h_{r_1}(\xi_m) = 0$ и $|h_{r_2}(\xi_m)| < \xi_m^{-(n+7)/2}$. Тогда $\{\xi_m\}$ лакунарна по Адамару.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $\{\xi_m\}$ бесконечна. По лемме 7 при $r = r_1$ имеет место равенство (21), в котором j пробегает последовательность $\{j_m\}$ натуральных чисел, для которой $\xi_m = \lambda_{j_m}(r_1)$. Кроме того, при $j \in \{j_m\}$ из (17) и оценки $h_{r_2}(\xi_m)$ получаем

$$r_2 \lambda_j(r_1) = \pi \left(\frac{n+3}{4} + l_j(r_2) \right) - \frac{(n^2-1) \operatorname{cth} r_2}{4 \lambda_j(r_1)} + O(\lambda_j^{-3}(r_1)), \quad (39)$$

где $l_j(r_2) \in \mathbb{Z}$ и постоянная в знаке O не зависит от j (см. доказательство леммы 7). Используя (39) и (21) при $r = r_1$ и указанных j , имеем

$$\frac{r_1}{r_2} - \frac{P_m}{Q_m} = \frac{c(r_1, r_2)}{\xi_m Q_m} + O(\xi_m^{-4}), \quad (40)$$

где

$$P_m = 4(j_m + q(r_1)) + n + 3, \quad Q_m = 4l_{j_m}(r_2) + n + 3, \\ c(r_1, r_2) = \frac{(n^2-1)(r_1 \operatorname{cth} 2r_2 - r_2 \operatorname{cth} 2r_1)}{4\pi r_2}.$$

Предположим, что $\{\xi_m\}$ не лакунарна. Повторяя рассуждения из [10, доказательство леммы 11], из равенства (40) получаем $Q_m = Q_{m+1}$ для бесконечного множества пар $(m, m+1)$. Последнее равенство противоречит (39), поскольку $\lambda_{j+1} - \lambda_j > c_1 > 0$, где c_1 не зависит от j (см. (21)). Таким образом, лемма доказана.

Изучим теперь некоторые свойства множества Ω .

ЛЕММА 22. Пусть $r_1, r_2 > 0$. Тогда $(r_1, r_2) \in \Omega$ в том и только том случае, когда для любого $p \in \mathbb{N}$ существует $\xi_p \in N(r_1)$ такое, что $|h_{r_2}(\xi_p)| < (2 + \xi_p)^{-p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для любого $p \in \mathbb{N}$ существует $\xi_p \in N(r_1)$, удовлетворяющее условию леммы. Докажем, что в этом случае $(r_1, r_2) \in \Omega$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\xi_p \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$ (в противном случае $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$, откуда $(r_1, r_2) \in \Omega$). Из (17) и оценки $h_{r_2}(\xi_p)$ следует, что имеет место равенство (39), в котором j пробегает последовательность $\{j_p\}$ натуральных чисел, для которой $\xi_p = \lambda_{j_p}(r_1)$ (см. доказательство леммы 7). Отсюда и из (21) при $r = r_2$ имеем $\xi_p - \gamma_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, где γ_p — элемент $N(r_2)$, ближайший к ξ_p (γ_p определяется однозначно при достаточно больших p). Применяя теорему Лагранжа к функции h_{r_2} на отрезке с концами ξ_p, γ_p , из равенств (18) и (21) при $r = r_2$ получаем

$$|\gamma_p - \xi_p| < c(2 + \xi_p)^{-p+(n+1)/2},$$

где c не зависит от p . Отсюда следует, что $(r_1, r_2) \in \Omega$.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что для любого $m > 0$ существуют $\alpha \in N(r_1)$, $\beta \in N(r_2)$ такие, что $|\alpha - \beta| < (2 + \alpha + \beta)^{-m}$. Тогда $h_{r_2}(\alpha) = h_{r_2}(\alpha) - h_{r_2}(\beta)$. Как и выше, используя теорему Лагранжа и (18) при $r = r_2$, из последнего равенства получим обратное утверждение. Таким образом, лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(r_1, r_2) \in \Omega$ и $N(r_1, r_2) = \emptyset$. Тогда $r_1/r_2 \notin \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и леммы 22 следует, что существует возрастающая последовательность $\{\xi_m\}$, удовлетворяющая условиям леммы 21. Из доказательства леммы 21 видно, что r_1/r_2 допускает быстрое приближение рациональными дробями (см. (40)). Отсюда вытекает, что $r_1/r_2 \notin \mathbb{Q}$.

ЛЕММА 23. При любом $r_1 > 0$ множество $A = \{r_2 > 0: N(r_1, r_2) \neq \emptyset\}$ является счетным и всюду плотным на $(0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при фиксированном $\lambda > 0$ множество $\{r > 0: h_r(\lambda) = 0\}$ не имеет конечных предельных точек, получаем, что A является не более чем счетным. Пусть r_1 фиксировано, $(a, b) \subset (0, +\infty)$ и n_1, n_2 — достаточно большие натуральные числа такие, что $[\rho_1, \rho_2] \subset (a, b)$, где $\rho_1 = r_1 n_1 / n_2$, $\rho_2 = r_1(n_1 + 1) / n_2$. Из леммы 7 следует, что имеет место равенство (21) при $r = r_1$ и $j + q(r_1) = n_2$. Используя (17), получаем, что при достаточно больших n_1, n_2 числа $h_{\rho_1}(\lambda_j)$ и $h_{\rho_2}(\lambda_j)$ имеют разные знаки. Следовательно, $h_r(\lambda_j(r_1)) = 0$ при некотором $r \in [\rho_1, \rho_2]$. В силу произвольности a, b отсюда имеем утверждение леммы.

ЛЕММА 24. При любом $r_1 > 0$ пересечение множества $\{r_2 > 0: (r_1, r_2) \in \Omega\}$ с любым интервалом $(\alpha, \beta) \subset (0, +\infty)$ имеет мощность континуума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α, β фиксированы. Из леммы 23 следует, что существует последовательность вложенных отрезков $[\alpha_m, \beta_m] \subset (\alpha, \beta)$ таких, что $N(r_1, \alpha_m) = \emptyset$, $\alpha_m < \alpha_{m+1}$ и $\beta_m < \alpha_m + e^{-\lambda_m}$, где λ_m — наименьший элемент множества $N(r_1, \alpha_m)$. Отметим, что $\lambda_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, поскольку в противном случае функция $h_r(\lambda)$ при некотором $\lambda \in N(r_1)$ имела бы бесконечное множество корней $r \in (\alpha, \beta)$. Пусть $\zeta \in [\alpha_m, \beta_m]$ при всех m . Тогда

$$|h_\zeta(\lambda_m)| = |h_\zeta(\lambda_m) - h_{\alpha_m}(\lambda_m)| < c|\zeta - \alpha_m| < ce^{-\lambda_m},$$

где c не зависит от m (см. лемму 2). По лемме 22 $(r_1, \zeta) \in \Omega$. Нетрудно видеть, что множество всех чисел $\zeta \in (\alpha, \beta)$, полученных указанным способом, имеет мощность континуума.

ЛЕММА 25. При любом $r_1 > 0$ множество $\{r_2 > 0: (r_1, r_2) \in \Omega\}$ имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r_1 фиксировано, $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$, $r_2 \in [\alpha, \beta]$ и $(r_1, r_2) \in \Omega$. Тогда существует (зависящая, вообще говоря, от r_2) последовательность $\{j_p\}$ натуральных чисел такая, что при $j \in \{j_p\}$ имеет место равенство (39), в котором постоянная в знаке O зависит только от r_1, α, β, n (см. лемму 22 и доказательство леммы 7). Из (39) получаем $l_j(r_2) = O(\lambda_j(r_1))$. Кроме того, если

для $r_2 = \rho_1, \rho_2 \in [\alpha, \beta]$ равенство (39) выполнено с одним и тем же $\lambda_j(r_1)$ и при этом $l_j(\rho_1) = l_j(\rho_2)$, будем иметь $\rho_1 - \rho_2 = O(\lambda_j^{-4}(r_1))$. Это означает, что $\forall a \in \mathbb{N}$ множество $\Lambda = \{r_2 \in [\alpha, \beta]: (r_1, r_2) \in \Omega\}$ можно покрыть объединением отрезков, лебегова мера которого есть $O(\sum_{j=a}^{\infty} \lambda_j^{-3}(r_1))$. Отсюда и из (22) вытекает, что лебегова мера Λ равна нулю. В силу произвольности α, β отсюда имеем утверждение леммы.

§ 10. Доказательство основного результата

Прежде всего отметим, что первое утверждение теоремы 1 легко получить из ее второго утверждения с помощью стандартного метода сглаживания (см. [24, гл. 1, доказательство теоремы 4.2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. 2) ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f \in V_r^\infty(B_R)$, $r = r_1, r_2$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $r_1 + r_2 = R$. По следствию из теоремы 3 при $r = r_1$ имеет место равенство (30), в котором $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{-\alpha})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$. Так как $f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_{r_2}^\infty(B_R)$ (см. лемму 10), из (30), (9) и (29) получаем

$$\sum_{\lambda \in N(r_1)} c_{k,l,\lambda} h_{r_2}(\lambda) \Phi_{\lambda,k}(\rho) = 0$$

при $\rho \in [0, \text{th } r_1)$. Поскольку $N(r_1, r_2) = \emptyset$, по следствию из леммы 9 $c_{k,l,\lambda} = 0$ при всех k, l, λ . Таким образом, все $f_{k,l}(\rho) = 0$, откуда следует утверждение 2) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. 3) ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f \in V_r(B_R)$, $r = r_1, r_2$, причем $(r_1, r_2) \in \Omega$, $N(r_1, r_2) = \emptyset$ и $r_1 + r_2 = R$. Тогда $f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r(B_R)$, $r = r_1, r_2$ (см. лемму 10). Достаточно доказать, что $f_{k,l} = 0$ при всех k, l . Пусть k, l фиксированы, $p \in \mathbb{N}$ достаточно большое (позволяющее дифференцировать встречающиеся ниже ряды нужное число раз). По лемме 16 существует функция $\mathcal{F} \in V_{r_1}^p(B_R) \cap \mathfrak{H}_{k,l}(B_R)$ такая, что $\mathcal{L}_k^m \mathcal{F} = f_{k,l}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ в смысле распределений при некотором $m = m(p) \in \mathbb{N}$. По теореме 3 имеет место равенство

$$\mathcal{F}(x) = Y_l^{(k)}(\sigma) \sum_{\lambda \in N(r_1)} c_{k,l,\lambda} \Phi_{\lambda,k}(\rho), \quad x \in B_R, \quad (41)$$

где $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{n-p})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Отсюда и из (29) при $\rho \in [0, \text{th } r_1)$ получаем

$$\int_{d(x,y) \leq r_2} \mathcal{F}(y) d\mu(y) = \omega_{n-1} \left(\frac{\text{sh } 2r_2}{2} \right)^{n-1} H(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad (42)$$

где

$$H(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r_1)} c_{k,l,\lambda} h_{r_2}(\lambda) \Phi_{\lambda,k}(\rho). \quad (43)$$

Используя инвариантность оператора $\mathcal{L}$ относительно группы $\mathcal{M}(B)$, из (42) и определения $\mathcal{F}$ имеем

$$\mathcal{L}_k^m (H(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma)) = 0. \quad (44)$$

В силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}_k^m$ функция $H(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)$ принадлежит $C^\infty(B_{r_1})$ и однозначно продолжается в B до функции $U \in \mathfrak{H}_{k,l}(B)$, удовлетворяющей уравнению $\mathcal{L}_k^m(U) = 0$ (см. (5)). Пусть $t \in (0, 1)$, $G(t) = (d_{-n}d_{-n-1} \dots d_{-n-k+2}H)(t)$ при $k \geq 2$, $G(t) = H(t)$ при $k = 1$ и $G(t) = (d_0H)(t)$ при $k = 0$. Тогда (см. доказательство леммы 12) функция G продолжается на $[0, 1)$ до функции класса $C^\infty[0, 1)$. Из (43), (7), (8) и леммы 2 имеем

$$G(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r_1)} b_{k,l,\lambda} \Phi_{\lambda,1}(\rho), \quad \rho \in [0, \text{th } r_1],$$

где $b_{k,l,\lambda} = c_{k,l,\lambda} h_{r_2}(\lambda) p_k(\lambda)$, p_k – многочлен степени $|k - 1|$ и $p_1(\lambda) = 1$. Отсюда и из оценки $c_{k,l,\lambda}$ вытекает, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$b_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{n-p+|k-1|} |h_{r_2}(\lambda)|). \quad (45)$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 15, для любого $s \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$\begin{aligned} b_{k,l,\lambda} c_\lambda(\Phi_{\lambda,1}) &= (-1)^{1+s} (\lambda^2 + (n-1)^2)^{-1-s} c_\lambda(\mathbb{D}^{s+1}G) \\ &+ \left(\frac{\text{sh } 2r_1}{2} \right)^{n-1} \Phi_{\lambda,0}(\text{th } r_1) \sum_{q=0}^s \frac{(-1)^{1+q} (\mathbb{D}^q G)(\text{th } r_1)}{(n+i\lambda-1)(\lambda^2 + (n-1)^2)^q}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $\mathbb{D} = d_0 d_{1-n}$ (определение c_λ см. в (31)). Из (21) при $r = r_1$ и [21, п. 4.9] имеем оценку $|\Phi_{\lambda,0}(\text{th } r_1)| > \lambda^{(1-n)/2}$ для всех достаточно больших $\lambda \in N(r_1)$. Предположим, что среди чисел $(\mathbb{D}^q G)(\text{th } r_1)$, $q \in \mathbb{Z}_+$, есть число, отличное от нуля. Тогда из (46) и леммы 9 следует, что $|b_{k,l,\lambda}| > \lambda^{-\alpha}$ при некотором фиксированном $\alpha > 0$ и всех достаточно больших $\lambda \in N(r_1)$. Поскольку $(r_1, r_2) \in \Omega$, это неравенство противоречит (45) (см. лемму 22). Таким образом, $(\mathbb{D}^q G)(\text{th } r_1) = 0$ при всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и из (46) получаем, что $b_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{-\beta})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\beta > 0$. Тогда из (9), (43), (44) имеем

$$\sum_{\lambda \in N(r_1)} c_{k,l,\lambda} h_{r_2}(\lambda) (\lambda^2 + (n-1)^2 + 4(k-1)(n+k-2))^m \Phi_{\lambda,k}(\rho) = 0$$

при $0 \leq \rho \leq \text{th } r_1$. Поскольку $N(r_1, r_2) = \emptyset$, по следствию из леммы 9 все $c_{k,l,\lambda}$ равно нулю. Отсюда и из (41) следует, что $\mathcal{F} = 0$ в B_R . Тогда $f_{k,l} = 0$, и утверждение 3) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. 4) ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $r_1 + r_2 = R$ и $(r_1, r_2) \notin \Omega$; тогда $N(r_1, r_2) = \emptyset$. По лемме 22 существуют постоянные $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$|h_{r_2}(\lambda)|^{-1} < \alpha(2 + \lambda)^\beta \quad (47)$$

при всех $\lambda \in N(r_1)$. Пусть $s, m \in \mathbb{Z}_+$ и $s > \beta + m$. Для данного s рассмотрим функцию w , определенную равенством (32) при $r = r_1$. Из доказательства леммы 15 следует, что $w = 0$ в B_{r_1} и коэффициенты b_λ в разложении (32) удовлетворяют условию $b_\lambda = O(\lambda^{-s-2})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Для $x \in B_R$ положим

$$f(x) = \sum_{\lambda \in N(r_1)} b_\lambda h_{r_2}^{-1}(\lambda) \Phi_{\lambda,k}(\rho) Y_1^{(k)}(\sigma), \quad (48)$$

где $k = p + 3$ (см. (32)). Учитывая, что $s > \beta + m$, из оценки b_λ и (47) получаем $f \in C^m(B_R)$ (см. (22) и лемму 2). Кроме того, по лемме 14 $f \in V_{r_1}(B_R)$. Используя (29) при $r = r_2$, из (48) и (32) имеем также $f \in V_{r_2}(B_R)$, поскольку $w = 0$ в B_{r_1} . Повторяя рассуждения из доказательства леммы 15, из (48) получаем, что $f \neq 0$. Таким образом, функция f удовлетворяет всем требованиям утверждения 4).

Для доказательства утверждения 5) потребуется

ЛЕММА 26. Пусть $\{\xi_m\}_{m=1}^\infty$ – возрастающая последовательность положительных чисел и $\xi_{m+1} - \xi_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ненулевая радиальная функция $\varphi \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$ такая, что $\tilde{\varphi}(\xi_m) = 0$ при всех m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [31, лемма 1] следует, что при указанных условиях существует ненулевая радиальная функция $\psi \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$, преобразование Фурье $\hat{\psi}$ которой обращается в нуль на сферах $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| = \xi_m\}$. Кроме того, для некоторой целой функции u одной переменной $\hat{\psi}(x) = u(|x|)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ (см. [22, гл. 4, теорема 3.3]). Из теоремы Пэли–Винера и ее аналога для сферического преобразования (см. [24, гл. 4, § 7]) получаем, что существует радиальная функция $\varphi \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$ такая, что $\tilde{\varphi}(z) = u(z)$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Тогда $\tilde{\varphi}(\xi_m) = 0$ при всех m , и лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 5). Сначала рассмотрим случай, когда $N(r_1, r_2) = \emptyset$. Пусть $r_1 + r_2 > R$ и $\varepsilon = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 - R)$. Тогда существует ненулевая функция $u(\rho) \in C^\infty(\overline{B_{r_2}})$, носитель которой содержится в области $G_\varepsilon = B_{r_2-2\varepsilon} \setminus \overline{B_{R-r_1+\varepsilon}}$. Из доказательства леммы 15 следует, что при $0 \leq \rho \leq \text{th } r_2$ имеет место равенство

$$u(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r_2)} u_\lambda \Phi_{\lambda,1}(\rho), \quad (49)$$

где $u_\lambda \in \mathbb{C}$ и $u_\lambda = O(\lambda^{-\alpha})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$. Тогда функция $v(\rho) = (d_{1-n}u)(\rho)$ ненулевая и $\text{supp } v \subset G_\varepsilon$. Кроме того, из (8) и (49) имеем

$$v(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r_2)} (i\lambda + n - 1) u_\lambda \Phi_{\lambda,0}(\rho) \quad (50)$$

при $\rho \in [0, \text{th } r_2]$. По формуле (50) функцию v можно продолжить на B и при таком продолжении $v \in C^\infty(B)$ (см. лемму 2). Пусть $\mathcal{A}$ – множество чисел $\lambda \in N(r_2)$ таких, что $|h_{r_1}(\lambda)| < \lambda^{-(n+7)/2}$. По лемме 21 $\mathcal{A}$ либо пусто, либо лакунарно по Адамару. Тогда существует ненулевая радиальная функция $\varphi \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$ такая, что $\tilde{\varphi}(\lambda) = 0$ при любом $\lambda \in \mathcal{A}$ (см. лемму 26). Рассмотрим свертку

$$(v * \varphi)(g0) = \int_B v(|x|) \varphi(g^{-1}x) d\mu(x), \quad g \in \mathcal{M}(B),$$

и докажем, что $\text{supp}(v * \varphi) \cap B_{r_2} \neq \emptyset$. Действительно, в противном случае $\psi * \varphi = 0$, где $\psi = v$ в B_{r_2} и $\psi = 0$ в $B \setminus B_{r_2}$. Тогда $\tilde{\psi}\tilde{\varphi} = 0$, что невозможно, поскольку $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\varphi}$ – ненулевые целые функции. Далее, из (50) и леммы 13 получаем

$$(v * \varphi)(x) = \sum_{\lambda \in N(r_2) \setminus \mathcal{A}} v_\lambda \Phi_{\lambda,0}(|x|), \quad (51)$$

где $v_\lambda = (i\lambda + n - 1)u_\lambda \tilde{\varphi}(\lambda)$.

Заметим, что $v * \varphi = 0$ в B_{R-r_2} (это вытекает из определения свертки и расположения носителей v и φ). Тогда из (51) и (29) следует, что функция

$$f(x) = \sum_{\lambda \in N(r_2) \setminus \mathcal{A}} v_\lambda h_{r_1}^{-1}(\lambda) \Phi_{\lambda,0}(|x|)$$

принадлежит $V_r^\infty(B_R)$, $r = r_1, r_2$ (см. лемму 2 и следствие из леммы 13). Предположим, что $f = 0$ в B_R . Тогда по следствию из леммы 9 все v_λ равны нулю, откуда $v * \varphi = 0$ (см. (51)). Это противоречит тому, что $\text{supp}(v * \varphi) \cap B_{r_2} \neq \emptyset$. Следовательно, при $N(r_1, r_2) = \emptyset$ функция f удовлетворяет всем требованиям утверждения 5).

Пусть теперь $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$. Тогда при любом $\lambda \in N(r_1, r_2)$ функция $\Phi_{\lambda,0}(|x|)$ является вещественно-аналитической в B и принадлежит $V_r(B)$, $r = r_1, r_2$ (см. следствие из леммы 13). Отсюда следует утверждение 5) при $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$, а также утверждение 6). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. Альфорс Л. Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.
2. Berenstein C. A., Zalcman L. Pompeiu's problem on spaces of constant curvature // J. Analyse Math. 1976. V. 30. P. 113–130.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
4. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 47. P. 237–254.
5. Berenstein C. A., Gay R. A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
6. Berenstein C. A., Gay R. Le probleme de Pompeiu locale // J. Analyse Math. 1989. V. 52. P. 133–166.
7. Berenstein C. A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. 1990. V. 54. P. 259–287.
8. Беренштейн К. А., Струнна Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
9. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / Eds. B. Fuglede et al. Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 185–194.
10. Волчков В. В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.
11. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
12. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30.
13. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
14. Волчков В. В. О множествах инъективности преобразования Радона на сферах // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 3. С. 63–76.
15. Volchkov V. V. Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 49–63.
16. Волчков В. В. Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 59–65.
17. Волчков В. В. Новые теоремы о среднем для полианалитических функций // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 20–28.

18. Волчков В. В. Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №3. С. 351–358.
19. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №2. С. 30–36.
20. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompéiu dans l'espace hyperbolique // Publ. Mat. 1993. V. 37. P. 133–164.
21. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) // J. Analyse Math. 1995. V. 67. P. 1–37.
22. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
23. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд. М.: Наука, 1991.
24. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
25. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. 1. Рига: Зинатне, 1974.
26. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
27. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958.
28. Smith I. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. V. 72. P. 403–416.
29. Sitaram A. Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Illinois J. Math. 1984. V. 28. P. 339–347.
30. Волчков В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №5. С. 671–680.
31. Волчков В. В. Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №6. С. 27–31.

Донецкий государственный университет

Поступило в редакцию
1.X.1999