Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 2, 81–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:06:53

УДК 517.91

А. А. Коньков

О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

В работе изучаются решения уравнений порядка $m \geq 1$ вида

$$w^{(m)} = Q(r, w, \dots, w^{(m-1)}),$$

где Q – функция из класса Каратеодори $K_{\text{loc}}([a, \infty) \times \mathbb{R}^m)$, $a > 0$.
Библиография: 10 наименований.

§ 1. Введение

Будем изучать дифференциальные уравнения порядка $m \geq 1$ вида

$$w^{(m)} = Q(r, w, \dots, w^{(m-1)}), \quad (1.1)$$

где Q принадлежит классу Каратеодори $K_{\text{loc}}([a, \infty) \times \mathbb{R}^m)$, $a > 0$ [1, с. 9].

Вопросы, содержащиеся в предлагаемой вашему вниманию работе, ранее рассматривались главным образом для уравнений типа Эмдена–Фаулера [1]–[9]. Нами исследуется общий случай. В частности, будут получены обобщения ряда утверждений, известных в случае дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера [1], [2].

Договоримся о следующих обозначениях.

Под $L_{\text{loc}}([a, \infty))$ подразумевается пространство функций $w: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемых по Лебегу на каждом компакте $K \subset [a, \infty)$.

Аналогично, через $\tilde{C}_{\text{loc}}^n([a, b))$, $a < b \leq \infty$, мы обозначаем множество функций $w: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих абсолютно непрерывные производные $w^{(i)}$, $i = 0, \dots, n$, на любом отрезке $[a, b_*] \subset [a, b)$.

Как принято, *решением уравнения (1.1) на промежутке $[a, b)$* , $a < b \leq \infty$, называется функция $w \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{m-1}([a, b))$, удовлетворяющая уравнению (1.1) почти всюду на $[a, b)$.

Пусть $\tau \in (1, \infty)$ – вещественное число, а $E \subset \mathbb{R}$ – измеримое множество, причем $\text{mes } E \cap (\xi/\tau, \tau\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in E$. Для произвольной измеримой функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$f_\tau(\xi) = \text{ess} \inf_{E \cap (\xi/\tau, \tau\xi)} f, \quad \xi \in E.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00225.

§ 2. Сингулярные решения второго рода

Если не указано противное, мы будем считать, что $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $\delta \in (0, \infty)$ и на множестве $\{(r, t_0, \dots, t_{m-1}): a \leq r, t_{m-i} > (\delta/(i-1)!)r^{i-1}, i = 1, \dots, m\}$ выполнено соотношение

$$Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) \geq r^{m-k-1} p(r) g\left(\frac{t_k}{r^{m-k-1}}\right), \quad (2.1)$$

где $p: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ принадлежит пространству $L_{\text{loc}}([a, \infty))$, а $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – полунепрерывная снизу монотонно не убывающая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [1]. Решение $w: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1) называется *правильным*, если для всякого $b \in [a, \infty)$

$$\sup_{r \in [b, \infty)} |w(r)| > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [1]. Решение $w: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1) на конечном промежутке $[a, b)$, $a < b < \infty$, называется *сингулярным второго рода*, если

$$\lim_{r \rightarrow b-0} \sup |w^{(m-1)}(r)| = \infty.$$

Говорим также, что w – *неколеблющееся сингулярное решение второго рода*, если существует вещественное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $r \in (b - \varepsilon, b)$ $w(r) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\sigma \in (1, \infty)$ и при этом

$$\int_1^\infty g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt < \infty \quad (2.2)$$

и

$$\int_a^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi = \infty. \quad (2.3)$$

Тогда каждое непродолжаемое решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию

$$w^{(m-i)}(a) > \frac{\delta}{(i-1)!} a^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

является неколеблющимся сингулярным решением второго рода.

Напоминаем [10, § 3, с. 23], что решение $\tilde{w}: [a, \tilde{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1) называется *продолжением* решения $w: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, если $\tilde{b} \geq b$ и $\tilde{w}(r) = w(r)$ для любого $r \in [a, b)$.

Решение $w: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1) называется *непродолжаемым*, если для всякого его продолжения $\tilde{w}: [a, \tilde{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место равенство $\tilde{b} = b$.

Заметим, что правая часть (1.1) не определена при $r < a$.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим уравнение

$$w^{(m)} = q(r)w \ln^\lambda(1+w), \quad r > a > 0, \quad (2.5)$$

где $q \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция, причем

$$q(r) \sim r^s \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

для некоторого вещественного числа s (т.е. найдутся константы $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ такие, что $c_1 r^s \leq q(r) \leq c_2 r^s$ в окрестности бесконечности).

Полагая в теореме 2.1 $k = 0$, $g(t) = t \ln^\lambda(1+t)$ и $p(\xi) = q(\xi)\chi_{[1, \infty)}(\xi)$, где $\chi_{[1, \infty)}$ – характеристическая функция множества $[1, \infty)$, получим, что при

$$\lambda > m \quad \text{и} \quad s \geq -m \quad (2.7)$$

всякое непродолжаемое решение уравнения (2.5), удовлетворяющее неравенствам

$$w^{(i)}(a) > 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (2.8)$$

является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

Пусть условие (2.7) не имеет места. Покажем, что для некоторой положительной непрерывной функции q вида (2.6) на промежутке $[a, \infty)$ существует правильное решение (2.5), (2.8).

Если $s < -m$ либо $s = -m$ и $\lambda < -1$, то последнее утверждение вытекает из [1, с. 207, следствие 8.2]. Случай $m = 1$ также является тривиальным, поэтому мы можем считать, что $m \geq 2$.

Допустим, что $\lambda < m$ и $s > -m$. Легко проверить, что

$$w(r) = Ar^{m-1}e^{Br^{\frac{s+m}{m-\lambda}}}$$

будет искомым решением для всех $A, B \in (0, \infty)$.

Предположим, далее, что $0 \leq \lambda < m$ и $s = -m$. Очевидно, нужный пример доставляет нам равенство

$$w(r) = Ar^{m-1}e^{B(\ln(r/\varepsilon))^{m/(m-\lambda)}}$$

для всех $A, B \in (0, \infty)$ и при достаточно малом $\varepsilon \in (0, \infty)$, зависящем, вообще говоря, от A, B и a .

Пусть $-1 < \lambda < 0$ и $s = -m$. Тогда в качестве требуемого решения можно взять

$$w(r) = Ar^{m-1}e^{B(\ln(r/\varepsilon))^{1+\lambda}},$$

где $A, B, \varepsilon \in (0, \infty)$ и при этом ε достаточно мало.

Точно так же в случае $\lambda = -1$ и $s = -m$ таковым является функция

$$w(r) = Ar^{m-1}e^{B \ln \ln(r/\varepsilon)}, \quad A, B \in (0, \infty),$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Предположим теперь, что $\lambda = m$ и $s > -m$. Тогда искомое решение определяется формулой

$$w(r) = Ar^{m-1}e^{e^{Br^{(s+m)/m}}}, \quad A, B \in (0, \infty).$$

Наконец, если $\lambda = m$ и $s = -m$, то необходимым примером служит

$$w(r) = Ar^{m-1}e^{r^B}, \quad A, B \in (0, \infty).$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\sigma \in (1, \infty)$, имеет место (2.3) и

$$\int_1^\infty g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt = \infty. \quad (2.9)$$

Тогда любое правильное решение (1.1), (2.4) для всех r из окрестности бесконечности удовлетворяет оценке

$$w^{(k)}(r) \geq r^{m-k-1} H_\infty^{-1} \left(C \left(\int_a^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right), \quad (2.10)$$

где

$$H_\infty(\zeta) = \int_1^\zeta g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt,$$

H_∞^{-1} – функция, обратная к H_∞ , а постоянная $C > 0$ зависит только от m и σ .

ПРИМЕР 2.2. Допустим, что w – правильное решение (2.5), (2.8), где $\lambda \leq m$, а $q \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция такая, что для некоторого $s > -m$ выполнено соотношение (2.6). Тогда, применяя теорему 2.2, получим для всех достаточно больших r

$$w(r) \geq A r^{m-1} e^{B r^{(s+m)/(m-\lambda)}}, \quad (2.11)$$

если $\lambda < m$, или

$$w(r) \geq A r^{m-1} e^{B r^{(s+m)/m}}, \quad (2.12)$$

если $\lambda = m$, где $A > 0$ и $B > 0$ – некоторые константы, не зависящие от w .

Ранее (см. пример 2.1) было показано, что правые части неравенств (2.11) и (2.12) сами являются решениями (2.5), (2.8). Последнее обстоятельство говорит о точности теоремы 2.2.

ТЕОРЕМА 2.3. Предположим, что $\sigma \in (1, \infty)$ и при этом

$$\int_a^\infty \min\{\xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi), p_\sigma^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi = \infty. \quad (2.13)$$

Тогда каждое правильное решение (1.1), (2.4) допускает оценку

$$\begin{aligned} & \int_1^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt + \int_1^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} \frac{dt}{g(t)} \\ & \geq C \int_a^r \min\{\xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi), p_\sigma^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi \end{aligned} \quad (2.14)$$

для всех r из некоторой окрестности бесконечности, где постоянная $C > 0$ зависит только от σ и m .

ПРИМЕР 2.3. Пусть w – правильное решение уравнения (2.5), удовлетворяющее условию (2.8), где $\lambda \leq m$, $m \geq 2$, а $q \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция такая, что

$$q(r) \sim r^{-m} \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Тогда, применяя теорему 2.3, в которой $k = 0$, $g(t) = t \ln^\lambda(1 + t)$ и $p(\xi) = q(\xi)\chi_{[1, \infty)}(\xi)$, находим для всех достаточно больших r

$$w(r) \geq Ar^{m-1}e^{r^B},$$

если $\lambda = m$, или

$$w(r) \geq Ar^{m-1}e^{B(\ln r)^{m/(m-\lambda)}},$$

если $0 \leq \lambda < m$, где A и B – положительные константы, не зависящие от w .

Рассмотрим теперь случай $-1 \leq \lambda < 0$. Легко увидеть, что $w(r)$ обладает не более чем степенным ростом при $r \rightarrow \infty$ с показателем степени, зависящим только от q и m .

Тем самым, полагая в теореме 2.3 $k = 0$, $g(t) = t$ и $p(\xi) = q(\xi) \ln^\lambda(1 + w(\xi))$, будем иметь

$$p(\xi) \geq C\xi^{-m} \ln^\lambda \xi$$

для всех ξ из окрестности бесконечности, где постоянная $C > 0$ не зависит от w . В свою очередь, (2.14) принимает вид

$$w(r) \geq Ar^{m-1}e^{B(\ln r)^{1+\lambda}},$$

если $-1 < \lambda < 0$, или

$$w(r) \geq Ar^{m-1}e^{B \ln \ln r},$$

если $\lambda = -1$, для всех достаточно больших r , где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

Наконец, в случае $\lambda < -1$ из (2.8) и неотрицательности правой части (2.5) может быть непосредственно получено, что

$$w(r) \geq Ar^{m-1}$$

для некоторого $A \in (0, \infty)$ и любых $r \in [a, \infty)$.

Согласно [1, с. 207, следствие 8.2] последнее неравенство является неулучшаемым. О точности остальных оценок, приведенных выше, свидетельствует также пример 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\varkappa \in (1, \infty)$, справедливо (2.2) и при этом

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup r^{m-k} p_\varkappa(r) > 0. \quad (2.15)$$

Тогда каждое непродолжаемое решение (1.1), (2.4) является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\sigma = \varkappa^{1/2}$. Покажем, что условие (2.15) влечет за собой (2.3).

Предположим противное. Тогда, разумеется,

$$\int_a^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^\infty \int_{\sigma^i a}^{\sigma^{i+1} a} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi < \infty,$$

откуда, в частности, вытекает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\sigma^i a}^{\sigma^{i+1} a} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi = 0.$$

В то же время для всякого $r \in [\sigma^i a, \sigma^{i+1} a]$, $i = 0, 1, 2, \dots$,

$$\int_{\sigma^i a}^{\sigma^{i+1} a} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \geq \frac{\sigma - 1}{\sigma^{m-k}} r^{m-k} p_\sigma(r).$$

Таким образом,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{m-k} p_\sigma(r) = 0,$$

что противоречит неравенству (2.15).

Тем самым справедливо (2.3), и для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2.1–2.3 опирается на следующие утверждения.

ЛЕММА 2.1. Пусть $a \leq a_* < \rho < r < b$, $\gamma > 0$ и $\theta > 1$ – некоторые вещественные числа, и пусть $u: (a_*, b) \rightarrow (0, \infty)$ – решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(s) = & \gamma \left(1 - \frac{a_*}{s}\right)^{m-k-1} \\ & + \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{a_*}^s \left(1 - \frac{\xi}{s}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g(u(\xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (2.16)$$

причем $\theta u(\rho) \geq u(r)$. Тогда

$$\frac{u(r) - u(\rho)}{g_\theta(t)} \geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_\rho^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

для любого $t \in (u(\rho), u(r))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Всякое решение уравнения (2.16) является монотонно не убывающей функцией, так как монотонно не убывают оба слагаемых в правой части (2.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Имеем

$$\begin{aligned}
u(r) - u(\rho) &= \gamma \left(1 - \frac{a_*}{r}\right)^{m-k-1} - \gamma \left(1 - \frac{a_*}{\rho}\right)^{m-k-1} \\
&+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{a_*}^{\rho} \left(\left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} - \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right)^{m-k-1} \right) \\
&\times \xi^{m-k-1} p(\xi) g(u(\xi)) d\xi \\
&+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g(u(\xi)) d\xi \\
&\geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g(u(\xi)) d\xi,
\end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает (2.17).

ЛЕММА 2.2. Пусть $w: [a_*, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \leq a_* < b \leq \infty$, – решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию

$$w^{(m-i)}(a_*) \geq \frac{\delta}{(i-1)!} a_*^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.18)$$

Тогда на промежутке (a_*, b) существует решение интегрального уравнения (2.16), где

$$\gamma = \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(a_*), \quad (2.19)$$

и при этом для любого $r \in (a_*, b)$ будет выполнено неравенство

$$\frac{w^{(k)}(r)}{r^{m-k-1}} \geq u(r) > 0. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (1.1), получим при $r \in (a_*, b)$

$$\begin{aligned}
w^{(k)}(r) &= w^{(k)}(a_*) + w^{(k+1)}(a_*)(r - a_*) + \dots \\
&\dots + \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(a_*)(r - a_*)^{m-k-1} \\
&+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{a_*}^r (r - \xi)^{m-k-1} Q(\xi, w(\xi), \dots, w^{(m-1)}(\xi)) d\xi. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

В то же время $w^{(m-i)}(\xi) > (\delta/(i-1)!) \xi^{i-1}$ для всех $\xi \in [a_*, b)$, $i = 1, \dots, m$, ввиду неотрицательности правой части (1.1) и условия (2.18). Таким образом, объединяя (2.1) и (2.21), будем иметь

$$\begin{aligned}
w^{(k)}(r) &\geq w^{(k)}(a_*) + w^{(k+1)}(a_*)(r - a_*) + \dots \\
&\dots + \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(a_*)(r - a_*)^{m-k-1} + \frac{1}{(m-k-1)!} \\
&\times \int_{a_*}^r (r - \xi)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g\left(\frac{w^{(k)}(\xi)}{\xi^{m-k-1}}\right) d\xi, \quad r \in (a_*, b),
\end{aligned}$$

откуда, обозначая $v(\xi) = w^{(k)}(\xi)/\xi^{m-k-1}$, находим

$$\begin{aligned} v(r) &\geq w^{(k)}(a_*) \frac{1}{r^{m-k-1}} + w^{(k+1)}(a_*) \frac{r-a_*}{r^{m-k-1}} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(a_*) \left(1 - \frac{a_*}{r}\right)^{m-k-1} + \frac{1}{(m-k-1)!} \\ &\times \int_{a_*}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g(v(\xi)) d\xi, \quad r \in (a_*, b). \end{aligned}$$

Построим последовательность непрерывных функций $u_i: (a_*, b) \rightarrow (0, \infty)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, полагая

$$u_0(r) = \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(a_*) \left(1 - \frac{a_*}{r}\right)^{m-k-1}$$

и

$$\begin{aligned} u_i(r) &= \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(a_*) \left(1 - \frac{a_*}{r}\right)^{m-k-1} \\ &+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{a_*}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g(u_{i-1}(\xi)) d\xi, \quad (2.22) \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots$

Индукцией по i несложно показать, что для всех $r \in (a_*, b)$ будут справедливы неравенства

$$v(r) \geq u_i(r) \geq u_{i-1}(r), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Таким образом, существует функция $u: (a_*, b) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что $u_i(r) \rightarrow u(r)$ при $i \rightarrow \infty$ для всех $r \in (a_*, b)$.

Переходя в соотношении (2.22) к пределу при $i \rightarrow \infty$, согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости будем иметь (2.16), где γ определено с помощью (2.19).

Разумеется, из (2.23) также следует оценка (2.20).

ЛЕММА 2.3. *Предположим, что $\alpha \in (0, 1]$, $\theta, \nu \in (1, \infty)$, $T_1 \in (0, \infty)$ и $T_2 \in [\nu T_1, \infty)$ – некоторые вещественные числа, и пусть $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – произвольная измеримая функция такая, что $g_\theta(t) > 0$ для всех $t \in (0, \infty)$. Тогда*

$$\left(\int_{T_1}^{T_2} g_\theta^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{g(t)}, \quad (2.24)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от θ, ν, α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varkappa = \min\{\theta^{1/2}, \nu\}$. Пусть n – максимальное натуральное число такое, что $\varkappa^n T_1 \leq T_2$. Определим конечную последовательность $\{t_i\}_{i=0}^n$, полагая $t_i = \varkappa^i T_1$, $i = 0, \dots, n-1$, и $t_n = T_2$.

Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} \left(\int_{T_1}^{T_2} g_{\theta}^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{\theta}^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{\theta}^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В то же время для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдется $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ такое, что

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{\theta}^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt \geq (t_i - t_{i-1}) g_{\theta}^{-\alpha}(\xi_i) \xi_i^{\alpha-1},$$

откуда, учитывая, что $(t_i - t_{i-1}) \xi_i^{\alpha-1} \geq (\varkappa - 1) \varkappa^{2(\alpha-1)} t_{i-1}^{\alpha}$, получим

$$\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{\theta}^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{(\varkappa - 1)^{1/\alpha} \varkappa^{2(1-1/\alpha)} t_{i-1}}{g_{\theta}(\xi_i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.26)$$

Далее, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{(\varkappa^2 - 1) t_{i-1}}{g_{\theta}(\xi_i)} \geq \frac{t_i - t_{i-1}}{g_{\theta}(\xi_i)} \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{dt}{g(t)}. \quad (2.27)$$

Таким образом, объединяя (2.26) и (2.27), находим

$$\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_{\theta}^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq C \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{dt}{g(t)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $C = (\varkappa - 1)^{1/\alpha} \varkappa^{2(1-1/\alpha)} / (\varkappa^2 - 1)$.

Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться соотношением (2.25).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\alpha \in (0, 1]$ и $\beta \in (0, 1)$. Тогда если $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – монотонно не убывающая функция, то

$$\left(\int_{\beta T_1}^{T_2} g^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{g(t)}$$

для всех вещественных чисел $0 < T_1 < T_2$, где постоянная $C > 0$ зависит только от β и α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем в лемме 2.3 $\nu = \theta = 1/\beta$.

ЛЕММА 2.4. *Предположим, что $\gamma \in (0, \infty)$, $\sigma, \theta \in (1, \infty)$ и $a \leq a_* < \rho < r < b$ – некоторые вещественные числа, и пусть $u: (a_*, b) \rightarrow (0, \infty)$ – решение интегрального уравнения (2.16), причем $r \leq \sigma\rho$ и $\theta u(\rho) \leq u(r)$. Тогда*

$$\int_{u(\rho)}^{u(r)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \int_{\rho}^r p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi, \quad (2.28)$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m, σ, θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – максимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\theta^{(n+1)/2} u(\rho) \leq u(r)$. Рассмотрим конечную последовательность вещественных чисел $\rho < \rho_1 < \dots < \rho_n < r$ такую, что $u(\rho_i) = \theta^{i/2} u(\rho)$, $i = 1, \dots, n$. Положим также $\rho_0 = \rho$ и $\rho_{n+1} = r$. Разумеется, будем иметь $\theta^{1/2} u(\rho_{i-1}) = u(\rho_i)$, $i = 1, \dots, n$, и $\theta^{-1} u(\rho_{n+1}) < u(\rho_n) \leq \theta^{-1/2} u(\rho_{n+1})$. Наконец, обозначим $\tau = \sigma^{1/2}$.

Применяя лемму 2.1, получим для всех $t \in (u(\rho_{i-1}), u(\rho_i))$, $i = 1, \dots, n+1$,

$$\begin{aligned} \frac{u(\rho_i) - u(\rho_{i-1})}{g_{\theta}(t)} &\geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \left(1 - \frac{\xi}{\rho_i}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) d\xi \\ &\geq \frac{p_{\tau}(\sqrt{\rho_{i-1}\rho_i})}{(m-k-1)!} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \left(1 - \frac{\xi}{\rho_i}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} d\xi \\ &\geq \frac{p_{\tau}(\sqrt{\rho_{i-1}\rho_i})}{(m-k-1)!} \int_{\rho_{i-1}}^{(\rho_{i-1}+\rho_i)/2} (\rho_i - \xi)^{m-k-1} \left(\frac{\xi}{\rho_i}\right)^{m-k-1} d\xi \\ &\geq B(\rho_i - \rho_{i-1})^{m-k} p_{\tau}(\sqrt{\rho_{i-1}\rho_i}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где постоянная $B > 0$ зависит только от m и σ , откуда, очевидно, находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(\rho_i) - u(\rho_{i-1})}{g_{\theta}(t)}\right)^{\frac{1}{m-k}} &\geq B^{\frac{1}{m-k}} (\rho_i - \rho_{i-1}) p_{\tau}^{\frac{1}{m-k}}(\sqrt{\rho_{i-1}\rho_i}) \\ &\geq B^{\frac{1}{m-k}} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi, \quad t \in (u(\rho_{i-1}), u(\rho_i)), \\ &i = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

С другой стороны, $u(\rho_i) - u(\rho_{i-1}) \geq (1 - \theta^{-1/2}) u(\rho_i)$, $i = 1, \dots, n+1$, поэтому

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(\rho_i) - u(\rho_{i-1})}{g_{\theta}(t)}\right)^{\frac{1}{m-k}} &\leq (1 - \theta^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m-k}-1} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) \\ &\quad \times u^{\frac{1}{m-k}-1}(\rho_i) (u(\rho_i) - u(\rho_{i-1})) \end{aligned} \quad (2.31)$$

для всех $t \in (u(\rho_{i-1}), u(\rho_i))$, $i = 1, \dots, n+1$.

Объединяя (2.30) и (2.31), имеем

$$g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) u^{\frac{1}{m-k}-1}(\rho_i) (u(\rho_i) - u(\rho_{i-1})) \geq A \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi$$

при каждом $t \in (u(\rho_{i-1}), u(\rho_i))$, $i = 1, \dots, n+1$, где постоянная $A > 0$ зависит только от m , σ и θ .

В то же время для любого $i \in \{1, \dots, n+1\}$ существует $t_i \in (u(\rho_{i-1}), u(\rho_i))$ такое, что

$$\begin{aligned} & \int_{u(\rho_{i-1})}^{u(\rho_i)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ & \geq g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t_i) u^{\frac{1}{m-k}-1}(\rho_i) (u(\rho_i) - u(\rho_{i-1})). \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\int_{u(\rho_{i-1})}^{u(\rho_i)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Наконец, суммируя последнее неравенство, мы получаем (2.28).

ЛЕММА 2.5. Пусть $\gamma \in (0, \infty)$, $\sigma, \theta, \nu \in (1, \infty)$, $\tau = \min\{\nu, \sigma^{1/2}\}$, $a \leq a_* < b \leq \infty$, и пусть $u: (a_*, b) \rightarrow (0, \infty)$ – решение интегрального уравнения (2.16). Тогда для любых вещественных чисел ρ и r , удовлетворяющих неравенствам $a_* < \rho < r < b$ и $\nu\rho \leq r$, найдутся последовательность $\rho = a_0 < a_1 < \dots < a_n = r$, а также конечные множества $\Xi_1, \Xi_2 \subset \{0, \dots, n-1\}$ такие, что $\tau a_i \leq a_{i+1} < \tau^2 a_i$, $i = 0, \dots, n-1$, $\Xi_1 \cup \Xi_2 = \{0, \dots, n-1\}$, $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$, и при этом

$$\int_{u(\rho)}^{u(r)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \sum_{i \in \Xi_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi \quad (2.32)$$

и

$$\int_{u(\rho)}^{u(r)} \frac{dt}{g_{\theta}(t)} \geq B \sum_{i \in \Xi_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi, \quad (2.33)$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m , σ , θ , ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим n максимальное натуральное число такое, что $\tau^n \rho \leq r$. Положим $a_i = \tau^i \rho$, $i = 0, \dots, n-1$, и $a_n = r$. Очевидно, будем иметь $\tau a_i \leq a_{i+1} < \tau^2 a_i \leq \sigma a_i$, $i = 0, \dots, n-1$.

Если $\theta u(a_i) \leq u(a_{i+1})$ для некоторого $i \in \{0, \dots, n-1\}$, то в соответствии с леммой 2.4

$$\int_{u(a_i)}^{u(a_{i+1})} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \int_{a_i}^{a_{i+1}} p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi, \quad (2.34)$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m , σ и θ .

Пусть теперь для некоторого $i \in \{0, \dots, n-1\}$ $\theta u(a_i) > u(a_{i+1})$. Тогда, применяя лемму 2.1, получим для всех $t \in (u(a_i), u(a_{i+1}))$

$$\frac{u(a_{i+1}) - u(a_i)}{g_{\theta}(t)} \geq C(a_{i+1} - a_i)^{m-k} p_{\tau}(\sqrt{a_i a_{i+1}}),$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m и τ (см. доказательство соотношения (2.29)), откуда, учитывая оценку

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \leq a_{i+1}^{m-k} p_\tau(\sqrt{a_i a_{i+1}})$$

и элементарное неравенство $a_{i+1} - a_i \geq (1 - 1/\tau)a_{i+1}$, находим для всех $t \in (u(a_i), u(a_{i+1}))$

$$\frac{u(a_{i+1}) - u(a_i)}{g_\theta(t)} \geq B \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi, \quad (2.35)$$

где постоянная $B > 0$ зависит только от m и τ .

В то же время существует $t_i \in (u(a_i), u(a_{i+1}))$ такое, что

$$\int_{u(a_i)}^{u(a_{i+1})} \frac{dt}{g_\theta(t)} \geq \frac{u(a_{i+1}) - u(a_i)}{g_\theta(t_i)},$$

поэтому (2.35) влечет соотношение

$$\int_{u(a_i)}^{u(a_{i+1})} \frac{dt}{g_\theta(t)} \geq B \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi. \quad (2.36)$$

Обозначим

$$\Xi_1 = \{0 \leq i \leq n-1 : \theta u(a_i) \leq u(a_{i+1})\}$$

и

$$\Xi_2 = \{0 \leq i \leq n-1 : \theta u(a_i) > u(a_{i+1})\}.$$

Суммируя (2.34) по всем $i \in \Xi_1$, получим (2.32). Аналогично, соотношение (2.36) влечет за собой (2.33).

ЛЕММА 2.6. Пусть $\sigma, \nu \in (1, \infty)$, $\alpha \in (0, 1]$, $a \leq \rho < r \leq \infty$ и при этом $\nu\rho \leq r$. Тогда

$$\int_\rho^r p^\alpha(\xi) d\xi \geq C \left(\int_\rho^r \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^\alpha, \quad (2.37)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от σ и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать без ограничения общности, что $r < \infty$, так как в случае $r = \infty$ доказательство получается предельным переходом. Как и выше, обозначим n максимальное натуральное число такое, что $\tau^n \rho \leq r$, где $\tau = \min\{\nu, \sigma^{1/2}\}$, и пусть $a_i = \tau^i \rho$, $i = 0, \dots, n-1$, и $a_n = r$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_\rho^r p^\alpha(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p^\alpha(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} p^\alpha(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ввиду неравенства $\tau a_i \leq a_{i+1} < \tau^2 a_i$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p^\alpha(\xi) d\xi &\geq (a_{i+1} - a_i) p_\tau^\alpha(\sqrt{a_i a_{i+1}}) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) a_{i+1} p_\tau^\alpha(\sqrt{a_i a_{i+1}}), \quad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В то же время

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} p_\sigma(\xi) d\xi &\leq (a_{i+1} - a_i) a_{i+1}^{\frac{1}{\alpha}-1} p_\tau(\sqrt{a_i a_{i+1}}) \\ &\leq a_{i+1}^{\frac{1}{\alpha}} p_\tau(\sqrt{a_i a_{i+1}}), \quad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Объединяя (2.39) и (2.40), очевидно, получим

$$\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} p^\alpha(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq C^{\frac{1}{\alpha}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} p_\sigma(\xi) d\xi, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

где $C = 1 - 1/\tau$.

Таким образом, (2.38) влечет за собой оценку

$$\left(\int_\rho^r p^\alpha(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq C^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} p_\sigma(\xi) d\xi = C^{\frac{1}{\alpha}} \int_\rho^r \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} p_\sigma(\xi) d\xi,$$

откуда непосредственно следует (2.37).

ЛЕММА 2.7. Пусть $\gamma \in (0, \infty)$, $\beta \in (0, 1)$, $\sigma, \nu \in (1, \infty)$, $a \leq a_* < b \leq \infty$, и пусть $u: (a_*, b) \rightarrow (0, \infty)$ – решение интегрального уравнения (2.16). Тогда для любых вещественных чисел ρ и r , удовлетворяющих неравенствам $a_* < \rho < r < b$ и $\nu\rho \leq r$, будем иметь

$$\int_{\beta u(\rho)}^{u(r)} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq C \left(\int_\rho^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}}, \quad (2.41)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m, β, σ, ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varkappa = 1/\beta$, $\theta = \varkappa^{1/2}$, $\zeta = \sigma^{1/2}$ и $\tau = \min\{\nu, \zeta^{1/2}\}$. Согласно лемме 2.5 существуют последовательность $\rho = a_0 < a_1 < \dots < a_n = r$, а также конечные множества $\Xi_1, \Xi_2 \subset \{0, \dots, n-1\}$ такие, что $\tau a_i \leq a_{i+1} < \tau^2 a_i$, $i = 0, \dots, n-1$, $\Xi_1 \cup \Xi_2 = \{0, \dots, n-1\}$, $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$, и при этом

$$\int_{u(\rho)}^{u(r)} g_\theta^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \sum_{i \in \Xi_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p_\zeta^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi, \quad (2.42)$$

$$\int_{u(\rho)}^{u(r)} \frac{dt}{g_\theta(t)} \geq B \sum_{i \in \Xi_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_\zeta(\xi) d\xi, \quad (2.43)$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m, θ, ζ, ν .

Очевидно, справедливо одно из следующих двух соотношений:

$$\sum_{i \in \Xi_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_\rho^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \quad (2.44)$$

или

$$\sum_{i \in \Xi_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_\rho^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi. \quad (2.45)$$

Допустим, что выполнено (2.45). Тогда ввиду (2.43) находим

$$\int_{u(\rho)}^{u(r)} \frac{dt}{g_\theta(t)} \geq \frac{B}{2} \int_\rho^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi. \quad (2.46)$$

С другой стороны, так как $g_\varkappa = (g_\theta)_\theta$, то, применяя лемму 2.3, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{u(\rho)}^{\varkappa u(r)} g_\varkappa^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt &\geq C_1 \left(\int_{u(\rho)}^{\varkappa u(r)} \frac{dt}{g_\theta(t)} \right)^{\frac{1}{m-k}} \\ &\geq C_1 \left(\int_{u(\rho)}^{u(r)} \frac{dt}{g_\theta(t)} \right)^{\frac{1}{m-k}}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от β и m .

Тем самым, объединяя (2.46) и (2.47), получим

$$\int_{u(\rho)}^{\varkappa u(r)} g_\varkappa^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq B_1 \left(\int_\rho^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}},$$

где $B_1 = C_1(B/2)^{\frac{1}{m-k}}$.

Далее, $g_\varkappa(t) = g(\beta t)$ для почти всех $t \in (u(\rho), \varkappa u(r))$ ввиду монотонности функции g и определения вещественного числа $\varkappa$, поэтому

$$\begin{aligned} &\int_{u(\rho)}^{\varkappa u(r)} g_\varkappa^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ &= \beta^{-\frac{1}{m-k}} \int_{\beta u(\rho)}^{u(r)} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt, \end{aligned}$$

что немедленно влечет за собой (2.41).

Предположим теперь, что имеет место (2.44). Учитывая неравенство (2.42), несложно показать, что

$$\begin{aligned} &\left(\int_{u(\rho)}^{u(r)} g_\theta^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \right)^{m-k} \\ &\geq A^{m-k} \sum_{i \in \Xi_1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} p_\zeta^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi \right)^{m-k}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

В то же время согласно лемме 2.6

$$\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} p_{\zeta}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi \right)^{m-k} \geq C_2 \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \quad (2.49)$$

для всех $i \in \Xi_1$, где постоянная $C_2 > 0$ зависит только от ζ , τ и m . Действительно, $p_{\sigma} = (p_{\zeta})_{\zeta}$. Напоминаем также, что $\tau a_i \leq a_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$.

Таким образом, объединяя (2.48), (2.49) и (2.44), будем иметь

$$\left(\int_{u(\rho)}^{u(r)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \right)^{m-k} \geq A_1 \int_{\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi,$$

где $A_1 = A^{m-k} C_2 / 2$, откуда снова следует (2.41).

ЛЕММА 2.8. Пусть $\gamma \in (0, \infty)$, $\sigma, \theta, \nu \in (1, \infty)$, $a \leq a_* < b \leq \infty$, и пусть $u: (a_*, b) \rightarrow (0, \infty)$ – решение интегрального уравнения (2.16). Тогда для любых вещественных чисел ρ и r , удовлетворяющих неравенствам $a_* < \rho < r < b$ и $\nu \rho \leq r$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{u(\rho)}^{u(r)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt + \int_{u(\rho)}^{u(r)} \frac{dt}{g_{\theta}(t)} \\ & \geq C \int_{\rho}^r \min\{\xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi), p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi, \end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m , σ , θ , ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из леммы 2.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Предположим противное. Допустим, что существует непродолжаемое решение $w: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (2.4), которое не является неколеблющимся сингулярным решением второго рода.

Ввиду неотрицательности правой части уравнения (1.1) получим, что $w^{(i)}$, $i = 0, \dots, m-1$, – положительные монотонно не убывающие функции.

Если $b < \infty$, то у $w^{(m-1)}(r)$ существует конечный предел при $r \rightarrow b-0$. Но в этом случае согласно элементарным соотношениям

$$w^{(i-1)}(r) = w^{(i-1)}(a) + \int_a^r w^{(i)}(\xi) d\xi, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

все производные $w^{(i)}(r)$, $i = 0, \dots, m-2$, также имеют конечный предел при $r \rightarrow b-0$, поэтому w может быть продолжено на интервал $[a, \tilde{b})$ для некоторого $\tilde{b} > b$.

Тем самым, $b = \infty$ и из леммы 2.2 следует, что на промежутке (a, ∞) существует положительное решение интегрального уравнения (2.16), где $a_* = a$ и γ определено с помощью (2.19).

Последнее утверждение вместе с условиями (2.2) и (2.3) противоречит лемме 2.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Предположим, что w – правильное решение (1.1), (2.4). Тогда в соответствии с леммой 2.2 существует решение $u: (a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ интегрального уравнения (2.16), где $a_* = a$ и γ задано равенством (2.19), удовлетворяющее при всех $r \in (a, \infty)$ соотношению (2.20).

Возьмем $\beta = 1/2$, $\nu = 2$ и $\rho = 2a$. Применяя лемму 2.7, получим, что для всех $r \in (\nu\rho, \infty)$ выполнено (2.41), где постоянная $C > 0$ зависит только от m и σ .

Условие (2.3) влечет за собой неравенство

$$\int_{\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_a^r \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \quad (2.50)$$

для всех достаточно больших r .

В то же время очевидно, что $u(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. В противном случае, устремляя в (2.41) r к бесконечности, приходим к противоречию.

Таким образом, из (2.9) следует, что

$$\int_1^{u(r)} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq \frac{1}{2} \int_{\beta u(\rho)}^{u(r)} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \quad (2.51)$$

для всех r из некоторой окрестности бесконечности.

Объединяя (2.41), (2.50) и (2.51), находим

$$\int_1^{u(r)} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq B \left(\int_a^r \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}}$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $B > 0$ зависит только от m и σ , откуда ввиду оценки (2.20) имеем (2.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3 повторяет предыдущие рассуждения. Единственная разница состоит в том, что вместо леммы 2.7 теперь надлежит воспользоваться леммой 2.8, где $\theta = 2$.

Следующие результаты важны для теории дифференциальных уравнений в частных производных.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\sigma, \nu \in (1, \infty)$, $a < b \leq \infty$, и пусть w – решение уравнения (1.1) на промежутке $[a, b)$, удовлетворяющее условию (2.4). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\beta w^{(m-1)}(\rho)}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ & \geq C \left(\int_{\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

для всех вещественных чисел $a \leq \rho < r < b$ таких, что $\nu\rho \leq r$, где постоянные $\beta > 0$ и $C > 0$ зависят только от m , σ и ν .

Доказательство. Предположим, что $a \leq \rho < r < b$, и при этом $\nu\rho \leq r$. Из (2.4) и неотрицательности правой части (1.1) следует, что w удовлетворяет также условию

$$w^{(m-i)}(\rho) > \frac{\delta}{(i-1)!} \rho^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тем самым, по лемме 2.2 существует решение $u: (\rho, b) \rightarrow (0, \infty)$ интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(s) = & \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(\rho) \left(1 - \frac{\rho}{s}\right)^{m-k-1} \\ & + \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho}^s \left(1 - \frac{\xi}{s}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g(u(\xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (2.53)$$

для которого будет выполнено (2.20).

Возьмем $\tau = \min\{\sigma^{1/3}, \nu^{1/2}\}$. Применяя лемму 2.7, получим

$$\int_{u(\tau\rho)/2}^{u(r)} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq C_1 \left(\int_{\tau\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}}, \quad (2.54)$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от m и τ .

С другой стороны, из (2.53) вытекает, что

$$u(\tau\rho) \geq \frac{1}{(m-k-1)!} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)^{m-k-1} w^{(m-1)}(\rho). \quad (2.55)$$

Объединяя (2.20), (2.54) и (2.55), находим

$$\begin{aligned} & \int_{\beta w^{(m-1)}(\rho)}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ & \geq C_1 \left(\int_{\tau\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

где $\beta = (1 - 1/\tau)^{m-k-1} / (2(m-k-1)!)$.

Далее, $p_{\tau}(\xi_1) \geq p_{\sigma}(\xi_2)$ для любых $\xi_1 \in [\tau\rho, \tau^2\rho]$ и $\xi_2 \in [\rho, \tau\rho]$, поэтому

$$\int_{\tau\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \geq \int_{\tau\rho}^{\tau^2\rho} \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \geq \int_{\rho}^{\tau\rho} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi,$$

что влечет за собой неравенство

$$\int_{\tau\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi,$$

откуда, учитывая (2.56), имеем оценку (2.52).

ТЕОРЕМА 2.5. *Предположим, что $\sigma \in (1, \infty)$, справедливо (2.2) и при этом*

$$\int_a^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi < \infty. \quad (2.57)$$

Пусть также w – правильное решение (1.1), (2.4). Тогда

$$w^{(m-1)}(\rho) \leq AG_\infty^{-1} \left(B \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \quad (2.58)$$

для всякого $\rho \in [a, \infty)$, где

$$G_\infty(\zeta) = \int_\zeta^\infty g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt, \quad (2.59)$$

G_∞^{-1} – функция, обратная к G_∞ , а постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы получим, устремляя в (2.52) r к бесконечности.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Пусть w – правильное решение (1.1), (2.4), и пусть $i \in \{0, \dots, m-1\}$, $\sigma \in (1, \infty)$ и при этом выполнены соотношения (2.2) и (2.57). Тогда*

$$w^{(i)}(r) \leq Cr^{m-i-1} G_\infty^{-1} \left(B \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \quad (2.60)$$

для всех r из окрестности бесконечности, где G_∞^{-1} – функция, обратная к (2.59), а постоянные $C > 0$ и $B > 0$ зависят только от m и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $i = m-1$ доказательство получается применением теоремы 2.5.

Предположим, что $0 \leq i \leq m-2$. По формуле Ньютона–Лейбница будем, очевидно, иметь

$$\begin{aligned} w^{(i)}(r) &= w^{(i)}(a) + w^{(i+1)}(a)(r-a) + \dots + \frac{1}{(m-i-2)!} w^{(m-2)}(a)(r-a)^{m-i-2} \\ &\quad + \frac{1}{(m-i-2)!} \int_a^r (r-\rho)^{m-i-2} w^{(m-1)}(\rho) d\rho \end{aligned}$$

для всех $r \in [a, \infty)$, откуда с учетом неравенства (2.58) находим

$$\begin{aligned} w^{(i)}(r) &\leq w^{(i)}(a) + w^{(i+1)}(a)(r-a) + \dots + \frac{1}{(m-i-2)!} w^{(m-2)}(a) \\ &\quad \times (r-a)^{m-i-2} + \frac{A}{(m-i-2)!} \int_a^r (r-\rho)^{m-i-2} \\ &\quad \times G_\infty^{-1} \left(B \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) d\rho \end{aligned} \quad (2.61)$$

для всех $r \in [a, \infty)$, где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m и σ .

В силу монотонности G_∞^{-1} последнее слагаемое в (2.61) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{(m-i-2)!} \int_a^r (r-\rho)^{m-i-2} G_\infty^{-1} \left(B \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) d\rho \\ & \leq \frac{A(r-a)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} G_\infty^{-1} \left(B \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right). \end{aligned}$$

Тем самым, для завершения доказательства остается заметить, что

$$G_\infty^{-1} \left(B \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \rightarrow \infty \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 2.4. Рассмотрим уравнение (2.5), где $q \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция, для которой справедливо соотношение (2.6).

Полагая $k = 0$, $g(t) = t \ln^\lambda(1+t)$ и $p(\xi) = q(\xi) \chi_{[1, \infty)}(\xi)$, будем иметь, что (2.2) и (2.57) выполнены тогда и только тогда, когда $\lambda > m$ и $s < -m$. В этом случае согласно следствию 2.3 всякое правильное решение (2.5), (2.8) для любого r из некоторой окрестности бесконечности допускает оценку

$$w(r) \leq A r^{m-1} e^{B r^{(s+m)/(m-\lambda)}}, \quad (2.62)$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

Несложно убедиться в том, что для всех $A, B \in (0, \infty)$ существует положительная непрерывная функция q , удовлетворяющая условию (2.6) и такая, что правая часть неравенства (2.62) сама будет решением (2.5), (2.8).

Таким образом, оценка (2.60) является точной.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\sigma, \nu \in (1, \infty)$, $a < b \leq \infty$, и пусть w – решение уравнения (1.1) на промежутке $[a, b)$, удовлетворяющее условию (2.4). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\beta w^{(m-1)}(\rho)}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt + \int_{\beta w^{(m-1)}(\rho)}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} \frac{dt}{g(t)} \\ & \geq C \int_\rho^r \min\{\xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi), p_\sigma^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi \end{aligned}$$

для всех вещественных чисел $a \leq \rho < r < b$ таких, что $\nu\rho \leq r$, где постоянные $\beta > 0$ и $C > 0$ зависят только от m, σ и ν .

Доказательство следует из леммы 2.2, неравенства (2.55) и леммы 2.8, в которой возьмем $\theta = 2$ (см. доказательство теоремы 2.4).

§ 3. Быстро растущие решения

Ниже будем считать, что $p: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ принадлежит пространству $L_{\text{loc}}([a, \infty))$, а $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – произвольная измеримая функция такая, что для всякого компакта $\Gamma \subset (0, \infty)$ ненулевой меры

$$\text{ess inf}_{\Gamma} g > 0, \quad (3.1)$$

и при этом для некоторых $k \in \{0, \dots, m-1\}$ и $\delta \in (0, \infty)$ на множестве $\{(r, t_0, \dots, t_{m-1}): a \leq r, t_{m-i} > (\delta/(i-1)!)r^{i-1}, i = 1, \dots, m\}$ выполнено (2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [1]. Правильное решение уравнения (1.1) называется *быстро растущим*, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |w^{(m-1)}(r)| = \infty. \quad (3.2)$$

Легко видеть, что всякое быстро растущее решение $w(r)$ уравнения (1.1) знакоопределено в окрестности бесконечности. Не ограничивая общности, мы будем рассматривать только те решения, которые являются положительными при больших r .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, имеет место (2.3) и при этом

$$\int_1^\infty g_\theta^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt = \infty.$$

Тогда любое положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1) для всех достаточно больших r удовлетворяет неравенству (2.10), где

$$H_\infty(\zeta) = \int_1^\zeta g_\theta^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt,$$

H_∞^{-1} – функция, обратная к H_∞ , а постоянная $C > 0$ зависит только от m, σ и θ .

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим уравнение

$$w^{(m)} = q(r)w^{-1} \ln^\lambda(1 + |w|), \quad r > a > 0, \quad (3.3)$$

где $m \geq 2$, а $q \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция такая, что для некоторого вещественного числа s справедливо соотношение (2.6).

Предположим сперва, что $s - m + 2 > 0$. Тогда всякое быстро растущее решение (3.3) допускает оценку

$$|w(r)| \geq Ar^{\frac{s+m}{2}} \ln^{\frac{\lambda}{2}} r \quad (3.4)$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ не зависит от w .

Действительно, считая без ограничения общности, что w положительно в окрестности бесконечности (в противном случае заменяем w на $-w$), получим ввиду (3.2) и (2.6)

$$A_1 r^{m-1} \leq w(r) \quad (3.5)$$

и $w(r) \leq A_2 r^{s+m}$ при всех достаточно больших r для некоторых $A_1, A_2 \in (0, \infty)$. Таким образом, полагая в теореме 3.1 $k = 0$, $\sigma = \theta = 2$, $g(t) = t^{-1}$ и $p(\xi) = \xi^{-2(m-1)} q(\xi) \ln^\lambda(1 + w(\xi)) \chi_{[b, \infty)}(\xi)$, где $b \in [a, \infty)$ достаточно велико, будем, очевидно, иметь

$$p(\xi) \sim \xi^{s-2(m-1)} \ln^\lambda \xi \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty,$$

поэтому (3.4) следует из (2.10).

Далее, пусть $s - m + 2 = 0$ и при этом $\lambda + 1 > 0$. Тогда, применяя теорему 3.1, находим для любого быстро растущего решения уравнения (3.3)

$$|w(r)| \geq A r^{m-1} \ln^{\frac{\lambda+1}{2}} r \quad (3.6)$$

при всех r из окрестности бесконечности, где постоянная $A > 0$ не зависит от w .

Предположим теперь, что $s - m + 2 = 0$ и $\lambda = -1$. Тогда из теоремы 3.1 получается, что каждое быстро растущее решение (3.3) удовлетворяет неравенству

$$|w(r)| \geq A r^{m-1} (\ln \ln r)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ также не зависит от w .

Легко проверить, что правые части (3.4), (3.6) и (3.7) являются решениями уравнения (3.3) для соответствующих функций q , подчиняющихся соотношению (2.6).

Последнее обстоятельство свидетельствует о точности теоремы 3.1.

Наконец, в случае, когда $s - m + 2 < 0$ либо $s - m + 2 = 0$ и $\lambda < -1$, уравнение (3.3) не имеет быстро растущих решений w .

В самом деле, предположим противное, и пусть для определенности w является положительным в окрестности бесконечности. Тогда, интегрируя (3.3), получим согласно (2.6) и (3.5)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup |w^{(m-1)}(r)| < \infty,$$

что противоречит определению быстро растущего решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1 непосредственно вытекает из теоремы 3.2, приведенной ниже (см. также доказательство теоремы 2.2).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\sigma, \theta, \nu \in (1, \infty)$, и пусть $w: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1). Тогда найдется $a_* \in [a, \infty)$ такое, что

$$\begin{aligned} & \int_{w^{(k)}(\rho)/\rho^{m-k-1}}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g_\theta^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ & \geq C \left(\int_\rho^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

для любых вещественных чисел $\rho, r \in [a_*, \infty)$, удовлетворяющих неравенству $\nu \rho \leq r$, где постоянная $C > 0$ зависит только от m, σ, θ и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство леммы 2.7, в котором лемму 2.5 необходимо заменить на следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\sigma, \theta, \nu \in (1, \infty)$ и $\tau = \min\{\nu, \sigma^{1/2}\}$. Предположим также, что $w: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1). Тогда существует $a_* \in [a, \infty)$ такое, что для любых вещественных чисел $\rho, r \in [a_*, \infty)$, удовлетворяющих неравенству $\nu\rho \leq r$, можно выбрать последовательность $\rho = a_0 < a_1 < \dots < a_n = r$, а также конечные множества $\Xi_1, \Xi_2 \subset \{0, \dots, n-1\}$ такие, что $\tau a_i \leq a_{i+1} < \tau^2 a_i$, $i = 0, \dots, n-1$, $\Xi_1 \cup \Xi_2 = \{0, \dots, n-1\}$, $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$, и при этом

$$\int_{w^{(k)}(\rho)/\rho^{m-k-1}}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \sum_{i \in \Xi_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi$$

и

$$\int_{w^{(k)}(\rho)/\rho^{m-k-1}}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} \frac{dt}{g_{\theta}(t)} \geq B \sum_{i \in \Xi_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi,$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m, σ, θ и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.5. Единственная разница состоит в том, что вместо лемм 2.1 и 2.4 мы теперь используем леммы 3.3 и 3.4, приведенные ниже.

ЛЕММА 3.2. Пусть $w \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{m-1}([a, \infty))$ и при этом $w^{(m)}(r) \geq 0$ почти для всех r из окрестности бесконечности. Обозначим

$$\begin{aligned} Z(r, r_*) &= w^{(k)}(r_*) + w^{(k+1)}(r_*)(r - r_*) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(m-k-2)!} w^{(m-2)}(r_*)(r - r_*)^{m-k-2} \\ &\quad + \frac{1}{(m-k-1)!} w^{(m-1)}(r_*)(r - r_*)^{m-k-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Тогда либо

$$w^{(i)}(r) = O(r^{m-i-1}), \quad i = 0, \dots, m-1, \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

либо для всех достаточно больших вещественных чисел $r_* \in [a, \infty)$ функция $Z(r, r_*)/r^{m-k-1}$ монотонно не убывает по r в некоторой окрестности бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $m = k+1$ лемма является тривиальной, поэтому мы можем считать, что $m \geq k+2$.

Предположим сперва, что

$$\int_a^\infty w^{(m)}(\xi) d\xi < \infty, \quad (3.11)$$

тогда, интегрируя очевидное равенство

$$w^{(m-1)}(r) = w^{(m-1)}(a) + \int_a^r w^{(m)}(\xi) d\xi, \quad (3.12)$$

немедленно приходим к (3.10).

Пусть теперь

$$\int_a^\infty w^{(m)}(\xi) d\xi = \infty, \quad (3.13)$$

тогда из (3.12) немедленно следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} w^{(m-1)}(r) = \infty. \quad (3.14)$$

Ввиду монотонности $w^{(m-1)}$ в окрестности бесконечности находим

$$\begin{aligned} w^{(m-2)}(r) &= w^{(m-2)}(a) + \int_a^r w^{(m-1)}(\xi) d\xi \\ &\leq w^{(m-2)}(a) + w^{(m-1)}(r)(r-a) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших r , или, другими словами,

$$w^{(m-1)}(r)r - w^{(m-2)}(r) \geq w^{(m-1)}(r)a - w^{(m-2)}(a).$$

Тем самым, согласно (3.14) для всех достаточно больших $r_* \in [a, \infty)$

$$w^{(m-1)}(r_*)r_* - w^{(m-2)}(r_*) > 0. \quad (3.15)$$

В то же время

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Z(r, r_*)}{r^{m-k-1}} \right) &= \frac{1}{(m-k-2)!} (w^{(m-1)}(r_*)r_* - w^{(m-2)}(r_*))r^{-2} \\ &\quad + O(r^{-3}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая (3.15), получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Z(r, r_*)}{r^{m-k-1}} \right) > 0$$

при всех достаточно больших r .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть для некоторой функции $w \in \tilde{C}_{\text{loc}}^{m-1}([a, \infty))$ выполнено условие (3.13). Тогда, используя в качестве базы индукции равенство (3.14), индукцией по i можно доказать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{w^{(i)}(r)}{r^{m-i-1}} = \infty, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (3.16)$$

В частности, если w является положительным в окрестности бесконечности быстро растущим решением (1.1), то соотношение (3.13), а значит, и соотношение (3.16) для него будут справедливы, поэтому при всех достаточно больших r будем иметь

$$w^{(i)}(r) > \frac{\delta r^{m-i-1}}{(m-i-1)!}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (3.17)$$

где $\delta \in (0, \infty)$ определено в начале этого параграфа, откуда ввиду (2.1) следует, что правая часть уравнения (1.1) является неотрицательной функцией, если r достаточно велико.

В этом случае, как было установлено выше, при всех достаточно больших $r_* \in [a, \infty)$ функция $Z(r, r_*)/r^{m-k-1}$ монотонно не убывает по r в окрестности бесконечности.

Таким образом, $w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}$ также монотонно не убывает в некоторой окрестности бесконечности. В этом можно убедиться, непосредственно продифференцировав тождество

$$\begin{aligned} \frac{w^{(k)}(r)}{r^{m-k-1}} &= \frac{Z(r, r_*)}{r^{m-k-1}} \\ &+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{r_*}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} Q(\xi, w(\xi), \dots, w^{(m-1)}(\xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $r_* \in [a, \infty)$ достаточно велико.

ЛЕММА 3.3. Пусть $w: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1), и пусть $\theta \in (1, \infty)$. Тогда найдется $a_* \in [a, \infty)$ такое, что для любых вещественных чисел $a_* \leq \rho < r$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{\theta w^{(k)}(\rho)}{\rho^{m-k-1}} \geq \frac{w^{(k)}(r)}{r^{m-k-1}}, \quad (3.19)$$

справедлива оценка

$$\frac{\frac{w^{(k)}(r)}{r^{m-k-1}} - \frac{w^{(k)}(\rho)}{\rho^{m-k-1}}}{g_\theta(t)} \geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_\rho^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) d\xi \quad (3.20)$$

при всех $t \in (w^{(k)}(\rho)/\rho^{m-k-1}, w^{(k)}(r)/r^{m-k-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.2 и замечанию 3.1 существуют вещественные числа $r_* \in [a, \infty)$ и $a_* \in [r_*, \infty)$ такие, что $w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}$ и $Z(r, r_*)/r^{m-k-1}$ монотонно не убывают по переменной r на интервале $[a_*, \infty)$, где $Z(r, r_*)$ определено с помощью (3.9). Более того, мы можем считать, что для всех $r \in [r_*, \infty)$ имеет место неравенство (3.17), поэтому правая часть (1.1) является неотрицательной функцией на $[r_*, \infty)$.

Предположим, что $a_* \leq \rho < r$, и при этом выполнено (3.19). Тогда, учитывая (3.18), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{w^{(k)}(r)}{r^{m-k-1}} - \frac{w^{(k)}(\rho)}{\rho^{m-k-1}} &= \frac{Z(r, r_*)}{r^{m-k-1}} - \frac{Z(\rho, r_*)}{\rho^{m-k-1}} \\ &+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{r_*}^{\rho} \left(\left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} - \left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right)^{m-k-1} \right) \\ &\times Q(\xi, w(\xi), \dots, w^{(m-1)}(\xi)) d\xi \\ &+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} Q(\xi, w(\xi), \dots, w^{(m-1)}(\xi)) d\xi \\ &\geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} Q(\xi, w(\xi), \dots, w^{(m-1)}(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

откуда ввиду (2.1) находим

$$\begin{aligned} \frac{w^{(k)}(r)}{r^{m-k-1}} - \frac{w^{(k)}(\rho)}{\rho^{m-k-1}} \\ \geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho}^r \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{m-k-1} \xi^{m-k-1} p(\xi) g\left(\frac{w^{(k)}(\xi)}{\xi^{m-k-1}}\right) d\xi, \end{aligned}$$

что и доказывает (3.20).

ЛЕММА 3.4. Пусть w – положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1). Тогда найдется $a_* \in [a, \infty)$ такое, что для любых вещественных чисел $\sigma, \theta \in (1, \infty)$ и $\rho, r \in [a_*, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам $\rho < r \leq \sigma\rho$ и $\theta w^{(k)}(\rho)/\rho^{m-k-1} \leq w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}$, справедлива оценка

$$\int_{w^{(k)}(\rho)/\rho^{m-k-1}}^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \int_{\rho}^r p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi,$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m, σ и θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.4, если вместо леммы 2.1 в нем воспользоваться леммой 3.3.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, справедливо (2.57) и при этом

$$\int_1^{\infty} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt < \infty. \quad (3.21)$$

Тогда любое положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1) для всех достаточно больших ρ удовлетворяет оценке (2.58), где

$$G_{\infty}(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt, \quad (3.22)$$

G_{∞}^{-1} – функция, обратная к G_{∞} , а постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m, σ и θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tau = \sigma^{1/3}$. Из теоремы 3.2 следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{w^{(k)}(\tau\rho)/(\tau\rho)^{m-k-1}}^{\infty} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ & \geq C \left(\int_{\tau\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

для всех ρ из некоторой окрестности бесконечности, где постоянная $C > 0$ зависит только от m , τ и θ .

В то же время для всех вещественных чисел $r_* \in [a, \infty)$ и $r \in [r_*, \infty)$, очевидно, выполнено соотношение (3.18), где $Z(r, r_*)$ определено с помощью (3.9). При этом ввиду (3.16) и (2.1) для всех достаточно больших r_* и r таких, что $r_* \leq r$, интеграл, стоящий в правой части (3.18), неотрицателен.

Таким образом, для всех достаточно больших $r_* \in [a, \infty)$ и $r \in [r_*, \infty)$ будем иметь

$$\frac{w^{(k)}(r)}{r^{m-k-1}} \geq \frac{Z(r, r_*)}{r^{m-k-1}}.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \frac{w^{(k)}(\tau\rho)}{(\tau\rho)^{m-k-1}} & \geq \frac{Z(\tau\rho, \rho)}{(\tau\rho)^{m-k-1}} = \frac{w^{(k)}(\rho)}{(\tau\rho)^{m-k-1}} + \frac{w^{(k+1)}(\rho)(1 - \frac{1}{\tau})}{(\tau\rho)^{m-k-2}} + \dots \\ & \dots + \frac{w^{(m-2)}(\rho)(1 - \frac{1}{\tau})^{m-k-2}}{(m-k-2)! \tau\rho} + \frac{w^{(m-1)}(\rho)(1 - \frac{1}{\tau})^{m-k-1}}{(m-k-1)!} \end{aligned}$$

для всех ρ из некоторой окрестности бесконечности, откуда находим

$$\frac{w^{(k)}(\tau\rho)}{(\tau\rho)^{m-k-1}} \geq \frac{w^{(m-1)}(\rho)(1 - \frac{1}{\tau})^{m-k-1}}{(m-k-1)!}$$

для всех достаточно больших ρ .

Объединяя последнее неравенство и (3.23), очевидно, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\beta w^{(m-1)}(\rho)}^{\infty} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ & \geq C \left(\int_{\tau\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

для всех ρ из окрестности бесконечности, где $\beta = (1 - 1/\tau)^{m-k-1}/(m-k-1)!$.

Далее, несложно показать, что

$$\begin{aligned} \int_{\tau\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi & \geq \int_{\tau\rho}^{\tau^2\rho} \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \\ & \geq \int_{\rho}^{\tau\rho} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi, \quad \rho \in [a, \infty), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\int_{\tau\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\tau}(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi, \quad \rho \in [a, \infty).$$

Тем самым, учитывая (3.24), будем иметь

$$\int_{\beta w^{(m-1)}(\rho)}^{\infty} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq B \left(\int_{\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}}$$

для всех ρ из некоторой окрестности бесконечности, где постоянная $B > 0$ зависит только от m, σ и θ . Теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Предположим, что $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, $i \in \{0, \dots, m-1\}$ и при этом выполнены соотношения (2.57) и (3.21). Тогда любое положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1) для всех достаточно больших r удовлетворяет неравенству (2.60), где G_{∞}^{-1} – функция, обратная к (3.22), а постоянные $C > 0$ и $B > 0$ зависят только от m, σ и θ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство следствия 2.3.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть для некоторых $\sigma, \theta \in (1, \infty)$ имеют место соотношения (2.3) и (3.21). Тогда уравнение (1.1) не имеет положительных в окрестности бесконечности быстро растущих решений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В противном случае, устремляя в неравенстве (3.8) r к бесконечности, приходим к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пусть для некоторых $\kappa, \theta \in (1, \infty)$ имеют место соотношения (2.15) и (3.21). Тогда уравнение (1.1) не имеет положительных в окрестности бесконечности быстро растущих решений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается из теоремы 3.4 с помощью рассуждений, приведенных в доказательстве следствия 2.1.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть $\sigma, \theta \in (1, \infty)$ и при этом справедливо (2.13). Тогда любое положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение уравнения (1.1) для всех достаточно больших r удовлетворяет оценке*

$$\begin{aligned} & \int_1^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt + \int_1^{w^{(k)}(r)/r^{m-k-1}} \frac{dt}{g_{\theta}(t)} \\ & \geq C \int_a^r \min\{\xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi), p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi, \end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m, σ и θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 3.1 (см. также доказательство теоремы 2.2).

§ 4. Уравнения типа Эмдена–Фаулера

В этом параграфе мы будем изучать уравнения порядка $m \geq 1$ вида

$$w^{(m)} = q(r)|w^{(k)}|^\lambda \operatorname{sign} w, \quad r > a > 0, \quad (4.1)$$

где $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а $q: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – некоторая функция, локально интегрируемая на $[a, \infty)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\lambda, \sigma \in (1, \infty)$ и

$$\int_a^\infty \xi^{\lambda(m-k-1)} q_\sigma(\xi) d\xi = \infty. \quad (4.2)$$

Тогда любое непродолжаемое решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условию

$$w^{(i)}(a)w(a) > 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (4.3)$$

является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, не ограничивая общности, что $w^{(i)}$, $i = 0, \dots, m-1$, – положительные функции. В противном случае заменим w на $-w$.

Таким образом, для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 2.1, в которой следует взять $g(t) = t^\lambda$ и $p(\xi) = \xi^{\lambda(m-k-1)-m+k+1}q(\xi)$.

ПРИМЕР 4.1. Предположим, что выполнено (2.6). В этом случае соотношение (4.2), очевидно, эквивалентно неравенству $s \geq -\lambda(m-k-1) - 1$.

В частности, если

$$s \geq -\lambda(m-k-1) - 1 \quad \text{и} \quad \lambda > 1, \quad (4.4)$$

то из теоремы 4.1 следует, что любое непродолжаемое решение (4.1), (4.3) является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

Не представляет особого труда показать, что условие (4.4) является точным.

Пусть теперь

$$q(r) \sim r^{-\lambda(m-k-1)-1} (\ln r)^{-1} \dots \underbrace{(\ln \dots \ln r)^{-1}}_n \underbrace{(\ln \dots \ln r)^s}_{n+1} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

где $n \geq 0$ – целое число, а $s \in \mathbb{R}$. Легко увидеть, что (4.2) будет справедливо тогда и только тогда, когда $s \geq -1$.

Тем самым, применяя теорему 4.1, получим, что при

$$s \geq -1 \quad \text{и} \quad \lambda > 1 \quad (4.6)$$

всякое непродолжаемое решение (4.1), (4.3) является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

В случае, когда (4.6) не имеет места, можно показать, что для некоторой непрерывной положительной функции q , удовлетворяющей соотношению (4.5), существует правильное решение (4.1), (4.3).

Таким образом, условие (4.6) также является точным.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (1, \infty)$ и при этом выполнено (4.2). Тогда любое быстро растущее решение (4.1) для всех достаточно больших r удовлетворяет неравенству

$$|w^{(k)}(r)| \geq Ar^{m-k-1} \left(\int_a^r \xi^{\lambda(m-k-1)} q_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad (4.7)$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m , σ и λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Предположим, что $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (1, \infty)$ и справедливо (4.2). Тогда любое правильное решение (4.1), (4.3) для всех достаточно больших r допускает оценку (4.7), где постоянная $A > 0$ зависит только от m , σ и λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая без ограничения общности, что $w(a) > 0$, будем иметь согласно (4.3) и неотрицательности правой части (4.1)

$$w^{(i)}(r) \geq \varepsilon r^{m-i-1}, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

для некоторого $\varepsilon \in (0, \infty)$ при всех $r \geq a$, поэтому из (4.1) и (4.2) получим

$$w^{(m-1)}(r) \geq w^{(m-1)}(a) + \varepsilon^\lambda \int_a^r \xi^{\lambda(m-k-1)} q(\xi) d\xi \rightarrow \infty \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Тем самым, w является быстро растущим решением, и для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 4.2.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим уравнение

$$w^{(m)} = q(r)|w|^\lambda \operatorname{sign} w, \quad r > a > 0, \quad (4.8)$$

где, как и прежде, $q \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция, а $\lambda \in (-\infty, 1)$.

Если q удовлетворяет соотношению (2.6), причем $s > -\lambda(m-1)-1$, то согласно следствию 4.1 для любого правильного решения (4.8), (4.3) находим

$$|w(r)| \geq Ar^{\frac{m+s}{1-\lambda}} \quad (4.9)$$

при всех достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ не зависит от w .

Пусть теперь $s = -\lambda(m-1)-1$. Тогда из следствия 4.1 вытекает, что всякое правильное решение (4.8), (4.3) для всех r из окрестности бесконечности допускает оценку

$$|w(r)| \geq Ar^{m-1} \ln^{\frac{1}{1-\lambda}} r, \quad (4.10)$$

где постоянная $A > 0$ также не зависит от w .

Чтобы убедиться в точности оценок (4.9) и (4.10), достаточно проверить, что правые части этих неравенств сами являются решениями (4.8), (4.3) при подходящем выборе непрерывной положительной функции q , удовлетворяющей соотношению (2.6), и достаточно большом $a > 0$.

Далее, предположим, что

$$q(r) \sim r^{-\lambda(m-1)-1} (\ln r)^{-1} \dots \underbrace{(\ln \dots \ln r)^{-1}}_n \underbrace{(\ln \dots \ln r)^s}_{n+1} \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (4.11)$$

где n – целое неотрицательное число и $s \in (-1, \infty)$. Тогда, применяя следствие 4.1, получим, что для любого правильного решения (4.8), (4.3) будет справедливо неравенство

$$|w(r)| \geq Ar^{m-1} \underbrace{(\ln \dots \ln r)^{\frac{s+1}{1-\lambda}}}_{n+1}$$

при всех r из окрестности бесконечности, где постоянная $A > 0$ не зависит от w .

Если $a > 0$ достаточно велико, то для некоторой положительной непрерывной функции q , удовлетворяющей соотношению (4.11), правая часть (4.12) является правильным решением (4.8), (4.3), что также свидетельствует о точности оценки (4.12).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\lambda, \sigma \in (1, \infty)$,

$$\int_a^\infty \xi^{\lambda(m-k-1)} q_\sigma(\xi) d\xi < \infty, \quad (4.13)$$

и пусть w – правильное решение (4.1), (4.3). Тогда для всякого $\rho \in [a, \infty)$

$$|w^{(m-1)}(\rho)| \leq A \left(\int_\rho^\infty \xi^{\lambda(m-k-1)} q_\sigma(\xi) d\xi \right)^{-\frac{1}{\lambda-1}},$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m, σ и λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Предположим, что $\lambda, \sigma \in (1, \infty)$, w – правильное решение (4.1), (4.3) и при этом имеет место (4.13). Тогда

$$|w^{(i)}(r)| \leq Ar^{m-i-1} \left(\int_r^\infty \xi^{\lambda(m-k-1)} q_\sigma(\xi) d\xi \right)^{-\frac{1}{\lambda-1}}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (4.14)$$

для всех r из окрестности бесконечности, где постоянная $A > 0$ зависит только от m, σ и λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в следствии 2.3 $p(\xi) = \xi^{\lambda(m-k-1)-m+k+1} q(\xi)$ и $G_\infty^{-1}(t) = ((\lambda-1)t/(m-k))^{(m-k)/(1-\lambda)}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $\lambda, \varkappa \in (1, \infty)$ и при этом

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup r^{\lambda(m-k-1)+1} q_\varkappa(r) > 0. \quad (4.15)$$

Тогда любое непродолжаемое решение (4.1), (4.3) является неколеблущимся сингулярным решением второго рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в следствии 2.1 $p(\xi) = \xi^{\lambda(m-k-1)-m+k+1}q(\xi)$.

В случае $m = 2$ и $k = 0$ из следствия 4.3 вытекает теорема 17.5 монографии [1].

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\lambda, \sigma \in (1, \infty)$ и при этом выполнено (4.2). Тогда уравнение (4.1) не имеет быстро растущих решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякое быстро растущее решение является знакоопределенным в окрестности бесконечности. С другой стороны, если w – решение уравнения (4.1), то, очевидно, $-w$ тоже будет решением (4.1).

Таким образом, если уравнение (4.1) имеет быстро растущее решение, то оно имеет и положительное в окрестности бесконечности быстро растущее решение. Тем самым, для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 3.4.

Точно так же следствия 3.1 и 3.2 влекут за собой утверждения, приведенные ниже.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Предположим, что $\lambda, \sigma \in (1, \infty)$ и справедливо соотношение (4.13). Тогда любое быстро растущее решение (4.1) для всех достаточно больших r допускает оценку (4.14), где постоянная $A > 0$ зависит только от m, σ и λ .

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $\lambda, \kappa \in (1, \infty)$ и при этом имеет место (4.15). Тогда уравнение (4.1) не имеет быстро растущих решений.

§ 5. Кнезеровские решения

В этом параграфе будут изучаться решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условию

$$(-1)^i w^{(i)}(r) \geq 0 \quad \text{для всех } r \in [a, \infty), \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (5.1)$$

– так называемые *кнезеровские решения*. При этом, если не оговорено противное, мы считаем, что для некоторого $k \in \{0, \dots, m-1\}$ на множестве $\{(r, t_0, \dots, t_{m-1}): a \leq r, (-1)^i t_i > 0, i = 0, \dots, m-1\}$ выполнено неравенство

$$(-1)^m Q(r, t_0, \dots, t_{m-1}) \geq p(r)g(|t_k|), \quad (5.2)$$

где $p: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ принадлежит пространству $L_{\text{loc}}([a, \infty))$, а $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – произвольная измеримая функция такая, что для всякого компакта $\Gamma \subset (0, \infty)$ ненулевой меры имеет место (3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из соотношений (1.1), (5.1) и (5.2) следует, что $(-1)^i w^{(i)}$, $i = 0, \dots, m-1$, – монотонно не возрастающие неотрицательные функции. Причем если $w^{(j)}(b) = 0$ для некоторых $b \in [a, \infty)$ и $j \in \{0, \dots, m-1\}$, то $w^{(j)}(r) = 0$ для всех $r \in [b, \infty)$. В последнем случае, очевидно, w является константой на интервале $[b, \infty)$.

Пусть $\theta \in (1, \infty)$. Положим

$$H_0(\zeta) = \int_{\zeta}^1 g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt.$$

В случае, когда

$$\int_0^1 g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt < \infty, \quad (5.3)$$

обозначим также

$$G_0(\zeta) = \int_0^{\zeta} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt.$$

Под H_0^{-1} и G_0^{-1} будем подразумевать функции, обратные к H_0 и G_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 [1]. Решение $w: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1.1) называется *сингулярным первого рода*, если существует вещественное число $b \in (a, \infty)$ такое, что для всякого $c \in (a, b)$

$$\max_{r \in [c, b]} |w(r)| > 0,$$

и при этом $w(r) = 0$ для всякого $r \in [b, \infty)$.

Промежуток $[a, b)$ принято называть *носителем* решения w .

Сингулярное решение первого рода с носителем $[a, b)$ является *неколеблющимся*, если $w(r) \neq 0$ при всех $r \in (b - \varepsilon, b)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\sigma, \theta \in (1, \infty)$ и при этом выполнены условия (2.3) и (5.3). Тогда всякое решение (1.1), (5.1) тождественно равняется константе в некоторой окрестности бесконечности.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $m \geq 2$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, имеют место соотношения (5.3), (2.57) и при этом для любого $c \in (0, \infty)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup r^k G_0^{-1} \left(c \left(\int_r^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) > 0. \quad (5.4)$$

Тогда всякое решение (1.1), (5.1) тождественно равняется константе в некоторой окрестности бесконечности.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Предположим, что $\varkappa, \theta \in (1, \infty)$, имеет место (5.3) и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup r^k G_0^{-1} \left(c r p_{\varkappa}^{\frac{1}{m-k}}(r) \right) > 0 \quad (5.5)$$

для любого $c \in (0, \infty)$. Тогда всякое решение (1.1), (5.1) тождественно равняется константе в некоторой окрестности бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнено (2.3), то доказательство вытекает из теоремы 5.1. Тем самым, мы можем считать, что справедливо (2.57).

Возьмем $\sigma = \varkappa^{1/2}$. Очевидно, получим

$$\int_r^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \geq \int_r^{\sigma r} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \geq (\sigma - 1) r^{m-k} p_{\varkappa}(r), \quad r \in [a, \infty),$$

откуда, учитывая (5.5) и монотонность функции G_0^{-1} , будем иметь (5.4).

Таким образом, для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 5.2.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $m \geq 2$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, справедливы соотношения (5.3), (2.57) и для каждого $c \in (0, \infty)$

$$\int_a^\infty d\rho \rho^{k-1} G_0^{-1} \left(c \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) = \infty. \quad (5.6)$$

Тогда всякое решение (1.1), (5.1) тождественно равняется константе в некоторой окрестности бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если в предпосылках к теоремам 5.1–5.3, а также к следствию 5.1 дополнительно оговорить, что

$$\text{mes}\{r \geq a_0 : Q(r, t_0, 0, \dots, 0) \neq 0\} > 0 \quad \text{для всех } a_0 \in [a, \infty) \text{ и } t_0 \in (0, \infty), \quad (5.7)$$

то каждое ненулевое решение (1.1), (5.1), очевидно, будет неколеблющимся сингулярным решением первого рода.

Условие (5.7), в частности, выполнено, если $k = 0$ и при этом имеет место любое из соотношений (2.3) или (5.5).

В случае $g(t) = t^\lambda$, $\lambda < 1$, следствие 5.1 с учетом замечания 5.2 влечет за собой теорему 4 работы [2].

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим уравнение

$$w^{(m)} = (-1)^m p(r) g(w), \quad r > a > 0, \quad (5.8)$$

где $p: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ принадлежит пространству $L_{\text{loc}}([a, \infty))$, а $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная функция, причем

$$p(r) \sim r^s \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (5.9)$$

для некоторого $s \in \mathbb{R}$ (т.е. существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 r^s \leq p(r) \leq c_2 r^s$ для всех r из окрестности бесконечности), $g(t) > 0$ при $t > 0$, $g(0) = 0$ и $g(t) = t \ln^\lambda t^{-1}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех положительных t из окрестности нуля.

Применяя теорему 5.1 (см. также замечание 5.2), получим, что при $\lambda > m$ и $s \geq -m$ любое ненулевое кнезеровское решение (5.8) будет неколеблющимся сингулярным решением первого рода.

Покажем, что последнее условие является точным. Допустим, что $\lambda \leq m$ либо $s < -m$. Тогда найдется положительная непрерывная функция p , удовлетворяющая соотношению (5.9) и такая, что уравнение (5.8) обладает правильным кнезеровским решением.

В самом деле, если $s < -m$, то таковым решением будет

$$w(r) = A + Br^{s+m}, \quad A, B \in (0, \infty). \quad (5.10)$$

Далее считаем, что $A, B, \varepsilon \in (0, \infty)$ и при этом ε достаточно мало.

Предположим, что $\lambda = m$ и $s = -m$. Тогда нужный пример доставляет нам равенство

$$w(r) = Ae^{-(r/\varepsilon)^B}.$$

Аналогично, если $\lambda = m$ и $s > -m$, то вышеупомянутое решение определяется выражением

$$w(r) = Ae^{-e^{B(r/\varepsilon)^{(s+m)/m}}}.$$

Несложно также проверить, что функции

$$w(r) = Ae^{-B(\ln(r/\varepsilon))^{m/(m-\lambda)}}$$

в случае $0 \leq \lambda < m$ и $s = -m$ и

$$w(r) = Ae^{-B(\ln(r/\varepsilon))^{1/(1-\lambda)}}$$

в случае $\lambda < 0$ и $s = -m$ удовлетворяют соотношениям (5.8), (5.1) для некоторых p вида (5.9).

Наконец, если $\lambda < m$ и $s > -m$, то искомым решением является

$$w(r) = Ae^{-B(r/\varepsilon)^{(s+m)/(m-\lambda)}}.$$

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть w – решение (1.1), (5.1) и при этом для некоторых $\sigma, \theta \in (1, \infty)$ выполнены условия (2.57) и (5.3). Тогда либо $w^{(k)} \equiv 0$ в окрестности бесконечности, либо

$$(-1)^k w^{(k)}(\rho) \geq G_0^{-1} \left(C \left(\int_{\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \quad (5.11)$$

для всех $\rho \in [a, \infty)$, где постоянная $C > 0$ зависит только от m, σ и θ .

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим уравнение (5.8), где функции p и g такие же, как и в примере 5.1. В случае $\lambda > m$ и $s < -m$ согласно теореме 5.4 для каждого правильного кнезеровского решения (5.8) будем иметь

$$w(r) \geq Ae^{-Br^{(s+m)/(m-\lambda)}} \quad (5.12)$$

при всех $r \in [a, \infty)$, где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

Несложно убедиться в том, что для любого $A \in (0, \infty)$ и достаточно большого $B \in (0, \infty)$ найдутся функции p и g , обладающие приведенными в примере 5.1 свойствами и такие, что правая часть неравенства (5.12) является кнезеровским решением уравнения (5.8).

ПРИМЕР 5.3. Пусть p , как и ранее, имеет вид (5.9), в то время как $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – непрерывная функция такая, что $g(t) = t^{-1} \ln^{\lambda} t^{-1}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ при всех положительных t из окрестности нуля. Предположим также, что w – правильное кнезеровское решение (5.8) и $m + s < 0$. Тогда, применяя теорему 5.4, получим для всех $r \in [a, \infty)$

$$w(r) \geq Ar^{\frac{m+s}{2}} \ln^{\frac{\lambda}{2}}(Br), \quad (5.13)$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

Для того чтобы убедиться в точности последней оценки, достаточно подставить правую часть (5.13) в уравнение (5.8).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $m \geq 2$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\sigma, \theta \in (1, \infty)$ и при этом справедливы неравенства (2.57) и (5.3). Тогда каждое кнезеровское решение уравнения (1.1) либо является константой в окрестности бесконечности, либо для всех $r \in [a, \infty)$ допускает оценку

$$w(r) - w(\infty) \geq A \int_r^\infty d\rho \rho^{k-1} G_0^{-1} \left(B \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right), \quad (5.14)$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m , σ и θ .

ТЕОРЕМА 5.5. Предположим, что $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, имеют место (2.3) и при этом

$$\int_0^1 g_\theta^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt = \infty. \quad (5.15)$$

Тогда каждое решение (1.1), (5.1) для всех достаточно больших r удовлетворяет неравенству

$$(-1)^k w^{(k)}(r) \leq H_0^{-1} \left(C \left(\int_a^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right), \quad (5.16)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m , σ и θ .

ПРИМЕР 5.4. Пусть w – кнезеровское решение уравнения (5.8), где функции p и g такие же, как в примере 5.1.

Согласно теореме 5.5 в случае $\lambda < m$ и $s > -m$ для всех достаточно больших r получим следующую оценку:

$$w(r) \leq A e^{-Br^{(s+m)/(m-\lambda)}}, \quad (5.17)$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

Аналогично, в случае $\lambda = m$ и $s > -m$ будем иметь

$$w(r) \leq A e^{-e^{Br^{(s+m)/m}}} \quad (5.18)$$

для всех r из окрестности бесконечности, где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ также не зависят от w .

О точности оценок (5.17) и (5.18) свидетельствует пример 5.1.

ТЕОРЕМА 5.6. Предположим, что $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, w – решение (1.1), (5.1) и при этом

$$\int_a^\infty \min\{\xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi), p_\sigma^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi = \infty. \quad (5.19)$$

Тогда либо $w^{(k)} \equiv 0$ в некоторой окрестности бесконечности, либо

$$\begin{aligned} & \int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^1 g_\theta^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt + \int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^1 \frac{dt}{g_\theta(t)} \\ & \geq C \int_a^r \min\{\xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi), p_\sigma^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi \end{aligned}$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $C > 0$ зависит только от m , σ и θ .

ПРИМЕР 5.5. Пусть w – правильное кнезеровское решение уравнения (5.8), где p и g – функции, рассмотренные в примере 5.1, причем $s = -m$ и $\lambda \leq m$.

Применяя теорему 5.6, находим для всех достаточно больших r

$$w(r) \leq Ae^{-r^B}, \quad (5.20)$$

если $\lambda = m$,

$$w(r) \leq Ae^{-B(\ln r)^{m/(m-\lambda)}}, \quad (5.21)$$

если $0 \leq \lambda < m$, и

$$w(r) \leq Ae^{-B(\ln r)^{1/(1-\lambda)}}, \quad (5.22)$$

если $\lambda < 0$, где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

Очевидно (см. пример 5.1), оценки (5.20)–(5.22) являются точными.

Для доказательства сформулированных выше результатов нам потребуются следующие утверждения.

ЛЕММА 5.1. Пусть $a \leq \rho < r$ и $\theta > 1$ – некоторые вещественные числа, и пусть w – решение (1.1), (5.1) такое, что $(-1)^k \theta w^{(k)}(r) \geq (-1)^k w^{(k)}(\rho) > 0$. Тогда

$$\frac{(-1)^k w^{(k)}(\rho) - (-1)^k w^{(k)}(r)}{g_\theta(t)} \geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_\rho^r (\xi - \rho)^{m-k-1} p(\xi) d\xi \quad (5.23)$$

для всех $t \in ((-1)^k w^{(k)}(r), (-1)^k w^{(k)}(\rho))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (1.1), будем иметь

$$\begin{aligned} & (-1)^k w^{(k)}(\rho) - (-1)^k w^{(k)}(r) \\ &= (-1)^{k+1} w^{(k+1)}(r)(r - \rho) + \dots + \frac{(-1)^{m-1} w^{(m-1)}(r)(r - \rho)^{m-k-1}}{(m-k-1)!} \\ &+ \frac{1}{(m-k-1)!} \int_\rho^r (\xi - \rho)^{m-k-1} (-1)^m Q(\xi, w(\xi), \dots, w^{(m-1)}(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая соотношение (5.2) и замечание 5.1, получим

$$\begin{aligned} & (-1)^k w^{(k)}(\rho) - (-1)^k w^{(k)}(r) \\ & \geq \frac{1}{(m-k-1)!} \int_{\rho}^r (\xi - \rho)^{m-k-1} p(\xi) g((-1)^k w^{(k)}(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

откуда немедленно вытекает (5.23).

ЛЕММА 5.2. *Предположим, что $\sigma, \theta \in (1, \infty)$, $\rho \in [a, \infty)$, $r \in (\rho, \infty)$, $r \leq \sigma\rho$, и при этом w – решение (1.1), (5.1) такое, что $0 < (-1)^k \theta w^{(k)}(r) \leq (-1)^k w^{(k)}(\rho)$. Тогда*

$$\int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^{(-1)^k w^{(k)}(\rho)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \int_{\rho}^r p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi,$$

где постоянная $A > 0$ зависит только от m , σ и θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 2.4, с заменой леммы 2.1 на лемму 5.1.

ЛЕММА 5.3. *Пусть $\sigma, \theta, \nu \in (1, \infty)$, $\tau = \min\{\nu, \sigma^{1/2}\}$, и пусть w – решение (1.1), (5.1). Тогда для любых вещественных чисел ρ и r , удовлетворяющих неравенствам $a \leq \rho < r$, $\nu\rho \leq r$ и $(-1)^k w^{(k)}(r) > 0$, найдутся последовательность $\rho = a_0 < a_1 < \dots < a_n = r$, а также конечные множества $\Xi_1, \Xi_2 \subset \{0, \dots, n-1\}$ такие, что $\tau a_i \leq a_{i+1} < \tau^2 a_i$, $i = 0, \dots, n-1$, $\Xi_1 \cup \Xi_2 = \{0, \dots, n-1\}$, $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$, и при этом*

$$\int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^{(-1)^k w^{(k)}(\rho)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq A \sum_{i \in \Xi_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi) d\xi$$

и

$$\int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^{(-1)^k w^{(k)}(\rho)} \frac{dt}{g_{\theta}(t)} \geq B \sum_{i \in \Xi_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi,$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m , σ , θ и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.5 (с учетом лемм 5.1 и 5.2).

ЛЕММА 5.4. *Пусть $m \geq 2$, w – решение (1.1), (5.1), $j, l \in \{1, \dots, m-1\}$, $j \geq l$ и $\varkappa \in (0, 1)$. Тогда найдется постоянная $A > 0$, зависящая только от m и $\varkappa$, такая, что*

$$(-1)^j A r^j w^{(j)}(r) \leq w(\varkappa^j r) - w(\infty) \quad (5.24)$$

для всех $r \in [\varkappa^{-j} a, \infty)$ и

$$(-1)^j A r^{j-l} w^{(j)}(r) \leq (-1)^l w^{(l)}(\varkappa^{j-l} r) \quad (5.25)$$

для всех $r \in [\varkappa^{l-j} a, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функции $(-1)^i w^{(i)}$, $i = 0, \dots, m-1$, монотонно не возрастают, то

$$w(\varkappa^j r) - w(\infty) = - \int_{\varkappa^j r}^{\infty} w'(\xi) d\xi \geq - \int_{\varkappa^j r}^{\varkappa^{j-1} r} w'(\xi) d\xi \geq - \varkappa^{j-1} (1 - \varkappa) r w'(\varkappa^{j-1} r)$$

для всех $r \in [\varkappa^{-j} a, \infty)$ и

$$\begin{aligned} (-1)^s w^{(s)}(\varkappa r) &\geq (-1)^s w^{(s)}(\varkappa r) - (-1)^s w^{(s)}(r) = (-1)^{s+1} \int_{\varkappa r}^r w^{(s+1)}(\xi) d\xi \\ &\geq (-1)^{s+1} (1 - \varkappa) r w^{(s+1)}(r), \quad s = 1, \dots, j-1, \end{aligned}$$

для всех $r \in [\varkappa^{-1} a, \infty)$, откуда немедленно следуют (5.24) и (5.25).

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть $\sigma, \theta, \nu \in (1, \infty)$, $a \leq \rho < r$ и $\nu \rho \leq r$. Тогда для каждого решения (1.1), (5.1) такого, что $(-1)^k w^{(k)}(r) > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^{(-1)^k w^{(k)}(\rho)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt + \int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^{(-1)^k w^{(k)}(\rho)} \frac{dt}{g_{\theta}(t)} \\ &\geq C \int_{\rho}^r \min\{\xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi), p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m, σ, θ и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно получается из леммы 5.3.

ТЕОРЕМА 5.8. Предположим, что $\sigma, \theta, \nu \in (1, \infty)$, w – решение (1.1), (5.1), $a \leq \rho < r$, $\nu \rho \leq r$ и $(-1)^k w^{(k)}(r) > 0$. Тогда

$$\int_{(-1)^k w^{(k)}(r)}^{(-1)^k w^{(k)}(\rho)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \geq C \left(\int_{\rho}^r \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}}, \quad (5.27)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m, σ, θ и ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство леммы 2.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть w – решение (1.1), (5.1). Если

$$(-1)^k w^{(k)}(r) > 0 \quad \text{для всех } r \in [a, \infty), \quad (5.28)$$

то, применяя теорему 5.8, где $r \rightarrow \infty$, очевидно, приходим к противоречию.

Таким образом, $w^{(k)}(r) = 0$ для некоторого $r \in [a, \infty)$, и поэтому w является константой на интервале $[r, \infty)$ (см. замечание 5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.4. Как уже было сказано выше, для всякого решения (1.1), (5.1) либо $w^{(k)} \equiv 0$ в некоторой окрестности бесконечности, либо имеет место соотношение (5.28). В последнем случае для завершения доказательства остается в неравенстве (5.27) устремить r к бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Предположим противное. Тогда существует решение (1.1), (5.1), удовлетворяющее условию (5.28). Таким образом, согласно теореме 5.4 и неравенству (5.24) найдется вещественное число $c \in (0, \infty)$ такое, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^k G_0^{-1} \left(c \left(\int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) = 0,$$

что противоречит (5.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.3. Предположим противное. Тогда существует решение (1.1), (5.1), удовлетворяющее условию (5.28). В то же время, ввиду оценок (5.11) и (5.25), в которых надлежит взять $j = k$ и $l = 1$, имеем

$$\begin{aligned} A \int_{\varkappa^{1-k}a}^\infty d\rho \rho^{k-1} G_0^{-1} \left(C \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \\ \leq - \int_{\varkappa^{1-k}a}^\infty d\rho w'(\varkappa^{k-1}\rho) = \varkappa^{1-k}(w(a) - w(\infty)) < \infty, \end{aligned}$$

где $A, C \in (0, \infty)$ и $\varkappa \in (0, \infty)$ – некоторые константы, что противоречит соотношению (5.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5.2. Каждое кнезеровское решение уравнения (1.1) либо является константой в окрестности бесконечности, либо удовлетворяет условию (5.28). В последнем случае возьмем $\tau = \sigma^{1/3}$. Учитывая лемму 5.4, получим

$$(-1)^k A \rho^{k-1} w^{(k)}(\tau \rho) \leq -w'(\rho) \quad (5.29)$$

для всех $\rho \in [a, \infty)$, где постоянная $A > 0$ зависит только от m и σ .

С другой стороны, по теореме 5.4

$$G_0^{-1} \left(C \left(\int_{\tau \rho}^\infty \xi^{m-k-1} p_\tau(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \leq (-1)^k w^{(k)}(\tau \rho)$$

для всех $\rho \in [a, \infty)$, где постоянная $C > 0$ также зависит только от m и σ .

В то же время согласно рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы 2.4, имеем

$$\frac{1}{2} \int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \leq \int_{\tau \rho}^\infty \xi^{m-k-1} p_\tau(\xi) d\xi, \quad \rho \in [a, \infty).$$

Таким образом, так как G_0^{-1} – монотонно возрастающая функция, будет справедливо следующее неравенство:

$$G_0^{-1} \left(B \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \leq (-1)^k w^{(k)}(\tau \rho), \quad \rho \in [a, \infty),$$

где $B = C/2$, откуда, учитывая (5.29), находим

$$A \rho^{k-1} G_0^{-1} \left(B \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right) \leq -w'(\rho), \quad \rho \in [a, \infty).$$

Наконец, интегрируя последнюю оценку, имеем (5.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.5. Пусть w – решение (1.1), (5.1). Если $w^{(k)} \equiv 0$ в окрестности бесконечности, то неравенство (5.16) тривиально, поэтому мы можем считать, что имеет место (5.28) (см. замечание 5.1).

Фиксируем произвольное $\rho \in (a, \infty)$. Согласно (5.15)

$$\begin{aligned} & \int_{(-1)^k w^{(k)}(\rho)}^1 g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \\ & \geq \frac{1}{2} \int_{(-1)^k w^{(k)}(\rho)}^{(-1)^k w^{(k)}(r)} g_{\theta}^{-\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt \end{aligned} \quad (5.30)$$

для всех достаточно больших r .

Заметим, что $w^{(k)}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. В противном случае мы получили бы противоречие с теоремой 5.8. Одновременно ввиду (2.3) для всех r из окрестности бесконечности справедливо соотношение (2.50).

Тем самым, объединяя (5.30), (2.50) и оценку (5.27) теоремы 5.8, завершаем доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.6. Согласно замечанию 5.1 мы можем считать, что выполнено (5.28), в противном случае $w^{(k)} \equiv 0$ в некоторой окрестности бесконечности.

Фиксируем $\rho \in (a, \infty)$. Условие (5.19) влечет за собой неравенство

$$\begin{aligned} & C \int_{\rho}^r \min\{\xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi), p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi \\ & \geq \frac{C}{2} \int_a^r \min\{\xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi), p_{\sigma}^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi \\ & \quad - \int_{(-1)^k w^{(k)}(\rho)}^1 g_{\theta}^{\frac{1}{m-k}}(t) t^{\frac{1}{m-k}-1} dt - \int_{(-1)^k w^{(k)}(\rho)}^1 \frac{dt}{g_{\theta}(t)} \end{aligned}$$

для всех достаточно больших r , где $C > 0$ – константа теоремы 5.7, в которой следует взять $\nu = 2$, а σ и θ такими же, как и в предпосылке к теореме 5.6.

Таким образом, для завершения доказательства остается воспользоваться соотношением (5.26).

§ 6. Кнезеровские решения уравнений типа Эмдена–Фаулера

Ниже мы будем изучать уравнения порядка $m \geq 1$ вида

$$w^{(m)} = (-1)^m p(r) |w^{(k)}|^{\lambda} \operatorname{sign} w, \quad r > a > 0, \quad (6.1)$$

где $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а $p: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – локально интегрируемая на промежутке $[a, \infty)$ функция.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (1, \infty)$ и при этом выполнено (2.3). Тогда для всякого решения уравнения (6.1), удовлетворяющего условию

$$(-1)^i w^{(i)}(r) w(r) \geq 0 \quad \text{для всех } r \in [a, \infty), \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (6.2)$$

имеет место тождество $w^{(k)} \equiv 0$ в некоторой окрестности бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $w: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – решение (6.1), (6.2). Не ограничивая общности, мы можем, очевидно, считать, что справедливо соотношение (5.1). В противном случае заменим w на $-w$.

Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 5.1 (при $k = 0$ см. также замечание 5.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Таким образом, если в предположении теоремы 6.1 $\lambda < 0$, то уравнение (6.1) вовсе не имеет кнезеровских решений.

В случае, когда $m = 2$, $k = 0$ и p монотонно не возрастает, из теоремы 6.1 вытекает теорема 17.4 монографии [1].

ПРИМЕР 6.1. Рассмотрим уравнение

$$w^{(m)} = (-1)^m p(r) |w|^\lambda \operatorname{sign} w, \quad r > a > 0, \quad (6.3)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, а p – неотрицательная функция, принадлежащая $L_{\text{loc}}([a, \infty))$, для которой выполнено (5.9).

В случае

$$s \geq -m \text{ и } \lambda < 1 \quad (6.4)$$

согласно теореме 6.1 уравнение (6.3) не имеет правильных кнезеровских решений.

Покажем, что условие (6.4) является точным.

Предположим, что (6.4) не имеет места. Тогда для некоторой непрерывной положительной функции p вида (5.9) существует правильное решение (6.3), (5.1).

Действительно, если $s < -m$, то искомое решение определяется с помощью (5.10).

Пусть $s = -m$ и $\lambda = 1$. Несложно проверить, что

$$w(r) = Ar^{-B}, \quad A, B \in (0, \infty),$$

удовлетворяет соотношениям (6.3), (5.1), если взять

$$p(r) = B(B+1) \dots (B+m-1)r^s.$$

Далее, если $s > -m$ и $\lambda = 1$, то искомым решением, очевидно, будет функция

$$w(r) = Ae^{-Br^{(s+m)/m}},$$

где $A, B \in (0, \infty)$ и при этом B достаточно велико.

Пусть теперь $s = -m$ и $\lambda > 1$. Тогда нужный пример доставляет нам равенство

$$w(r) = A \ln^{-\frac{1}{\lambda-1}} r, \quad A \in (0, \infty).$$

Наконец, если $s > -m$ и $\lambda > 1$, то вышеупомянутым решением является

$$w(r) = Ar^{-\frac{s+m}{\lambda-1}}, \quad A \in (0, \infty).$$

ПРИМЕР 6.2. Предположим, что в уравнении (6.3) неотрицательная функция $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ удовлетворяет условию

$$p(r) \sim r^{-m} (\ln r)^{-1} \dots \underbrace{(\ln \dots \ln r)^{-1}}_n \underbrace{(\ln \dots \ln r)^s}_{n+1} \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (6.5)$$

где $n \geq 0$ – целое число. В частности, если $n = 0$, то

$$p(r) \sim r^{-m} \ln^s r \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Тогда, применяя теорему 6.1, получим, что при

$$\lambda < 1 \text{ и } s \geq -1 \quad (6.7)$$

уравнение (6.3) не имеет правильных кнезеровских решений.

Рассуждениями, несколько более сложными, чем в предыдущем примере, можно показать, что условие (6.7) также является точным.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $m \geq 2$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (1, \infty)$, имеет место (2.57) и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup r^{(1-\lambda)k} \int_r^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi > 0.$$

Тогда всякое решение (6.1), (6.2) тождественно равно константе в некоторой окрестности бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем в теореме 5.2 $g(t) = t^\lambda$ и $\theta = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\varkappa \in (1, \infty)$ и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup r^{m-\lambda k} p_\varkappa(r) > 0.$$

Тогда для всякого решения (6.1), (6.2) будем иметь $w^{(k)} \equiv 0$ в некоторой окрестности бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из следствия 5.1 (в случае $k = 0$ см. также замечание 5.2).

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $m \geq 2$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (1, \infty)$, справедливо (2.57) и при этом

$$\int_a^\infty d\rho \rho^{k-1} \left(\int_\rho^\infty \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = \infty.$$

Тогда всякое решение (6.1), (6.2) тождественно равно константе в некоторой окрестности бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 5.3.

ТЕОРЕМА 6.4. *Предположим, что $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (1, \infty)$ и выполнено соотношение (2.57). Тогда каждое решение (6.1), (6.2) либо удовлетворяет тождеству $w^{(k)} \equiv 0$ в окрестности бесконечности, либо для всех $\rho \in [a, \infty)$ допускает оценку*

$$|w^{(k)}(\rho)| \geq C \left(\int_{\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad (6.8)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m , λ и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в теореме 5.4 $g(t) = t^{\lambda}$ и $\theta = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В случае $k = 0$ оценку (6.8) можно усилить. Именно, из теоремы 5.8 вытекает, что для всех $\rho \in [a, \infty)$ будет справедливо неравенство

$$|w(\rho)|^{\frac{1-\lambda}{m}} - |w(\infty)|^{\frac{1-\lambda}{m}} \geq C \left(\int_{\rho}^{\infty} \xi^{m-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m}},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m , λ и σ .

В случае $k \geq 1$, очевидно, имеем $w^{(k)}(\infty) = 0$ (см. лемму 5.4).

ПРИМЕР 6.3. Рассмотрим правильное решение w уравнения (6.3), удовлетворяющее условию (6.2), где $\lambda \in (-\infty, 1)$, а неотрицательная функция $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ подчиняется соотношению (5.9), в котором $s < -m$.

Применяя теорему 6.4, получим

$$|w(r)| \geq C r^{\frac{s+m}{1-\lambda}}, \quad r \in [a, \infty), \quad (6.9)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от w .

Пусть теперь выполнено (6.5), причем $s < -1$. Тогда (6.8) принимает вид

$$|w(r)| \geq C \underbrace{(\ln \dots \ln r)_{n+1}}^{\frac{1+s}{1-\lambda}}, \quad r \in [a, \infty), \quad (6.10)$$

где постоянная $C > 0$ также не зависит от w .

Легко увидеть, что правые части оценок (6.9) и (6.10) сами являются решениями (6.3), (6.2) для соответствующих функций p .

Таким образом, теорема (6.4) является точной.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *Пусть $m \geq 2$, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\lambda \in (-\infty, 1)$, $\sigma \in (1, \infty)$ и при этом выполнено (2.57). Тогда каждое кнезеровское решение уравнения (6.1) либо является константой в окрестности бесконечности, либо для всех $r \in [a, \infty)$ удовлетворяет неравенству*

$$|w(r) - w(\infty)| \geq C \int_r^{\infty} d\rho \rho^{k-1} \left(\int_{\rho}^{\infty} \xi^{m-k-1} p_{\sigma}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{1-\lambda}},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m , λ и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем в следствии 5.2 $g(t) = t^\lambda$ и $\theta = 2$.

ТЕОРЕМА 6.5. *Предположим, что $\lambda, \sigma \in (1, \infty)$ и справедливо (2.3). Тогда любое решение (6.1), (6.2) для всех достаточно больших r допускает оценку*

$$|w^{(k)}(r)| \leq C \left(\int_a^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{-\frac{1}{\lambda-1}},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m, λ и σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно получается из теоремы 5.5.

ПРИМЕР 6.4. Рассмотрим уравнение (6.3), где $\lambda \in (1, \infty)$, а $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ — некоторая неотрицательная функция такая, что имеет место (5.9), причем $s > -m$.

Для любого решения (6.3), (6.2) находим согласно теореме 6.5

$$|w(r)| \leq Ar^{-\frac{s+m}{\lambda-1}} \quad (6.11)$$

для всех r из окрестности бесконечности, где постоянная $A > 0$ не зависит от w .

Аналогично, в случае $s = -m$ будем иметь

$$|w(r)| \leq A \ln^{-\frac{1}{\lambda-1}} r \quad (6.12)$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $A > 0$ так же не зависит от w .

Разумеется, обе оценки (6.11) и (6.12) являются точными (см. пример 6.1).

ПРИМЕР 6.5. Предположим, что в уравнении (6.3), как и прежде, $\lambda \in (1, \infty)$, а неотрицательная функция $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ удовлетворяет соотношению (6.5), в котором $s > -1$.

Тогда, применяя теорему 6.5, получим для любого решения (6.3), (6.2)

$$|w(r)| \leq C \underbrace{(\ln \dots \ln r)}_{n+1}^{-\frac{1+s}{\lambda-1}} \quad (6.13)$$

при всех r из окрестности бесконечности, где положительная постоянная C не зависит от w .

Для того чтобы убедиться в точности последнего неравенства, достаточно подставить правую часть (6.13) в (6.3).

Приведем также ряд утверждений, которые могут быть получены из теорем 5.5 и 5.6 в качестве несложных следствий.

ТЕОРЕМА 6.6. *Пусть $\sigma \in (1, \infty)$ и при этом выполнено (2.3). Тогда любое решение уравнения*

$$w^{(m)}(r) = (-1)^m p(r) w^{(k)}(r), \quad r > a > 0, \quad (6.14)$$

удовлетворяющее условию (6.2), допускает оценку

$$|w^{(k)}(r)| \leq A \exp \left(-B \left(\int_a^r \xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{m-k}} \right)$$

для всех достаточно больших r , где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ зависят только от m и σ .

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть в предположении теоремы 6.6 вместо соотношения (2.3) справедливо (5.19). Тогда любое решение (6.14), (6.2) для всех r из окрестности бесконечности допускает оценку

$$|w^{(k)}(r)| \leq A \exp\left(-B \int_a^r \min\{\xi^{m-k-1} p_\sigma(\xi), p_\sigma^{\frac{1}{m-k}}(\xi)\} d\xi\right),$$

где положительные константы A и B зависят только от m и σ .

ПРИМЕР 6.6. Рассмотрим кнезеровское решение w уравнения

$$w^{(m)}(r) = (-1)^m p(r)w(r), \quad r > a > 0, \quad (6.15)$$

в котором $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ – неотрицательная функция вида (5.9).

В случае $s > -m$ согласно теореме 6.6 находим

$$|w(r)| \leq A e^{-B r^{(s+m)/m}} \quad (6.16)$$

для всех r из окрестности бесконечности, где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

В свою очередь, если $s = -m$, то из теоремы 6.7 будем иметь

$$|w(r)| \leq A r^{-B} \quad (6.17)$$

при всех достаточно больших r для некоторых вещественных чисел $A > 0$ и $B > 0$, не зависящих от w .

Легко проверить, что неравенства (6.16) и (6.17) являются точными.

ПРИМЕР 6.7. Будем считать, что неотрицательная функция $p \in L_{\text{loc}}([a, \infty))$ в правой части уравнения (6.15) имеет вид (6.6) и при этом w – решение (6.15), (6.2).

В случае $s \geq 0$, применяя теорему 6.7, получим

$$|w(r)| \leq A e^{-B(\ln r)^{(s+m)/m}}$$

при всех r из окрестности бесконечности для некоторых постоянных $A > 0$ и $B > 0$, не зависящих от w .

Аналогично, если $-1 < s < 0$, то согласно той же теореме 6.7

$$|w(r)| \leq A e^{-B(\ln r)^{s+1}}$$

для всех достаточно больших r , где вещественные числа $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от w .

Предположим теперь, что выполнено соотношение (6.5), в котором $n \geq 1$ и $s > -1$. Тогда из теоремы 6.7 следует, что любое решение (6.15), (6.2) удовлетворяет неравенству

$$|w(r)| \leq A e^{-B \underbrace{(\ln \dots \ln r)_{n+1}}_{n+1}^{s+1}}$$

для всех r из окрестности бесконечности, где положительные постоянные A и B не зависят от w .

Можно показать, что все приведенные выше оценки являются точными.

Список литературы

1. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
2. Кигурадзе И. Т. О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1968. Т. 181. № 5. С. 1054–1057.
3. Квиникадзе Г. Г. О монотонных правильных и сингулярных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Диф. уравн. 1984. Т. 20. № 2. С. 360–361.
4. Изобов Н. А. О продолжимых и непродолжимых решениях нелинейного дифференциального уравнения произвольного порядка // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 6. С. 829–839.
5. Изобов Н. А. О кнезеровских решениях // Диф. уравн. 1985. Т. 21. № 4. С. 581–588.
6. Изобов Н. А., Рабцевич В. А. О неулучшаемости условия И. Т. Кигурадзе–Г. Г. Квиникадзе существования неограниченных правильных решений уравнения Эмдена–Фаулера // Диф. уравн. 1987. Т. 23. № 11. С. 1872–1881.
7. Рабцевич В. А. О правильных быстрорастущих решениях обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера с опережающим аргументом // Диф. уравн. 1994. Т. 30. № 3. С. 400–404.
8. Кондратьев В. А., Самовол В. С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Диф. уравн. 1981. Т. 17. № 4. С. 749–750.
9. Мышкис А. Д. Пример непродолжимого на всю ось решения дифференциального уравнения второго порядка колебательного типа // Диф. уравн. 1969. Т. 5. № 12. С. 2267–2268.
10. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: konkov@mx.bmstu.ru

Поступило в редакцию
21.III.2000