Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ковалевский, Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 -правыми частями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 2, 27–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/im327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:26:25

УДК 517.956

А. А. Ковалевский

**Энтропийные решения задачи Дирихле для одного
класса нелинейных эллиптических уравнений
четвертого порядка с L^1 -правыми частями**

В настоящей работе вводится и изучается понятие энтропийного решения задачи Дирихле для некоторого класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с правыми частями, допускающими произвольный рост по переменной, соответствующей неизвестной функции, и принадлежащими пространству L^1 при фиксированном значении этой переменной. Доказываются теоремы существования и единственности энтропийного решения. Устанавливаются результаты о существовании так называемых H -решений и W -решений рассматриваемой задачи и принадлежности энтропийных решений соболевским пространствам.

Библиография: 14 наименований.

§ 1. Введение

В последнее время проведены интересные исследования о разрешимости нелинейных дивергентных уравнений второго порядка с данными, не укладывающимися в обычную схему теории монотонных операторов [1]. Прежде всего это относится к уравнениям с L^1 -правыми частями [2]–[5], уравнениям с мерами [6]–[8], а также задачам, приводящим в ослабленной постановке к так называемым ренормализованным решениям [9]–[11]. Среди этих исследований одним из самых значительных явилась работа [4]. В ней была построена теория существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с правыми частями, которые допускают произвольный рост по переменной, соответствующей неизвестной функции, и принадлежат классу L^1 при фиксированном значении этой переменной.

Отметим, что доказательство разрешимости исследованной в [4] задачи основано на рассмотрении последовательности аппроксимирующих задач для уравнений с ограниченными правыми частями, получении специальных оценок для их решений и последующем предельном переходе. При этом основным инструментом было использование пробных функций, являющихся суперпозициями решений аппроксимирующих задач и стандартных срезающих функций $T_k(s) = \max\{\min\{s, k\}, -k\}$, $k > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Кроме того, суперпозиции энтропийных решений и стандартных срезающих функций играли существенную роль в доказательстве единственности решений. И в целом использование функций T_k лежало в основе определения новых классов функций (более широких, чем соболевские пространства), в которых устанавливалась однозначная (энтропийная) разрешимость рассматриваемой задачи.

Все это относится к уравнениям второго порядка, и, насколько автору известно, ранее никаких результатов о разрешимости уравнений высшего порядка с L^1 -данными получено не было, хотя развитие соответствующей теории представляет несомненный интерес. Это обстоятельство и явилось побудительным мотивом для исследования, предлагаемого в настоящей работе. В ней изучаются вопросы существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для некоторого класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 -правыми частями. Ограничение рассмотрением уравнений четвертого порядка для нас не столь существенно, сколь принципиален сам переход от уравнений второго порядка к уравнениям высшего порядка. В целом мы придерживаемся подхода, предложенного в [4]. Однако реализация этого подхода встречает ряд существенных трудностей. Прежде всего это связано с тем, что в случае уравнений высшего порядка при получении необходимых оценок для решений аппроксимирующих задач функции T_k не могут быть использованы в пробных функциях-суперпозициях таким образом, как это имеет место для уравнений второго порядка. Так, в рассматриваемом случае уравнений четвертого порядка, для того чтобы получить нужного типа оценки решений, возникает потребность в построении заменяющих срезки T_k функций и выборе энергетического пространства для аппроксимирующих задач, с одной стороны, дающих возможность дважды дифференцировать суперпозиции этих новых функций с решениями, оставаясь в выбранном энергетическом пространстве, а с другой стороны, позволяющих при использовании данных суперпозиций в качестве пробных функций приемлемым образом учитывать в соответствующих интегральных тождествах слагаемые, связанные с их вторыми производными. Подходящие замены стандартных срезок и энергетическое пространство для аппроксимирующих задач в работе найдены (см. § 2 и § 7). С их помощью установлены нужные оценки решений аппроксимирующих задач и в конечном счете доказаны теоремы существования и единственности энтропийных решений исследуемой задачи.

Перейдем к исходным предположениям работы и используемым обозначениям.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Через Λ обозначим множество всех n -мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$. Будем использовать еще такие обозначения: $\mathbb{R}^{n,2}$ – пространство всех отображений $\xi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$; если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеет место $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

Пусть $p, q \in \mathbb{R}$, причем

$$1 < p < \frac{n}{2}, \quad (1.1)$$

$$2p < q < n. \quad (1.2)$$

Пусть, далее, $c_1, c_2 > 0$, g_1, g_2 – неотрицательные функции на Ω , $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, и пусть $A_\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Каратеодори для любого $\alpha \in \Lambda$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \xi)|^{p/(p-1)} \\ & \leq c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \xi) \xi_{\alpha} \geq c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_{\alpha}|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_{\alpha}|^p \right\} - g_2(x). \quad (1.4)$$

Кроме того, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_{\alpha}(x, \xi) - A_{\alpha}(x, \xi')] (\xi_{\alpha} - \xi'_{\alpha}) > 0. \quad (1.5)$$

Пусть еще $F: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Каратеодори. В работе изучается следующая задача:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u) = F(x, u) \quad \text{в } \Omega, \quad (1.6)$$

$$D^{\alpha} u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1.7)$$

Здесь мы ограничимся только этой формальной постановкой исследуемой задачи. Точные определения ее решений будут даны в основном содержании работы. В теоремах существования и единственности решений появятся дополнительные условия на функцию F . Они допускают произвольный рост $F(x, u)$ по второй переменной, а при фиксированном значении этой переменной соответствующая функция принадлежит классу $L^1(\Omega)$.

Коснемся вкратце соображений, которыми вызваны условия на числа p и q . Условие (1.1) – одно из возможных для p . Введение числа q с ограничением (1.2) объясняется тем, что при условии (1.1) подходящим энергетическим пространством для задач, аппроксимирующих задачу (1.6), (1.7), является пространство $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ (см. §2). Этим же продиктованы и условия (1.3), (1.4) на коэффициенты A_{α} .

В случае $p > n/2$ разрешимость задачи (1.6), (1.7) при соответствующих условиях на A_{α} и тех же условиях на F , что и в настоящей работе, может быть установлена в пространстве $\overset{\circ}{W}^{2,p}(\Omega)$ на основе известных результатов теории монотонных операторов [1]. Это вытекает из ограниченности вложения $\overset{\circ}{W}^{2,p}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $n < 2p$. Случай $p = n/2$ требует отдельного изучения.

Отметим, что класс нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка с условиями на коэффициенты типа (1.3), (1.4), но с правыми частями, укладывающимися в обычные рамки теории монотонных операторов, был введен в статье [12], посвященной исследованию регулярности решений таких уравнений.

Структура настоящей работы такова. В §2 вводится пространство $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, в дальнейшем играющее роль энергетического пространства для задач, аппроксимирующих задачу (1.6), (1.7). Затем с помощью специальной последовательности функций $h_k \in C^2(\mathbb{R})$ вводится множество функций $\overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, более широкое, чем пространство $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, и содержащее даже несуммируемые локально функции. Для функций $u \in \overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ определяются “производные” $\delta^{\alpha} u$ первого и второго порядков, совпадающие с обычными обобщенными производными в случае $u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

В § 3 дается понятие энтропийного решения задачи (1.6), (1.7) и устанавливаются некоторые важные свойства таких решений. Само энтропийное решение является по определению элементом множества $\overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

§ 4 посвящен получению одной интегральной оценки для “производных” энтропийного решения, играющей существенную роль в доказательстве его единственности.

В § 5 вводится понятие H -решения задачи (1.6), (1.7) и устанавливается результат о том, что энтропийное решение задачи (1.6), (1.7) является и H -решением этой задачи.

Теорема единственности энтропийного решения доказывается в § 6, а теоремы существования H -решения и энтропийного решения устанавливаются в § 7 работы.

Вопросы о принадлежности энтропийного решения соболевским пространствам и существовании так называемых W -решений задачи (1.6), (1.7) исследуются в § 8.

Отметим, что специфика определения энтропийного решения рассматриваемой задачи состоит, аналогично соответствующему определению из [4] в случае уравнений второго порядка, в требовании выполнения для функции, называемой энтропийным решением, некоторого семейства интегральных неравенств, связанных с уравнением (1.6) и зависящих от произвольных $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$ (см. определение 3.1). Это семейство неравенств является основой для получения свойств энтропийного решения, изложенных в работе, в частности, для доказательства важных результатов о единственности энтропийного решения и о том, что такое решение является H -решением, т.е. решением в смысле интегрального тождества.

Отметим еще, что одно из отличий нашего определения энтропийного решения от соответствующего определения из [4] заключается в присутствии в правой части требуемых интегральных неравенств дополнительного слагаемого, зависящего от нормы функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ в некотором соболевском пространстве и степени числа $k \in \mathbb{N}$ с отрицательным показателем. Коротко говоря, наличие такого добавочного члена связано с вопросом о существовании решений и является отражением существенных особенностей уравнений высших порядков по сравнению с уравнениями второго порядка.

Основные результаты работы анонсированы в статье [13].

§ 2. Множество функций $\overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

Через $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим множество всех функций из $W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим замыкание в $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Будем использовать еще такие обозначения: если $t \in [1, +\infty]$, то $|\cdot|_t$ – норма в $L^t(\Omega)$; если $t \in [1, n)$, то $t^* = \frac{nt}{n-t}$.

Как известно (см., например, [14, гл.7]), $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$ и существует зависящая только от n и q положительная постоянная c' такая, что для любой функции

$$u \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$$

$$|u|_{q^*} \leq c' \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|_q. \quad (2.1)$$

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ ψ_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\psi_k(s) = s - s^{k+2} + \frac{k+1}{k+3} s^{k+3}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Определим теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию $h_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$h_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ \left[\psi_k\left(\frac{|s|-k}{k}\right) + 1 \right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } k < |s| < 2k, \\ 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| \geq 2k. \end{cases}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $h_k \in C^2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$|h_k| \leq 2k \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$0 \leq h'_k \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$|h''_k| \leq 3 \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $k, j \in \mathbb{N}$, причем $j \geq 2k$. Тогда для любого $s \in \mathbb{R}$

$$h_k(h_j(s)) = h_k(s). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Если $|s| \leq j$, то в силу определения функции h_j имеем $h_j(s) = s$ и, следовательно, равенство (2.5) справедливо. Если же $|s| > j$, то в силу свойств функции h_j имеем $|h_j(s)| > 2k$ и, следовательно, согласно определению функции h_k справедливо равенство $h_k(h_j(s)) = 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} h_j(s)$, которое вместе с равенствами $h_k(s) = 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} s$ и $\operatorname{sign} h_j(s) = \operatorname{sign} s$ приводит к (2.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы предложения:

1) для любого мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(u) D^\alpha u \quad \text{н.в. на } \Omega;$$

2) для любого мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$|D^\alpha h_k(u) - h'_k(u) D^\alpha u| \leq |h''_k(u)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 \quad \text{н.в. на } \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для α с $|\alpha| = 1$

$$w_\alpha = h'_k(u)D^\alpha u, \quad (2.6)$$

а для α с $|\alpha| = 2$

$$w_\alpha = h'_k(u)D^\alpha u + h''_k(u)D^{\alpha'}uD^{\alpha''}u, \quad (2.7)$$

где $|\alpha'| = |\alpha''| = 1$, $\alpha' + \alpha'' = \alpha$.

Ясно, что

$$w_\alpha \in L^q(\Omega), \quad |\alpha| = 1; \quad w_\alpha \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| = 2. \quad (2.8)$$

Возьмем последовательность $\{u_i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $u_i \rightarrow u$ сильно в $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $u_i \rightarrow u$ п.в. на Ω . Так как $\{h_k(u_i)\} \subset C_0^2(\Omega)$, для α с $|\alpha| = 1$

$$D^\alpha h_k(u_i) = h'_k(u_i)D^\alpha u_i$$

и для α с $|\alpha| = 2$

$$D^\alpha h_k(u_i) = h'_k(u_i)D^\alpha u_i + h''_k(u_i)D^{\alpha'}u_iD^{\alpha''}u_i,$$

то, учитывая свойства функций h_k , получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |h_k(u_i) - h_k(u)|_q = 0, \quad (2.9)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha h_k(u_i) - w_\alpha|_q = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha h_k(u_i) - w_\alpha|_p = 0. \quad (2.10)$$

Используя эти предельные соотношения, обычным образом устанавливаем, что для любого $\alpha \in \Lambda$ существует обобщенная производная $D^\alpha h_k(u)$, $D^\alpha h_k(u) = w_\alpha$ п.в. на Ω . Тогда в силу (2.8)–(2.10) имеем $h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, а в силу (2.6), (2.7) справедливы предложения 1) и 2). Лемма доказана.

Через $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad h_k(u) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega).$$

Любая функция u из множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ измерима, что следует из измеримости функций $h_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, и поточечной сходимости $\{h_k(u)\}$ к u .

Имеют место такие свойства:

$$\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega), \quad (2.11)$$

$$\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) = \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \quad (2.12)$$

Свойство (2.11) вытекает непосредственно из леммы 2.2. Свойство (2.12) следует из (2.11) и того, что если $u \in L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq |u|_\infty$, то $h_k(u) = u$ п.в. на Ω .

Однако заметим, что среди элементов множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ имеются функции, не обладающие даже свойством локальной суммируемости. Действительно, если B – замкнутый шар, $B \subset \Omega$, x_0 – центр шара B , φ – функция класса $C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ на B , и v – функция на Ω такая, что $\forall x \in \Omega \setminus \{x_0\} \quad v(x) = |x - x_0|^{-n}\varphi$, то $v \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \setminus L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любых $k, j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2k$, и $\alpha \in \Lambda$

$$D^\alpha h_k(u) = D^\alpha h_j(u) \quad \text{н.в. на } \{|u| \leq k\}, \quad (2.13)$$

$$D^\alpha h_k(u) = 0 \quad \text{н.в. на } \{|u| \geq j\}. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k, j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2k$, и $\alpha \in \Lambda$. Согласно лемме 2.1 имеем

$$h_k(u) = h_k(h_j(u)). \quad (2.15)$$

Предположим, что $|\alpha| = 1$. Тогда из (2.15) и предложения 1) леммы 2.2 выводим, что

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(h_j(u)) D^\alpha h_j(u) \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Отсюда, учитывая, что

$$h'_k(h_j(u)) = 1 \quad \text{на } \{|u| \leq k\}, \quad (2.16)$$

$$h'_k(h_j(u)) = 0 \quad \text{на } \{|u| \geq j\}, \quad (2.17)$$

получаем (2.13) и (2.14).

Пусть теперь $|\alpha| = 2$. В силу (2.15) и предложения 2) леммы 2.2 имеем

$$|D^\alpha h_k(u) - h'_k(h_j(u)) D^\alpha h_j(u)| \leq |h''_k(h_j(u))| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta h_j(u)|^2 \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Отсюда, используя (2.16), (2.17) и то, что

$$h''_k(h_j(u)) = 0 \quad \text{на } \{|u| \leq k\} \cup \{|u| \geq j\},$$

снова получаем (2.13) и (2.14). Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u$ – функция на Ω такая, что

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_1(u) \quad \text{на } \{|u| \leq 1\}$$

и $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_{2^k}(u) \quad \text{на } \{2^{k-1} < |u| \leq 2^k\}.$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$. Тогда для любых $\alpha \in \Lambda$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_k(u) \quad \text{н.в. на } \{|u| \leq k\}. \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \Lambda$ и $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{j-1} \geq k$, и покажем, что

$$\delta^\alpha u = D^\alpha h_{2^j}(u) \quad \text{п.в. на } \{|u| \leq 2^j\}. \quad (2.19)$$

Действительно, в силу леммы 2.3 для любого $l \in \{0, 1, \dots, j\}$ имеем

$$D^\alpha h_{2^l}(u) = D^\alpha h_{2^j}(u) \quad \text{п.в. на } \{|u| \leq 2^l\}.$$

Отсюда, учитывая определение $\delta^\alpha u$ и тот факт, что

$$\{|u| \leq 2^j\} = \{|u| \leq 1\} \cup \bigcup_{l=1}^j \{2^{l-1} < |u| \leq 2^l\},$$

получаем (2.19). Так как $2^{j-1} \geq k$, то по лемме 2.3

$$D^\alpha h_k(u) = D^\alpha h_{2^j}(u) \quad \text{п.в. на } \{|u| \leq k\}. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.20) выводим (2.18). Лемма доказана.

Из леммы 2.4 следует, что если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$, то существуют конечные интегралы функций $|\delta^\alpha u|^q$, $|\alpha| = 1$, и $|\delta^\alpha u|^p$, $|\alpha| = 2$, по множеству $\{|u| \leq k\}$.

Кроме того, из лемм 2.4 и 2.2 вытекает, что если $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u = D^\alpha u$ п.в. на Ω .

Положим

$$r = \frac{n(q-1)}{n-1}, \quad c'' = 2^{q^*/q} (c'n)^{q^*} + 2n^q.$$

ЛЕММА 2.5. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $M \geq 1$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u| < k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq Mk. \quad (2.21)$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c'' M^{n/(n-q)} k^{-r^*}, \quad (2.22)$$

$$\text{meas}\left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-r}, \quad (2.23)$$

$$\text{meas}\left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-pr/q}. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Согласно (2.1) имеем

$$|h_k(u)|_{q^*} \leq c' \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha h_k(u)|_q. \quad (2.25)$$

Используя леммы 2.1–2.4 и (2.3), (2.21), для любого α с $|\alpha| = 1$ получаем

$$\begin{aligned} |D^\alpha h_k(u)|_q^q &= \int_{\{|u| < 2k\}} |D^\alpha h_k(u)|^q dx \leq \int_{\{|u| < 2k\}} |D^\alpha h_{2k}(u)|^q dx \\ &= \int_{\{|u| < 2k\}} |\delta^\alpha u|^q dx \leq 2Mk. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.25) и (2.26) выводим, что

$$|h_k(u)|_{q^*} \leq c'n(2Mk)^{1/q}. \quad (2.27)$$

С другой стороны, поскольку

$$|h_k(u)| \geq k \quad \text{на} \quad \{|u| \geq k\},$$

верно неравенство

$$k^{q^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq |h_k(u)|_{q^*}^{q^*}.$$

Отсюда и из (2.27) получаем

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq (c'' - 2n^q)M^{n/(n-q)}k^{-r^*}. \quad (2.28)$$

Следовательно, неравенство (2.22) справедливо.

Далее, пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, причем

$$M^{q/(n-q)}k^q \leq k_1^{1+r^*} \leq 2^{1+r^*}M^{q/(n-q)}k^q, \quad (2.29)$$

$$M^{q/(n-q)}k^p \leq k_2^{1+r^*} \leq 2^{1+r^*}M^{q/(n-q)}k^p. \quad (2.30)$$

Аналогично (2.28) имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq k_i\} \leq (c'' - 2n^q)M^{n/(n-q)}k_i^{-r^*}, \quad i = 1, 2. \quad (2.31)$$

Положим

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \geq \frac{k^q}{n^q}, \quad |u| < k_1 \right\}, \\ B_2 &= \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \geq \frac{k^p}{n^{2p}}, \quad |u| < k_2 \right\}. \end{aligned}$$

В силу (2.21)

$$\frac{k^q}{n^q} \text{meas } B_1 \leq \int_{\{|u| < k_1\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \right\} dx \leq M k_1, \quad (2.32)$$

$$\frac{k^p}{n^{2p}} \text{meas } B_2 \leq \int_{\{|u| < k_2\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq M k_2. \quad (2.33)$$

Теперь, используя (2.31), (2.32) и (2.29), получаем

$$\begin{aligned} \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} &\leq \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \geq \frac{k^q}{n^q} \right\} \\ &\leq \text{meas} \{|u| \geq k_1\} + \text{meas } B_1 \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-r}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя (2.31), (2.33) и (2.30), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u| \geq k \right\} &\leq \text{meas} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \geq \frac{k^p}{n^{2p}} \right\} \\ &\leq \text{meas} \{|u| \geq k_2\} + \text{meas } B_2 \leq c'' M^{n/(n-1)} k^{-pr/q}. \end{aligned}$$

Значит, неравенства (2.23) и (2.24) верны. Лемма доказана.

В заключение параграфа приведем один простой результат относительно суммируемости функций u , для которых имеется квалифицированная оценка мер множеств $\{|u| \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 2.6. Пусть u — измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\gamma > 0$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas} \{|u| \geq k\} \leq M k^{-\gamma}. \quad (2.34)$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$|u|_\lambda \leq 4^{1/(\gamma-\lambda)} [\text{meas } \Omega + 2^\gamma M]^{1/\lambda}. \quad (2.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\lambda \in (0, \gamma)$ и положим $\lambda_1 = \frac{2}{\gamma-\lambda}$. В силу (2.34) для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, имеем

$$\int_{\{k^{\lambda_1} \leq |u| < (k+1)^{\lambda_1}\}} |u|^\lambda dx \leq 2^{\lambda_1 \lambda + \gamma} M k^{-2}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства, заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$ и верна оценка (2.35). Лемма доказана.

Отметим, что свойство, представленное леммой 2.6, использовалось по существу, например, в [4].

Из лемм 2.5 и 2.6 вытекают определенные свойства суммируемости функций из множества $\mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющих для любого $k \in \mathbb{N}$ неравенству (2.21).

§ 3. Определение и некоторые свойства энтропийных решений

Введем обозначение: если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, то $\delta_2 u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ $(\delta_2 u(x))_\alpha = \delta^\alpha u(x)$.

Заметим, что если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \Lambda$, то в силу (1.3) и леммы 2.4 существуют конечные интегралы функций $A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u$ и $A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi$ по множеству $\{|u - \varphi| < 2k\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Энтропийным решением задачи (1.6), (1.7) будем называть функцию $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Далее через c_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, p, q, c_1, c_2, |g_1|_1, |g_2|_1$ и $\text{meas } \Omega$.

ЛЕММА 3.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq c_3 [F(x, u)|_1 + c + 1] k. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 3.1 существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} h'_k(u) dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u) dx + c. \quad (3.2)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Используя (1.4), (2.3) и тот факт, что $h'_k(u) = 1$ на $\{|u| \leq k\}$, получаем

$$\begin{aligned} & c_2 \int_{\{|u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ & \leq \int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} h'_k(u) dx + |g_2|_1. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.2), учитывая (2.2), выводим (3.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда:

- 1) для любого $\lambda \in (0, r^*)$ $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 2) для любых α , $|\alpha| = 1$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 3) для любых α , $|\alpha| = 2$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 4) для любых α , $|\alpha| = 1$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$;
- 5) для любых α , $|\alpha| = 2$, $u \in L^\lambda(\Omega)$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$;
- 6) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1)–3) следуют из лемм 3.1, 2.5 и 2.6.

Далее, для α с $|\alpha| = 1$ и $\lambda \in (0, \frac{r}{q-1})$ в силу (1.3) имеем

$$|A_\alpha(x, \delta_2 u)|^\lambda \leq (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^{\lambda(q-1)} + (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=2} |\delta^\beta u|^{\lambda p(q-1)/q} + g_1 + 1 \quad (3.3)$$

п.в. на Ω .

Из (3.3), учитывая, что $\lambda(q-1) < r$, $\lambda p \frac{q-1}{q} < \frac{p}{q}r$, и используя утверждения 2), 3), выводим, что $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 4) справедливо.

Аналогично, для α с $|\alpha| = 2$ и $\lambda \in (0, \frac{pr}{q(p-1)})$ в силу (1.3) имеем

$$|A_\alpha(x, \delta_2 u)|^\lambda \leq (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^{\lambda q(p-1)/p} + (c_1 + 1) \sum_{|\beta|=2} |\delta^\beta u|^{\lambda(p-1)} + g_1 + 1 \quad (3.4)$$

п.в. на Ω .

Из (3.4), учитывая, что $\lambda q \frac{p-1}{p} < r$, $\lambda(p-1) < \frac{p}{q}r$, и используя утверждения 2), 3), выводим, что $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 5) справедливо.

Наконец, замечая, что $\frac{r}{q-1} > 1$ и $\frac{pr}{q(p-1)} > 1$, из утверждений 4) и 5) выводим утверждение 6). Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\{|u-\varphi| < k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} dx - \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 3.1 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\varphi| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b k^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и положим

$$a_1 = \max_{\Omega} \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha \varphi|, \quad a_2 = c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b.$$

Положим еще для любого $k \in \mathbb{N}$

$$E_k = \{k \leq |u - \varphi| < 2k\}.$$

Так как для $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2|\varphi|_\infty$, имеем $E_k \subset \{|u| \geq k/2\}$, то из лемм 3.1 и 2.5 получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{meas } E_k = 0. \quad (3.7)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Из (3.6), используя (2.3) и тот факт, что $h'_k(u - \varphi) = 1$ на $\{|u - \varphi| < k\}$, выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi| < k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} dx - \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + I_k \\ & \leq a_1 \int_{E_k} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} dx + a_2 k^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$I_k = \int_{E_k} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} h'_k(u - \varphi) dx.$$

В силу (1.4) и (2.3) имеем

$$I_k \geq - \int_{E_k} g_2 dx.$$

Из этого неравенства и (3.8) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi| < k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} dx - \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx \\ & \leq a_1 \int_{E_k} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} dx + \int_{E_k} g_2 dx + a_2 k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (3.7) и утверждение 6) леммы 3.2, получаем (3.5). Предложение доказано.

ЛЕММА 3.3. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u - \varphi| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b k^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для любых $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$I_k(\varphi) = \int_{\{|u-\varphi| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx,$$

$$J_k(\varphi) = \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx.$$

В силу определения 3.1 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$I_k(\varphi) \leq J_k(\varphi) + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b k^{-\gamma}. \quad (3.10)$$

Зафиксируем теперь произвольные $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно убедиться в том, что существует последовательность $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ со свойствами:

$$\varphi_j \rightarrow \varphi \quad \text{сильно в } W_{2,p}^{1,q}(\Omega), \quad (3.11)$$

$$\varphi_j \rightarrow \varphi \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad (3.12)$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad |\varphi_j| \leq |\varphi|_\infty + 1 \quad \text{на } \Omega. \quad (3.13)$$

В силу (3.10) для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$I_k(\varphi_j) \leq J_k(\varphi_j) + c \left[1 + \|\varphi_j\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b k^{-\gamma}. \quad (3.14)$$

Свойства (3.11), (3.12) позволяют заключить, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} J_k(\varphi_j) = J_k(\varphi), \quad (3.15)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{W^{1,b}(\Omega)} = \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}. \quad (3.16)$$

Покажем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_k(\varphi_j) = I_k(\varphi). \quad (3.17)$$

Положим $E_k = \{|u| \leq 2k + |\varphi|_\infty + 1\}$, $\Phi = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi)$, и пусть для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\Phi_j = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha \varphi - \delta^\alpha \varphi_j).$$

В силу (1.3) и леммы 2.4 функции Φ , Φ_j интегрируемы на множестве E_k , причем из (3.11) следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_k} |\Phi_j| dx = 0. \quad (3.18)$$

Используя (3.13) и свойства функции h_k , получаем, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$|I_k(\varphi_j) - I_k(\varphi)| \leq \int_{E_k} |\Phi| |h'_k(u - \varphi_j) - h'_k(u - \varphi)| dx + \int_{E_k} |\Phi_j| dx.$$

Отсюда, учитывая (3.12) и (3.18), выводим (3.17). В свою очередь, из (3.14)–(3.17) выводим, что

$$I_k(\varphi) \leq J_k(\varphi) + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b k^{-\gamma}.$$

Значит, неравенство (3.9) имеет место. Лемма доказана.

§ 4. Одна априорная оценка для энтропийных решений

ЛЕММА 4.1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0, 1]$. Тогда:

- 1) для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leq k(1 + \tau)$, имеем $|h_k''(s)| \leq 6k\tau^k$;
- 2) для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| \geq k(1 + \tau)$, имеем $|h_k''(s)| \leq 3\tau^{-1}(1 - h_k'(s))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения функции ψ_k для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$\psi_k''(s) = (k+1)(k+2)(s-1)s^k.$$

Следовательно, $\forall s \in [0, \tau]$

$$|\psi_k''(s)| \leq 6k^2\tau^k.$$

Отсюда и из определения функции h_k вытекает справедливость утверждения 1).

Далее, в силу определения функции ψ_k для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$\frac{1}{k}|\psi_k''(s)| - 3\tau^{-1}(1 - \psi_k'(s)) \leq 3(k+1)|s-1||s|^k - 3\tau^{-1}s^{k+1}[(k+1)(1-s) + 1].$$

Тогда $\forall s \in [\tau, 1]$

$$\frac{1}{k}|\psi_k''(s)| \leq 3\tau^{-1}(1 - \psi_k'(s)).$$

Отсюда и из определения функции h_k вытекает справедливость утверждения 2).

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $u \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} c_4 \int_{\{k \leq |u| \leq k+m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ \leq m \int_{\{|u| \geq k/4\}} \{ |F(x, u)| + g_1 + g_2 \} dx + [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1} \\ + c \left[1 + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.3 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-\varphi| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)(\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_m(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi) dx + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Зафиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$. Положим $\psi = h_k(u)$. Ясно, что

$$\psi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \quad (4.3)$$

Учитывая (2.2) и то, что $\psi = u$ на $\{|u| \leq k\}$, получаем

$$\int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \psi) dx \leq 2m \int_{\{|u| > k\}} |F(x, u)| dx. \quad (4.4)$$

Кроме того, в силу (2.3) и лемм 2.1–2.4 имеем

$$\|\psi\|_{W^{1,b}(\Omega)} \leq |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b. \quad (4.5)$$

Используя (4.3)–(4.5), из (4.2) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\psi| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \psi) \right\} h'_m(u - \psi) dx \\ & \leq 2m \int_{\{|u| > k\}} |F(x, u)| dx + c \left[1 + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Заметим еще, что в силу (4.2), (1.4), (2.2), (2.3) и леммы 2.5 справедливы неравенства

$$\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \leq c_5 [|F(x, u)|_1 + c + 1] k, \quad (4.7)$$

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_6 [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*}. \quad (4.8)$$

Положим

$$\sigma = (r^* - 1) \frac{q - 2p}{qp}, \quad \theta_1 = h'_k(u), \quad \theta_2 = |h''_k(u)|.$$

Очевидно, что

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0 \quad \text{на} \quad \{|u| \leq k\}. \quad (4.9)$$

Из леммы 4.1 вытекает, что

$$\theta_2 \leq 6k^{1-\sigma k} \quad \text{на} \quad \{k < |u| < k(1 + k^{-\sigma})\}, \quad (4.10)$$

$$\theta_2 \leq 3k^\sigma (1 - \theta_1) \quad \text{на} \quad \{|u| \geq k(1 + k^{-\sigma})\}. \quad (4.11)$$

Кроме того, в силу (2.2) и лемм 2.1, 2.2, 2.4 для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем

$$|\delta^\alpha \psi - \theta_1 \delta^\alpha u| \leq (|\alpha| - 1) \theta_2 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п.в. на} \quad \{|u - \psi| < 2m\}. \quad (4.12)$$

Обозначим через $I_{k,m}$ левую часть неравенства (4.6) и положим

$$E'_{k,m} = \{|u - \psi| < 2m\} \cap \{|u| \geq k(1 + k^{-\sigma})\},$$

$$E''_{k,m} = \{|u - \psi| < 2m\} \cap \{|u| > k\},$$

$$I'_{k,m} = \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx,$$

$$I''_{k,m} = \int_{E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \psi) dx.$$

Используя (1.4), (2.3), (4.9) и (4.12), получаем

$$\begin{aligned}
I_{k,m} &= \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
&\quad + \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\theta_1 \delta^\alpha u - \delta^\alpha \psi) \right\} h'_m(u - \psi) dx \\
&\geq c_2 \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
&\quad - \int_{\{|u-\psi|<2m\}} g_2 (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
&\quad - \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \psi) dx \\
&\geq c_2 I'_{k,m} - I''_{k,m} - \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_2 I'_{k,m} \leq I_{k,m} + I''_{k,m} + \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx. \quad (4.13)$$

Оценим $I''_{k,m}$. В силу (4.10) и (4.11) имеем

$$\begin{aligned}
I''_{k,m} &\leq \int_{\{k < |u| < k(1+k^{-\sigma})\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 dx \\
&\quad + \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \psi) dx \\
&\leq 6k^{1-\sigma k} \int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx \\
&\quad + 3k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Используя равенство

$$\frac{p-1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{q-2p}{qp} = 1, \quad (4.15)$$

неравенство Гёльдера, (1.3) и (4.7), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx \\
& \leq n^3 (1 + \text{meas } \Omega) \left[\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{p/(p-1)} \right\} \right]^{(p-1)/p} \\
& \quad \times \left[\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q \right\} dx \right]^{2/q} \\
& \leq c_7 \left[\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx + 1 \right] \\
& \leq c_8 [F(x, u)|_1 + c + 1] k.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Далее положим

$$c_9 = \frac{c_2}{6} [c_1 n^{2p/(p-1)} + n^{q/2}]^{-1}.$$

Используя (4.15) и неравенство Юнга, находим, что на Ω

$$\begin{aligned}
& k^\sigma \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \leq c_9 \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\}^{p/(p-1)} \\
& \quad + c_9 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\}^{q/2} + c_9 (k^\sigma / c_9)^{qp/(q-2p)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.3) выводим, что п.в. на Ω

$$\begin{aligned}
& k^\sigma \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \leq \\
& \leq \frac{c_2}{6} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} + \frac{c_2}{c_1} g_1 + c_{10} k^{\sigma qp/(q-2p)}.
\end{aligned}$$

Тогда, учитывая (4.8), получаем

$$\begin{aligned}
& k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) dx \\
& \leq \frac{c_2}{6} I'_{k,m} + \frac{c_2}{c_1} \int_{E'_{k,m}} g_1 dx + c_{10} k^{\sigma qp/(q-2p)} \text{meas } E'_{k,m} \\
& \leq \frac{c_2}{6} I'_{k,m} + \frac{c_2}{c_1} \int_{\{|u| > k\}} g_1 dx + c_6 c_{10} [F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Из (4.14), (4.16) и (4.17) вытекает, что

$$I''_{k,m} \leq \frac{c_2}{2} I'_{k,m} + 3 \frac{c_2}{c_1} \int_{\{|u| > k\}} g_1 dx + c_{11} [F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} (k^{2-\sigma k} + k^{-1}).$$

Отсюда и из (4.13), учитывая, что

$$k^{2-\sigma k} \leq \left(\frac{27}{\sigma^3} + 1 \right) k^{-1},$$

выводим неравенство

$$c_2 I'_{k,m} \leq 2I_{k,m} + c_{12} \int_{\{|u|>k\}} (g_1 + g_2) dx + c_{13} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}. \quad (4.18)$$

Заметим теперь, что

$$\{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\} \subset \{|u - \psi| < m\}. \quad (4.19)$$

Это легко показать, принимая во внимание, что $m \geq 4$, и согласно определению функции h_k для $s \in \mathbb{R}$, $|s| \geq 2k$, что $h_k(s) = 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} s$.

Из включения (4.19) следует, что

$$\begin{aligned} \{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\} &\subset E'_{k,m}, \\ (1 - \theta_1) h'_m(u - \psi) &= 1 \quad \text{на} \quad \{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$I'_{k,m} \geq \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx. \quad (4.20)$$

Из (4.20), (4.18) и (4.6) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} c_2 \int_{\{2k \leq |u| \leq 2k + m/2\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ \leq (c_{12} + 4)m \int_{\{|u|>k\}} \{|F(x, u)| + g_1 + g_2\} dx \\ + c_{13} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1} + 2c \left[1 + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Поскольку это неравенство имеет место для любых $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, легко установить, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, и $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (4.1). Лемма доказана.

§ 5. Понятие H -решения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. H -решением задачи (1.6), (1.7) будем называть функцию $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$ для любого $\alpha \in \Lambda$;
- 3) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_\Omega F(x, u) \varphi dx.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда u является H -решением этой задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 3.1 имеем $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $F(x, u) \in L^1(\Omega)$, а согласно утверждению 6) леммы 3.2 для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$. Кроме того, в силу леммы 3.3 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\psi \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\psi|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \psi) \right\} h'_m(u - \psi) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \psi) dx + c [1 + \|\psi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq |\varphi|_\infty$, и положим для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_k = h_k(u) - \varphi.$$

Теперь, зафиксировав $k \in \mathbb{N}$, в силу (5.1) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi_k) \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx \\ & \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx + c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Заметим еще, что в силу (5.1), (1.4), (2.2), (2.3) и леммы 2.5 справедливы неравенства (4.7) и (4.8).

Определим функции θ_1 и θ_2 так же, как и в доказательстве леммы 4.2. Тогда имеют место свойства (4.9)–(4.11), и, аналогично (4.12), для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем

$$|\delta^\alpha h_k(u) - \theta_1 \delta^\alpha u| \leq (|\alpha| - 1) \theta_2 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п.в. на } \{|u - \varphi_k| < 2m\}. \quad (5.3)$$

Обозначим через $I_{k,m}$ левую часть неравенства (5.2) и положим

$$\begin{aligned} E'_{k,m} &= \{|u - \varphi_k| < 2m\} \cap \{|u| \geq k(1 + k^{-\sigma})\}, \\ E''_{k,m} &= \{|u - \varphi_k| < 2m\} \cap \{|u| > k\}, \\ J_{k,m} &= \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx, \\ I'_{k,m} &= \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx, \\ I''_{k,m} &= \int_{E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} \theta_2 h'_m(u - \varphi_k) dx. \end{aligned}$$

Используя (1.4), (2.3), (4.9) и (5.3), получаем

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= J_{k,m} + \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx \\ &\quad + \int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\theta_1 \delta^\alpha u - \delta^\alpha h_k(u)) \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx \\ &\geq J_{k,m} + c_2 I'_{k,m} - I''_{k,m} - \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_{k,m} + c_2 I'_{k,m} \leq I_{k,m} + I''_{k,m} + \int_{\{|u|>k\}} g_2 dx. \quad (5.4)$$

Оценим $I''_{k,m}$. В силу (4.10), (4.11) имеем

$$\begin{aligned} I''_{k,m} &\leq 6k^{1-\sigma} \int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx \\ &\quad + 3k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Используя (4.15), неравенство Гёльдера и (1.3), (4.7), находим

$$\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} dx \leq c_8 [F(x, u)|_1 + c + 1] k. \quad (5.6)$$

Аналогично (4.17) устанавливаем, что

$$\begin{aligned} &k^\sigma \int_{E'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^2 \right\} (1 - \theta_1) h'_m(u - \varphi_k) dx \\ &\leq \frac{c_2}{6} I'_{k,m} + \frac{c_2}{c_1} \int_{\{|u|>k\}} g_1 dx + c_6 c_{10} [F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.5)–(5.7) вытекает, что

$$I''_{k,m} \leq \frac{c_2}{2} I'_{k,m} + 3 \frac{c_2}{c_1} \int_{\{|u|>k\}} g_1 dx + c_{14} [F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)} k^{-1}.$$

Отсюда и из (5.4), (5.2) следует неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u-\varphi_k|<2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} h'_m(u - \varphi_k) dx \\ &\leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx + c_{15} \int_{\{|u|>k\}} (g_1 + g_2) dx \\ &\quad + C(u) k^{-1} + C(u, \varphi) m^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$C(u) = c_{14} [|F(x, u)|_1 + c + 1]^{n/(n-q)},$$

$$C(u, \varphi) = c \left[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)} + |u|_b + \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|_b \right]^b.$$

В свою очередь, из (5.8) выводим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} \varphi \right\} dx &\leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx \\ &+ \int_{\{|u - \varphi_k| \geq 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} \varphi \right\} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_{\alpha}(x, \delta_2 u)| |\delta^{\alpha} \varphi| \right\} \{1 - h'_m(u - \varphi_k)\} dx \\ &+ c_{15} \int_{\{|u| > k\}} (g_1 + g_2) dx + C(u)k^{-1} + C(u, \varphi)m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Итак, для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (5.9). Рассмотрим поведение отдельных слагаемых в правой части этого неравенства при $k \rightarrow \infty$. Так как $m \geq |\varphi|_{\infty}$ и $u - \varphi_k \rightarrow \varphi$ на Ω , то $h_m(u - \varphi_k) \rightarrow \varphi$, $h'_m(u - \varphi_k) \rightarrow 1$ на Ω . Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - \varphi_k) dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx, \quad (5.10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_{\alpha}(x, \delta_2 u)| |\delta^{\alpha} \varphi| \right\} \{1 - h'_m(u - \varphi_k)\} dx = 0. \quad (5.11)$$

Кроме того, в силу (4.8)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{|u| > k\}} (g_1 + g_2) dx = 0. \quad (5.12)$$

Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{meas}\{|u - \varphi_k| \geq 2m\} = 0. \quad (5.13)$$

Действительно, поскольку $|\varphi|_{\infty} \leq m$, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\{|u - \varphi_k| \geq 2m\} \subset \{|u| > k\}. \quad (5.14)$$

Ясно, что $\text{meas}\{|u| > k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (5.14) выводим (5.13). Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{|u - \varphi_k| \geq 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} \varphi \right\} dx = 0. \quad (5.15)$$

Теперь, используя (5.10)–(5.12), (5.15) и переходя в неравенстве (5.9) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} \varphi \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx + C(u, \varphi)m^{-\gamma}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, выводим, что

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} \varphi \right\} dx \leq \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

А так как в этом неравенстве φ – произвольная функция из $C_0^{\infty}(\Omega)$, то для любой функции $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Таким образом, функция u обладает всеми свойствами, позволяющими утверждать, что она является H -решением задачи (1.6), (1.7). Теорема доказана.

§ 6. Единственность энтропийного решения

Доказательству теоремы единственности энтропийного решения задачи (1.6), (1.7) предположим ряд вспомогательных результатов.

ЛЕММА 6.1. Пусть u, v – энтропийные решения задачи (1.6), (1.7), причем для любого α , $|\alpha| = 1$, $\delta^{\alpha} u = \delta^{\alpha} v$ п.в. на Ω . Тогда $u = v$ п.в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} \Phi &= |F(x, u)| + |F(x, v)| + g_1 + g_2, \\ C_0 &= |F(x, u)|_1 + |F(x, v)|_1 + 1. \end{aligned}$$

В силу леммы 4.2 существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5m$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & c_4 \int_{\{k-m \leq |u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^{\alpha} u|^q \right\} dx + c_4 \int_{\{k-m \leq |v| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^{\alpha} v|^q \right\} dx \\ & \leq m \int_{\{|u| \geq k/5\}} \Phi dx + m \int_{\{|v| \geq k/5\}} \Phi dx + 3[C_0 + c]^{n/(n-q)} k^{-1} \\ & \quad + 2c(1 + \text{meas } \Omega)^b \left[1 + |u|_b + |v|_b + \sum_{|\alpha|=1} (|\delta^{\alpha} u|_b + |\delta^{\alpha} v|_b) \right]^b m^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ T_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Поскольку $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $h_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$. Тогда, учитывая, что для $k \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{R}$

$$T_k(s) = T_k(h_k(s)),$$

получаем

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad T_k(u) \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega).$$

Аналогичное верно и относительно функции v .

Зафиксируем теперь $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5m$. Поскольку $T_k(u) = h_k(u)$ на $\{|u| \leq k\}$, то в силу леммы 2.4 для любого α , $|\alpha| = 1$, имеем

$$D^\alpha T_k(u) = \delta^\alpha u \quad \text{п.в. на } \{|u| \leq k\} \quad (6.2)$$

и аналогично

$$D^\alpha T_k(v) = \delta^\alpha v \quad \text{п.в. на } \{|v| \leq k\}. \quad (6.3)$$

Ясно также, что для любого α , $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha T_k(u) = 0 \quad \text{п.в. на } \{|u| > k\}, \quad (6.4)$$

$$D^\alpha T_k(v) = 0 \quad \text{п.в. на } \{|v| > k\}. \quad (6.5)$$

Положим

$$w = T_m(T_k(u) - T_k(v)).$$

Поскольку $w \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$, в силу (2.1) имеем

$$\int_{\Omega} |w|^{q^*} dx \leq (c'n)^{q^*} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha w|^q dx \right\}^{q^*/q}. \quad (6.6)$$

Будем оценивать левую часть этого неравенства снизу, а его правую часть сверху. Для этого введем множества

$$\begin{aligned} E_{m,k}^{(1)} &= \{|u - v| \leq m, |u| \leq k, |v| \leq k\}, \\ E_{m,k}^{(2)} &= \{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m, |u| > k, |v| > k\}, \\ E_{m,k}^{(3)} &= \{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m, |u| \leq k, |v| > k\}, \\ E_{m,k}^{(4)} &= \{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m, |u| > k, |v| \leq k\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\{|T_k(u) - T_k(v)| \leq m\} = \bigcup_{i=1}^4 E_{m,k}^{(i)}$$

и

$$\int_{E_{m,k}^{(1)}} |u - v|^{q^*} dx \leq \int_{\Omega} |w|^{q^*} dx. \quad (6.7)$$

Заметим еще, что

$$E_{m,k}^{(3)} \subset \{k - m \leq |u| \leq k\}, \quad (6.8)$$

$$E_{m,k}^{(4)} \subset \{k - m \leq |v| \leq k\}. \quad (6.9)$$

Далее, зафиксировав α , $|\alpha| = 1$, получаем

$$\int_{\Omega} |D^\alpha w|^q dx = \sum_{i=1}^4 \int_{E_{m,k}^{(i)}} |D^\alpha T_k(u) - D^\alpha T_k(v)|^q dx.$$

Отсюда, используя условие леммы, (6.2)–(6.5) и (6.8), (6.9), выводим

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha} w|^q dx \leq \int_{\{k-m \leq |u| \leq k\}} |\delta^{\alpha} u|^q dx + \int_{\{k-m \leq |v| \leq k\}} |\delta^{\alpha} v|^q dx.$$

Это неравенство вместе с неравенствами (6.6) и (6.7) приводит к заключению, что

$$\begin{aligned} \int_{E_{m,k}^{(1)}} |u - v|^{q^*} dx &\leq (c'n)^{q^*} \left[\int_{\{k-m \leq |u| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^{\alpha} u|^q \right\} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\{k-m \leq |v| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^{\alpha} v|^q \right\} dx \right]^{q^*/q}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Теперь, положив

$$C_1 = 3[C_0 + c]^{n/(n-q)} + 2c(1 + \text{meas } \Omega)^b \left[1 + |u|_b + |v|_b + \sum_{|\alpha|=1} (|\delta^{\alpha} u|_b + |\delta^{\alpha} v|_b) \right]^b,$$

из (6.10), (6.1) получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u-v| \leq m, |u| \leq k, |v| \leq k\}} |u - v|^{q^*} dx \\ &\leq c_{16} \left[m \int_{\{|u| \geq k/5\}} \Phi dx + m \int_{\{|v| \geq k/5\}} \Phi dx + C_1(k^{-1} + m^{-\gamma}) \right]^{q^*/q}. \end{aligned}$$

А поскольку это неравенство справедливо для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5m$, то, переходя в нем к пределу при $k \rightarrow \infty$, устанавливаем, что

$$\int_{\{|u-v| \leq m\}} |u - v|^{q^*} dx \leq c_{16} [C_1 m^{-\gamma}]^{q^*/q}. \quad (6.11)$$

При осуществлении этого предельного перехода мы воспользовались тем фактом, что для энтропийных решений u и v в силу лемм 3.1 и 2.5 $\text{meas}\{|u| \geq k\} \rightarrow 0$ и $\text{meas}\{|v| \geq k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Наконец, переходя в неравенстве (6.11) к пределу при $m \rightarrow \infty$, заключаем, что $u = v$ п.в. на Ω . Лемма доказана.

Далее понадобятся некоторые элементарные неравенства, связанные с функциями h_k и другими вспомогательными функциями.

ЛЕММА 6.2. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, причем $k \geq 4m$. Тогда для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| > k + 2m$, справедливо неравенство

$$|h_k(s)| > k + m. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathbb{R}$, $|s| > k + 2m$. Если $|s| \geq 2k$, то в силу определения функции h_k и неравенства $k \geq 4m$ имеем

$$|h_k(s)| = 2k \frac{k+2}{k+3} > k + m.$$

Пусть теперь $|s| < 2k$. Положив $s_1 = (|s| - k)/k$, из определения функции h_k получаем

$$|h_k(s)| = k\psi_k(s_1) + k \geq k\psi_k\left(\frac{2m}{k}\right) + k. \quad (6.13)$$

Но в силу определения функции ψ_k и неравенства $k \geq 4m$ имеем

$$\psi_k\left(\frac{2m}{k}\right) > \frac{2m}{k} - \left(\frac{2m}{k}\right)^{k+2} > \frac{m}{k}.$$

Отсюда и из (6.13) выводим (6.12). Лемма доказана.

Пусть a – неубывающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $a(s) = s$ для $s \leq -1$, $a(s) = 0$ для $s \geq 0$, и пусть c_0 – положительная постоянная такая, что $a' \leq c_0$, $|a''| \leq c_0$ на $\mathbb{R}$.

Определим теперь для любых $k, m \in \mathbb{N}$ функцию $a_{k,m}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$a_{k,m}(s) = \left[ma\left(\frac{|s| - k - m}{m}\right) + k + m \right] \operatorname{sign} s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 6.3. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда $a_{k,m} \in C^\infty(\mathbb{R})$ и имеют место следующие свойства:

$$\text{если } |s| \leq k, \quad \text{то } a_{k,m}(s) = s, \quad (6.14)$$

$$\text{если } |s| \geq k + m, \quad \text{то } a_{k,m}(s) = (k + m) \operatorname{sign} s, \quad (6.15)$$

$$\text{если } k \leq |s| \leq k + m, \quad \text{то } |s| \leq \frac{k + m}{k} |a_{k,m}(s)|, \quad (6.16)$$

$$|a_{k,m}| \leq k + m \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (6.17)$$

$$0 \leq a'_{k,m} \leq c_0 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (6.18)$$

$$|a''_{k,m}| \leq \frac{c_0}{m} \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (6.19)$$

Все перечисленные в лемме свойства являются простыми следствиями определения функций $a_{k,m}$.

ЛЕММА 6.4. Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, причем $k \geq 5m$. Пусть $s, t \in \mathbb{R}$ и имеют место неравенства

$$|t| \geq k, \quad |h_k(t)| \leq k + m, \quad (6.20)$$

$$|s - a_{k,m}(h_k(t))| \leq 2m. \quad (6.21)$$

Тогда

$$|t| \leq k + 2m, \quad (6.22)$$

$$k - 4m \leq |s| \leq k + 3m. \quad (6.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (6.22) следует из леммы 6.2 и второго неравенства в (6.20). Далее, в силу (6.21) и (6.17) имеем

$$|s| \leq |s - a_{k,m}(h_k(t))| + |a_{k,m}(h_k(t))| \leq k + 3m. \quad (6.24)$$

Наконец, используя (6.20), (6.16), (6.21), (6.24) и неравенство $k \geq 5m$, получаем

$$\begin{aligned} k &\leq |h_k(t)| \leq \frac{k+m}{k} |a_{k,m}(h_k(t))| \leq \frac{k+m}{k} (2m + |s|) \\ &\leq |s| + \frac{m}{k} |s| + 2m \frac{k+m}{k} \leq |s| + 3m + 5m \frac{m}{k} \leq |s| + 4m. \end{aligned}$$

Следовательно, $|s| \geq k - 4m$. Отсюда и из (6.24) получаем (6.23). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ не возрастает на $\mathbb{R}$. Пусть u, v – энтропийные решения задачи (1.6), (1.7). Тогда $u = v$ п.в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для любых $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_{k,m} &= a_{k,m}(h_k(u)), \quad g_{k,m} = a_{k,m}(h_k(v)), \\ I_{k,m} &= \int_{\{k-4m \leq |u| \leq k+3m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx \\ &\quad + \int_{\{k-4m \leq |v| \leq k+3m\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha v|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha v|^p \right\} dx. \end{aligned}$$

В силу лемм 3.3 и 4.2 существуют $c > 0$, $\gamma > 0$ и последовательность $\{\sigma_k\}$ положительных чисел, сходящаяся к нулю, такие, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k > 5m$,

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u-g_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)(\delta^\alpha u - \delta^\alpha g_{k,m}) \right\} h'_m(u - g_{k,m}) dx \\ &\leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - g_{k,m}) dx + cm^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\{|v-f_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 v)(\delta^\alpha v - \delta^\alpha f_{k,m}) \right\} h'_m(v - f_{k,m}) dx \\ &\leq \int_{\Omega} F(x, v) h_m(v - f_{k,m}) dx + cm^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$I_{k,m} \leq m\sigma_k + cm^{-\gamma}. \quad (6.27)$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k > 5m$. Из (6.25) и (6.26) следует, что

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u-g_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u)(\delta^\alpha u - \delta^\alpha g_{k,m}) \right\} h'_m(u - g_{k,m}) dx \\ &\quad + \int_{\{|v-f_{k,m}| < 2m\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 v)(\delta^\alpha v - \delta^\alpha f_{k,m}) \right\} h'_m(v - f_{k,m}) dx \\ &\leq \int_{\Omega} F(x, u) h_m(u - g_{k,m}) dx + \int_{\Omega} F(x, v) h_m(v - f_{k,m}) dx + 2cm^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Обозначим через $I'_{k,m}$ и $I''_{k,m}$ соответственно первый и второй интегралы в левой части неравенства (6.28), а через $I'''_{k,m}$ обозначим правую часть этого неравенства. Тогда неравенство (6.28) принимает вид

$$I'_{k,m} + I''_{k,m} \leq I'''_{k,m}. \quad (6.29)$$

В силу (2.2) и (6.14) имеем

$$\begin{aligned} I'''_{k,m} &\leq \int_{\{|u| \leq k, |v| \leq k\}} [F(x, u) - F(x, v)] h_m(u - v) dx \\ &\quad + 2m \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} [|F(x, u)| + |F(x, v)|] dx + 2cm^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Заметим, что поскольку по условию теоремы для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ не возрастает на $\mathbb{R}$, то имеем

$$[F(x, u) - F(x, v)] h_m(u - v) \leq 0 \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Отсюда и из (6.30) получаем, что

$$I'''_{k,m} \leq 2m \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} [|F(x, u)| + |F(x, v)|] dx + 2cm^{-\gamma}. \quad (6.31)$$

Далее, положим

$$\begin{aligned} E_{k,m} &= \{|u - v| < 2m, |u| \leq k, |v| \leq k\}, \\ E'_{k,m} &= \{|u - g_{k,m}| < 2m, |v| > k\}, \\ E''_{k,m} &= \{|u - g_{k,m}| < 2m, |v| \leq k, |u| > k\}. \end{aligned}$$

Используя (1.4), (2.3) и то, что $g_{k,m} = v$ на $E_{k,m}$, $\forall \alpha \in \Lambda$ $\delta^\alpha g_{k,m} = \delta^\alpha v$ п.в. на $E_{k,m}$, устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} I'_{k,m} &\geq \int_{E_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) \right\} h'_m(u - v) dx \\ &\quad - \int_{E'_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\ &\quad - \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} g_2 dx. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Оценим второй интеграл в правой части этого неравенства. Положим

$$\begin{aligned} E'''_{k,m} &= E'_{k,m} \cap \{|h_k(v)| \leq k + m\}, \\ B'_{k,m} &= \{k - 4m \leq |u| \leq k + 3m\}, \quad B''_{k,m} = \{k - 4m \leq |v| \leq k + 3m\}. \end{aligned}$$

В силу леммы 6.4 имеем $E'''_{k,m} \subset B'_{k,m} \cap B''_{k,m}$. Используя (6.14), находим также, что $E'''_{k,m} \subset B'_{k,m} \cap B''_{k,m}$.

Заметим еще, что для любого $\alpha \in \Lambda$ $\delta^\alpha g_{k,m} = 0$ п.в. на $\{|h_k(v)| > k+m\}$. Учитывая эти свойства и используя числовое и интегральное неравенства Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{E'_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\
&= \int_{E'''_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\
&\quad + \int_{E'''_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\
&\leq \left[\int_{B'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{q/(q-1)} \right\} dx \right]^{(q-1)/q} \\
&\quad \times \left[\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha g_{k,m}|^q \right\} dx \right]^{1/q} \\
&\quad + \left[\int_{B'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{p/(p-1)} \right\} dx \right]^{(p-1)/p} \\
&\quad \times \left[\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha g_{k,m}|^p \right\} dx \right]^{1/p}. \tag{6.33}
\end{aligned}$$

В силу (1.3) имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{B'_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \delta_2 u)|^{p/(p-1)} \right\} dx \\
&\leq c_1 I_{k,m} + \int_{\{|u| \geq k/5\}} g_1 dx. \tag{6.34}
\end{aligned}$$

Используя (2.3), (2.4), (6.18), (6.19) и леммы 2.1, 2.2, 2.4, устанавливаем, что для любого α , $|\alpha| = 1$,

$$|\delta^\alpha g_{k,m}| \leq c_0 |\delta^\alpha v| \quad \text{п.в. на } \{|v| \leq 2k\};$$

для любого α , $|\alpha| = 2$,

$$|\delta^\alpha g_{k,m}| \leq c_0 |\delta^\alpha v| + 4c_0 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta v|^2 \quad \text{п.в. на } \{|v| \leq 2k\}.$$

Тогда

$$\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha g_{k,m}|^q \right\} dx \leq c_0^q I_{k,m}, \tag{6.35}$$

$$\int_{B''_{k,m}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha g_{k,m}|^p \right\} dx \leq (2c_0)^p I_{k,m} + c_{17} c_0^p I_{k,m}^{2p/q}. \tag{6.36}$$

Из (6.33)–(6.36) выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{E'_{k,m} \cup E''_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |A_\alpha(x, \delta_2 u)| |\delta^\alpha g_{k,m}| \right\} dx \\ & \leq c_{18} c_0^q [I_{k,m} + I_{k,m}^{2p/q}] + 2 \int_{\{|u| \geq k/5\}} g_1 dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.32) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) \right\} h'_m(u - v) dx \\ & \leq I'_{k,m} + c_{18} c_0^q [I_{k,m} + I_{k,m}^{2p/q}] \\ & \quad + 2 \int_{\{|u| \geq k/5\}} g_1 dx + \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} g_2 dx. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Поскольку функции u, v равноправны, аналогично (6.37) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{k,m}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 v) (\delta^\alpha v - \delta^\alpha u) \right\} h'_m(v - u) dx \\ & \leq I''_{k,m} + c_{18} c_0^q [I_{k,m} + I_{k,m}^{2p/q}] \\ & \quad + 2 \int_{\{|v| \geq k/5\}} g_1 dx + \int_{\{|u| \geq k\} \cup \{|v| \geq k\}} g_2 dx. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Складывая неравенства (6.37), (6.38), учитывая нечетность функции h_m и используя (1.5), (6.27), (6.29), (6.31), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u-v| \leq m, |u| \leq k, |v| \leq k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \delta_2 u) - A_\alpha(x, \delta_2 v)] (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) \right\} dx \\ & \leq 4m \int_{\{|u| \geq k/5\} \cup \{|v| \geq k/5\}} [|F(x, u)| + |F(x, v)| + g_1 + g_2] dx \\ & \quad + 2c_{18} c_0^q [m\sigma_k + cm^{-\gamma} + (m\sigma_k + cm^{-\gamma})^{2p/q}] + 2cm^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве сначала к пределу при $k \rightarrow \infty$, а затем к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учитывая (1.5), устанавливаем, что

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \delta_2 u) - A_\alpha(x, \delta_2 v)] (\delta^\alpha u - \delta^\alpha v) = 0 \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Отсюда и из (1.5) вытекает, что $\delta_2 u = \delta_2 v$ п.в. на Ω . Тогда в силу леммы 6.1 $u = v$ п.в. на Ω . Теорема доказана.

§ 7. Теоремы существования

В этом параграфе доказываются следующие основные результаты.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполняются условия:

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ не возрастает на $\mathbb{R}$;
 - 2) для любого $s \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot, s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$.
- Тогда существует H -решение задачи (1.6), (1.7).

Положим

$$p_1 = \frac{3n-2}{n+p-1}p.$$

В силу (1.1) имеем $p_1 \in (2p, n)$.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 7.1, и пусть $q > p_1$. Тогда существует энтропийное решение задачи (1.6), (1.7).

Общая часть доказательства теорем 7.1 и 7.2, с которой мы и начнем, связана с получением оценок для решений задач, аппроксимирующих задачу (1.6), (1.7).

Будем считать, что условия 1) и 2) теоремы 7.1 выполнены.

Положим $f = F(\cdot, 0)$ и определим для любого $l \in \mathbb{N}$ функцию $F_l: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$F_l(x, s) = h_l(f(x) - F(x, s)), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

В силу условия 1) теоремы 7.1 имеем: если $l \in \mathbb{N}$, то

$$\text{для почти всех } x \in \Omega \text{ функция } F_l(x, \cdot) \text{ не убывает на } \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Далее, в силу условия 2) теоремы 7.1 $f \in L^1(\Omega)$ и, следовательно, существует $\{f_l\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |f_l - f|_1 = 0, \quad (7.2)$$

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad |f_l|_1 \leq |f|_1 + 1. \quad (7.3)$$

Из (1.3)–(1.5), (7.1) и результатов [1] о разрешимости уравнений с монотонными операторами получаем: если $l \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_l \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такая, что $\forall v \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} v + F_l(x, u_l) v \right\} dx = \int_{\Omega} f_l v dx. \quad (7.4)$$

ЛЕММА 7.1. Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\int_{\{|u_l| \leq k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} u_l|^p \right\} dx \leq c_{19} [|f|_1 + 1] k, \quad (7.5)$$

$$\int_{\{|u_l| \geq k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq c_{20} [|f|_1 + 1]. \quad (7.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$a_1 = 4 - \frac{14}{3}e^{-1/2}, \quad a_2 = 4 - 5e^{-1/2}, \quad a_3 = \frac{1}{4} + \frac{61}{48}e^{-1/2}$$

и определим функцию $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\chi(s) = \begin{cases} s - a_1 s^3 + a_2 s^4, & \text{если } s \leq \frac{1}{2}, \\ a_3 - e^{-s}, & \text{если } s > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Определим теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию $\chi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\chi_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ \left[\chi\left(\frac{|s| - k}{k}\right) + 1 \right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем: $\chi_k \in C^2(\mathbb{R})$,

$$|\chi_k| \leq 3k \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (7.7)$$

$$0 < \chi'_k \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (7.8)$$

$$|\chi''_k| \leq \frac{8}{k} \chi'_k \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (7.9)$$

Зафиксируем произвольные $k, l \in \mathbb{N}$. Имеем $\chi_k(u_l) \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, причем для α с $|\alpha| = 1$ п.в. на Ω

$$D^\alpha \chi_k(u_l) = \chi'_k(u_l) D^\alpha u_l, \quad (7.10)$$

а для α с $|\alpha| = 2$ п.в. на Ω

$$|D^\alpha \chi_k(u_l) - \chi'_k(u_l) D^\alpha u_l| \leq |\chi''_k(u_l)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_l|^2. \quad (7.11)$$

Подставляя в (7.4) вместо v функцию $\chi_k(u_l)$, получаем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) D^\alpha \chi_k(u_l) \right\} dx + \int_{\Omega} F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) dx = \int_{\Omega} f_l \chi_k(u_l) dx. \quad (7.12)$$

Обозначим через $I_{k,l}$ первый интеграл в левой части неравенства (7.12) и положим

$$J_{k,l} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l|^p \right\} \chi'_k(u_l) dx.$$

Используя (1.4), (7.10) и (7.11), находим, что

$$\begin{aligned} I_{k,l} &\geq c_2 J_{k,l} - \int_{\Omega} g_2 \chi'_k(u_l) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^2 \right\} |\chi''_k(u_l)| dx. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Получим подходящую оценку для последнего интеграла в правой части неравенства (7.13). Обозначим этот интеграл через $J'_{k,l}$ и положим

$$c_{21} = \frac{c_2}{16} \left[c_1 n^{2p/(p-1)} + n^{q/2} \right]^{-1}.$$

Используя (4.15), неравенство Юнга и (1.3), устанавливаем, что п.в. на Ω

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^2 \right\} \\ & \leq \frac{c_2}{16} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l|^p \right\} + \frac{c_2}{16c_1} g_1 + c_{22}. \end{aligned}$$

Тогда, принимая во внимание (7.8), (7.9), получаем

$$J'_{k,l} \leq \frac{c_2}{2} J_{k,l} + \frac{c_2}{2c_1} |g_1|_1 + c_{22} \text{ meas } \Omega. \quad (7.14)$$

Из (7.13), (7.14) следует, что $I_{k,l} \geq \frac{c_2}{2} J_{k,l} - c_{23}$. Отсюда и из (7.12), учитывая (7.7), выводим неравенство

$$\frac{c_2}{2} J_{k,l} + \int_{\Omega} F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) dx \leq 3k |f|_1 + c_{23}. \quad (7.15)$$

В силу (7.1) и свойств функции χ_k имеем

$$\begin{aligned} F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) & \geq 0 & \text{п.в. на } \Omega, \\ F_l(x, u_l) \chi_k(u_l) & \geq k |F_l(x, u_l)| & \text{п.в. на } \{|u_l| \geq k\}. \end{aligned}$$

Принимая это во внимание и используя (7.3), из (7.15) получаем

$$\frac{c_2}{2} J_{k,l} + k \int_{\{|u_l| \geq k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq 3k(|f|_1 + 1) + c_{23}.$$

Тогда

$$\frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l|^p \right\} \chi'_k(u_l) dx \leq 3k(|f|_1 + 1) + c_{23}, \quad (7.16)$$

$$k \int_{\{|u_l| \geq k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq 3k(|f|_1 + 1) + c_{23}. \quad (7.17)$$

Из (7.16), учитывая, что $\chi'_k = 1$ на $[-k, k]$, выводим неравенство (7.5). Из (7.17) выводим неравенство (7.6). Лемма доказана.

Из лемм 7.1 и 2.5 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 7.2. Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\text{meas}\{|u_l| \geq k\} \leq c_{24} [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*}, \quad (7.18)$$

$$\text{meas}\left\{\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_l| \geq k\right\} \leq c_{25} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)} k^{-r}, \quad (7.19)$$

$$\text{meas}\left\{\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_l| \geq k\right\} \leq c_{25} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)} k^{-pr/q}. \quad (7.20)$$

ЛЕММА 7.3. Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$c_{26} \int_{\{|u_l| \geq 2k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + [|f|_1 + 1] k^{-1} + |f_l - f|_1. \quad (7.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z — функция класса $C^2(\mathbb{R})$ такая, что $0 \leq z \leq 1$ на $\mathbb{R}$, $z = 0$ на $[-1, 1]$, $z = 1$ на $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ и $z'(s) \text{ sign } s \geq 0$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Положим

$$\tilde{c} = \max\left\{\max_{\mathbb{R}} |z'|, \max_{\mathbb{R}} |z''|\right\}.$$

Зафиксируем теперь произвольные $k, l \in \mathbb{N}$. Определим функцию $z_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для любого $s \in \mathbb{R}$

$$z_k(s) = h_1\left(\frac{s}{k}\right) z\left(\frac{s}{k}\right).$$

Ясно, что $z_k \in C^2(\mathbb{R})$. В силу (2.2)–(2.4) и свойств функции z для любого $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$|z_k(s)| \leq 2, \quad (7.22)$$

$$0 \leq z'_k(s) \leq (1 + 2\tilde{c})k^{-1}, \quad (7.23)$$

$$|z''_k(s)| \leq (3 + 4\tilde{c})k^{-2}. \quad (7.24)$$

Кроме того,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| \leq k, \quad z_k(s) = 0; \quad (7.25)$$

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| \geq 2k, \quad |z_k(s)| \geq 1; \quad (7.26)$$

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| \geq 2k, \quad z''_k(s) = 0. \quad (7.27)$$

В силу свойств функции z_k имеем $z_k(u_l) \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, причем для α с $|\alpha| = 1$ п.в. на Ω

$$D^\alpha z_k(u_l) = z'_k(u_l) D^\alpha u_l, \quad (7.28)$$

для α с $|\alpha| = 2$ п.в. на Ω

$$|D^\alpha z_k(u_l) - z'_k(u_l) D^\alpha u_l| \leq |z''_k(u_l)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_l|^2. \quad (7.29)$$

Подставляя в (7.4) вместо v функцию $z_k(u_l)$ и используя (7.22), (7.25), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} z_k(u_l) \right\} dx + \int_{\Omega} F_l(x, u_l) z_k(u_l) dx \\ \leq 2 \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + 2|f_l - f|_1. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Обозначим через $I'_{k,l}$ первый интеграл в левой части неравенства (7.30) и положим

$$I''_{k,l} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^2 \right\} |z''_k(u_l)| dx.$$

Используя (1.4), (7.23), (7.25), (7.28) и (7.29), устанавливаем, что

$$I'_{k,l} \geq -I''_{k,l} - (1 + 2\tilde{c})|g_2|_1 k^{-1}.$$

Отсюда и из (7.30) выводим, что

$$\int_{\Omega} F_l(x, u_l) z_k(u_l) dx \leq 2 \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + (1 + 2\tilde{c})|g_2|_1 k^{-1} + 2|f_l - f|_1 + I''_{k,l}. \quad (7.31)$$

Заметим, что в силу (7.1) и определения функции z_k имеем

$$F_l(x, u_l) z_k(u_l) \geq 0 \quad \text{п.в. на } \Omega,$$

причем в силу (7.26)

$$F_l(x, u_l) z_k(u_l) \geq |F_l(x, u_l)| \quad \text{п.в. на } \{|u_l| \geq 2k\}.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} F_l(x, u_l) z_k(u_l) dx \geq \int_{\{|u_l| \geq 2k\}} |F_l(x, u_l)| dx.$$

Из этого неравенства и (7.31) вытекает, что

$$\int_{\{|u_l| \geq 2k\}} |F_l(x, u_l)| dx \leq 2 \int_{\{|u_l| \geq k\}} |f| dx + (1 + 2\tilde{c})|g_2|_1 k^{-1} + 2|f_l - f|_1 + I''_{k,l}. \quad (7.32)$$

Остается оценить интеграл $I''_{k,l}$. В силу (7.27) и (7.24) имеем

$$I''_{k,l} \leq (3 + 4\tilde{c})k^{-2} \int_{\{|u_l| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^2 \right\} dx. \quad (7.33)$$

Обозначим через $I'''_{k,l}$ интеграл в правой части неравенства (7.33). Используя (4.15), неравенство Юнга и (1.3), находим, что

$$I'''_{k,l} \leq c_{27} \int_{\{|u_l| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} u_l|^p \right\} dx + c_{28}.$$

Отсюда и из леммы 7.1 получаем $I_{k,l}''' \leq c_{29} [|f|_1 + 1] k$. Это неравенство и (7.33) приводят к заключению, что

$$I_{k,l}'' \leq c_{30} [|f|_1 + 1] k^{-1}.$$

Учитывая эту оценку, из (7.32) получаем (7.21). Лемма доказана.

Положим для любых $t > 0$ и $i, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} M_t(i, j) &= \text{meas}\{|u_i - u_j| \geq t\}, \\ N_t(i, j) &= \text{meas}\left\{\sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j| \geq t\right\}. \end{aligned}$$

Установим некоторые оценки для введенных величин. Они будут играть важную роль в доказательстве существования решения задачи (1.6), (1.7). Нужная оценка для $M_t(i, j)$ устанавливается просто. Она дается в следующей лемме.

ЛЕММА 7.4. Пусть $t > 0$, $i, j, k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$M_t(i, j) \leq 2c_{24} [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*} + t^{-q} \int_{\Omega} |h_k(u_i) - h_k(u_j)|^q dx. \quad (7.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B = \{|h_k(u_i) - h_k(u_j)| \geq t\}$. Поскольку

$$\{|u_i - u_j| \geq t\} \subset \{|u_i| \geq k\} \cup \{|u_j| \geq k\} \cup B,$$

имеем

$$M_t(i, j) \leq \text{meas}\{|u_i| \geq k\} + \text{meas}\{|u_j| \geq k\} + \text{meas } B.$$

Отсюда, учитывая (7.18) и то, что

$$\text{meas } B \leq t^{-q} \int_{\Omega} |h_k(u_i) - h_k(u_j)|^q dx,$$

выводим (7.34). Лемма доказана.

Займемся теперь получением подходящей оценки для $N_t(i, j)$. Положим для любых $t > 0$ и $m, k, i, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E_{t,m,k}(i, j) &= \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j| \geq t, \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i| \leq m, \right. \\ &\quad \left. \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_j| \leq m, |u_i| \leq k, |u_j| \leq k, |u_i - u_j| \leq \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7.5. Пусть $t > 0$ и $m, k, i, j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$N_t(i, j) \leq c_{31} [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} (m^{-pr/q} + k^{-r^*}) + M_{1/k}(i, j) + \text{meas } E_{t,m,k}(i, j). \quad (7.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j| \geq t \right\} \subset \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i| > m \right\} \cup \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_j| > m \right\} \cup \\ \cup \{ |u_i| > k \} \cup \{ |u_j| > k \} \cup \{ |u_i - u_j| > 1/k \} \cup E_{t,m,k}(i,j).$$

Следовательно,

$$N_t(i,j) \leq \text{meas} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_i| > m \right\} + \text{meas} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |D^\alpha u_j| > m \right\} \\ + \text{meas} \{ |u_i| > k \} + \text{meas} \{ |u_j| > k \} + M_{1/k}(i,j) + \text{meas} E_{t,m,k}(i,j).$$

Отсюда, используя (7.18)–(7.20), получаем неравенство (7.35). Лемма доказана.

Для эффективного использования оценки (7.35) получим еще одну оценку для некоторых интегралов, связанных с множествами $E_{t,m,k}(i,j)$. В связи с этим введем ряд вспомогательных функций и множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть $x \in \Omega$. Тогда Φ_x – функция на $\mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2}$ такая, что для любой пары $(\xi, \xi') \in \mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2}$

$$\Phi_x(\xi, \xi') = \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')] (\xi_\alpha - \xi'_\alpha).$$

Поскольку A_α , $\alpha \in \Lambda$, – функции Каратеодори и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство (1.5), существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что:

- i) для любого $x \in \Omega \setminus E$ функция Φ_x непрерывна на $\mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2}$;
- ii) для любых $x \in \Omega \setminus E$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство $\Phi_x(\xi, \xi') > 0$.

Положим для любых $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$,

$$G_{t,m} = \left\{ (\xi, \xi') \in \mathbb{R}^{n,2} \times \mathbb{R}^{n,2} : \sum_{\alpha \in \Lambda} |\xi_\alpha - \xi'_\alpha| \geq t, \sum_{\alpha \in \Lambda} |\xi_\alpha| \leq m, \sum_{\alpha \in \Lambda} |\xi'_\alpha| \leq m \right\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для любых $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, множество $G_{t,m}$ непустое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$. Тогда $\mu_{t,m}$ – функция на Ω такая, что

$$\mu_{t,m}(x) = \begin{cases} \min_{G_{t,m}} \Phi_x, & \text{если } x \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{если } x \in E. \end{cases}$$

Используя предложения i), ii), (1.3) и тот факт, что A_α , $\alpha \in \Lambda$, – функции Каратеодори, устанавливаем: если $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, то

$$\mu_{t,m} \geq 0 \text{ на } \Omega, \quad \mu_{t,m} > 0 \text{ п.в. на } \Omega, \quad (7.36)$$

$$\mu_{t,m} \in L^1(\Omega). \quad (7.37)$$

Положим для любых $i, j \in \mathbb{N}$

$$\rho(i, j) = |f_i - f_j|_1 + |F_i(x, u_i) - F_j(x, u_j)|_1.$$

ЛЕММА 7.6. Пусть $t > 0$, $m, k, i, j \in \mathbb{N}$, причем $m > t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \mu_{t,m} dx &\leq 2\rho(i,j)k^{-1} + c_{32}[|f|_1 + 1]k^{-(q-2p)/qp} \\ &\quad + c_{32}[|f|_1 + 1][M_{1/k}(i,j)]^{(q-2p)/qp}k^2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z – функция и $\tilde{c}$ – число, введенные в доказательстве леммы 7.3. Определим функцию $\tau_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\tau_k(s) = 1 - z\left(\frac{s}{k}\right).$$

Определим еще функцию $\sigma_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{k}h_1(ks).$$

Положим теперь

$$w_k = \sigma_k(u_i - u_j)\tau_k(u_i)\tau_k(u_j).$$

В силу свойств функций z и h_1 и того, что $u_i, u_j \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, имеем: $w_k \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы предложения:

- а) если $\alpha \in \Lambda$, то $D^\alpha w_k = 0$ п.в. на $\{|u_i| \geq 2k\} \cup \{|u_j| \geq 2k\}$;
- б) если $|\alpha| = 1$, то п.в. на Ω

$$|D^\alpha w_k - \sigma'_k(u_i - u_j)\tau_k(u_i)\tau_k(u_j)D^\alpha(u_i - u_j)| \leq 2\tilde{c}k^{-2}(|D^\alpha u_i| + |D^\alpha u_j|);$$

- в) если $|\alpha| = 2$, то п.в. на Ω

$$\begin{aligned} |D^\alpha w_k - \sigma'_k(u_i - u_j)\tau_k(u_i)\tau_k(u_j)D^\alpha(u_i - u_j)| &\leq 2\tilde{c}k^{-2}(|D^\alpha u_i| + |D^\alpha u_j|) \\ &\quad + 2(4\tilde{c}^2k^{-1} + |\sigma''_k(u_i - u_j)|)Biggl(\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_i|^2 + \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_j|^2\Biggr). \end{aligned}$$

В силу (7.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_i) D^\alpha w_k + F_i(x, u_i) w_k \right\} dx &= \int_{\Omega} f_i w_k dx, \\ \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_j) D^\alpha w_k + F_j(x, u_j) w_k \right\} dx &= \int_{\Omega} f_j w_k dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \nabla_2 u_i) - A_\alpha(x, \nabla_2 u_j)] D^\alpha w_k \right\} dx \leq \frac{2}{k} \rho(i, j). \quad (7.38)$$

Используя предложения а)–с), свойства функций z и h_1 , (1.5) и (7.38), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \nabla_2 u_i) - A_\alpha(x, \nabla_2 u_j)] D^\alpha(u_i - u_j) \right\} dx \leq \frac{2}{k} \rho(i, j) \\
& + 2\tilde{c}k^{-2} \int_{\{|u_i| < 2k\} \cap \{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} (|A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)| + |A_\alpha(x, \nabla_2 u_j)|) \right. \\
& \times (|D^\alpha u_i| + |D^\alpha u_j|) \left. \right\} dx \\
& + 8\tilde{c}^2 k^{-1} \int_{\{|u_i| < 2k\} \cap \{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} (|A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)| + |A_\alpha(x, \nabla_2 u_j)|) \right\} \\
& \times \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_i|^2 + \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_j|^2 \right\} dx \\
& + 6k \int_{\{|u_i| < 2k\} \cap \{|u_j| < 2k\} \cap \{|u_i - u_j| > 1/k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} (|A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)| \right. \\
& + |A_\alpha(x, \nabla_2 u_j)|) \left. \right\} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_i|^2 + \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_j|^2 \right\} dx. \tag{7.39}
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
& \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \mu_{t,m} dx \leq \\
& \leq \int_{E_{t,m,k}(i,j)} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \nabla_2 u_i) - A_\alpha(x, \nabla_2 u_j)] D^\alpha(u_i - u_j) \right\} dx.
\end{aligned}$$

Тогда, обозначив первый, второй и третий интегралы в правой части неравенства (7.39) соответственно через I' , I'' и I''' , из (7.39) выводим

$$\int_{E_{t,m,k}(i,j)} \mu_{t,m} dx \leq 2k^{-1} \rho(i, j) + 2\tilde{c}k^{-2} I' + 8\tilde{c}^2 k^{-1} I'' + 6k I'''. \tag{7.40}$$

Используя (1.3), находим

$$\begin{aligned}
I' & \leq c_{33} \int_{\{|u_i| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \right\} dx \\
& + c_{33} \int_{\{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_j|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_j|^p \right\} dx + c_{33} |g_1|_1, \tag{7.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'' & \leq c_{34} \left[\int_{\{|u_i| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \right\} dx \right. \\
& + \left. \int_{\{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_j|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_j|^p \right\} dx + |g_1|_1 \right]^{1-(q-2p)/qp}, \tag{7.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I''' \leq & c_{35} \left[\int_{\{|u_i| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \right\} dx \right. \\
& + \left. \int_{\{|u_j| < 2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_j|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_j|^p \right\} dx + |g_1|_1 \right]^{1-(q-2p)/qp} \\
& \times [M_{1/k}(i, j)]^{(q-2p)/qp}.
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Из неравенств (7.41)–(7.43), учитывая (7.5), получаем

$$\begin{aligned}
I' & \leq c_{36} [|f|_1 + 1] k, \\
I'' & \leq c_{37} [|f|_1 + 1] k^{1-(q-2p)/qp}, \\
I''' & \leq c_{38} [|f|_1 + 1] [M_{1/k}(i, j)]^{(q-2p)/qp} k.
\end{aligned}$$

Из этих оценок и (7.40) выводим требуемое неравенство для интеграла функции $\mu_{t,m}$ по множеству $E_{t,m,k}(i, j)$. Лемма доказана.

Далее, используя лемму 2.2, (2.3), (2.4) и (7.5), устанавливаем, что для любых $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
h_k(u_l) & \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega), \\
\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u_l)|^q dx & \leq 2c_{19} [|f|_1 + 1] k,
\end{aligned} \tag{7.44}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u_l)|^p dx \leq c_{39} [|f|_1 + 1] k. \tag{7.45}$$

Тогда, принимая во внимание (2.1), получаем, что для любых $k, l \in \mathbb{N}$

$$\|h_k(u_l)\| \leq c_{40} [|f|_1 + 1] k.$$

Следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{l_i\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{v_k\} \subset \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$h_k(u_{l_i}) \rightarrow v_k \quad \text{слабо в } \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega). \tag{7.46}$$

Отсюда и из леммы 7.4 получаем, что

$$\text{последовательность } \{u_{l_i}\} \text{ фундаментальна по мере.} \tag{7.47}$$

ЛЕММА 7.7. Для любого $\alpha \in \Lambda$ последовательность $\{D^\alpha u_{l_i}\}$ фундаментальна по мере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$c(F) = |F(\cdot, -1)|_1 + |F(\cdot, 1)|_1 + 1.$$

Используя (7.6) и условия 1), 2) теоремы 7.1, находим, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$

$$\rho(l_i, l_j) \leq 2(c_{20} + 3)c(F). \quad (7.48)$$

В силу (7.47) существует возрастающая последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_k$,

$$M_{1/k}(l_i, l_j) \leq k^{-1-2qp/(q-2p)}. \quad (7.49)$$

Зафиксируем $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. Выберем число $m \in \mathbb{N}$, $m > t$, так, что

$$c_{31} [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} m^{-pr/q} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.50)$$

Теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} b_k &= \sup_{i, j \geq n_k} N_t(l_i, l_j), \\ d_k &= \sup_{i, j \geq n_k} \text{meas } E_{t, m, k}(l_i, l_j). \end{aligned}$$

В силу леммы 7.5 и (7.49), (7.50) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$b_k \leq \frac{\varepsilon}{2} + c_{31} [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*} + k^{-1} + d_k. \quad (7.51)$$

Кроме того, в силу леммы 7.6 и (7.48), (7.49) для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_k$,

$$\int_{E_{t, m, k}(l_i, l_j)} \mu_{t, m} dx \leq 4(c_{20} + 3)c(F)k^{-1} + 2c_{32} [|f|_1 + 1] k^{-(q-2p)/qp}. \quad (7.52)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0. \quad (7.53)$$

Действительно, предположим, что последовательность $\{d_k\}$ не сходится к нулю. Тогда существуют $\tau > 0$, возрастающая последовательность $\{k_s\} \subset \mathbb{N}$ и последовательности $\{i_s\} \subset \mathbb{N}$, $\{j_s\} \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$i_s \geq n_{k_s}, \quad j_s \geq n_{k_s}, \quad (7.54)$$

$$\text{meas } E_{t, m, k_s}(l_{i_s}, l_{j_s}) \geq \tau. \quad (7.55)$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$G_s = E_{t, m, k_s}(l_{i_s}, l_{j_s}).$$

В силу (7.52) и (7.54)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{G_s} \mu_{t,m} dx = 0.$$

Отсюда, учитывая (7.36) и (7.37), получаем, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{meas } G_s = 0$. Но это противоречит (7.55). Полученное противоречие доказывает, что (7.53) имеет место.

Из (7.51) и (7.53) выводим, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $b_k \leq \varepsilon$. Тогда для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_k$, имеем $N_i(l_i, l_j) \leq \varepsilon$. Полученный результат позволяет заключить, что для любого $\alpha \in \Lambda$ последовательность $\{D^\alpha u_{l_i}\}$ фундаментальна по мере. Лемма доказана.

В силу (7.47), леммы 7.7 и теоремы Ф. Рисса существуют измеримые функции $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $v^{(\alpha)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \Lambda$, такие, что последовательность $\{u_{l_i}\}$ сходится к u по мере и для любого $\alpha \in \Lambda$ последовательность $\{D^\alpha u_{l_i}\}$ сходится к $v^{(\alpha)}$ по мере. Тогда, как известно, из рассматриваемых последовательностей можно извлечь подпоследовательности, сходящиеся к соответствующим функциям почти всюду на Ω . Без ограничения общности можно считать, что

$$u_{l_i} \rightarrow u \quad \text{п.в. на } \Omega, \quad (7.56)$$

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad D^\alpha u_{l_i} \rightarrow v^{(\alpha)} \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (7.57)$$

Используя (7.46) и (7.56), устанавливаем, что $h_k(u) \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и

$$h_k(u_{l_i}) \rightarrow h_k(u) \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega). \quad (7.58)$$

Таким образом, имеем $u \in \overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

ЛЕММА 7.8. *Для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем $\delta^\alpha u = v^{(\alpha)}$ п.в. на Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \Lambda$. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 2.2 для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$D^\alpha h_k(u_{l_i}) = D^\alpha u_{l_i} \quad \text{п.в. на } \{|u_{l_i}| \leq k\}.$$

Отсюда и из (7.56), (7.57) выводим, что

$$D^\alpha h_k(u_{l_i}) \rightarrow v^{(\alpha)} \quad \text{п.в. на } \{|u| < k\}.$$

Тогда, учитывая (7.44) и (7.45), получаем, что функция $v^{(\alpha)}$ интегрируема на множестве $\{|u| < k\}$ и для любой функции $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\{|u| < k\}} [D^\alpha h_k(u_{l_i}) - v^{(\alpha)}] \varphi dx = 0. \quad (7.59)$$

Но в силу (7.58) для любой функции $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [D^\alpha h_k(u_{l_i}) - D^\alpha h_k(u)] \varphi dx = 0. \quad (7.60)$$

Из (7.59) и (7.60) следует, что $D^\alpha h_k(u) = v^{(\alpha)}$ п.в. на $\{|u| < k\}$. Тогда в силу леммы 2.4 $\delta^\alpha u = v^{(\alpha)}$ п.в. на $\{|u| < k\}$. Отсюда в силу произвольности k получаем, что $\delta^\alpha u = v^{(\alpha)}$ п.в. на Ω . Лемма доказана.

В силу (7.57) и леммы 7.8 имеем

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad D^\alpha u_{l_i} \rightarrow \delta^\alpha u \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (7.61)$$

ЛЕММА 7.9. *Справедливы утверждения:*

$$F(x, u) \in L^1(\Omega), \quad (7.62)$$

$$F_{l_i}(x, u_{l_i}) \rightarrow f - F(x, u) \quad \text{сильно в } L^1(\Omega). \quad (7.63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (7.56) имеем

$$F_{l_i}(x, u_{l_i}) \rightarrow f - F(x, u) \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (7.64)$$

Кроме того, используя (7.6) и условия 1), 2) теоремы 7.1, устанавливаем, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} |F_l(x, u_l)| dx \leq (c_{20} + 2) [|F(\cdot, -1)|_1 + |F(\cdot, 1)|_1] + c_{20}.$$

Отсюда, учитывая (7.64) и используя лемму Фату, получаем включение (7.62).

Далее, пусть задано $\varepsilon > 0$. Ясно, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\text{meas } G \leq \varepsilon_1$, имеем

$$\int_G (|f| + |F(x, u)|) dx \leq \varepsilon.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что выполняются неравенства

$$[|f|_1 + 1] k^{-1} \leq \varepsilon, \quad (7.65)$$

$$c_{24} [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)} k^{-r^*} \leq \varepsilon_1. \quad (7.66)$$

Согласно условию 2) теоремы 7.1 функции $F(\cdot, -2k)$ и $F(\cdot, 2k)$ принадлежат $L^1(\Omega)$. Следовательно, существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\text{meas } G \leq \varepsilon_2$, имеем

$$\int_G (|F(\cdot, -2k)| + |F(\cdot, 2k)|) dx \leq \varepsilon.$$

В силу (7.64) существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_1) \leq \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (7.67)$$

и $F_{l_i}(x, u_{l_i}) \rightarrow f - F(x, u)$ равномерно на Ω_1 . Тогда найдется $i_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$,

$$\int_{\Omega_1} |F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))| dx \leq \varepsilon. \quad (7.68)$$

Кроме того, в силу (7.2) существует $i_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_2$,

$$|f_{l_i} - f|_1 \leq \varepsilon. \quad (7.69)$$

Зафиксируем теперь $i \in \mathbb{N}$, $i \geq \max(i_1, i_2)$. Используя (7.67) и (7.68), получаем

$$\begin{aligned} |F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))|_1 &\leq \int_{\{|u_{l_i}| \geq 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx \\ &+ \int_{(\Omega \setminus \Omega_1) \cap \{|u_{l_i}| < 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.70)$$

В силу (7.18) и (7.66) имеем $\text{meas}\{|u_{l_i}| \geq k\} \leq \varepsilon_1$. Тогда

$$\int_{\{|u_{l_i}| \geq k\}} |f| dx \leq \varepsilon. \quad (7.71)$$

Из (7.21), (7.65), (7.69) и (7.71) выводим, что

$$\int_{\{|u_{l_i}| \geq 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx \leq 3c_{26}^{-1} \varepsilon. \quad (7.72)$$

Заметим, что в виду условия 1) теоремы 7.1

$$|F_{l_i}(x, u_{l_i})| \leq 2(|F(\cdot, -2k)| + |F(\cdot, 2k)|)$$

п.в. на $\{|u_{l_i}| < 2k\}$. Отсюда и из того, что в силу (7.67)

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_1} (|F(\cdot, -2k)| + |F(\cdot, 2k)|) dx \leq \varepsilon,$$

получаем

$$\int_{(\Omega \setminus \Omega_1) \cap \{|u_{l_i}| < 2k\}} |F_{l_i}(x, u_{l_i})| dx \leq 2\varepsilon. \quad (7.73)$$

Из (7.70), (7.72) и (7.73) следует, что

$$|F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))|_1 \leq (3c_{26}^{-1} + 4)\varepsilon.$$

Теперь можно заключить, что

$$|F_{l_i}(x, u_{l_i}) - (f - F(x, u))|_1 \rightarrow 0$$

и, значит, предложение (7.63) справедливо. Лемма доказана.

Отметим, что в силу (1.3) для любых $\alpha \in \Lambda$ и $l \in \mathbb{N}$ имеем $A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) \in L^1(\Omega)$.

ЛЕММА 7.10. Для любого $\alpha \in \Lambda$ имеем $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$ и

$$A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u) \quad \text{сильно в } L^1(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \Lambda$. В силу (7.61)

$$A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u) \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (7.74)$$

Далее, зафиксируем $\lambda \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right)$ и положим

$$\lambda_1 = (q-1)\lambda, \quad \lambda_2 = \frac{q-1}{q}p\lambda.$$

Зафиксируем еще $l \in \mathbb{N}$. Используя (7.19), (7.20) и лемму 2.6, устанавливаем:

а) если $|\beta| = 1$, то $D^\beta u_l \in L^{\lambda_1}(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} |D^\beta u_l|^{\lambda_1} dx \leq 4^{\lambda_1/(r-\lambda_1)} c_{41} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)};$$

б) если $|\beta| = 2$, то $D^\beta u_l \in L^{\lambda_2}(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} |D^\beta u_l|^{\lambda_2} dx \leq 4^{\lambda_1/(r-\lambda_1)} c_{41} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)}.$$

Кроме того, в силу (1.3) п.в. на Ω

$$|A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)|^\lambda \leq (c_1 + 1) \left\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_l|^{\lambda_1} + \sum_{|\beta|=2} |D^\beta u_l|^{\lambda_2} \right\} + g_1 + 2n^2(c_1 + 1).$$

Используя это и предложения а), б), получаем, что $A_\alpha(x, \nabla_2 u_l) \in L^\lambda(\Omega)$ для любого $l \in \mathbb{N}$ и

$$\int_{\Omega} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_l)|^\lambda dx \leq 4^{\lambda_1/(r-\lambda_1)} c_{42} [|f|_1 + 1]^{n/(n-1)}. \quad (7.75)$$

Из (7.74), (7.75) и леммы Фату следует, что $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$.

Далее, пусть задано $\varepsilon > 0$. Ясно, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\text{meas } G \leq \varepsilon_1$, имеем

$$\int_G |A_\alpha(x, \delta_2 u)| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу (7.74) существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_1) \leq \min \left\{ \varepsilon_1, \left(4^{-r/(r-\lambda_1)} \varepsilon c_{42}^{-1} [|f|_1 + 1]^{-n/(n-1)} \right)^{\lambda/(\lambda-1)} \right\}$$

и $A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u)$ равномерно на Ω_1 . Тогда найдется $i_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$,

$$\int_{\Omega_1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) - A_\alpha(x, \delta_2 u)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.76)$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, $i \geq i_1$. Используя неравенство для $\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_1)$ и (7.75), (7.76), получаем

$$\begin{aligned} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) - A_\alpha(x, \delta_2 u)|_1 &\leq \int_{\Omega \setminus \Omega_1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i})| dx + \frac{3}{4}\varepsilon \\ &\leq [\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_1)]^{(\lambda-1)/\lambda} \left\{ \int_{\Omega} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i})|^\lambda dx \right\}^{1/\lambda} + \frac{3}{4}\varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $|A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) - A_\alpha(x, \delta_2 u)|_1 \rightarrow 0$ и, значит, $A_\alpha(x, \nabla_2 u_{l_i}) \rightarrow A_\alpha(x, \delta_2 u)$ сильно в $L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Из (7.4), (7.2) и лемм 7.9, 7.10 вытекает, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Установленные свойства функции u позволяют заключить, что u есть H -решение задачи (1.6), (1.7).

ЛЕММА 7.11. Пусть $q > p_1$. Тогда существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-\varphi|<2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $q > p_1$, имеем

$$\frac{1}{r} \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right) < 1.$$

Зафиксируем число σ такое, что

$$\frac{1}{r} \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right) < \sigma < 1, \quad (7.77)$$

и положим

$$\begin{aligned} c &= 4^{r^*+3+1/(1-\sigma)} n^4 (c_1 + 1) (1 + c_{24} + c_{25} + |g_1|_1 + \text{meas } \Omega) [|f|_1 + 1]^{n/(n-q)}, \\ b &= r\sigma, \quad \gamma = r\sigma - \left(\frac{p-1}{p} q + 2 \right), \\ r_1 &= \frac{pr\sigma}{q(p-1)}. \end{aligned}$$

В силу (7.77) имеем $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$. Очевидно, что

$$\frac{1}{r_1} + \frac{2}{b} + \frac{\gamma}{b} = 1. \quad (7.78)$$

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_l^{(1)} &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} \varphi \right\} h'_k(u_l - \varphi) dx, \\ I_l^{(2)} &= \int_{\Omega} \{f_l - F_l(x, u_l)\} h_k(u_l - \varphi) dx, \\ I_l &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)| \right\} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha}(u_l - \varphi)|^2 \right\} |h''_k(u_l - \varphi)| dx. \end{aligned}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Положим $v_l = h_k(u_l - \varphi)$. В силу леммы 2.2 имеем $v_l \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и справедливы предложения:

а) для любого мультииндекса α , $|\alpha| = 1$,

$$D^{\alpha} v_l = h'_k(u_l - \varphi) D^{\alpha}(u_l - \varphi) \quad \text{п.в. на } \Omega;$$

б) для любого мультииндекса α , $|\alpha| = 2$,

$$|D^{\alpha} v_l - h'_k(u_l - \varphi) D^{\alpha}(u_l - \varphi)| \leq |h''_k(u_l - \varphi)| \sum_{|\beta|=1} |D^{\beta}(u_l - \varphi)|^2 \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Кроме того, согласно (7.4)

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} v_l \right\} dx = I_l^{(2)}.$$

Отсюда, используя предложения а) и б), выводим неравенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} u_l \right\} h'_k(u_l - \varphi) dx \leq I_l^{(1)} + I_l^{(2)} + I_l. \quad (7.79)$$

Оценим интеграл I_l . Для этого положим

$$\begin{aligned} \Phi_l &= \sum_{|\alpha|=2} |A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l)|, \\ \Phi_{1,l} &= \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u_l| \right)^2, \quad \Phi = \left(\sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} \varphi| \right)^2, \\ E_l &= \{|u_l - \varphi| > k\}. \end{aligned}$$

В силу (2.4) и того, что $h''_k(s) = 0$ для $s \in [-k, k]$, имеем

$$I_l \leq 6 \int_{E_l} \Phi_l \Phi_{1,l} dx + 6 \int_{E_l} \Phi_l \Phi dx. \quad (7.80)$$

Используя (1.3), (7.19), (7.20) и лемму 2.6, устанавливаем, что

$$\Phi_l \in L^{r_1}(\Omega), \quad |\Phi_l|_{r_1} \leq n^2 \left(\frac{c}{16n^4} \right)^{1/r_1}, \quad (7.81)$$

$$\Phi_{1,l} \in L^{b/2}(\Omega), \quad |\Phi_{1,l}|_{b/2} \leq \left(\frac{c}{16n^4} \right)^{2/b}. \quad (7.82)$$

Далее, положив

$$E'_l = E_l \cap \{|\varphi| \leq k/2\}, \quad E''_l = E_l \cap \{|\varphi| > k/2\},$$

имеем

$$\text{meas } E_l = \text{meas } E'_l + \text{meas } E''_l. \quad (7.83)$$

Легко видеть, что $\text{meas } E'_l \leq \text{meas} \{|u_l| \geq k/2\}$. Отсюда, используя (7.18), получаем

$$\text{meas } E'_l \leq \frac{c}{32n^4} k^{-r^*}. \quad (7.84)$$

Для любого $x \in E''_l$ имеем $1 < 2k^{-1}|\varphi(x)|$. Тогда

$$\text{meas } E''_l \leq 2^b k^{-b} \int_{\Omega} |\varphi|^b dx. \quad (7.85)$$

Из (7.83)–(7.85) выводим, что

$$\text{meas } E_l \leq \frac{c}{16n^4} (1 + |\varphi|_b)^b k^{-b}. \quad (7.86)$$

Теперь, учитывая (7.78) и используя неравенство Гёльдера и (7.81), (7.82), (7.86), из (7.80) получаем

$$\begin{aligned} I_l &\leq 6|\Phi_l|_{r_1} |\Phi_{1,l}|_{b/2} \{\text{meas } E_l\}^{\gamma/b} + 6|\Phi_l|_{r_1} |\Phi|_{b/2} \{\text{meas } E_l\}^{\gamma/b} \\ &\leq c(1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7.79) следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \nabla_2 u_l) D^{\alpha} u_l \right\} h'_k(u_l - \varphi) dx \leq I_l^{(1)} + I_l^{(2)} + c(1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \quad (7.87)$$

Заметим, что в силу (2.2), (2.3), (7.2), (7.56) и лемм 7.9, 7.10

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I_{l_i}^{(1)} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi \right\} h'_k(u - \varphi) dx, \quad (7.88)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} I_{l_i}^{(2)} = \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx. \quad (7.89)$$

Теперь из (7.87)–(7.89), используя (1.4), (2.3), (7.56), (7.61), (7.74) и лемму Фату, выводим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) D^{\alpha} \varphi \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} F(x, u) h_k(u - \varphi) dx + c(1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)})^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Итак, используя условия 1), 2) теоремы 7.1, мы показали, что u есть H -решение задачи (1.6), (1.7). Благодаря этим же условиям в предположении, что $q > p_1$, из (7.62) и леммы 7.11 получаем, что u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тем самым теоремы 7.1 и 7.2 доказаны.

§ 8. Принадлежность энтропийных решений соболевским пространствам и существование W -решений

ЛЕММА 8.1. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. Пусть α – мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$, и пусть $\delta^{\alpha} u \in L^1(\Omega)$. Тогда существует обобщенная производная $D^{\alpha} u$, причем $D^{\alpha} u = \delta^{\alpha} u$ п.в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксировав произвольную функцию $w \in C_0^{\infty}(\Omega)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u D^{\alpha} w + w \delta^{\alpha} u) dx \right| & \leq [\max_{\Omega} |D^{\alpha} w|] \int_{\Omega} |h_k(u) - u| dx \\ & \quad + [\max_{\Omega} |w|] \int_{\Omega} |D^{\alpha} h_k(u) - \delta^{\alpha} u| dx. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Поскольку $h_k(u) \rightarrow u$ поточечно на Ω и для любого $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|h_k(u) - u| \leq 2|u|$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |h_k(u) - u| dx = 0. \quad (8.2)$$

Далее, для любого $k \in \mathbb{N}$, используя леммы 2.1, 2.2, 2.4 и (2.3), получаем

$$\int_{\Omega} |D^{\alpha} h_k(u) - \delta^{\alpha} u| dx \leq 2 \int_{\{|u| > k\}} |\delta^{\alpha} u| dx.$$

Отсюда, учитывая, что в силу включения $u \in L^1(\Omega)$ $\text{meas}\{|u| > k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, выводим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D^{\alpha} h_k(u) - \delta^{\alpha} u| dx = 0. \quad (8.3)$$

Из (8.1)–(8.3) следует, что

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} w dx = - \int_{\Omega} w \delta^{\alpha} u dx.$$

Отсюда в силу произвольности w вытекает, что существует обобщенная производная $D^{\alpha} u$, причем $D^{\alpha} u = \delta^{\alpha} u$ п.в. на Ω . Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. Пусть α – мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$, и пусть $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. Предположим еще, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx = 0. \quad (8.4)$$

Тогда существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п.в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксировав произвольную функцию $w \in C_0^\infty(\Omega)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u D^\alpha w - w \delta^\alpha u) dx \right| &\leq [\max_{\Omega} |D^\alpha w|] \int_{\Omega} |h_k(u) - u| dx \\ &\quad + [\max_{\Omega} |w|] \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u) - \delta^\alpha u| dx. \end{aligned} \quad (8.5)$$

В силу леммы 2.4 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u) - \delta^\alpha u| dx \leq \int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx + \int_{\{|u| > k\}} |\delta^\alpha u| dx.$$

Отсюда, используя включения $u \in L^1(\Omega)$, $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$ и условие (8.4), получаем, что $D^\alpha h_k(u) \rightarrow \delta^\alpha u$ сильно в $L^1(\Omega)$. Ясно также, что $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^1(\Omega)$. Теперь из (8.5) следует равенство

$$\int_{\Omega} u D^\alpha w dx = \int_{\Omega} w \delta^\alpha u dx.$$

Отсюда в силу произвольности w вытекает, что существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п.в. на Ω . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда для любого $\lambda \in (1, r)$ имеем $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in (1, r)$. В силу лемм 3.2 и 8.1 имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и для любого α , $|\alpha| = 1$, существует обобщенная производная $D^\alpha u$, $D^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Следовательно, $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$.

Далее, пусть $k \in \mathbb{N}$. Имеем $h_k(u) \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Из лемм 2.1, 2.2, 2.4 и (2.3) вытекает, что для любого α , $|\alpha| = 1$,

$$|D^\alpha h_k(u)| \leq |D^\alpha u| \text{ п.в. на } \Omega.$$

Используя это, находим, что

$$\|h_k(u)\|_{W^{1,\lambda}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,\lambda}(\Omega)}.$$

Теперь ясно, что существуют возрастающая последовательность $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$ и функция $v \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ такие, что $h_{k_i}(u) \rightarrow v$ слабо в $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тогда $h_{k_i}(u) \rightarrow v$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. С другой стороны, имеем $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Следовательно, $u = v$ п.в. на Ω . Тогда $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и тем самым теорема доказана.

Положим

$$p_2 = \frac{np}{n(p-1) + 1}.$$

Заметим, что в силу (1.1) $p_2 \in (1, n)$. Отметим еще, что неравенство $\frac{p}{q}r > 1$ равносильно неравенству $q > p_2$, а неравенство $p_2 > 2p$ равносильно неравенству $p < \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть $q > p_2$, и пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда для любого мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п.в. на Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – произвольный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$. Покажем, что

$$\int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (8.6)$$

Прежде всего в силу лемм 3.1 и 2.5 имеем: существует $M > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|u| > k\} \leq M k^{-r^*}, \quad (8.7)$$

$$\int_{\{|u| \leq 2k\}} \left\{ \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^q + \sum_{|\beta|=2} |\delta^\beta u|^p \right\} dx \leq M k. \quad (8.8)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что

$$\int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx \leq [\text{meas}\{|u| > k\}]^{(p-1)/p} |D^\alpha h_k(u)|_p. \quad (8.9)$$

Заметим, что в силу лемм 2.1, 2.2, 2.4 и (2.3), (2.4)

$$|D^\alpha h_k(u)| \leq |\delta^\alpha u| + 3 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \text{ п.в. на } \{|u| \leq 2k\},$$

а в силу леммы 2.3

$$D^\alpha h_k(u) = 0 \text{ п.в. на } \{|u| > 2k\}.$$

Используя эти свойства и (8.8), устанавливаем, что

$$|D^\alpha h_k(u)|_p \leq 6n[M + n \text{meas } \Omega]^{1/p} k^{1/p}. \quad (8.10)$$

Из (8.7), (8.9), (8.10) выводим, что

$$\int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx \leq 6n[M + n \text{meas } \Omega] k^{-r^*(p-1)/p+1/p}.$$

Отсюда, учитывая то, что в силу условия $q > p_2$ имеет место неравенство $-r^*(p-1)/p+1/p < 0$, получаем свойство (8.6).

Заметим еще, что из условия $q > p_2$ и леммы 3.2 следует включение $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. В силу леммы 3.2 имеем также $u \in L^1(\Omega)$.

Теперь, применяя лемму 8.2, получаем, что существует обобщенная производная $D^\alpha u$, причем $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ п.в. на Ω . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Из теоремы 8.2 и леммы 3.2 вытекает, что если $q > p_2$ и u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7), то для любых α , $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in [1, \frac{p}{q}r)$ $D^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть $q > p_2$, и пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 8.1, 8.2 и леммы 3.2 вытекает, что $u \in W^{2,1}(\Omega)$.

Далее, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $h_k(u) \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. Используя леммы 2.4, 3.2, 8.1 и теорему 8.2, получаем

$$\begin{aligned} \|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} &\leq |h_k(u) - u|_1 \\ &+ \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx + \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\{|u| > k\}} |D^\alpha u| dx. \end{aligned} \quad (8.11)$$

В силу изложенного в доказательствах теорем 8.1 и 8.2 для любого α , $|\alpha| = 1$, имеем $|D^\alpha h_k(u)| \leq |D^\alpha u|$ п.в. на Ω , а для любого α , $|\alpha| = 2$, справедливо свойство (8.6). Учитывая это, из (8.11) выводим, что

$$\|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. W -решением задачи (1.6), (1.7) будем называть функцию $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $F(x, u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) $A_\alpha(x, \nabla_2 u) \in L^1(\Omega)$ для любого $\alpha \in \Lambda$;
- 3) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть $q > p_2$, и пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда u – W -решение задачи (1.6), (1.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 8.3 имеем $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. В силу теоремы 5.1 u есть H -решение задачи (1.6), (1.7) и, значит, $F(x, u) \in L^1(\Omega)$, для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} F(x, u) \varphi dx.$$

Из этих свойств, учитывая, что в силу лемм 3.2, 8.1 и теоремы 8.2 $\nabla_2 u = \delta_2 u$ п.в. на Ω , выводим, что u есть W -решение задачи (1.6), (1.7). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8.5. Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 7.1, и пусть $q > p_2$. Тогда существует W -решение задачи (1.6), (1.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу результатов § 7 из условий 1), 2) теоремы 7.1 следует, что существует функция $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, являющаяся H -решением задачи (1.6), (1.7) и обладающая свойствами:

- а) $u \in L^1(\Omega)$;
- б) для любого α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$;
- в) для любых α , $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in (0, \frac{p}{q}r)$ имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- г) для любого α , $|\alpha| = 2$, имеем

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} k^{r^*(p-1)/p-1/p} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx < +\infty.$$

Используя свойства а)–г), леммы 8.1, 8.2 и условие $q > p_2$, устанавливаем, что $u \in W^{2,1}(\Omega)$ и

$$\nabla_2 u = \delta_2 u \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (8.12)$$

Поскольку $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, имеем $\{h_k(u)\} \subset \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. Используя (8.12), леммы 2.1–2.4 и (2.3), для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} \leq 2 \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha u| dx + \sum_{|\alpha|=2} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha h_k(u)| dx.$$

Отсюда, учитывая, что $\text{meas}\{|u| > k\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и используя свойство г) и условие $q > p_2$, выводим, что

$$\|h_k(u) - u\|_{W^{2,1}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$. Теперь, используя (8.12) и тот факт, что u есть H -решение задачи (1.6), (1.7), получаем, что u есть W -решение задачи (1.6), (1.7). Теорема доказана.

Как уже было отмечено, неравенства $p_2 > 2p$ и $p < \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$ равносильны. Учитывая этот факт и неравенство $q > 2p$, из теорем 8.4 и 8.5 получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 8.6. Пусть $p \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$, и пусть u – энтропийное решение задачи (1.6), (1.7). Тогда u – W -решение задачи (1.6), (1.7).

ТЕОРЕМА 8.7. Пусть $p \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$, и пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 7.1. Тогда существует W -решение задачи (1.6), (1.7).

Список литературы

1. *Lions J. L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
2. *Bénilan Ph.* On the p -Laplacian in L^1 : Conference at the Analysis Seminar. Dept. of Math. Univ. Wisconsin at Madison, 1987.
3. *Boccardo L., Gallouët Th., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restrictions on the data // J. Diff. Eqns. 1993. V. 105. P. 334–363.
4. *Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L.* An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995. V. 22. P. 241–273.
5. *Rakotoson J. M.* Resolution of the critical cases for problems with L^1 -data // Asymptotic Analysis. 1993. V. 6. P. 229–246.
6. *Boccardo L., Gallouët Th.* Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. P. 149–169.
7. *Boccardo L., Gallouët Th.* Non-linear elliptic equations with right-hand side measures // Comm. Partial Diff. Eqns. 1992. V. 17. P. 641–655.
8. *Rakotoson J. M.* Generalized solutions in a new type of sets for problems with measures as data // Diff. Integral Eqns. 1993. V. 6. P. 27–36.
9. *Boccardo L., Diaz J. I., Giachetti D., Murat F.* Existence of a solution for a weaker form of a non linear elliptic equation // Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Proceedings, Nancy, 1988). Pitman Res. Notes Math. Ser. 1989. V. 208. P. 229–246.
10. *Boccardo L., Diaz J. I., Giachetti D., Murat F.* Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms // J. Diff. Eqns. 1993. V. 106. P. 215–237.
11. *Murat F.* Soluciones renormalizadas de EDP elípticas no lineales. Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, R 93023. Univ. Paris 6, 1993.
12. *Скрыпник И. В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравн. 1978. Т. 14. С. 1104–1118.
13. *Kovalevsky A.* Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth order equations with L^1 -data // Nonlinear Boundary Value Problems. 1999. № 9. P. 46–54.
14. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

г. Донецк,
Украина

Поступило в редакцию
9.IX.1999