Общероссийский математический портал

В. Е. Назайкинский, Б.-В. Шульц, Б. Ю. Стернин, Индекс интегральных операторов Фурье на многообразиях с коническими особенностями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 2, 127–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:28:38

УДК 517.9

В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, Б.-В. Шульце

Индекс интегральных операторов Фурье на многообразиях с коническими особенностями

Дается описание однородных канонических преобразований кокасательного расслоения над многообразием с коническими особыми точками. Вычисляется индекс эллиптического интегрального оператора Фурье, полученного квантованием такого преобразования. Ответ дается в терминах индекса эллиптического интегрального оператора Фурье на гладком многообразии и вычетов конормального символа.

Библиография: 23 наименования.

Введение

Интегральный оператор Фурье (ИОФ), действующий в пространствах функций на гладких компактных многообразиях, называется *эллиптическим*, если он ассоциирован с некоторым однородным каноническим преобразованием кокасательного расслоения первого многообразия в кокасательное расслоение второго и если его главный символ (амплитуда) всюду отличен от нуля вне нулевого сечения. Эллиптический ИОФ всегда фредгольмов в соответствующих пространствах Соболева, и потому естественно возникает задача о вычислении его индекса, который является гомотопическим инвариантом канонического преобразования и главного символа. Задача о вычислении индекса ИОФ в классических терминах была поставлена А. Вайнштейном [1] в 1976 г. (в связи с одной задачей, связанной со спектрами римановых многообразий) для операторов с *унитарным* главным символом. Для таких операторов, которые мы будем называть *квантованными каноническими преобразованиями*, индекс не зависит от конкретного выбора главного символа, если размерность многообразий, на которых действуют операторы, не меньше 3 или если индекс Маслова на графике соответствующего канонического преобразования тривиален по модулю 4 и представляет собой инвариант самого канонического преобразования. В то время, когда эта задача ставилась, не было известно (и, по-видимому, неизвестно до сих пор), существуют ли квантованные канонические преобразования с ненулевым индексом. В последние годы усилиями ряда авторов (Эпштейн, Мельроуз, Зелдич, Гийемин и др.) задача о вычислении индекса эллиптических ИОФ была включена в более широкую задачу о вычислении индекса операторов, получаемых квантованием *контактных преобразований*. Эти преобразования действуют между произвольными компактными контактными многообразиями. Первоначальная постановка задачи, принадлежащая Вайнштейну, соответствует случаю, в котором указанные контактные многообразия являются ко-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-01100 и 00-01-00161).

сферическими расслоениями многообразий, на которых задан ИОФ, соответствующий некоторому однородному каноническому преобразованию. При этом контактное преобразование получается из однородного канонического стандартным образом (см., например, [2]), а эквивалентность (подобие) ИОФ и квантованного контактного преобразования устанавливается так называемым *преобразованием Гийемина* [3], [4]. Подробное описание задачи об индексе ИОФ и возможных подходов к ее решению может быть найдено в [5], где, в частности, отмечается, что вычисление индекса произвольных эллиптических ИОФ (а не только квантованных канонических преобразований) представляет наибольший интерес. В недавно появившейся статье [6] Эпштейн и Мельроуз решили проблему Вайнштейна в широкой постановке (т. е. для квантованных контактных преобразований), но лишь в частном случае контактного преобразования, отображающего контактное многообразие в себя. (Для ИОФ это отвечает квантованным каноническим преобразованиям, действующим между пространствами функций на *одном и том же* компактном многообразии.) В этой ситуации в [6] было показано, что индекс квантованного контактного преобразования равен так называемой контактной степени [6] преобразования, которая, в свою очередь, может быть выражена как индекс оператора Дирака, ассоциированного со spin^C -структурой на торе контактного преобразования.

Настоящая работа посвящена нахождению формулы индекса эллиптических ИОФ в ситуации, когда конфигурационное пространство имеет особенности конического типа. Многообразия с коническими особенностями занимают в эллиптической теории важное место, и поэтому изучение проблемы индекса ИОФ на таких многообразиях, несомненно, представляет интерес. Полученная нами формула индекса выражается в терминах индекса некоторого вспомогательного ИОФ на гладком компактном многообразии и некоторого (явно выписываемого) инварианта конормального символа (см., например, [7]) исходного ИОФ.

Для случая квантованных канонических преобразований кокасательного расслоения многообразия с коническими особенностями индекс вспомогательного ИОФ может быть вычислен по формуле Эпштейна–Мельроуза из [6]. В общем случае формула приобретает окончательный вид после того, как в полном объеме будет решена проблема Вайнштейна для гладких многообразий¹.

Авторы выражают признательность А. Вайнштейну за интерес к настоящей работе и В.Е. Шаталову за ряд полезных дискуссий по вопросам, затронутым в настоящей статье.

Предварительная версия работы опубликована в препринте [8], краткое изложение – в заметке [9].

§ 1. Квантование канонических преобразований

1.1. Однородные канонические преобразования. Пусть M – гладкое замкнутое многообразие без края с коническими особыми точками $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ (см., например, [7], [10]). По определению это означает, что M – топологическое пространство, $\overset{\circ}{M} = M \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ – (открытое) гладкое многообразие, а в окрест-

¹За то время, пока статья находилась в редакции, Е. Лайштанам, Р. Нест и Б. Циган дали полное решение проблемы Вайнштейна для гладких многообразий.

ности каждой особой точки α_j многообразие представлено в виде конуса

$$K_j = ([0, 1) \times \Omega_j) / (\{0\} \times \Omega_j),$$

где Ω_j – база конуса – гладкое компактное многообразие. В такой окрестности будут использоваться два вида координат, а именно “конические координаты” (σ, ω) , $\sigma \in [0, 1)$, $\omega \in \Omega_j$, и “цилиндрические координаты” (t, ω) , $t \in (0, +\infty]$, $\omega \in \Omega_j$, связанные с коническими координатами заменой переменных $r = e^{-t}$. В последнем случае будем также говорить, что $\overset{\circ}{M}$ (или M) представлено как “многообразие с цилиндрическими концами”. Допуская некоторую вольность в обозначениях, будем обозначать буквой ω как точку многообразия Ω_j , так и ее локальные координаты на Ω_j . Для удобства объединим все точки $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ в одну точку α_0 . При этом база конуса Ω будет не связной, если $N > 1$: $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$ (несвязное объединение).

Пусть T^*M – кокасательное расслоение многообразия M . Оно строится следующим образом (см., например, [11]). Пусть $M^\wedge$ – многообразие с краем, полученное раздутием (“blow-up”) конической точки α . Раздутие сводится к замене конуса

$$K = \{\Omega \times [0, 1)\} / \{(\Omega \times \{0\})\}$$

в особой точке α на полуцилиндр

$$K^\wedge = \Omega \times [0, 1).$$

Таким образом, $\partial M^\wedge = \Omega$. Для многообразия $M^\wedge$ рассмотрим “сжатое кокасательное расслоение” $\tilde{T}^*M^\wedge$ (compressed cotangent bundle, в терминологии [12]). По определению $\tilde{T}^*M^\wedge$ есть векторное расслоение над $M^\wedge$, пространство гладких сечений которого совпадает с

$$\text{Hom}_{C^\infty(M^\wedge)}(\text{Vect}_0(M^\wedge), C^\infty(M^\wedge)),$$

где $\text{Vect}_0(M^\wedge) - C^\infty(M^\wedge)$ -модуль векторных полей на многообразии $M^\wedge$, всюду касательных к краю $\partial M^\wedge$.

По определению полагают

$$T^*M \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{T}^*M^\wedge.$$

Таким образом, кокасательное расслоение T^*M есть многообразие с краем

$$\partial T^*M \cong T^*\Omega \times \mathbb{R},$$

где $T^*\Omega$ – обычное кокасательное расслоение к замкнутому многообразию Ω , а сомножитель $\mathbb{R}$ отвечает конормальной переменной p . Многообразие T^*M снабжено естественной симплектической формой, имеющей особенность на краю. В конических координатах эта форма имеет вид

$$\omega^2 = -\frac{1}{r} dp \wedge dr + \omega_{T^*\Omega}^2,$$

где $\omega_{T^*\Omega}^2$ – стандартная симплектическая структура на $T^*\Omega$. Для дальнейшего полезно записать эту форму и в цилиндрических координатах. В этих координатах пространство T^*M выглядит как обычное кокасательное расслоение, к которому добавлен слой над “базой конуса в бесконечности” $\{t = \infty\} \times \Omega$. Симплектическая форма в этих координатах имеет хорошо знакомое выражение

$$\omega^2 = dp \wedge dt + \omega_{T^*\Omega}^2.$$

Через $T_0^*M = T^*M \setminus \{0\}$ обозначим кокасательное расслоение над M с выброшенным нулевым сечением. В слоях расслоения T_0^*M естественным образом действует группа $\mathbb{R}_+$ положительных чисел (умножением вектора на число).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Однородным каноническим преобразованием* пространства T_0^*M называется гладкий вплоть до границы диффеоморфизм

$$g: T_0^*M \rightarrow T_0^*M,$$

сохраняющий симплектическую форму на T_0^*M и коммутирующий с действием группы $\mathbb{R}_+$.

Опишем однородные канонические преобразования с помощью производящих функций.

Пусть $g: T_0^*M \rightarrow T_0^*M$ – однородное каноническое преобразование.

График преобразования g является лагранжевым многообразием в $T_0^*M \times T_0^*M$ относительно симплектической формы $\pi_2^*\omega^2 - \pi_1^*\omega^2$, где π_1 и π_2 – проекции на первый и второй сомножители в прямом произведении $T_0^*M \times T_0^*M$, и во внутренних точках (т.е. вне границы ∂T_0^*M) описание преобразования g с помощью производящих функций стандартно (см. [2] или, применительно к случаю однородных преобразований, также [13]). Выясним, как устроено преобразование вблизи ∂T_0^*M . Пусть (ω, q) – канонические координаты на $T^*\Omega$. Тогда (r, ω, p, q) будем называть *каноническими координатами* на T^*K (или, эквивалентно, на $T^*\Omega$ вблизи $\partial T^*\Omega$).

Пусть (ρ, ψ, ξ, η) – канонические координаты на втором экземпляре T^*K . Преобразование g задается в окрестности границы формулами

$$\begin{aligned} \rho &= r\rho_1(r, \omega, p, q), & \psi &= \psi(r, \omega, p, q), \\ \xi &= \xi(r, \omega, p, q), & \eta &= \eta(r, \omega, p, q), \end{aligned}$$

где ρ_1, ψ, ξ, η – гладкие функции, причем $\rho_1(0, \omega, p, q) \neq 0$ (так как g – диффеоморфизм).

В цилиндрических координатах ($\tau = -\ln \rho, t = -\ln r$) эти формулы приобретают вид

$$\begin{aligned} \tau &= t + \xi(e^{-t}, \omega, p, q), & \psi &= \psi(e^{-t}, \omega, p, q), \\ \xi &= \xi(e^{-t}, \omega, p, q), & \eta &= \eta(e^{-t}, \omega, p, q). \end{aligned}$$

Доказательство следующей леммы, которое было проведено в [11] для неоднородного случая, является чисто техническим, и мы его опускаем.

ЛЕММА 1.1. а) *Отображение*

$$g(p) : \begin{cases} T^*\Omega \rightarrow T^*\Omega, & p \neq 0, \\ T_0^*\Omega \rightarrow T_0^*\Omega, & p = 0, \end{cases}$$

задаваемое формулами

$$\psi = \psi(0, \omega, p, q), \quad \eta = \eta(0, \omega, p, q),$$

является симплектоморфизмом при всех p .

б) $\xi(0, \omega, p, q) \equiv 0$.

Теперь можем сформулировать лемму о локальных координатах.

ЛЕММА 1.2. Пусть $(0, \psi_0, \xi_0, \eta_0) = g(0, \omega_0, p_0, q_0)$. Тогда существует подмножество $I \subset \{1, \dots, n-1\}$ такое, что функции $(\rho, \psi_I, \eta_{\bar{I}}, p, q)$, где $\bar{I} = \{1, \dots, n-1\} \setminus I$, образуют систему локальных координат на графике преобразования g в окрестности точки

$$z_0 = (0, \omega_0, p_0, q_0, 0, \psi_0, \xi_0, \eta_0) \in \text{graph } g \subset T^*K \times T^*K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференциалы $d\rho$, dp и dq линейно независимы на $L = \text{graph } g$ в точке z_0 , так как при $r = 0$ имеем $d\rho = \rho_1 dr$, $\rho_1 \neq 0$, а (r, p, q) – независимые координаты. Пусть $I \subset \{1, \dots, n-1\}$ – максимальное подмножество такое, что дифференциалы $(d\rho, d\psi_I, dp, dq)$ независимы на L в точке z_0 (здесь $n = \dim M$). Тогда система $(\rho, \psi_i, \eta_{\bar{I}}, p, q)$ искомая. Это вытекает из обычной леммы о локальных координатах (см., например, [14]), примененной к каноническому преобразованию $g(p_0)$.

Таким образом, график преобразования g может быть покрыт конечным числом канонических карт (поскольку мы имеем дело с однородным случаем, карты будут $\mathbb{R}_+$ -инвариантны). В этих картах преобразование определяется производящими функциями вида

$$S_I(\tau, \psi_I, \eta_{\bar{I}}, p, q) = p\tau + S_{1I}(e^{-\tau}, \psi_I, \eta_{\bar{I}}, p, q).$$

Здесь $I \subset \{1, \dots, n-1\}$ – тип карты, (τ, ψ) и (t, ω) – координаты на втором и первом экземплярах многообразия M соответственно, а p, q – координаты, двойственные к (τ, ψ) (в частности, переменная p – аргумент конормального символа). В такой карте преобразование

$$g: (t, \omega, p, q) \mapsto (\tau, \psi, \xi, \eta)$$

задается обычными формулами

$$\begin{aligned} t &= \frac{\partial S_1}{\partial p}, & \xi &= \frac{\partial S_1}{\partial \tau}, \\ \omega &= \frac{\partial S_1}{\partial q}, & \eta_I &= \frac{\partial S_1}{\partial \psi_I}, & \psi_{\bar{I}} &= \frac{\partial S_1}{\partial \eta_{\bar{I}}}. \end{aligned}$$

Поскольку преобразование однородно, отсюда следует, что производящие функции первого порядка однородны по импульсным переменным, т. е.

$$S_{1I}(e^{-\tau}, \psi_I, \lambda \eta_{\bar{I}}, \lambda p, \lambda q) = \lambda S_{1I}(e^{-\tau}, \psi_I, \eta_{\bar{I}}, p, q)$$

при $\lambda > 0$.

1.2. Интегральные операторы Фурье. Здесь мы опишем процедуру квантования однородных канонических преобразований. Именно, сопоставим каждому однородному каноническому преобразованию

$$g: T_0^*M \rightarrow T_0^*M$$

некоторый класс интегральных операторов Фурье $T(g, a)$ (см. ниже (2)) в весовых пространствах Соболева $H_\gamma^s(M)$.

Напомним определение весовых пространств Соболева на многообразии с коническими особенностями (см., например, [7], [10]). Пусть M – многообразие с коническими особенностями $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$. Пусть также $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ – заданные числа (весовые показатели). Рассмотрим разбиение единицы

$$1 = \sum_{j=0}^N e_j(x), \quad x \in M,$$

где $e_0(x) = 0$ в окрестности особенностей, а $e_j(x)$, $j = 1, \dots, N$, имеет носитель в малой окрестности точки α_j , в которой действуют конические координаты. Для функции $u(x)$ на M полагаем

$$\|u\|_{s, \gamma_1, \dots, \gamma_N}^2 = \|e_0 u\|_s^2 + \sum_{j=1}^N \|e_j u\|_{s, \gamma_j}^2, \quad (1.1)$$

где $\|e_0 u\|_s$ – обычная соболевская норма в гладкой части многообразия M , а $\|e_j u\|_{s, \gamma_j}$ задается в конических координатах формулой

$$\|e_j u\|_{s, \gamma_j}^2 = \int_0^\infty \left\| \left(1 + \left(i r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \Delta_{\Omega_j} \right)^{3/2} (r^{-\gamma_j} e_j u) \right\|^2 \frac{dr}{r},$$

где Δ_{Ω_j} – (положительный) оператор Лапласа–Бельтрами на Ω_j относительно какой-либо римановой метрики.

Пространство $H_{\gamma_1, \dots, \gamma_N}^s(M)$ является пополнением пространства $C_0^\infty(M \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\})$ по норме (1.1). Пространства $H_{\gamma_1, \dots, \gamma_N}^s(M, E)$, где E – расслоение над M , вводятся аналогичным образом.

Мы объединим все конические точки многообразия M в одну точку α . Поэтому в дальнейшем считаем, что $\gamma_1 = \dots = \gamma_N = \gamma$ и соответствующее пространство Соболева обозначим через $H_\gamma^s(M)$. Переход к общему случаю произвольных $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ не представляет трудностей.

Вначале рассмотрим случай $\gamma = 0$ (при этом в цилиндрических координатах мы имеем дело с обычными пространствами Соболева на цилиндре). Напомним, что коническая точка соответствует точке $t = \infty$. Значения $t \in (-\infty, 0]$ являются, следовательно, несущественными, и поэтому некоторые из последующих формул должны, в действительности, содержать срезающие функции, обращающиеся в нуль при $t < 0$. Мы будем опускать рассуждения, связанные с этими срезающими функциями.

Пусть

$$L_g = \{(\beta, \tilde{\beta} \in T_0^*M \mid \tilde{\beta} = g(\beta)) \subset T_0^*M \times T_0^*M$$

– график преобразования g . Многообразие L_g является лагранжевым в $T_0^*M \times T_0^*M$ относительно симплектической структуры

$$\tilde{\omega}^2 = \pi_2^* \omega^2 - \pi_1^* \omega^2,$$

где π_i^* , $i = 1, 2$, – каноническая проекция многообразия L_g на i -й сомножитель и ω^2 есть стандартная симплектическая структура на T_0^*M . На L_g выбираем квантованную меру μ [14] такую, что μ является однородной порядка n относительно действия группы $\mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathcal{K}_g$ – канонический оператор Маслова [15] на лагранжевом многообразии L_g с мерой μ в его однородном варианте (см. [14], [16]). Канонический оператор действует в пространствах

$$\mathcal{K}_g: \mathcal{O}(L_g) \rightarrow \mathcal{D}'(M \times M),$$

где $\mathcal{O}(L_g) = \bigcup_m \mathcal{O}^m(L_g)$ – пространство асимптотически $\mathbb{R}_+$ -однородных функций на L_g (соответственно $\mathcal{O}^m(L_g)$ – пространство асимптотически однородных функций степени не выше m) и $\mathcal{D}'(M \times M)$ – пространство распределений на $M \times M$. Явное выражение для канонического оператора может быть найдено в цитированных выше работах.

Пусть теперь $a \in \mathcal{O}(T_0^*M)$. Обозначим через $T(g, a)$ интегральный оператор с ядром Шварца²

$$\mathcal{K}_g[\pi_1^* a](x, y), \quad x, y \in M.$$

Заметим, что канонический оператор $\mathcal{K}_g$ и, следовательно, оператор $T(g, a)$ зависят от выбора квантованной меры μ (даже в главном члене).

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $a \in \mathcal{O}^m(T_0^*M)$. Тогда оператор $T(g, a)$ непрерывен в пространствах*

$$T(g, a): H_0^s(M) \rightarrow H_0^{s-m}(M) \quad (1.2)$$

для любого $s \in \mathbb{R}$.

Эта теорема вытекает из следующей ниже леммы. (Использованный здесь метод является стандартным в доказательстве утверждений, аналогичных данной теореме.) Обозначим для краткости оператор (1.2) через T . Пусть T^* – сопряженный оператор для T относительно скалярного произведения в L^2 (мера вблизи конической точки есть $dt d\omega$).

ЛЕММА 1.3. *Оператор T^*T является коническим псевдодифференциальным оператором [17] порядка $2t$ в шкале $H_0^s(M)$ с главным символом $|a|^2 |\pi_1^{-1*}(\mu)/\mu_0|$. Здесь*

$$\mu_0 = \frac{1}{n!} (\omega^2)^{\wedge n}$$

– стандартная форма объема на T_0^*M .

Доказательство будет дано в приложении.

²Предполагается, что на M зафиксирована некоторая форма объема, в окрестности конической точки имеющая вид $dt \wedge v$, где v – не зависящая от t форма объема на Ω ; это позволяет рассматривать ядра Шварца как функции, а не плотности.

Рассмотрим теперь случай $\gamma \neq 0$. Для того чтобы определить оператор $T_\gamma = T(g, a)$ в шкале $H_\gamma^s(M)$, требуется, чтобы все функции, входящие в определение локальных канонических операторов в окрестности особой точки, были аналитичны по переменной p в некоторой окрестности весовой линии

$$\mathcal{L}_\gamma = \{\operatorname{Im} p = \gamma\}.$$

Если это не так, необходимо модифицировать определение локальных канонических операторов. Именно, все однородные функции, входящие в определение (фаза, амплитуда, плотность меры, элемент разбиения единицы), заменяются на асимптотически однородные функции переменных $(p, q, \eta_{\bar{t}})$ с теми же самыми асимптотиками на бесконечности и со следующим свойством: все новые функции являются гладкими везде (включая точку $(p, q, \eta_{\bar{t}}) = (0, 0, 0)$) и допускают аналитическое продолжение относительно переменной p в некоторую полосу $|\operatorname{Im} p| < K$ с $K > |\gamma|$, K , здесь и ниже, есть некоторое положительное число. Более того, аналитическое продолжение должно быть также асимптотически однородным в этой полосе.

Это может быть сделано многими различными способами, например сверткой преобразования Фурье гладкой функции с компактным носителем и единичным интегралом (см., например, [18]); такой способ дает целую функцию от p .

Таким образом, интегральные операторы $T(g, a)$ корректно определены в весовых соболевских пространствах с ненулевым показателем γ . Следующий результат является прямым обобщением теоремы 1.1 и леммы 1.3 и может быть выведен из них.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $g: T_0^*M \rightarrow T_0^*M$ – однородное каноническое преобразование, $a \in \mathcal{O}^m(T_0^*M)$ и все элементы в конструкции канонического оператора $\mathcal{K}_g$ являются аналитическими по p в полосе $|\operatorname{Im} p| < K$ и удовлетворяют перечисленным выше условиям. Тогда интегральный оператор $T \equiv T_\gamma \equiv T_\gamma(g, a)$ непрерывен в весовых пространствах Соболева

$$T: H_\gamma^s(M) \rightarrow H_\gamma^{s-m}(M) \quad (1.3)$$

для $s \in \mathbb{R}$ и $|\gamma| < K$.

Более того, оператор T^*T , где T^* – сопряженный оператор к оператору T относительно скалярного произведения $L_\gamma^2(M) \equiv H_\gamma^0(M)$, является псевдодифференциальным оператором порядка $2m$ в шкале $\{H_\gamma^s(M)\}$ с $|\gamma| < K$. Главный символ оператора T^*T есть $|a|^2 |\pi_1^{-1*}(\mu)/\mu_0|$ (здесь мера μ_0 та же самая, что и в лемме 1.3).

Причина использования скалярного произведения в пространстве $L_\gamma^2(M)$ для определения сопряженного оператора состоит в том, что при этом определении полный символ оператора T^*T является аналитической функцией переменной $p = \operatorname{Re} p + i\gamma$.

Мы определим *конормальный символ* $T(p)$ оператора $T = T(g, a)$ следующим образом (см. [11]). Пусть $g(p)$ – семейство канонических преобразований пространства T_0^*M , введенное в лемме 1.1, а) (и получающееся из g ограничением на “слой” над конической точкой $r = 0$). Далее, пусть $a(p)$, $p \in \mathbb{C}$, – семейство функций на $T^*\Omega$, заданное формулой

$$a(p)(\omega, q) = a(r, p, \omega, q)|_{r=0}, \quad (\omega, q) \in T^*\Omega.$$

Мы полагаем

$$T(p) = T(g(p), a(p)),$$

где в правой части равенства стоит семейство интегральных операторов Фурье с амплитудой $a(p)$, ассоциированных с каноническими преобразованиями $g(p)$, причем подразумевается, что использованная в этом определении мера $d\mu(p)$ удовлетворяет условию

$$d\mu = d\mu(p) \wedge \frac{dr}{r},$$

а элементы разбиения единицы получаются из соответствующих элементов для $T(p)$ ограничением в слой над точкой $r = 0$. Заметим, что при таком определении конормального символа имеет место равенство

$$\mathcal{M}^{-1}T(p)\mathcal{M} = s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda T(g, a)U_\lambda^{-1},$$

где $\mathcal{M}$ – преобразование Меллина, а U_λ – растяжение по r :

$$U_\lambda \varphi(\omega, r) = \varphi(\omega, \lambda r).$$

Заметим также, что зависимость конормального символа $T(p)$ от переменной p в комплексной области определяется выбором аналитического сглаживания (впоследствии этот выбор предполагается фиксированным).

1.3. Квантованные канонические преобразования. *Квантованные канонические преобразования* (см., например, [5], [6] и приведенную в этих работах библиографию, где они определены для гладкого случая с помощью проекторов Сегё и преобразования Гийемина и называются *квантованными контактными преобразованиями*) являются специальным случаем общих интегральных операторов Фурье (1.2). Именно, надо положить амплитуду a равной 1 и взять на лагранжевом многообразии L_g меру, соответствующую некоторой *комплексной поляризации* на T_0^*M . (Таким образом, для различных поляризаций получаются различные квантованные контактные преобразования $T(g, 1)$. Однако индекс операторов $T(g, 1)$ не зависит от выбора поляризации [6].) Для случая многообразий с коническими особенностями поляризация вблизи конической точки должна быть выбрана так, чтобы символ имел подходящее поведение при $t \rightarrow \infty$ (t – цилиндрическая координата). Например, всегда допустима поляризация, не зависящая от t в цилиндрических координатах вблизи конической точки.

Будем обозначать квантованное каноническое преобразование, соответствующее отображению g , через $T_\gamma = T_\gamma(g) = T(g)$, т.е. мы явно не указываем поляризацию. В случае многообразий с коническими особенностями нужно иметь в виду, что имеется дополнительная неоднозначность в определении оператора $T(g)$ по модулю компактных операторов (конормальный символ зависит от выбора аналитического сглаживания в конструкции канонического оператора).

Для квантованных канонических преобразований теорема 1.2 выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $g: T_0^*M \rightarrow T_0^*M$ – однородное каноническое преобразование, и пусть все элементы, участвующие в построении канонического оператора $\mathcal{H}_g$, являются аналитическими по переменной p в полосе $|\operatorname{Im} p| < K$ и удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда квантованное каноническое преобразование

$$T(g): H_\gamma^s(M) \rightarrow H_\gamma^s(M)$$

является непрерывным оператором в весовых пространствах Соболева для $s \in \mathbb{R}$ и $|\gamma| < K$.

Более того, оператор $T^*(g)T(g)$ является псевдодифференциальным оператором порядка нуль с эллиптическим главным символом в шкале $\{H_\gamma^s(M)\}$ с $|\gamma| < K$.

1.4. Эллиптичность и фредгольмовость. Выясним, при каких условиях оператор (1.3) будет фредгольмовым оператором в шкале $\{H_\gamma^s(M)\}$ с данным γ . Пусть символ a формально эллиптический (т.е. отличен от нуля для больших значений $|p| + |q|$).

Как показано в теореме 1.2, оператор T^*T есть псевдодифференциальный оператор (п. д. о.) с главным символом $|a|^2$ и кономальным символом $T^*(p)T(p)$. Аналогичное утверждение верно и для оператора TT^* . Отсюда вытекает в силу эллиптической теории для п. д. о. на многообразиях с коническими особенностями (см., например, [7], [10]), что $T^*(p)T(p)$ (а значит, и $T(p)$) конечномероморфно обратим в полосе $|\operatorname{Im} p| < K$ и имеет конечное число полюсов в любой полосе $|\operatorname{Im} p| < K - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. На любой весовой прямой $\operatorname{Im} p = \gamma$, не содержащей полюсов семейства $T(p)$, оператор T будет фредгольмовым в шкале $\{H_\gamma^s(M)\}$. В качестве регуляризатора можно взять ST^* или T^*S_1 , где S и S_1 – регуляризаторы для T^*T и TT^* соответственно.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1.4. Оператор $T = T(g, a)$ фредгольмов в шкале $\{H_\gamma^s(M)\}$, если выполнены следующие условия:

- 1) амплитуда a формально эллиптическая;
- 2) кономальный символ $T(p)$ обратим на весовой прямой $\{\operatorname{Im} p = \gamma\}$.

§ 2. Индекс интегральных операторов Фурье

В этом параграфе будет получена формула индекса для фредгольмова интегрального оператора Фурье $T(g, a)$ на многообразии M с коническими особенностями при некоторых условиях симметрии. Индекс выражается в терминах кономального символа $T(p)$ и индекса интегрального оператора Фурье на дубле $2M$. В п. 2.1 строится регуляризатор специального вида и вычисляется изменение индекса при сдвиге весовой прямой (“относительная” теорема об индексе). Этот результат, конечно, не использует никаких условий симметрии. В п. 2.2 вводится условие симметрии и проводится “склейка”, которая редуцирует сумму индексов двух операторов на многообразии M к некоторому оператору на дубле $2M$. В п. 2.3 результаты, полученные в первых двух пунктах, используются для доказательства основной теоремы об индексе.

На протяжении всего этого параграфа предполагается, что символ рассматриваемого оператора T вблизи конической точки является голоморфной функцией

переменной p в достаточно широкой полосе, содержащей все весовые линии, входящие в рассмотрение.

2.1. Регуляризатор и формула “относительного индекса”. Пусть $T = T(g, a)$ – эллиптический интегральный оператор Фурье на M . Предположим, что конические координаты в окрестности особой точки выбраны и зафиксированы. Прогомотопируем оператор T в классе фредгольмовых эллиптических интегральных операторов Фурье (ИОФ) к такому оператору (который будем обозначать той же буквой T), у которого коэффициенты в окрестности конической точки не зависят от r (или, в цилиндрических координатах, от t при достаточно больших t). При этом гомотопия выбирается такой, чтобы вдоль нее конормальный символ не менялся. Такая гомотопия может быть построена следующим образом (ср. [19]). В окрестности конической точки представим оператор T в виде

$$T = T\left(\frac{2}{r}, ir \frac{\partial}{\partial r}\right),$$

где $T(r, p)$ – операторнозначная функция (ее значения суть ИОФ на базе Ω конуса). Положим, далее,

$$T(\tau) = T\left(\varphi_\tau\left(\frac{2}{r}\right), ir \frac{\partial}{\partial r}\right),$$

где $\varphi_\tau(r)$ – гладкая функция, $\tau \in [0, 1]$ – параметр гомотопии, $\varphi_0(r) = r$, а $\varphi_1(r)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= r && \text{при } r > 1, \\ \varphi_1(r) &= 0 && \text{при } r < 1/2. \end{aligned}$$

Новый оператор $T(1)$ (который мы по-прежнему обозначим через T) соответствует новому каноническому преобразованию (которое мы по-прежнему обозначаем через g), гомотопному первоначальному. Вблизи конической точки t -компонента уравнений для g в цилиндрических координатах имеет вид

$$\tau = t + F(\omega, p, q) \equiv t + \frac{\partial S_{1I}}{\partial p}(0, \psi_I, \eta_{\bar{I}}, p, q), \quad (2.1)$$

где $S_{1I}(0, \psi_I, \eta_{\bar{I}}, p, q)$ – производящая функция конормального семейства в соответствующей канонической карте.

Пусть R_0 – обратный оператор для T_0 (индекс 0 означает замораживание коэффициентов при $r = 0$, т.е. если вблизи конической точки $T = T(r, ir \frac{\partial}{\partial r})$, то $T_0 = T(0, ir \frac{\partial}{\partial r})$ – оператор на конусе K). Очевидно, для конормальных символов имеем

$$R(p) = R_0(p) = T_0^{-1}(p) = T^{-1}(p),$$

и функция $R(p)$ имеет полюсы на тех весовых прямых, для которых оператор T не фредгольмов.

Построим также (методами обычной эллиптической теории) интегральный оператор Фурье R_1 такой, что

$$TR_1 = 1 + Q, \quad R_1T = 1 + Q',$$

где Q, Q' – операторы бесконечного отрицательного порядка в шкале $\{H_\gamma^s(M)\}$. При этом символы операторов R_1, Q и Q' аналитичны (вблизи особой точки). Заметим, что отсутствие полюсов достигнуто ценой того, что R_1 не есть регуляризатор, операторы Q и Q' , разумеется, не компактны в шкале $\{H_\gamma^s\}$.

Далее, пусть $e_0 = e_0(r)$, $e_1 = 1 - e_0$ – разбиение единицы на M такое, что $e_0 \equiv 1$ в окрестности особой точки и $e_0 \equiv 0$ вне большей окрестности, и пусть $\psi_0 = \psi_0(v)$ и $\psi_1 = \psi_1(v)$, $v \in M$, – такие гладкие функции, что:

- 1) $\psi_0 \equiv 0$ вне окрестности конической точки, в которой справедливо “коническое” представление, а $\psi_1 \equiv 0$ в окрестности конической точки;
- 2) в окрестности конической точки для достаточно больших значений λ справедливо соотношение

$$\psi_i(\lambda v) \equiv 1 \text{ на } \operatorname{supp} e_i(\lambda v) \cup \operatorname{supp} \left(\pi(g(\pi^* \operatorname{supp} e_i(\lambda v))) \right), \quad (2.2)$$

где $\pi: T_0^*M \rightarrow M$ – естественная проекция, и действие $\lambda \in \mathbb{R}_+$ на v корректно определено в конических координатах.

Существование таких функций очевидно, поскольку r -компонента преобразования g в конических координатах имеет вид

$$\tilde{r} = rf(r, \omega, p, q),$$

где $f(r, \omega, p, q) > 0$ – однородная функция нулевого порядка по переменным (p, q) и, следовательно, ограничена сверху и снизу ненулевыми константами.

Тогда оператор

$$R = \psi_0(\lambda r)R_0e_0(\lambda r) + \psi_1(\lambda r)R_1e_1(\lambda r)$$

будет, очевидно, регуляризатором для T при всех достаточно больших λ .

Индекс $\operatorname{ind}(T_\gamma)$ оператора T в шкале $\{H_\gamma^s(M)\}$ выражается формулой

$$\operatorname{ind}(T_\gamma) = \operatorname{ind}\{T: H_\gamma^s(M) \rightarrow H_\gamma^{s-m}(M)\} = \operatorname{trace}_\gamma(1 - RT) - \operatorname{trace}_\gamma(1 - TR),$$

где $\operatorname{trace}_\gamma$ – след оператора в пространстве $L_\gamma^2(M)$.

Стандартными преобразованиями получаем (индекс γ у символа “trace” для краткости опускаем)

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T_\gamma) &= \operatorname{trace}(\psi_1 Q e_1) - \operatorname{trace}(\psi_1 Q' e_1) - \operatorname{trace}(\psi_0 R_0[e_0, T] + \psi_1 R_1[e_1, T]) \\ &\quad - \operatorname{trace}([\psi_0, T]R_0e_0 + [\psi_1, T]R_1e_1), \end{aligned}$$

где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор операторов, или

$$\operatorname{ind}(T_\gamma) = I_1 + I_2,$$

где I_1 – сумма первых двух слагаемых, а I_2 – сумма членов, содержащих коммутаторы.

Воспользуемся теперь следующим утверждением (следствием из теоремы Лидского; см., например, [20]).

ЛЕММА 2.1. Если H_1, H_2 – гильбертовы пространства и

$$A: H_1 \rightarrow H_2, \quad B: H_2 \rightarrow H_1$$

– такие линейные операторы, что оба произведения AB и BA принадлежат trace-классу, то

$$\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA).$$

Пользуясь этой леммой, преобразуем член I_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} -I_2 &= \text{trace}(R_0[e_0, T] + R_1[e_1, T]) + \text{trace}((1 - \psi_0)R_0[e_0, T] + (1 - \psi_1)R_1[e_1, T]) \\ &\quad + \text{trace}([\psi_0, T]R_0e_0 + [\psi_1, T]R_1e_1) \\ &= \text{trace}(R_0[e_0, T] + R_1[e_1, T] + R_0[e_0, T](1 - \psi_0) + R_1[e_1, T](1 - \psi_1)) \\ &\quad + \text{trace}(R_0e_0[\psi_0, T] + R_1e_1[\psi_1, T]) \\ &= \text{trace}(R_0[e_0, T]\psi_0 + R_0e_0[\psi_0, T] + R_1[e_1, T]\psi_1 + R_1e_1[\psi_1, T]) \\ &= \text{trace}(R_0[e_0\psi_0, T] + R_1[e_1\psi_1, T]) = \text{trace}\{(R_0 - R_1)[e_0, T]\}. \end{aligned}$$

Здесь мы применили лемму 2.1 к подчеркнутым членам и воспользовались равенствами $e_i\psi_i = e_i$ и $e_1 + e_2 = 1$.

Объясним кратко, почему лемма 2.1 может быть применена к подчеркнутым членам. Рассмотрим, например, член $[\psi_0, T]R_0e_0$. Нужно показать, что операторы $[\psi_0, T]R_0e_0$ и $R_0e_0[\psi_0, T]$ принадлежат trace-классу операторов в $L_{2,\gamma}(M)$. Имеем

$$\begin{aligned} S &\equiv [\psi_0, T]R_0e_0 = [\psi_0 - 1, T]R_0e_0 \\ &= (\psi_0 - 1)TR_0e_0 + T(1 - \psi_0)R_0e_0. \end{aligned}$$

Условие (2.2) означает, что на носителях функций ψ_i и e_i оба члена в правой части являются операторами с бесконечно гладкими ядрами. Для того чтобы доказать, что они являются операторами trace-класса, необходимо дополнительно изучить, что происходит вблизи конической точки. Мы будем использовать цилиндрическую координату t , тогда существенно поведение рассматриваемых объектов вблизи $t = \infty$. Поскольку выражение $\psi_0 - 1$ обращается в нуль в окрестности бесконечности, можно написать

$$\psi_0 - 1 = e^{-\varepsilon t} \kappa(t),$$

где функция $\kappa(t)$ ограничена вместе со всеми производными (напомним, что большие отрицательные значения t для нас несущественны). Теперь, используя обычную формулу композиции псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, получаем

$$\kappa TR_0e_0 = F,$$

где F – псевдодифференциальный оператор порядка $-\infty$, символ которого удовлетворяет соответствующим оценкам равномерно по t ; наличие убывающего множителя $e^{-\varepsilon t}$ гарантирует теперь, что оператор

$$(\psi_0 - 1)TR_0e_0 = e^{-\varepsilon t} \kappa TR_0e_0 = e^{-\varepsilon t} F$$

принадлежит trace-классу.

Далее имеем

$$T(1 - \psi_0)R_0e_0 = e^{-\varepsilon t}(e^{\varepsilon t}Te^{-\varepsilon t})\kappa R_0e_0 = e^{-\varepsilon t}\tilde{T}\kappa R_0e_0,$$

где символ оператора $\tilde{T}$ отличается от символа оператора T на сдвиг $i\varepsilon$ в аргументе p (другими словами, весовая линия для оператора T сдвинута на $i\varepsilon$). При достаточно малых ε новая весовая линия все еще лежит в области аналитичности символа оператора T , откуда следует, что оператор $\tilde{T}$ имеет те же самые свойства, что и оператор T . Теперь видно, что оператор $T(1 - \psi_0)R_0e_0$ также принадлежит трассе-классу.

Доказательство утверждения для члена $R_0e_0[\psi_0, T]$ включает также коммутацию экспоненты $e^{-\varepsilon t}$ с оператором R_0 . Последнее не приводит к дополнительным эффектам. (Поскольку оператор R_0 не имеет полюсов на прямой $\mathcal{L}_\gamma$, откуда следует, с учетом того, что все полюсы лежат в некотором секторе, что оператор R_0 не имеет полюсов на весовых линиях, достаточно близких к $\mathcal{L}_\gamma$.)

Для другого подчеркнутого члена нужны рассуждения аналогичны.

Устремим теперь $\lambda \rightarrow 0$ и регуляризуем интеграл I_1 по методу работы [21]. Получим

$$\text{ind}(T_\gamma) = \text{trace}_\gamma\{(R_0 - R_{10})[T_0, e_0]\} + \text{trace}_\gamma \tilde{Q}, \quad (2.3)$$

где $\tilde{Q}$ – п. д. о. трассе-класса с символом, голоморфным по p .

Для вычисления первого слагаемого в формуле (2.3) воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 2.2. Пусть $F(p)$, $G(p)$ – гладкие операторнозначные функции, у которых все производные имеют не более чем степенной рост, и пусть $f(t)$ – гладкая функция такая, что $f'(t)$ финитна. Тогда

$$\begin{aligned} H(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \text{SmbI}_{-i\frac{\partial}{\partial t}, t} \left\{ G\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right) \circ \left[F\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right), f(t) \right] \right\} dt \\ &= -iG(p) \frac{\partial F}{\partial p}(p) (f(+\infty) - f(-\infty)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где индексы у знака SmbI указывают, относительно каких упорядоченных переменных берется символ (см., например, [22]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(p, t)$ – подынтегральное выражение в (2.4). Имеем (см. [22])

$$\psi(p, t) = G\left(p - i\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(F\left(p - i\frac{\partial}{\partial t}\right) - F(p) \right) f(t) = -iG\left(p - i\frac{\partial}{\partial t}\right) \Phi\left(p, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) f'(t),$$

где

$$\Phi(p, \tau) = \int_0^1 F'(p + \lambda\tau) d\tau$$

в силу леммы Адамара. Пусть

$$P(p, \xi) = -iG(p + \xi)\Phi(p, \xi).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} H(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(p, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) f'(t) dt \\ &= \left\langle 1, P\left(p, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) f'(t) \right\rangle = \left\langle P\left(p, i\frac{\partial}{\partial t}\right) 1, f'(t) \right\rangle \\ &= \langle P(p, 0)1, f'(t) \rangle = P(p, 0) \langle 1, f'(t) \rangle = P(p, 0)(f(+\infty) - f(-\infty)). \end{aligned}$$

Здесь угловые скобки означают спаривания между пространствами медленно растущих распределений быстроубывающих функций. Лемма доказана.

Применяя эту лемму и стандартную формулу следа, получаем

$$\text{ind}(T_\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\gamma} \text{trace}(R(p) - R_1(p)) \frac{\partial T}{\partial p}(p) dp + \text{trace}_\gamma \tilde{Q}, \quad (2.5)$$

где $\mathcal{L}_\gamma = \{\text{Im } p = \gamma\}$ – весовая прямая.

Поскольку символ $\tilde{Q}$ голоморфен, откуда следует, что $\text{trace}_\gamma \tilde{Q}$ на самом деле не зависит от γ , и мы получаем следующую теорему

ТЕОРЕМА 2.1 (“относительная формула индекса”). Пусть $\gamma_1 \leq \gamma_2$ и конормальный символ обратим на весовых прямых $\mathcal{L}_{\gamma_1}$ и $\mathcal{L}_{\gamma_2}$. Тогда

$$\text{ind}(T_{\gamma_2}) - \text{ind}(T_{\gamma_1}) = \sum_{\gamma_1 < \text{Im } p_j < \gamma_2} \text{trace} \left(\text{Res}_{p_j} T^{-1}(p) \frac{\partial T(p)}{\partial p} \right), \quad (2.6)$$

где p_j – полюсы семейства $T^{-1}(p) = R(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить теорему Коши о вычетах и учесть тот факт, что член $R_1(p) \partial T(p) / \partial p$ голоморфен и поэтому не дает вклад в вычеты полюсов в подынтегральной функции.

2.2. Условие симметрии и склейка. Предположим, что конормальный символ $T(p)$ оператора $T = T(g, a)$ удовлетворяет следующему условию симметрии:

$$T(-p) = T(p). \quad (2.7)$$

Случай, когда симметрия имеет место не относительно начала координат, а относительно некоторой точки $p = p_0$, может быть редуцирован к данному преобразованием подобия с оператором $U = e^{-p_0 t}$. Условие симметрии [19]

$$\sigma_1 T(p_0 - p) = T(p_0 + p) \sigma_2, \quad (2.8)$$

включающее гомоморфизмы расслоений σ_1 и σ_2 , а также некоторые и более общие условия симметрии, может быть также включено в нашу схему без каких-либо дополнительных идей. Для того чтобы не утяжелять изложения, мы ограничимся здесь простейшим условием (2.7).

Приведем пример ИОФ с конормальным символом, удовлетворяющим условию симметрии (2.7). Этот ИОФ соответствует некоторому каноническому преобразованию g . Опишем g лишь вблизи конической точки (что только и является существенным для конормального символа). Будем работать в цилиндрических координатах на T^*K , т. е. в координатах (t, ω, p, q) , $(\omega, q) \in T^*\Omega$, $t \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, –

конормальная переменная (двойственная к t). Будем описывать каноническое преобразование

$$g: T_0^*M \rightarrow T_0^*M, \quad (2.9)$$

$$(t, \omega, p, q) \mapsto (t', \omega', p', q') \quad (2.10)$$

с помощью производящей функции. В простейшем случае производящая функция S зависит от переменных (p, q, t', ω') (неособая карта в определении канонического оператора) и задает каноническое преобразование по формулам

$$t = t' + \frac{\partial S}{\partial p}(p, q, t', \omega'), \quad \omega = \omega' + \frac{\partial S}{\partial q}(p, q, t', \omega'), \quad (2.11)$$

$$p' = p + \frac{\partial S}{\partial t'}(p, q, t', \omega'), \quad q' = q' + \frac{\partial S}{\partial \omega'}(p, q, t', \omega'). \quad (2.12)$$

Конормальный символ имеет вид

$$T_0(p) = \exp \left\{ iS \left(p, i \frac{\partial}{\partial \omega}, +\infty, \bar{\omega} \right) \right\} a \left(p, i \frac{\partial}{\partial \omega}, +\infty, \bar{\omega} \right),$$

и можно добиться выполнения условия симметрии, выбирая амплитуду a подходящим образом, при условии, что

$$S(p, q, +\infty, \omega) \equiv S(-p, q, +\infty, \omega).$$

Простейший конкретный пример строится следующим образом. Пусть $\Omega = S^1$ – окружность с угловой координатой ω . Рассмотрим (глобальную) производящую функцию вида

$$S \equiv S(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Однородное каноническое преобразование задается формулами

$$p' = p, \quad q' = q, \quad t' = t - \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \omega = \omega - \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Для перехода к соответствующему ИОФ аналитически сгладим функцию $S(p, q)$, свернув ее с преобразованием Фурье четной гладкой функции с компактным носителем. Тогда сглаженная функция вновь удовлетворяет условию $S(-p, q) = S(p, q)$, и, выбирая единичную амплитуду, мы получаем симметричный конормальный символ:

$$T_0(p)\phi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(i(S(p, k) + k\omega))\phi_k,$$

где ϕ_k – коэффициенты Фурье функции ϕ .

Предположим, что конормальный символ $T(p)$ обратим на весовой линии $\mathcal{L}_\gamma$. Тогда в силу (2.7) он также обратим на линии $\mathcal{L}_{-\gamma}$. Вычислим сумму $\text{ind}(T_\gamma) +$

Рис. 1. Два экземпляра многообразия M , дубль $2M$ и цилиндр C

$\text{ind}(T_{-\gamma})$ и покажем, что она определяется только каноническим преобразованием g и главным символом a . Для того чтобы это сделать, нам необходимы некоторые геометрические и аналитические конструкции.

а) *Геометрические объекты* (см. рис. 1).

Рассмотрим два экземпляра M_+ и M_- многообразия M . Мы будем изображать их как многообразия с цилиндрическими концами (см. п. 1.1). Это означает, что в окрестности особой точки вместо конических используются цилиндрические координаты, так что соответствующая часть многообразия выглядит, как “уходящий в бесконечность” цилиндр $\Omega \times (0, +\infty)$. На первом экземпляре M_+ цилиндрический конец есть $C_0 \cup C_+$, и внутренняя часть многообразия обозначается через $M_{+, \text{int}}$. Далее, разделим цилиндрический конец на две части C_0 и C_+ , где C_0 есть достаточно длинный (ниже увидим, какой именно длины) конечный цилиндр с базой Ω ,

а C_+ – оставшаяся бесконечная часть. Удобно выбрать цилиндрическую координату t (определенную на цилиндрическом конце) так, чтобы $\{t = 0\}$ было бы в точности среднее сечение цилиндра C_0 .

Для второго экземпляра M_- обозначим внутреннюю часть через $M_{-, \text{int}}$ (она изоморфна $M_{+, \text{int}}$) и цилиндрический конец через $C_0 \cup C_-$ (C_- изоморфно C_+). Заметим, что на цилиндрических частях всех многообразий, показанных на рис. 1, за исключением M_- , переменная t увеличивается слева направо; для M_- направление t -оси противоположно.

Теперь выбросим C_+ из M_+ и C_- из M_- и склеим полученное многообразие вдоль C_0 , отождествляя каждое сечение $\{t\} \times \Omega \subset C_0 \subset M_+$ с соответствующим сечением $\{-t\} \times \Omega \subset C_0 \subset M_-$. В результате получим многообразие, обозначаемое через $2M$ (см. рис. 1). Это многообразие будем называть *дублем* многообразия M . Склейка многообразий поднимается до соответствующей склейки соответствующих кокасательных расслоений (значения кономальной переменной p с одним и тем же модулем и противоположными знаками на T^*M_+ и T^*M_- отождествляется). Легко видеть, что функция F в (2.1) является нечетной функцией переменной p при условиях симметрии (2.7), так что преобразование g “пропускается через склейку”, и мы получаем каноническое преобразование

$$2g: T_0^*(2M) \rightarrow T_0^*(2M).$$

Наконец, введем бесконечный цилиндр C с базой Ω , который также представляется как объединение:

$$C = C_- \cup C_0 \cup C_+.$$

б) *Аналитические объекты.*

Напомним, что $R(p) = (T(p))^{-1}$. Оператор $R(p)$ не имеет полюсов на линии $\mathcal{L}_\gamma$, и операторы

$$T_0 = T\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad R_0 = R\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

корректно определены в шкале $\{H_\gamma^s(C)\}$ и удовлетворяют соотношениям

$$T_0 R_0 = 1, \quad R_0 T_0 = 1.$$

Пусть $\chi_+(t)$, $\chi_-(t)$ – разбиение единицы на вещественной прямой (см. рис. 1). Предположим, что эти функции постоянны вне достаточно малой окрестности $t = 0$; тогда они могут быть естественным образом продолжены до разбиения единицы на всех четырех многообразиях, показанных на рисунке. Будем во всех случаях использовать те же самые обозначения $\chi_+(t)$, $\chi_-(t)$.

Пусть T_+ – оператор T в $H_\gamma^s(M_+)$ и T_- – оператор T в $H_{-\gamma}^s(M_-)$, и аналогично для R_+ и R_- , где R есть регуляризатор оператора T (см. п. 2.1). Не уменьшая общности, можно предположить, что справедливы следующие условия (возможно, после добавления компактных сглаживающих операторов к операторам $T_\pm$ и $R_\pm$, которые не меняют индекс).

1. Для достаточно больших t , τ (т.е. в C_+) ядра операторов T_+ и R_+ совпадают с ядрами операторов T_0 и R_0 соответственно. Полный операторнозначный символ оператора T_+ (соответственно R_+) относительно квантования $\frac{1}{\partial/\partial t}$, $\frac{2}{t}$ совпадает с символом оператора T_- (соответственно R_-) в $C_0 \cup C_+$. Аналогичные

условия справедливы для T_- и R_- . (Заметим, что условия, налагаемые на “+” и “-”-операторы, совместимы с условием (2.7).)

2. Пусть $K(x, y)$ – ядро любого из операторов T_+ и R_+ . Если хотя бы одна из точек x и y не принадлежит C_+ , то $K(x, y) = 0$ вне достаточно малой окрестности проекции $M_+ \times M_+$ графика соответствующего канонического преобразования (т.е. g или g^{-1}).

3. В частности, пересечение $\text{supp } K_{T_{\pm}} \cap (C_0 \times C_0)$ лежит в полосе $\{|t - \tau| < t_0\}$, где t_0 мало в сравнении с длиной C_0 (скажем, меньше, чем $1/10$ этой длины; достаточно взять $t_0 > \sup |F(\omega, p, q)|$ (см. (2.1)) и затем взять C_0 длиннее, чем $10t_0$).

Окончательно, пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$ – интегральные операторы Фурье в шкале Соболева на многообразии $2M$, ассоциированные с каноническими преобразованиями $2g$ и $(2g)^{-1}$ соответственно, которые совпадают по модулю сглаживающих операторов с операторами T_+ и R_+ в $M_{+, \text{int}} \cup C_0$ и с операторами T_- и R_- в $M_{-, \text{int}} \cup C_0$. Предположим также, что носители ядер Шварца операторов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$ лежат в малых окрестностях проекции графиков соответствующих канонических преобразований. (Это техническое требование может быть всегда удовлетворено добавлением подходящих сглаживающих операторов, которые не влияют на индекс оператора $\mathcal{T}$.)

Теперь мы установим следующий замечательный результат, касающийся соотношения между индексами операторов $T_{\pm}$ и индексом “склеенного” оператора $\mathcal{T}$ на $2M$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\text{ind } T_+ + \text{ind } T_- \equiv \text{ind}(T_{\gamma}) + \text{ind}(T_{-\gamma}) = \text{ind } \mathcal{T}. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем для краткости следующее обозначение. Будем писать

$$\text{trace } A - \text{trace } B = \left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right]_S,$$

где A и B – операторы на многообразии S . (В качестве S всегда будет использоваться одно из многообразий, показанных на рис. 1, а пространства, в которых берутся следы, суть L^2 -пространства в соответствующих соболевских шкалах, в которых эти операторы действуют.) Обозначение

$$\left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right]_S$$

означает в точности то же, что и $\left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right]_S$, но будет использовано для указания, что

$$\left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right]_S = 0.$$

В частности, мы будем всегда писать $\left[\begin{array}{c} AB \\ BA \end{array} \right]_S$, если операторы A и B на S удовлетворяют предположениям леммы 2.1.

Основное средство в доказательстве этой теоремы – это переход от одного многообразия к другому при вычислении следов. Это возможно всегда, когда операторы могут быть проинтерпретированы либо на одном многообразии, либо на другом. Например, в силу наших условий на носители ядер Шварца, ядра Шварца операторов $\chi_+ R_+ T_+$ и $T_+ \chi_+ R_+$ имеют носители во множестве $\{M_{+, \text{int}} \cup C_0\} \times \{M_{+, \text{int}} \cup C_0\}$, и поэтому каждый из этих операторов может быть рассмотрен на многообразии M_+ или $2M$, в зависимости от того, как это требуется. Впоследствии эти очевидные, но длинные объяснения об обосновании перехода от одного многообразия к другому будут опускаться.

Итак, вычислим $\text{ind } \mathcal{T}$ (все циклические преобразования множителей справедливы в силу леммы 2.1).

Имеем

$$\text{ind } \mathcal{T} = \text{trace}(1 - \mathcal{R}\mathcal{T}) - \text{trace}(1 - \mathcal{T}\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 1_{2M} - \mathcal{R}\mathcal{T} \\ 1_{2M} - \mathcal{T}\mathcal{R} \end{bmatrix}_{2M} \quad (2.14)$$

(здесь 1_{2M} – тождественный оператор на многообразии $2M$). Впоследствии для краткости будем опускать нижний индекс, обозначающий многообразие, если это многообразие есть $2M$.

Сделаем некоторые преобразования. Имеем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 - \mathcal{R}\mathcal{T} \\ 1 - \mathcal{T}\mathcal{R} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \chi_+ \mathcal{R}\mathcal{T} - \chi_- \mathcal{R}\mathcal{T} \\ 1 - \mathcal{T}\chi_+ \mathcal{R} - \mathcal{T}\chi_- \mathcal{R} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \chi_+ R_+ \mathcal{T} - \chi_- R_- \mathcal{T} \\ 1 - \mathcal{T}\chi_+ R_+ - \mathcal{T}\chi_- R_- \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \chi_+ (R_+ - \mathcal{R}) \mathcal{T} \\ \mathcal{T}\chi_+ (R_+ - \mathcal{R}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_- (R_- - \mathcal{R}) \mathcal{T} \\ \mathcal{T}\chi_- (R_- - \mathcal{R}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \chi_+ R_+ T_+ - \chi_- R_- T_- \\ 1 - T_+ \chi_+ R_+ - T_- \chi_- R_- \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \chi_+ R_+ (T_+ - \mathcal{T}) \\ (T_+ - \mathcal{T}) \chi_+ R_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_- R_- (T_- - \mathcal{T}) \\ (T_- - \mathcal{T}) \chi_- R_- \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть теперь e – функция с носителем в $M_{+, \text{int}} \cup C_0$ такая, что

$$e T_+ \chi_+ R_+ = T_+ R_+ \chi_+, \quad e \chi_+ = \chi_+.$$

Положим

$$A = e - e T_- \chi_- R_-, \quad B = 1 - A.$$

Тогда оператор A может рассматриваться как оператор на M_+ , оператор B – как оператор на M_- и, более того, операторы

$$A - T_+ \chi_+ R_+ = e(1 - T_+ \chi_+ R_+ - T_- \chi_- R_-), \quad B - T_- \chi_- R_-$$

принадлежат трассе-классу. Поэтому мы можем записать

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 - \chi_+ R_+ T_+ - \chi_- R_- T_- \\ 1 - T_+ \chi_+ R_+ - T_- \chi_- R_- \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \chi_+ - \chi_+ R_+ T_+ \\ A - T_+ \chi_+ R_+ \end{bmatrix}_{M_+} + \begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_- T_- \\ B - T_- \chi_- R_- \end{bmatrix}_{M_-}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Преобразуем первый член в правой части. Имеем (ниже для краткости пишем 1_+ вместо 1_{M_+})

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \chi_+ - \chi_+ R_+ T_+ \\ A - T_+ \chi_+ R_+ \end{bmatrix}_{M_+} &= \begin{bmatrix} 1_+ - R_+ T_+ \\ 1_+ - T_+ R_+ \end{bmatrix}_{M_+} \\ &- \begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_+ T_+ \\ 1_+ - A - T_+ \chi_- R_+ \end{bmatrix}_{M_+} = \text{Ind } T_+ - \begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_+ T_+ \\ 1_+ - A - T_+ \chi_- R_+ \end{bmatrix}_{M_+}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда очевидно, что оператор $1_+ - A$ может быть представлен как оператор на многообразии C ; поэтому

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_+ T_+ \\ 1_+ - A - T_+ \chi_- R_+ \end{bmatrix}_{M_+} &= \begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_+ T_+ \\ (1_+ - A) - T_+ \chi_- R_+ \end{bmatrix}_C \\ &= \begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_+ T_0 \\ (1_+ - A) - T_0 \chi_- R_+ \end{bmatrix}_C + \left\| \begin{bmatrix} \chi_- R_+ (T_0 - T_+) \\ (T_0 - T_+) \chi_- R_+ \end{bmatrix} \right\|_C \\ &= \begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_0 T_0 \\ (1_+ - A) - T_0 \chi_- R_0 \end{bmatrix}_C + \left\| \begin{bmatrix} \chi_- (R_0 - R_+) T_0 \\ T_0 \chi_- (R_0 - R_+) \end{bmatrix} \right\|_C \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1_+ - A) - T_0 \chi_- R_0 \end{bmatrix}_C \end{aligned}$$

(напомним, что $R_0 T_0 = 1_C$).

Аналогично

$$\begin{bmatrix} \chi_- - \chi_- R_- T_- \\ B - T_- \chi_- R_- \end{bmatrix}_{M_-} = \text{Ind } T_- + \begin{bmatrix} 0 \\ (1_- - B) - T_0 \chi_+ R_0 \end{bmatrix}_C. \quad (2.17)$$

Остается доказать, что сумма остаточных членов в (2.16) и (2.17) равно нулю. Имеем

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 \\ (1_+ - A) - T_0 \chi_- R_0 \end{bmatrix}_C + \begin{bmatrix} 0 \\ (1_- - B) - T_0 \chi_+ R_0 \end{bmatrix}_C \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (1_+ - A) + (1_- - B) - 1_C \end{bmatrix}_C. \end{aligned}$$

Далее,

$$1_C = \chi_+ + \chi_-$$

и соответственно

$$(1_+ - A) + (1_- - B) - 1_C = P_1 + P_2,$$

где

$$P_1 = (1_+ - A) - \chi_+, \quad P_2 = (1_- - B) - \chi_-.$$

Ядра Шварца операторов P_1 и P_2 имеют носители в $C_0 \times C_0$ и достаточно показать, что сумма этих ядер равна здесь нулю. Будем писать $D_1 \sim D_2$, если ядра Шварца D_1 и D_2 совпадают в $C_0 \times C_0$. (Многообразия, на которых операторы D_1 и D_2 определены, не обязаны совпадать, но, разумеется, оба многообразия должны содержать C_0 .) Имеем

$$P_1 \sim \chi_- - A, \quad P_2 \sim \chi_+ - B,$$

где правые части понимаются как операторы на дубле $2M$. Но

$$\chi_- - A + \chi_+ - B = 1_{2M} - 1_{2M} = 0.$$

Этим завершается доказательство теоремы 2.2.

2.3. Теорема об индексе. Теперь можно сформулировать и доказать основной результат об индексе ИОФ. Пусть $T = T(g, a)$ – ИОФ, удовлетворяющий условию симметрии (2.7), $\gamma \geq 0$ и весовая прямая $\mathcal{L}_\gamma$ не содержит полюсов конormalного символа $T(p)$. (Для $\gamma < 0$ утверждение совершенно аналогично.)

ТЕОРЕМА 2.3. *При указанных условиях*

$$\text{ind}(T_\gamma) = \frac{1}{2} \text{ind } \mathcal{T} - \frac{1}{2} \sum_{-\gamma < \text{Im } p_j < \gamma} \text{Res}_{p_j} \left(T^{-1}(p) \frac{\partial T(p)}{\partial p} \right),$$

где $\mathcal{T}$ – ИОФ на дубле $2M$, построенный в доказательстве теоремы 2.2, а p_j – полюсы функции $T^{-1}(p)$.

Доказательство немедленно вытекает из теорем 2.1 и 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (индекс квантованных канонических преобразований). Пусть $T = T(g)$ – квантованное каноническое преобразование и $T(p)$ – его конormalный символ, $\gamma \geq 0$. Предположим, что весовая линия $\mathcal{L}_\gamma$ не содержит полюсов функции $T(p)$. Тогда если выполнено условие симметрии (2.7), то справедлива формула

$$\text{ind}(T_\gamma) = \frac{1}{2} c\text{-deg}(\widetilde{2g}) - \frac{1}{2} \sum_{-\gamma < \text{Im } p_j < \gamma} \text{Res}_{p_j} \left(T^{-1}(p) \frac{\partial T(p)}{\partial p} \right), \quad (2.18)$$

где $c\text{-deg}$ – контактная степень [6], $\widetilde{2g}$ – контактное преобразование, соответствующее $2g$, и p_j – полюсы функции $T^{-1}(p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для случая условия симметрии (2.8) формула индекса получается (в предположении, что $\gamma \geq \text{Im } p_0$) следующий вид:

$$\text{ind}(T_\gamma) = \frac{1}{2} c\text{-deg}(2g) - \frac{1}{2} \sum_{2 \text{ Im } p_0 - \gamma < \text{Im } p_j < \gamma} \text{Res}_{p_j} \left(T^{-1}(p) \frac{\partial T(p)}{\partial p} \right). \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.1. Оператор $\mathcal{T}$ является квантованным контактным преобразованием над $2M$, соответствующим (однородному) каноническому преобразованию $2g$. Как показано в [6], такое преобразование унитарно эквивалентно соответствующему квантованному контактному преобразованию. Таким образом, можно использовать формулу индекса, полученную в [6] для квантованных контактных преобразований над конфигурационным пространством, которое является гладким замкнутым многообразием. Именно, мы имеем

$$\text{ind } \mathcal{T} = c\text{-deg}(\widetilde{2g}). \quad (2.20)$$

Остается применить теорему 2.3.

§3. Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3. Мы имеем

$$T = \sum T_j,$$

где сумма конечна и операторы T_j соответствуют локальным каноническим операторам в канонических картах. Таким образом, необходимо доказать, что $T_j^* T_k$ является псевдодифференциальным оператором. Если операторы T_j и T_k соответствуют локальным каноническим операторам в картах, чьи проекции на многообразие M не содержат конических точек, нужное утверждение может быть доказано стандартным образом (см. [14], [16]). Таким образом, необходимо изучить лишь случай, когда, по крайней мере, один из этих операторов соответствует канонической карте в окрестности конической точки. Для простоты изложения рассмотрим только случай $j = k$, и предположим, что каноническая карта неособая: $\bar{I} = \emptyset$ и носитель элемента $\pi_1^* a$ содержится в этой карте. Тогда

$$[T(g, a)u](t, \omega) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int e^{i(pt + S_1(e^{-t}, \omega, p, q))} b(e^{-t}, \omega, p, q) \tilde{u}(p, q) dp dq, \quad (3.1)$$

где $pt + S_1(e^{-t}, \omega, p, q)$ – производящая функция преобразования g в данной канонической карте, $b = (\pi_1^* a) \sqrt{\mu_{1, \dots, n}} \chi(p, q)$, $\chi(p, q)$ – срезающая функция, равная 1 в окрестности бесконечности, $\mu_{1, \dots, n}$ – плотность меры μ в координатах (τ, ψ, p, q) канонической карты, $n = \dim M$ и

$$\tilde{u}(p, q) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int e^{-i(pt + \omega q)} u(t, \omega) dt d\omega$$

– преобразование Фурье функции $u(t, \omega)$. Уравнение (3.1) может быть переписано в виде

$$T(g, a) = \exp\{i\Phi(\bar{e}^{2-t}, \bar{\omega}, \hat{p}, \hat{q})\} b(\bar{e}^{2-t}, \bar{\omega}, \hat{p}, \hat{q}), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(e^{-t}, \omega, p, q) &= S_1(e^{-t}, \omega, p, q) - pq, \\ \hat{p} &= -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{q} = -i \frac{\partial}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Для доказательства утверждения этой леммы мы используем метод, предложенный в [23]. Имеем

$$T^* T = \exp\left\{i\left(\Phi(\bar{e}^{2-t}, \bar{\omega}, \hat{p}, \hat{q}) - \Phi(\bar{e}^{2-t}, \bar{\omega}, \hat{p}, \hat{q})\right)\right\} b(\bar{e}^{2-t}, \bar{\omega}, \hat{p}, \hat{q}) \bar{b}(\bar{e}^{2-t}, \bar{\omega}, \hat{p}, \hat{q}), \quad (3.3)$$

где черта над b означает комплексное сопряжение. Для краткости обозначим $(t, \omega) = x$, $(p, q) = \xi$. Тогда

$$T^* T = \exp\{i[S(\bar{x}, \hat{\xi}) - S(\bar{x}, \hat{\xi})]\} \varphi(\bar{x}, \hat{\xi}) \bar{\varphi}(\bar{x}, \hat{\xi}),$$

где

$$S(x, \xi) = \Phi(e^{-t}, \omega, p, q), \quad \varphi(x, \xi) = b(e^{-t}, \omega, p, q).$$

Применим теперь оператор T^*T к произвольной функции $f(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} T^*Tf = & \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2n} \int e^{i(\xi x - \xi' x'')} f(x'') \left\{ \int \exp\{i[(\xi' - \xi)x' + S(x', \xi') - S(x', \xi)]\} \right. \\ & \left. \times \varphi(x', \xi') \overline{\varphi}(x', \xi) dx' \right\} dx'' d\xi d\xi'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку функция

$$S_{1, \dots, n}(x, \xi) = x\xi + S(x, \xi)$$

является производящей функцией преобразования g в рассматриваемой канонической карте, то якобиан

$$J_0(x, \xi) = \det \left(E + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \xi}(x, \xi) \right) \quad (3.5)$$

не обращается в нуль в канонической карте (и, в частности, на носителе $\varphi(x, \xi)$), и, более того, уравнение

$$\xi + \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi) = \eta$$

имеет не более одного решения на носителе функции $\varphi(x, \xi)$ для каждого $\eta \in \mathbb{R}^n$. Этот факт может быть переформулирован в виде следующего неравенства:

$$\xi + \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi) \neq \xi' + \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi'), \quad (3.6)$$

справедливого для $(x, \xi) \in \text{supp } \varphi$, $(x, \xi') \in \text{supp } \varphi$, $\xi \neq \xi'$.

Уравнение (3.6) показывает, что можно интегрировать по частям относительно x' во внутреннем интеграле (3.4) для $\xi \neq \xi'$. Для того чтобы использовать этот факт, введем гладкое разбиение единицы:

$$1 = \chi_1(\xi, \xi') + \chi_2(\xi, \xi') + \chi_3(\xi, \xi'),$$

где χ_i , $i = 1, 2, 3$, — однородные функции нулевого порядка для достаточно больших значений $|\xi| + |\xi'|$,

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 0, & \frac{|\xi - \xi'|}{|\xi|} &\geq 2\varepsilon, \\ \chi_2 &= 0, & \frac{|\xi - \xi'|}{|\xi|} &\leq \varepsilon, \\ \chi_3 &= 0, & |\xi| + |\xi'| &\geq 2, \\ \chi_3 &= 1, & |\xi| + |\xi'| &\leq 1 \end{aligned}$$

(здесь $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, которое будет выбрано позднее). Теперь перепишем уравнение (3.4) в виде

$$T^*Tf = \sum_{j=1}^3 P_j f,$$

где

$$P_j f = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2n} \int e^{i(\xi x - \xi' x'')} f(x'') \left\{ \int \exp\{i[(\xi' - \xi)x' + S(x', \xi') - S(x', \xi)]\} \right. \\ \left. \times \varphi(x', \xi') \overline{\varphi}(x', \xi) \chi_j(\xi, \xi') dx' \right\} dx'' d\xi d\xi'. \quad (3.7)$$

Очевидно, что

$$P_3 = P_3 \left(\hat{\xi}^1, \hat{x}^2, \hat{\xi}^3 \right),$$

где

$$P_3(\xi', x, \xi) = \chi_3(\xi, \xi') e^{i[S(x, \xi') - S(x, \xi)]} \varphi(x, \xi') \overline{\varphi}(x, \xi)$$

— гладкая функция, финитная по переменным (ξ, ξ') . Поэтому оператор P_3 является сглаживающим оператором в шкале H_0^s .

Теперь в формуле (3.7) для $P_2 f$ можно произвести интегрирование по частям относительно x' достаточно большое количество раз. В результате получим

$$P_2 = P_2^{(N)} \left(\hat{\xi}^1, \hat{x}^2, \hat{\xi}^3 \right),$$

где символ $P_2^{(N)}(\xi', x, \xi)$ вместе с достаточно большим количеством производных убывает при $|\xi| + |\xi'| \rightarrow \infty$ как $[|\xi| + |\xi'|]^{-N}$ и число N может быть сделано как угодно большим. Отсюда следует, что P_2 также является сглаживающим оператором.

Докажем, наконец, что P_1 является коническим псевдодифференциальным оператором порядка $2m$. Для этого рассмотрим вектор-функцию $\delta S / \delta \xi(x; \xi', \xi) \in \mathbb{R}^n$, у которой i -я компонента есть разностная производная

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \xi} \right)_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta S}{\delta \xi_i}(x; \xi'_1, \dots, \xi'_{i-1}; \xi'_i, \xi_i; \xi_{i+1}, \dots, \xi_n).$$

Очевидно,

$$S(x, \xi') - S(x, \xi) = \sum_i (\xi'_i - \xi_i) \left(\frac{\delta S}{\delta \xi} \right)_i(x; \xi', \xi) = (\xi' - \xi) \frac{\delta S}{\delta \xi}(x; \xi', \xi).$$

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{x} + \frac{\delta S}{\delta \xi}(\tilde{x}; \xi', \xi) = x \quad (3.8)$$

для $\tilde{x}$. Если якобиан

$$J(\tilde{x}, \xi', \xi) = \det \left(E + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\delta S}{\delta \xi}(\tilde{x}; \xi', \xi) \right)$$

не равен нулю, то уравнение (3.8) определяет $\tilde{x}$ как неявную функцию от переменных x, ξ', ξ :

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, \xi', \xi).$$

Заметим, что

$$J(\tilde{x}, \xi', \xi) \neq 0 \quad (3.9)$$

на $\text{supp } \chi_1$ в силу того, что ε – достаточно малое число, поскольку $J = J_0 \neq 0$ на диагонали $\xi' = \xi$ и оба якобиана суть однородные функции по импульсным переменным. Выберем число ε так, чтобы условие (3.9) было удовлетворено. Тогда в формуле (3.7) для $P_1 f$ можно сделать замену переменных $x' = \tilde{x}(y, \xi', \xi)$ во внутреннем интеграле. В результате получим

$$\begin{aligned} P_1 f = & \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2n} \int e^{i(\xi x - \xi' x'')} f(x'') \left\{ \int e^{iy(\xi' - \xi)} |J^{-1}(\tilde{x}(y, \xi', \xi), \xi', \xi)| \right. \\ & \times \varphi(\tilde{x}(y, \xi', \xi), \xi') \bar{\varphi}(\tilde{x}(y, \xi', \xi), \xi) \chi_1(\xi, \xi') dy \Big\} dx'' d\xi' d\xi, \end{aligned}$$

или

$$P_1 = \frac{\varphi(\tilde{x}(\overset{2}{x}, \overset{1}{\xi}, \overset{3}{\hat{\xi}}), \overset{1}{\hat{\xi}}) \bar{\varphi}(\tilde{x}(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{3}{\hat{\xi}}), \overset{3}{\hat{\xi}}) \chi_1(\overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{3}{\hat{\xi}})}{|J(\tilde{x}(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{3}{\hat{\xi}}), \overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{3}{\hat{\xi}})|} \equiv P_1(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{\xi}}, \overset{3}{\hat{\xi}}). \quad (3.10)$$

Теперь изучим зависимость символа $P_1(x, \xi', \xi)$ от t . Для этого перепишем систему (3.8) в виде

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{t}} \exp\left(-\frac{\delta\Phi}{\delta p}(e^{-\tilde{t}}, \tilde{\omega}; \xi', \xi)\right) &= e^{-t}, \\ \tilde{\omega} + \frac{\delta\Phi}{\delta q}(e^{-\tilde{t}}, \tilde{\omega}; \xi', \xi) &= \omega, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{r} \exp\left(-\frac{\delta\Phi}{\delta p}(\tilde{r}, \tilde{\omega}; \xi', \xi)\right) &= r, \\ \tilde{\omega} + \frac{\delta\Phi}{\delta q}(\tilde{r}, \tilde{\omega}; \xi', \xi) &= \omega \end{aligned}$$

(напомним, что $\xi = (p, q)$).

Якобиан в левой части равенства относительно $(\tilde{r}, \tilde{\omega})$ есть

$$J_1 = \begin{vmatrix} \exp\left(-\frac{\delta\Phi}{\delta p}\right) \left(1 - \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta\Phi}{\delta p}\right) & -\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta\Phi}{\delta p} \exp\left(-\frac{\delta\Phi}{\delta p}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta\Phi}{\delta q} & 1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta\Phi}{\delta q} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} 1 - \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta \Phi}{\delta p} & \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta \Phi}{\delta p} \\ -\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta \Phi}{\delta q} & 1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta \Phi}{\delta q} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 - \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta \Phi}{\delta p} & \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta \Phi}{\delta p} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta \Phi}{\delta q} & -\tilde{r}^{-1} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta \Phi}{\delta q} \right) \end{vmatrix} (-\tilde{r})^n \\
 &= \begin{vmatrix} 1 - \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta \Phi}{\delta p} & -\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta \Phi}{\delta p} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\delta \Phi}{\delta q} & 1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\delta \Phi}{\delta q} \end{vmatrix} = \exp \left(n \frac{\delta \Phi}{\delta p} \right) J_1.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\tilde{r} = e^{-\tilde{t}}$ является гладкой функцией переменных $r = e^{-t}$ и ω и

$$P_1 \left(\overset{1}{x}, \overset{2}{\xi}, \overset{3}{\xi} \right) = Q \left(e^{-t}, \overset{2}{\omega}, -i \frac{\partial}{\partial t}, -i \frac{\partial}{\partial \omega}, -i \frac{\partial}{\partial t}, -i \frac{\partial}{\partial \omega} \right),$$

где $Q(r, \omega, \xi', \xi)$ – гладкая функция, асимптотически однородная порядка $2m$ по переменным (ξ, ξ') . (Якобиан, как и функция χ , суть однородная функция нулевого порядка.) Таким образом, оператор P_1 есть конический псевдодифференциальный оператор в шкале $H_0^s(M)$. Главный символ псевдодифференциального оператора T^*T получается, если положить $\xi' = \xi$ в формуле для символа P_1 и взять главную часть относительно однородности. Соответствующие вычисления мы позволим себе опустить. Доказательство леммы 1.3 завершено.

Список литературы

1. *Weinstein A.* Fourier integral operators, quantization, and the spectrum of a riemannian manifold // *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique. Colloque Internationale de Centre National de la Recherche Scientifique.* 1976. V. 237. P. 289–298.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
3. *Guillemin V. W.* Toeplitz operators in n -dimensions // *Integral Equations and Operator Theory.* 1984. V. 7. P. 145–205.
4. *Epstein C., Melrose R.* Shrinking tubes and the δ -Neumann problem. Preprint, 1997.
5. *Weinstein A.* Some questions about the index of quantized contact transformations // *RIMS Kôkuryûku.* 1997. V. 104. P. 1–14.
6. *Epstein C., Melrose R.* Contact degree and the index of Fourier integral operators // *Math. Res. Lett.* 1998. V. 5. № 3. P. 363–381.
7. *Schulze B.-W.* Pseudodifferential Operators on Manifolds with Singularities. Amsterdam: North-Holland, 1991.
8. *Nazaikinskii V., Schulze B.-W., Sternin B.* The Index of Quantized Contact Transformations on Manifolds with Conical Singularities. Preprint № 98/16. Univ. Potsdam, Institut für Mathematik Potsdam, August 1998.
9. *Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шульце Б.-В.* Индекс квантованных контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями // *Докл. РАН.* 1999. Т. 368. № 5. С. 598–600.

10. *Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* Differential Equations on Singular Manifolds. Semiclassical Theory and Operator Algebras. V. 15. Of Mathematics Topics. Berlin–N. Y.: Wiley–VCH Verlag, 1998.
11. *Nazaikinskii V., Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* Quantization of Symplectic Transformations on Manifolds with Conical Singularities. Preprint № 97/23. Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, Potsdam, July 1997.
12. *Melrose R.* Transformation of boundary problems // *Acta Math.* 1981. V. 147. P. 149–236.
13. *Nazaikinskii V., Sternin B., Shatalov V.* Contact Geometry and Linear Differential Equations. De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter Publishers, 1992.
14. *Mishchenko A., Shatalov V., Sternin B.* Lagrangian Manifolds and the Maslov Operator. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.
15. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
16. *Назайкинский В. Е., Ошмян В. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Интегральные операторы Фурье и канонический оператор // *УМН.* 1981. Т. 36. № 2. С. 81–140.
17. *Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* Structure rings of singularities and differential equations // *Differential Equations, Asymptotic Analysis, and Mathematical Physics*, number 100 in Mathematical Research. Berlin: Akademie Verlag, 1996. P. 325–347.
18. *Schulze B.-W.* Boundary Value Problems and Singular Pseudo-Differential Operators. Chichester: J. Wiley, 1997.
19. *Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* On the index of differential operators on manifolds with conical singularities // *Annals of Global Analysis and Geometry.* 1998. V. 16. № 2. P. 141–172.
20. *Fedosov B. V.* Deformation Quantization and Index Theory. V. 9. Of Mathematical Topics. Berlin: Akademie Verlag, 1996.
21. *Nazaikinskii V., Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* The Atiyah–Bott–Lefschetz fixed point theorem for manifolds with conical singularities // *Annals of Global Analysis and Geometry.* 1999. V. 17. № 5. P. 409–439.
22. *Nazaikinskii V., Sternin B., Shatalov V.* Methods of Noncommutative Analysis. Theory and Applications. Mathematical Studies. Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter Publishers, 1995.
23. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.

Москва, Потсдам

Поступило в редакцию
30.X.1998