Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гилимшина, Ф. Х. Мукминов, Об убывании решения неравномерно эллиптического уравнения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 1, 53–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im3292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:41:03

УДК 517.94

В. Ф. Гилимшина, Ф. Х. Мукминов

Об убывании решения неравномерно эллиптического уравнения

Для неравномерно эллиптического уравнения второго порядка в неограниченной области получены оценки сверху и снизу скорости убывания при удалении на бесконечность решения задачи с чередованием первого и третьего типов краевого условия. Доказана точность оценки скорости убывания решения как в случае достаточно произвольного чередования краевых условий первого и третьего типов, так и в случае уравнения, вырождающегося на границе неограниченной области.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение, скорость убывания решений, неограниченная область.

Введение

Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Рассматривается линейное эллиптическое уравнение второго порядка:

$$Lu = -\Phi, \quad (1)$$
$$Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n [b_i(x)u_{x_i} + (c_i(x)u)_{x_i}] - d(x)u.$$

Все коэффициенты уравнения измеримы и ограничены в Ω , $d \geq 0$. Условия, налагаемые на обобщенную функцию Φ , будут приведены ниже. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют условию эллиптичности: существуют положительные постоянная Γ и функция $s(x)$ такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливы неравенства

$$s(x)|y|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}(x)y_\alpha y_\beta \leq s(x)\Gamma|y|^2. \quad (2)$$

Непрерывная в Ω функция $s(x)$ может обращаться в нуль на границе области.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с сочетающимися краевыми условиями первого и третьего типов:

$$u|_{x \in \Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sum_{i=1}^n c_i n_i u \right) \Big|_{x \in \Gamma_2} = 0. \quad (3)$$

Работа авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00118).

Здесь Γ_1 – произвольное непустое замкнутое подмножество границы $\partial\Omega$ и Γ_2 – дополнение к нему, $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$; $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} n_j$. Мы будем рассматривать обобщенное решение задачи (1), (3), в определении которого (см. далее) условия (3) формально не участвуют. Тем не менее, при условии гладкости границы $\partial\Omega$ и коэффициентов уравнения (1) это обобщенное решение будет удовлетворять условию (3) на Γ_2 поточечно, а на Γ_1 – в смысле следа.

Работа посвящена исследованию зависимости скорости убывания решения задачи (1), (3) от геометрии неограниченной области Ω .

Список работ и результатов, посвященных изучению поведения решений эллиптических уравнений и систем, огромен. К нему относятся классическая теорема Лиувилля и ее многочисленные обобщения, теоремы типа Фрагмена–Линделёфа, а также обширный перечень результатов, полученных на основе сен-венановских оценок. Подробный, но все же неполный обзор работ в этом направлении содержится в [1]. Не упомянута, например, работа [2], в которой на базе понятия емкости множества, введенного В. А. Кондратьевым в [3], доказаны обобщения теоремы Фрагмена–Линделёфа. Отметим еще одну интересную работу [4], в которой доказано L_1 -неравенство Гарнака для эллиптических систем уравнений и в качестве приложения получено обобщение теоремы Лиувилля и установлено экспоненциальное убывание (рост) положительного решения в неограниченном цилиндре. В работе [5] для равномерно эллиптических систем доказаны обобщения теоремы Лиувилля и теоремы Фрагмена–Линделёфа. В работе [6] изучался вопрос о поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка, удовлетворяющих на той части границы области, которая принадлежит некоторой окрестности бесконечности, однородным условиям Дирихле, либо условиям Неймана, либо условиям периодичности. Получены априорные оценки, характеризующие поведение таких решений в областях с некомпактной границей при $x \rightarrow +\infty$ в зависимости от геометрических свойств области и поведения функционала Φ , стоящего в правой части уравнения, при $x \rightarrow +\infty$. В более поздних работах [7] и [8] установлены сен-венановские оценки для квазилинейных эллиптических уравнений второго и высокого порядков соответственно.

В настоящей работе получены точные оценки скорости убывания решения задачи (1), (3) в неограниченной области.

Отметим, что ранее вопрос о точности оценок сен-венановского типа практически не рассматривался. Исключение составляют работа [9], в которой точность утверждается для бигармонического уравнения в угле на плоскости, и работа [1], в которой доказана точность выделенных классов единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка (точность в том смысле, что эти классы близки к максимально широким). В большинстве работ, посвященных установлению сен-венановских оценок для эллиптического уравнения, используется понятие емкости замкнутого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ из работы [3] и его обобщения:

$$\lambda(Q, E) = \inf \left\{ \int_Q |\nabla g|^2 dx \mid g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus E), \int_Q g^2 dx = 1 \right\}.$$

Легко видеть, что число $\lambda(Q, E)$ является первым собственным значением оператора $-\Delta$ в области $Q \setminus E$ с граничным условием Дирихле на E и условием Неймана на оставшейся части границы. В работе [10] число $\lambda(Q, \partial Q)$ названо

основной частотой множества Q и получены некоторые оценки снизу для этого числа.

Обычно при доказательстве сен-венановских оценок для эллиптического уравнения в области Ω используется емкость для пары $Q = S(t)$, $E = \partial\Omega$, где $S(t) = \{x \in \Omega \mid x_1 = t\}$ – какое-то сечение области Ω (не обязательно плоское.) В работе [1] показано, что в случае области с нерегулярным поведением границы оценки, базирующиеся на характеристике $\lambda(S(t), \partial Q)$, становятся заведомо неточными. Поэтому в работах [1], [11] предложена иная характеристика неограниченной области – λ -последовательность. В настоящей работе это понятие адаптируется для случая неравномерно эллиптического уравнения в неограниченной области, имеющей несколько ветвей.

Будем предполагать, что неограниченная область Ω имеет p ветвей, уходящих на бесконечность, и представлена в виде объединения, $\Omega = \bigcup_{N=0}^{\infty} \Omega^N$, последовательности вложенных, $\Omega^N \subset \Omega^{N+1}$, ограниченных областей, удовлетворяющих следующим требованиям. Дополнения $\Omega_N^{N+1} = \Omega^{N+1} \setminus \Omega^N$ распадаются на конечное число подобластей ω_i^N , $i = 1, \dots, p$: $\Omega_N^{N+1} = \bigcup_{i=1}^p \omega_i^N$. Пересечение $(\partial\Omega^N) \cap \Omega$ распадается на конечное число гиперповерхностей S_i^N , $i = 1, \dots, p$.

Определим векторы $t^N = (t_1^N, \dots, t_p^N)$ и $\lambda^N = (\lambda_1^N, \dots, \lambda_p^N)$ формулами $t_i^N = \text{dist}(S_i^N, S_i^{N+1})$ и $\lambda_i^N = \lambda(\omega_i^N)$, где

$$\lambda(Q) = \inf \left\{ \int_Q (s(x)|\nabla g|^2 + dg^2) dx \mid g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1), \int_Q s(x)g^2 dx = 1 \right\}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что существует число $\theta > 0$ такое, что при всех $N \geq 0$ выполняются неравенства

$$1 \leq \theta \lambda_i^N (t_i^N)^2, \quad i = 1, \dots, p. \quad (5)$$

Отметим, что в случае, когда функция d оценивается снизу функцией s , т. е. $d \geq \delta s$, $\delta > 0$, $x \in \Omega$, условие (5) не является ограничительным. В самом деле, поскольку $\lambda(Q) \geq \delta$, то достаточным для выполнения (5) является неравенство $1 \leq \theta \delta (t_i^N)^2$, $i = 1, \dots, p$, т. е. сечения S_i^N следует выбирать “достаточно удаленными” друг от друга.

Описанное представление $\Omega = \bigcup_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ при выполнении неравенств (5) будем называть λ -разбиением области, соответствующим задаче (1), (3) (в дальнейшем просто λ -разбиением). Понятие λ -разбиения можно считать обобщением понятия λ -последовательности, введенного Л. М. Кожевниковой [11] в случае $\Gamma_2 = \emptyset$ и $s \equiv 1$ для области, имеющей одну ветвь, уходящую на бесконечность “вдоль оси Ox_1 ”, на случай многих ветвей, достаточно произвольным образом уходящих на бесконечность. В работе [11] области

$$\Omega^N = \{x \in \Omega \mid x_1 < z_N\}, \quad N = \overline{0, \infty}, \quad (6)$$

определяются последовательностью чисел $\{z_N\}_{N=0}^\infty$. Приведено простое условие, необходимое и достаточное для существования последовательности чисел такой, что для разбиения $\Omega = \bigcup_{N=0}^\infty \Omega^N$ выполнено требование (5) (в случае равномерно эллиптического уравнения без младших членов, т. е. $s \equiv 1$): для любого $r_1 > 0$ найдется $r_2 > r_1$ такое, что

$$\lambda(\Omega(r_2) \setminus \Omega(r_1)) > 0, \quad (7)$$

где $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 < r\}$. В § 2 построены разбиения для вырождающегося уравнения.

Будем считать, что функционал Φ на множестве функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1)$ определяется равенством

$$\Phi(v) = \int_{\Omega^0} \left(d(x)\phi v + s(x) \sum_{i=1}^n \phi_i v_{x_i} \right) dx, \quad \int_{\Omega^0} \left(d(x)\phi^2 + s(x) \sum_{i=1}^n \phi_i^2 \right) dx < \infty. \quad (8)$$

Будем предполагать, что коэффициенты оператора L удовлетворяют неравенствам

$$|b - c|^2 \leq \frac{sd}{2}, \quad |b_i| \leq A\sqrt{sd}, \quad |c_i| \leq A\sqrt{sd}, \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

где $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$, A – постоянная. Потребуем, чтобы для вектора $c = \{c_i\}$ при всех $N = 0, 1, \dots$ и k таком, что $12\Gamma^2 k^2 \theta e^{2k} = 1$, были выполнены соотношения

$$-\frac{\partial \text{dist}(x, S_i^N)}{\partial c} \leq \frac{k\Gamma^2 s}{t_i^N}, \quad x \in \omega_i^N, \quad i = \overline{1, p}. \quad (10)$$

Это нужно для того, чтобы младшие члены уравнения (1) не сильно искажали убывание решения задачи, определяемое старшими производными. В следующей теореме рассматривается обобщенное решение задачи (1), (3), определение которого вполне традиционно.

Пространство $\dot{H}(\Omega; \Gamma_1)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1)$ по норме $\|v\|_1 = \int_{\Omega} (dv^2 + s|\nabla v|^2) dx$.

Обобщенным решением задачи (1), (3) будем называть функцию $u(x) \in \dot{H}(\Omega; \Gamma_1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (c_i u v_{x_i} - b_i u_{x_i} v) + duv \right) dx = \int_{\Omega^0} \left(d\phi v + s \sum_{i=1}^n \phi_i v_{x_i} \right) dx \quad (11)$$

для любой функции $v(x) \in \dot{H}(\Omega; \Gamma_1)$.

Для доказательства существования и единственности обобщенного решения используются традиционные методы (см., например, [12]), доказательство несложно и поэтому не приводится.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega = \bigcup_{N=0}^\infty \Omega^N$ – некоторое λ -разбиение области Ω . Пусть коэффициенты из (1) удовлетворяют соотношениям (8)–(10). Тогда решение $u(x)$ задачи (1), (3) удовлетворяет оценке

$$\int_{\Omega \setminus \Omega^N} (s|\nabla u|^2 + du^2) dx \leq C_1 \exp\{-2kN\} \int_{\Omega_0^1} s u^2 dx, \quad (12)$$

где k – из формулы (10), $C_1 > 0$ – постоянная.

Конечно, оценка теоремы 1 существенным образом зависит от представления $\Omega = \bigcup_{N=0}^\infty \Omega^N$. В случае области Ω с одной ветвью при краевых условиях первого рода можно показать, что “наилучшая” оценка (12) получается при минимально возможных расстояниях t^N , при которых еще не нарушается условие (5) с фиксированным θ . В случае сочетающихся краевых условий (3)

описание оптимального представления $\Omega = \bigcup_{N=0}^{\infty} \Omega^N$ для получения “наилучшей” оценки (12) затруднительно, поскольку оно существенным образом зависит от распределения на границе условий первого и третьего типов, которое может быть не регулярным. Представим примеры областей, для которых оценка (12) приводится к более “конструктивному” виду. При этом мы увидим, что из двух разбиений более сильную оценку дает то, для которого постоянная θ в неравенстве (5) наименьшая.

Рассмотрим область вращения

$$\Omega_f = \{x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x') \mid |x'| < f(x_1), x_1 > 0\} \quad (13)$$

с положительной функцией $f(x_1)$. Следуя [11], определим П-последовательность $\{z_N\}$ индуктивным равенством, начиная с произвольного $z_0 > 0$:

$$z_N = \sup \left\{ t \mid \inf_{[z_{N-1}, t]} f \geq t - z_{N-1} \right\}, \quad N = \overline{1, \infty}. \quad (14)$$

Ниже приводятся условия, при которых П-последовательность определяет λ -разбиение.

Будем предполагать существование постоянной w такой, что

$$\sup \{f(z) \mid z \in [t - f(t), t + f(t)]\} \leq wf(t), \quad t \geq z_0. \quad (15)$$

Тогда (см. § 2) при некотором $c > 1$ справедливы оценки

$$\int_{z_0}^{z_N} \frac{dt}{f(t)} \leq N \leq c \int_{z_0}^{z_N} \frac{dt}{f(t)}, \quad N \geq 0. \quad (16)$$

Пусть множество Γ_1 распределено достаточно регулярно. А именно, предполагается существование положительных чисел D, δ и δ_1 таких, что при всех $b > a \geq D, b - a \geq \frac{1}{2} \min\{f(a), f(b)\}$ выполнены неравенства

$$\text{mes Pr } \Gamma_1 \cap [a, b] \geq \delta(b - a), \quad (17)$$

где “существенная”, проекция $\text{Pr } \Gamma_1$ определяется равенством

$$\text{Pr } \Gamma_1 = \{t \mid \text{mes}_{n-2} \Gamma_1 \cap \{x_1 = t\} \geq \delta_1 f^{n-2}(t)\}. \quad (18)$$

Тогда при $s(x) \equiv 1$ формулы (6), (14) определяют λ -разбиение области Ω_f (см. § 2). Та же П-последовательность определяет λ -разбиение и в случае неравномерно эллиптического уравнения, если при некотором $C > 0$ выполнено условие локальной равномерности

$$s(x) \leq Cs(y), \quad x, y \in \Omega_{f,r}^1, \quad r > z_0, \quad (19)$$

где

$$\Omega_{f,r}^\alpha = \left\{ (x_1, x') \mid \max\{z_0, r - f(r)\} < x_1 < r + f(r), |x'| < \frac{f(x_1)}{\alpha} \right\}.$$

Если уравнение является вырождающимся, т. е. условие (19) не выполнено, мы рассматриваем только граничное условие Дирихле, т. е. $\Gamma_1 = \partial\Omega$, и для простоты ограничимся рассмотрением случая $n = 2$. Функция $s(x)$ предполагается непрерывной в Ω_f , а по переменной x_2 – четной, непрерывно дифференцируемой и невозрастающей в интервалах $(0, f(x_1))$. Кроме того, предполагается существование числа $\nu \in (1, 2)$ такого, что

$$\frac{\partial}{\partial x_2} ((f(x_1) - x_2)^{\nu-2} s(x_1, x_2)) \geq 0, \quad x \in \Omega_{z_0}^\infty, \quad x_2 > 0. \quad (20)$$

Если f – непрерывная функция, то условию (20) удовлетворяет, например, функция вида

$$s(x_1, x_2) = \beta(x_1)(f(x_1) + \varepsilon(x_1) - |x_2|)^\mu, \quad \mu \in [0, 1),$$

с непрерывными функциями $\beta(x_1) > 0$, $\varepsilon(x_1) \geq 0$ и таким числом $\nu \in (1, 2)$, что $\nu + \mu < 2$. В частности, при $\varepsilon(x_1) \equiv 0$ получаем вырождающееся на границе области уравнение. Итак, в случае области вращения с функцией f , удовлетворяющей неравенству (15), при $\Gamma_1 = \partial\Omega$ и функции s , удовлетворяющей условию (20), формулы (6), (14) также определяют λ -разбиение области Ω_f (см. § 2).

По-видимому, значение $\mu > 1$ показателя вырождения уравнения на границе области приводит к трудностям в интерпретации краевого условия Дирихле. В самом деле, в работе [13] (см. также [14], [15]) доказано, что необходимым и достаточным условием существования L_2 -предела на границе функции $u(x)$ является условие

$$\int_Q |\nabla u(x)|^2 r(x) dx < \infty, \quad (21)$$

где $r(x)$ – расстояние от точки x до границы ∂Q . В том случае, когда $u(x)$ является решением вырождающегося на границе области Q эллиптического уравнения с показателем вырождения $\mu > 1$, условие (21) может не выполняться. Это означает, что краевое условие Дирихле как бы теряется. В таком случае постановка краевой задачи (1), (3) теряет смысл. Более полно вопрос о принятии решением эллиптического уравнения краевого условия Дирихле был изучен в работах [16]–[18] на основе установленного свойства $C_{n-1}(\bar{Q})$ -непрерывности (и других более глубоких свойств) решения эллиптического уравнения. Однако и при этих более общих подходах к определению решения задачи Дирихле условие (21) остается необходимым.

Оценки (16) позволяют получить следствие из теоремы 1:

$$\int_{\Omega \setminus \Omega(r)} s |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \exp \left\{ -2k \int_{z_0}^r \frac{dt}{f(t)} \right\}, \quad r \geq z_0. \quad (22)$$

В последнее неравенство зависимость от выбора λ -разбиения области входит только через постоянную k , которая определяется параметром θ . Легко видеть, что при больших θ постоянная k ведет себя как $\frac{C}{\sqrt{\theta}}$.

Точность оценки (12) для уравнений в дивергентной форме

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n (a_{\alpha\beta}(x) u_{x_\beta})_{x_\alpha} = 0, \quad (23)$$

$$L_s u = \operatorname{div} s \nabla u = -\Phi \quad (24)$$

в некотором классе областей вращения установлена в следующей теореме.

В том случае, когда функция $s(r, 0) \equiv s(r, 0, \dots, 0)$ возрастает и стремится к бесконечности при $r \rightarrow \infty$, введем обозначения $r_- = r - \Delta$, $r_+ = r_1 + \Delta$, где r_1 – такая точка, что $s(r_1, 0) = \varepsilon s(r, 0)$ и $\Delta = r_1 - r$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть область Ω_f определена функцией f , удовлетворяющей условию (15), и $\{z_N\}_{N=0}^\infty$ – П-последовательность. Пусть существует число $C > 0$ такое, что функция $s(x)$ удовлетворяет условию

$$s(x) \leq C s(y), \quad x, y \in \Omega_{f,r}^2, \quad r > z_0. \quad (25)$$

Тогда для положительного решения уравнения (23) в области вращения Ω_f найдутся положительные числа K, m такие, что

$$\int_{\Omega_N^{N+1}} s |\nabla u|^2 dx \geq m \exp\{-2KN\}. \quad (26)$$

Если функция $s(r, 0)$, монотонно возрастающая, стремится к бесконечности и существует число $C > 0$ такое, что

$$s(x) \leq C s(y), \quad x, y \in \Omega_{f,r}^2 \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_- < x_1 < r_+\}, \quad r > z_0, \quad (27)$$

то найдется $\gamma > 0$ такое, что положительное решение уравнения $L_s u = 0$ удовлетворяет оценке

$$u(z_N, 0) \geq \frac{m \exp\{-KN\}}{(s(z_N, 0))^\gamma}. \quad (28)$$

Таким образом, в неограниченной области для неравномерно эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме доказана точность оценки (12) скорости убывания решения задачи с чередованием типов краевого условия в том смысле, что постоянная k в показателе экспоненты не может быть заменена на последовательность k_N , возрастающую к бесконечности.

Приведем несколько примеров.

В случае уравнения Пуассона $\Delta u = -\Phi$ с финитной функцией Φ в угле раствора α нетрудно вычислить, например, методом Фурье, что решение задачи Дирихле убывает как $r^{-\pi/\alpha}$ при $r \rightarrow \infty$. При рассмотрении семейства уравнений (2) при $s = 1$ допускается разброс собственных значений матрицы $\{a_{ij}\}$ в пределах отрезка $[1, \Gamma]$. Поэтому показатель степенного убывания будет различным для различных уравнений этого семейства и неравенство (22) указывает при $s = 1$ некоторую границу для этого показателя. Если $s(x_1, x_2) = e^{x_1}$, то из формулы (22) следует оценка

$$\int_{\Omega \setminus \Omega(r)} |\nabla u|^2 dx \leq C_3 e^{-r} r^{-2k \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \leq C_3 e^{-r}. \quad (29)$$

Поскольку u – решение эллиптического уравнения, отсюда нетрудно получить оценку типа

$$|u(r, 0)| \leq C_4 e^{-\frac{r}{2}}. \quad (30)$$

Легко видеть, что выполнено условие (27) и для неотрицательного решения уравнения (24) с финитной функцией Φ справедлива оценка вида (28):

$$u(z_N, 0) \geq \frac{m z_N^{-K \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}}{e^{\gamma z_N}}.$$

Поэтому в определенном смысле оценку (30) можно считать точной.

Рассмотрим теперь уравнения Пуассона в параболоиде $\{|x'| < \sqrt{x_1}\}$. Формула (22) устанавливает следующее убывание решения задачи Дирихле:

$$\int_{\Omega \setminus \Omega(r)} |\nabla u|^2 dx \leq C_3 \exp\{-4k\sqrt{r}\}.$$

Если в этом параболоиде рассматривать задачу Дирихле для уравнения (24) с функцией $s(x) = e^{x_1}$, то из формулы (22) следует оценка

$$\int_{\Omega \setminus \Omega(r)} |\nabla u|^2 dx \leq C_3 e^{-r} \exp\{-4k\sqrt{r}\},$$

а из последней – неравенство

$$|u(r, 0)| \leq C_4 e^{-\frac{r}{2}}.$$

Так же, как и выше, неравенство (28) свидетельствует о точности последней оценки. Таким образом, быстрорастиющий коэффициент теплопроводности $s(x)$ может существенным образом ускорить убывание решения на бесконечности.

В случае уравнения Пуассона в слое $\{|x_1| < \frac{\pi}{2}\}$ методом Фурье легко установить оценку скорости убывания:

$$|u(x)| \leq C e^{-|x'|}.$$

Покажем, что это убывание значительно ускоряется при переходе к уравнению (24) с функцией $s(x) = e^{|x'|^2}$. При этом в качестве λ -разбиения можно взять области $\Omega^N = \{x \in \Omega \mid |x'| < N\}$. Тогда из оценки (12) получаем

$$\int_{\Omega \setminus \Omega^N} |\nabla u|^2 dx \leq C_2 \exp\{-2kN - N^2\}.$$

Для решения эллиптического уравнения отсюда следует неравенство

$$u(0, x') \leq C_3 \exp\{-N^2\}, \quad |x'| = N.$$

Здесь неравенство (28) так же позволяет установить точность этой оценки.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Построим определенную в Ω липшицеву функцию $\xi(x)$, удовлетворяющую условиям $\xi(x) = 0$ при $x \in \Omega^0$, $\xi(x) = 1$ при $x \in \Omega \setminus \Omega^N$, $\xi(x) = \exp\{-k(N-1)\} \times \min\{1, \text{dist}(S_i^0, x)/t_i^0\}$ при $x \in \omega_i^0$, $\xi(x) = \exp\{-k(N-\nu - \min\{1, \text{dist}(S_i^\nu, x)/t_i^\nu\})\}$ при $x \in \omega_i^\nu$, $\nu = \overline{1, N-1}$, $i = \overline{1, p}$. Нетрудно установить следующие соотношения:

$$|\nabla \xi| \leq \frac{\exp\{-k(N-1)\}}{t_i^0}, \quad x \in \omega_i^0, \quad i = \overline{1, p}, \quad (31)$$

$$|\nabla \xi| \leq \frac{k\xi}{t_i^\nu}, \quad x \in \omega_i^\nu, \quad \nu = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{1, p}, \quad (32)$$

$$\max_{\Omega_{\nu+1}^\nu} \xi(x) = e^k \min_{\Omega_{\nu+1}^\nu} \xi(x), \quad \nu = \overline{1, N-1}, \quad \max_{\Omega_0^1} \xi(x) = \exp\{-k(N-1)\}. \quad (33)$$

Подставим в (11) пробную функцию $v = u\xi^2$. Законность такой подстановки нетрудно обосновать, приближая функцию v по норме пространства $\dot{H}(\Omega; \Gamma_1)$ последовательностью функций $v_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1)$ и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$.

Поскольку $\xi = 0$ в Ω^0 , то, учитывая условие (8), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n \xi^2 a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + d \xi^2 u^2 \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n -2\xi u a_{ij} u_{x_i} \xi_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i \xi^2 u u_{x_i} - c_i u (\xi^2 u_{x_i} + 2u \xi \xi_{x_i})) \right] dx. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\xi^2 s |\nabla u|^2 + d \xi^2 u^2] dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left[2\Gamma s \xi |\nabla \xi| |u \nabla u| + \xi^2 \left(\frac{s |\nabla u|^2}{4} + \frac{|b-c|^2 u^2}{s} \right) - 2u^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial c} \right] dx. \end{aligned}$$

Условия (9) позволяют переписать последнее неравенство в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [s \xi^2 |\nabla u|^2 + d \xi^2 u^2] dx \leq \int_{\Omega} \left[4\Gamma^2 s u^2 |\nabla \xi|^2 - 2u^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial c} \right] dx.$$

Теперь воспользуемся соотношениями (10), (31)–(33):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [s \xi^2 |\nabla u|^2 + d \xi^2 u^2] dx & \leq \sum_{i=1}^p \int_{\omega_i^0} \exp\{-2k(N-1)\} \Gamma^2 s u^2 \frac{8+4k}{(t_i^0)^2} dx \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^p \int_{\omega_i^j} \Gamma^2 s \xi^2 u^2 \frac{12k^2}{(t_i^j)^2} dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Из условия (5) следует оценка

$$\int_{\omega_i^j} s \frac{u^2}{(t_i^j)^2} dx \leq \theta \int_{\omega_i^j} (s |\nabla u|^2 + d u^2) dx.$$

Применяя (33), заключаем, что

$$\int_{\omega_i^j} s \frac{\xi^2 u^2}{(t_i^j)^2} dx \leq \theta e^{2k} \int_{\omega_i^j} \xi^2 (s |\nabla u|^2 + d u^2) dx, \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Поскольку $\xi = 1$ в области $\Omega \setminus \Omega^N$, благодаря выбору k из (34) устанавливаем соотношение

$$\int_{\Omega \setminus \Omega^N} (s |\nabla u|^2 + d u^2) dx \leq \frac{C_0 \exp\{-2kN\}}{\min_i \{(t_i^0)^2\}} \int_{\Omega_1^0} s u^2 dx.$$

Оценка (12) доказана.

§ 2. Существование λ -разбиения

Пусть Ω_f – область вращения и $\{z_N\}$ – П-последовательность, определенная формулой (14). Мы покажем, что формула (6) определяет разбиение области сначала для равномерно эллиптического уравнения с краевыми условиями разных типов, а затем для уравнения, вырождающегося на границе области, в случае краевого условия Дирихле.

Оценим колебание функции f на отрезке $[z_N, z_{N+1}]$. Пусть t_N – точка минимума функции $f(t)$ на отрезке $[z_N, z_{N+1}]$. Существование точки минимума следует из замкнутости надграфика функции f . Из определения (14) последовательности $\{z_N\}$ очевидно, что

$$f(t_N) \leq z_{N+1} - z_N, \quad (35)$$

при этом неравенство возможно лишь при $t_N = z_{N+1}$. Покажем, что

$$z_{N+1} - z_N \leq f(t) \leq w^2 f(t_N), \quad t \in [z_N, z_{N+1}), \quad (36)$$

где w из условия (15). Левое неравенство сразу следует из (14). Пусть $t_* \in (z_N, z_{N+1})$ – точка из малой окрестности точки t_N . Из (15) легко следует существование такого $\varepsilon_N > 0$, что выполнено неравенство

$$f(t) \leq w f(t_*), \quad t \in [z_N - \varepsilon_N, z_{N+1} + \varepsilon_N]. \quad (37)$$

Очевидно также, что $f(t_*) \leq w f(t_N)$. Неравенства (16) при $c = w^2$ являются простым следствием (35), (36).

Покажем, что для Π -последовательности выполнено условие

$$\frac{1}{\bar{w}} \leq \frac{z_{N+2} - z_{N+1}}{z_{N+1} - z_N} \leq \bar{w}, \quad \bar{w} \geq 1, \quad N = \overline{0, \infty}, \quad (38)$$

при $\bar{w} = w^2$. При помощи (35)–(37) установим неравенства

$$\begin{aligned} \frac{z_{N+1} - z_N}{z_N - z_{N-1}} &\geq \frac{f(t_N)}{f(z_N - \varepsilon_N)} \geq \frac{1}{w^2}, \\ \frac{z_{N+1} - z_N}{z_N - z_{N-1}} &\leq \frac{f(z_N + \varepsilon_{N-1})}{f(t_{N-1})} \leq w^2, \end{aligned}$$

доказывающие (38).

Установим еще два вспомогательных неравенства.

Пусть $E \subset [a, b]$ – измеримое подмножество и $v \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b v^2(t) dt \leq \frac{2(b-a)}{\text{mes } E} \int_E v^2(t) dt + 4(b-a)^2 \int_a^b (v'(t))^2 dt. \quad (39)$$

Действительно, из формулы Ньютона–Лейбница легко следует, что

$$v^2(t) - v^2(s) \leq \int_a^b 2|vv'| d\tau.$$

Проинтегрируем это сначала по $s \in E$, затем по $t \in [a, b]$. Получим

$$\text{mes } E \int_a^b v^2(t) dt \leq (b-a) \int_E v^2(s) ds + (b-a) \text{mes } E \int_a^b 2|vv'| ds.$$

Применив неравенство $2|vv'| \leq \frac{v^2}{2(b-a)} + 2(v')^2(b-a)$, выводим (39).

Следующее неравенство для шара B_ρ и его измеримого подмножества E является многомерным аналогом (39) для функции $v \in C^1(\overline{B}_\rho)$:

$$\int_{B_\rho} v^2(x) dx \leq \frac{\text{mes } B_\rho}{\text{mes } E} \int_E v^2(x) dx + C(n)\rho^2 \frac{\text{mes}^2 B_\rho}{\text{mes}^2 E} \int_{B_\rho} |\nabla v|^2 dx. \quad (40)$$

Для доказательства неравенства (40) при произвольных $x, y \in B_\rho$ запишем соотношение

$$u(y) - u(x) = \int_0^{|x-y|} \frac{\partial u(x + r\omega)}{\partial r} dr, \quad \omega = \frac{y - x}{|y - x|},$$

где (r, ω) – сферические координаты с центром в точке x . Обозначив через $\chi(r, \omega)$ характеристическую функцию шара B_ρ , запишем неравенство

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_0^{2\rho} \chi |\nabla u(x + r\omega)| dr.$$

Проинтегрируем его по $y \in E$:

$$|u(x)| \text{mes } E \leq \int_E |u(y)| dy + \int_E dy \int_0^{2\rho} \chi |\nabla u(x + r\omega)| dr,$$

и оценим сверху правую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_E dy \int_0^{2\rho} \chi |\nabla u(x + r\omega)| dr &\leq \int_0^{2\rho} \tau^{n-1} d\tau \int_{S_1} d\omega \int_0^{2\rho} \chi |\nabla u(x + r\omega)| dr \\ &= \int_0^{2\rho} \tau^{n-1} d\tau \int_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)|}{r^{n-1}} d\xi = \frac{(2\rho)^n}{n} \int_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x - \xi|^{n-1}} d\xi. \end{aligned}$$

Получившееся неравенство

$$|u(x)| \text{mes } E \leq \int_E |u(y)| dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \int_{B_\rho} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x - \xi|^{n-1}} d\xi$$

проинтегрируем по $x \in B_\rho$:

$$\text{mes } E \int_{B_\rho} |u(x)| dx \leq \text{mes } B_\rho \int_E |u(y)| dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \int_{B_\rho} |\nabla u(\xi)| d\xi \int_{B_\rho} \frac{dx}{|x - \xi|^{n-1}}.$$

Очевидно, что

$$(2\rho)^n \int_{B_\rho} \frac{dx}{|x - \xi|^{n-1}} \leq 2\rho \text{mes } B_{2\rho}.$$

Поэтому

$$\int_{B_\rho} |u(x)| dx \leq \frac{\text{mes } B_\rho}{\text{mes } E} \left(\int_E |u(y)| dy + \frac{(2\rho)^n}{n} \rho \int_{B_\rho} |\nabla u(\xi)| d\xi \right).$$

Положив теперь $u = v^2$ и применив неравенство $|\nabla u| = 2|v \nabla v| \leq \varepsilon v^2 + \varepsilon^{-1} |\nabla v|^2$, получим (40).

Перейдем к оценке величины λ_1^N снизу. Покажем сначала, что для множеств $\text{Pr}(N) = \text{Pr } \Gamma_1 \cap [z_N, z_{N+1}]$ справедливы неравенства

$$\text{mes } \text{Pr}(N) \geq \frac{\delta(z_{N+1} - z_N)}{2}, \quad N = \overline{0, \infty}. \quad (41)$$

Пусть, для определенности, $t_N < \frac{1}{2}(z_{N+1} + z_N)$. Тогда $z_{N+1} - t_N \geq \frac{1}{2}(z_{N+1} - z_N) \geq \frac{1}{2}f(t_N)$. Поэтому из (17) следует неравенство

$$\text{mes}[t_N, z_{N+1}] \cap \text{Pr } \Gamma_1 \geq \delta(z_{N+1} - t_N),$$

доказывающее (41). При $t_N \geq \frac{1}{2}(z_{N+1} + z_N)$ неравенство (41) устанавливается аналогично.

Возьмем произвольное $t \in \text{Pr}(N)$. Запишем следующее неравенство в цилиндрических координатах для функции $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1)$:

$$\int_0^{f(t)} r^{n-2} v^2(t, r, \omega) dr \leq \lambda^{-1} f^2(t) \int_0^{f(t)} r^{n-2} v_r^2(t, r, \omega) dr. \quad (42)$$

Здесь ω – такая “угловая” координата, что $(t, f(t), \omega) \in \Gamma_1$. Множество таких ω обозначим через E_t^0 . Очевидно, что в качестве λ можно взять первое собственное значение оператора Лапласа в единичном шаре размерности $n-1$ с условием Дирихле на границе. Через E_t обозначим следующее множество:

$$E_t = \{(t, r, \omega) \mid 0 < r < f(t), \omega \in E_t^0\}.$$

Положим также $S_t = \{(t, x') \mid |x'| < f(t)\}$. Интегрируя (42) по $\omega \in E_t^0$, устанавливаем неравенство

$$\int_{E_t} v^2(t, x') dx' \leq \lambda^{-1} f^2(t) \int_{E_t} v_r^2(t, x') dx'. \quad (43)$$

Пользуясь (18), находим, что $\frac{\text{mes } S_t}{\text{mes } E_t} \leq \frac{\sigma_{n-2}}{\delta_1}$, где σ_{n-2} – площадь единичной сферы. Неравенство (40) для S_t и E_t запишется в виде

$$\int_{S_t} v^2(t, x') dx' \leq 2 \frac{\sigma_{n-2}}{\delta_1} \int_{E_t} v^2(t, x') dx' + C(n) f^2(t) \frac{\sigma_{n-2}^2}{\delta_1^2} \int_{S_t} |\nabla v(t, x')|^2 dx'.$$

Наконец, используя (43), устанавливаем, что

$$\int_{S_t} v^2(t, x') dx' \leq f^2(t) \frac{C_1(n)}{\delta_1^2} \int_{S_t} |\nabla v(t, x')|^2 dx'. \quad (44)$$

Запишем теперь неравенство (39) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{z_N}^{z_{N+1}} v^2(t, x') dt \\ & \leq \frac{2(z_{N+1} - z_N)}{\text{mes } \text{Pr}(N)} \int_{\text{Pr}(N)} v^2(t, x') dt + 4(z_{N+1} - z_N)^2 \int_{z_N}^{z_{N+1}} v_t^2(t, x') dt. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее по $x' \in B(N) = \{|x'| < f(t_N)\}$, учитывая (41) и применяя неравенства (44), (36), получаем

$$\int_{[z_N, z_{N+1}] \times B(N)} v^2(x) dx \leq \frac{C_1(n) w^4 f^2(t_N)}{\delta \delta_1^2} \int_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx + 4(z_{N+1} - z_N)^2 \int_{\omega_1^N} v_t^2 dx. \quad (45)$$

Применим неравенство (40) на этот раз для S_t и $\tilde{E}_t = \{(t, x') \in S_t \mid x' \in B(N)\}$ и учтем (36):

$$\int_{S_t} v^2(t, x') dx' \leq F \int_{\tilde{E}_t} v^2(t, x') dx' + C(n) F^2 w^4 f^2(t_N) \int_{S_t} |\nabla v(t, x')|^2 dx'.$$

Здесь в качестве F можно взять $F = w^{2n-2}$. После интегрирования по t и применения неравенства (45) будем иметь

$$\int_{\omega_1^N} v^2 dx \leq \left(C_1(n) f^2(t_N) w^4 \left(\frac{F}{\delta \delta_1^2} + F^2 \right) + 4(z_{N+1} - z_N)^2 \right) \int_{\omega_1^N} |\nabla v|^2 dx.$$

Ввиду неравенства (35) отсюда следует оценка

$$1 \leq \theta (z_{N+1} - z_N)^2 \lambda_1^N. \quad (46)$$

Поскольку очевидно, что $z_{N+1} - z_N = \text{dist}(S^N, S^{N+1})$, из неравенства (46) следует, что Ω^N действительно является λ -разбиением при $s = 1$. Заметим, что

из (36) следует включение $[z_N, z_{N+1}] \subset [z_N, z_N + f(z_N)]$, поэтому Ω^N останется λ -разбиением и при s , удовлетворяющем условию (19).

Покажем теперь, что П-последовательность определяет λ -разбиение в случае вырождающегося уравнения с краевым условием Дирихле. Установим некоторые оценки, аналогичные неравенству Харди–Литтлвуда [19].

ЛЕММА 1. Пусть функция $C(x) \in C^1[0, h]$ невозрастающая и неотрицательная, $\nu > 1$. Тогда для любой функции $g \in C_0^\infty(0, h]$ справедливо неравенство

$$\int_0^h C(x)x^{-\nu}g^2(x)dx \leq \left(\frac{2}{\nu-1}\right)^2 \int_0^h C(x)x^{-\nu}(xg')^2dx. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$Cx^{1-\nu}g^2 \Big|_0^h = \int_0^h C'x^{1-\nu}g^2dx + 2 \int_0^h Cx^{1-\nu}gg'(x)dx + (1-\nu) \int_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx.$$

Учитывая, что $C(h) \geq 0$, $C'(x) \leq 0$, можем записать неравенство

$$0 \leq 2 \int_0^h Cx^{1-\nu}gg'(x)dx + (1-\nu) \int_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx.$$

Применяя неравенство $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu-1)$, получим

$$(\nu-1) \int_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx \leq \frac{\nu-1}{2} \int_0^h Cx^{-\nu}g^2(x)dx + \frac{2}{\nu-1} \int_0^h Cx^{-\nu}(xg')^2dx,$$

откуда и следует (47).

ТЕОРЕМА 3. Пусть для неубывающей функции $q(x) \in C^1[0, h]$ существует число $\nu \in (1, 2)$ такое, что $(x^{\nu-2}q(x))' \leq 0$. Тогда для $g \in C_0^\infty(0, h]$ справедливо неравенство

$$\int_0^h g^2(t)qdt \leq \alpha h^2 \int_0^h (g'(x))^2qdx, \quad (48)$$

$$\text{где } \alpha = \left(\frac{4\nu^2-12\nu+10}{(\nu-1)^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возведя равенство $\sqrt{q}g(t) = \int_0^t \left(\frac{q'}{2\sqrt{q}}g(x) + \sqrt{q}g'(x)\right)dx$ в квадрат, получим

$$qg^2(t) \leq \left(\int_0^t \frac{(q')^2}{2q}g^2(x)dx + 2 \int_0^t q(g'(x))^2dx\right)h.$$

Интегрируя последнее неравенство по $t \in [0, h]$, получаем

$$\int_0^h qg^2(t)dt \leq h^2 \left(\int_0^h \frac{(q')^2}{2q}g^2(x)dx + 2 \int_0^h q(g'(x))^2dx\right). \quad (49)$$

Из условия теоремы имеем $x^{\nu-2}q' + (\nu-2)qx^{\nu-3} \leq 0$ или $q' \leq \frac{(2-\nu)q}{x}$. Отсюда следует, что $\frac{(q')^2}{2q} \leq \frac{(2-\nu)^2q}{2x^2}$. Положим $C(x) = \frac{(2-\nu)^2qx^{\nu-2}}{2}$. Из условия теоремы находим, что $C(x)$ невозрастающая.

Оценим второй интеграл неравенства (49), применив (47):

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{(q')^2}{2q} g^2(x) dx &\leq \int_0^h C(x) x^{-\nu} g^2(x) dx \leq \left(\frac{2}{\nu-1} \right)^2 \int_0^h C(x) x^{-\nu} (xg')^2 dx \\ &= \frac{2(2-\nu)^2}{(\nu-1)^2} \int_0^h q(x) (g'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Тогда неравенство (49) примет следующий вид:

$$\int_0^h qg^2(t) dt \leq h^2 \left(\frac{2(2-\nu)^2}{(\nu-1)^2} \int_0^h q(x) (g'(x))^2 dx + 2 \int_0^h q(x) (g'(x))^2 dx \right).$$

Последнее совпадает с (48).

Пусть z_N – последовательность, определенная формулой (14), и выполнено условие (20). Тогда при каждом $x_1 \geq z_0$ для функций $g(x_2) \in C_0^\infty[0, f(x_1))$ справедливо неравенство (48) в виде

$$\int_0^{f(x_1)} s(x_1, x_2) g^2(x_2) dx_2 \leq \alpha f^2(x_1) \int_0^{f(x_1)} s(x_1, x_2) (g'(x_2))^2 dx_2. \quad (50)$$

Используя это, можем записать оценки для $g(x) \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{\omega^N} s(x) g^2(x) dx &= \int_{z_N}^{z_{N+1}} dx_1 \int_{-f(x_1)}^{f(x_1)} s(x) g^2(x) dx_2 \\ &\leq \int_{z_N}^{z_{N+1}} \alpha f^2(x_1) dx_1 \int_{-f(x_1)}^{f(x_1)} s(x) g_{x_2}^2(x) dx_2 \leq \alpha M^2 \int_{\omega^N} s(x) g_{x_2}^2(x) dx, \end{aligned}$$

где $M = \max_{[z_N, z_{N+1}]} f(x)$. Отсюда следует соотношение $\lambda_1^N \geq \frac{1}{\alpha M^2}$. Выбирая $\theta = \alpha w^2$, с помощью (35) и (36) получаем неравенство (46), т. е. формула (6) определяет λ -разбиение.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 основано на неравенстве Гарнака (см., например, [20]) для равномерно эллиптического уравнения (23).

В нашем случае равномерную эллиптичность уравнения (23) в области $\Omega_{f,r}^2$ при любом $r > z_0$ обеспечивает условие (25). Действительно, положим $m = \inf_{\Omega_{f,r}^2} s(x)$. Тогда, поделив неравенства (2) на m , получим следующие соотношения для коэффициентов $\tilde{a}_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{m}$:

$$|y|^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^n \tilde{a}_{\alpha\beta}(x) y_\alpha y_\beta \leq C \Gamma |y|^2.$$

Сформулируем неравенство Гарнака в удобном для нас виде: для неотрицательного решения $u(x)$ уравнения (23) в замкнутом шаре $B(2\rho, x^0) \subset \Omega_{f,r}^2$ с центром в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\max_{B(\rho, x^0)} u(x) \leq \bar{H} \min_{B(\rho, x^0)} u(x), \quad (51)$$

в котором постоянная $\bar{H} \geq 1$ зависит лишь от C, Γ, n .

ЛЕММА 2. Пусть

$$Q_h = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < 1, |x'| < h\},$$

$$\widehat{Q} = Q_{1/2} \cup B(2\rho; (0, 0)) \cup B(2\rho; (1, 0)), \quad \rho = \frac{1}{4\omega^2}.$$

Тогда существует $\widehat{H} \geq 1$ такое, что неотрицательное в $\widehat{Q}$ решение $u(x)$ уравнения (23) удовлетворяет неравенствам

$$u(0, 0) \leq \widehat{H} \min_{Q_\rho} u(x) \leq \widehat{H} u(1, 0). \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пару точек v^0, v^1 назовем сцепленными в $\widehat{Q}$, если найдутся пара шаров $B(2\rho, x^0), B(2\rho, x^1)$, лежащих в $\widehat{Q}$, и точка $y \in B(\rho, x^0) \cap B(\rho, x^1)$ такие, что $v^0 \in B(\rho, x^0), v^1 \in B(\rho, x^1)$. Для сцепленных точек из неравенства (51) следует

$$u(v^0) \leq \overline{H} u(y) \leq \overline{H}^2 u(v^1). \quad (53)$$

Легко видеть, что для любой точки $x \in Q_\rho$ найдется последовательность точек $v^0 = (0, 0), v^1, v^2, \dots, v^p = x$, в которой соседние точки являются сцепленными. Очевидно, что их можно подобрать так, чтобы выполнялось неравенство $p \leq [\frac{1}{2\rho}] + 2$. Тогда (52) будет выполняться при $\widehat{H} = \overline{H}^{2 + \frac{1}{2\rho}}$.

В случае, когда вместо неравенства (25) выполнено (27), следует немного изменить формулировку леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $s(x_1, 0)$ – непрерывная растущая функция и $s(x)$ удовлетворяет условию

$$s(x) \leq C s(y), \quad x, y \in \widehat{Q} \cap \{r_- < x_1 < r_+\}, \quad r \geq 0. \quad (54)$$

Тогда найдутся $\gamma > 0, \widehat{H}$ такие, что неотрицательное в $\widehat{Q}$ решение $u(x)$ уравнения (24) удовлетворяет неравенству

$$u(0, 0)(s(0, 0))^\gamma \leq \widehat{H} u(1, 0)(s(1, 0))^\gamma. \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически не отличается от доказательства леммы 2. Единственное отличие состоит лишь в том, что размеры шаров $B(\rho, x^i)$, участвующих в определении сцепленных точек, могут быть меньше, поскольку они целиком должны лежать в выбранной части $\widehat{Q}$, в пределах которой уравнение (24) благодаря неравенству (54) является “равномерно эллиптическим”.

Опишем процесс построения сцепленных точек. Пусть $v^0 = (0, 0)$ и $r = 0$. Выберем r_1 , как указано перед теоремой 2, и предположим, что $r_1 \leq 2\rho$. Тогда $v^1 = (r_1, 0)$. Неравенство (53) сохраняется. Если $r_1 > \rho$, то $v^1, v^2, \dots, v^k = (t_k, 0)$ строим, как в лемме 2, и пусть $r_1 - t_k < 2\rho$. Тогда полагаем $v^{k+1} = (r_1, 0)$. Далее полагаем $r = r_1$ и по нему находим новое значение $r_1 : s(r_1, 0) = e s(r, 0)$. Процесс добавления сцепленных точек продолжаем, как и выше, до тех пор, пока не получим $v^q = (1, 0), q = p + \nu$. Здесь p – количество отрезков $[v^j, v^{j+1}]$ стандартной длины 2ρ , а ν – количество отрезков уменьшенной длины. Как и в лемме 2, $p \leq [\frac{1}{2\rho}] + 2$. Каждому отрезку $[v^j, v^{j+1}]$ уменьшенной длины соответствует пара чисел r, r_1 таких, что $s(r_1, 0) = e s(r, 0)$, поэтому $\nu \leq \ln(s(1, 0)/s(0, 0))$. Таким образом,

$$u(0, 0) \leq \overline{H}^q u(1, 0) \leq \overline{H}^{2+1/(2\rho)+\ln(s(1,0)/s(0,0))} u(1, 0).$$

Отсюда вытекает неравенство леммы при $\gamma = \ln \overline{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ввиду неравенства (36) имеем включения

$$(z_j, 0) + (z_{j+1} - z_j)\hat{Q} \subset \Omega_{f,r}^2, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad r = \frac{z_j + z_{j+1}}{2}, \quad (56)$$

где левую часть следует понимать как гомотетию и параллельный перенос, примененные к $\hat{Q}$. Согласно лемме 2 для пар $(z_j, 0)$, $(z_{j+1}, 0)$ при $\rho_j = \frac{z_{j+1} - z_j}{4\omega^2}$, $j = \overline{0, \infty}$, справедливы неравенства

$$u(z_j, 0) \leq \hat{H} \min_{Q(j)} u(x) \leq \hat{H} u(z_{j+1}, 0), \quad (57)$$

где $Q(j) = (z_j, 0) + (z_{j+1} - z_j)Q_\rho$.

При $j = 0$ включение (56) может не выполняться, но, тем не менее, точка $(z_0, 0)$ является внутренней для области $\Omega_{f/2}$, поэтому неравенство (57) будет также справедливым и при $j = 0$, возможно, с другой постоянной $\hat{H}$. Применяя N раз неравенство (57), выводим соотношения

$$u(z_0, 0) \leq \hat{H}^N \min_{Q(N)} u(x), \quad N \geq 1.$$

В том случае, когда выполнено условие (27), применяя вместо (57) неравенство

$$u(z_j, 0)(s(z_j, 0))^\gamma \leq \hat{H} u(z_{j+1}, 0)(s(z_{j+1}, 0))^\gamma,$$

вытекающее из леммы 3, устанавливаем неравенство

$$u(z_0, 0)(s(z_0, 0))^\gamma \leq \hat{H}^N u(z_N, 0)(s(z_N, 0))^\gamma,$$

доказывающее оценку (28), $K = \ln \hat{H}$.

Из условия (25) теоремы заключаем справедливость следующих неравенств:

$$\min_{Q(N)} s(z_N, 0) \geq C^{-1} s(z_{N-1}, 0) \geq C^{-N} s(z_0, 0).$$

Далее, пользуясь последними неравенствами, несложно установить соотношения

$$\int_{\Omega_N^{N+1}} s u^2 dx \geq \int_{Q(N)} s u^2 dx \geq C_1 (C \hat{H}^2)^{-N} u^2(z_0, 0) \rho_N^n (z_{N+1} - z_N).$$

Применяя (38), находим $\rho_N = \frac{z_{N+1} - z_N}{4w^2} \geq \frac{z_1 - z_0}{4w^2} (w^2)^{-N}$. В итоге установим неравенство

$$\int_{\Omega_N^{N+1}} s u^2 dx \geq C_2 \exp\{-N \ln(w^{4n+2} C \hat{H}^2)\}.$$

Заметим, что из определения чисел λ^N и соотношения (46) следует неравенство

$$\int_{\Omega_N^{N+1}} s |\nabla u|^2 dx \geq \theta^{-1} (z_{N+1} - z_N)^{-2} \int_{\Omega_N^{N+1}} s u^2 dx.$$

Таким образом, из двух последних неравенств и (38) получаем (26). Теорема доказана.

Список литературы

1. Л. М. Кожевникова, “Анизотропные классы единственности решения задачи Дирихле для квазиэллиптических уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 93–128; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Anisotropic classes of uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for quasi-elliptic equations”, *Izv. Math.*, **70**:6 (2006), 1165–1200.
2. Е. М. Ландис, “О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях”, Тр. ММО, **31**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1974, 35–58; англ. пер.: Е. М. Landis, “On the behavior of solutions of higher-order elliptic equations in unbounded domains”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **31** (1976), 30–54.
3. В. А. Кондратьев, “О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **136**:4 (1961), 771–774; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, “On the solvability of the first boundary value problem for elliptic equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 127–130.
4. В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, “Положительные решения линейных уравнений с частными производными”, Тр. ММО, **31**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1974, 85–146; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, S. D. Eidel’man, “Positive solutions of linear partial differential equations”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **31** (1976), 81–148.
5. О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделёфа для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **95(137)**:1(9) (1974), 130–145; англ. пер.: O. A. Oleĭnik, E. V. Radkevič, “Analyticity and theorems of Liouville and Phragmen–Lindelöf type for general elliptic systems of differential equations”, *Math. USSR-Sb.*, **24**:1 (1974), 127–143.
6. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей”, *Матем. сб.*, **112(154)**:4(8) (1980), 588–610; англ. пер.: O. A. Oleĭnik, G. A. Iosif’jan, “On the behavior at infinity of solutions of second order elliptic equations in domains with noncompact boundary”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:4 (1981), 527–548.
7. А. Ф. Тедеев, А. Е. Шишков, “Поведение решений квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченных областях”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, **9** (1984), 23–27.
8. А. Е. Шишков, “Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:6 (1987), 134–146; англ. пер.: A. E. Shishkov, “Behavior of solutions of the Dirichlet problem for quasilinear divergent higher-order elliptic equations in unbounded domains”, *Siberian Math. J.*, **28**:6 (1987), 972–982.
9. В. А. Кондратьев, И. Копачек, Д. М. Леквеишвили, О. А. Олейник, “Неулучшаемые оценки в пространствах Гёльдера и точный принцип Сен-Венана для решения бигармонического уравнения”, *Современные проблемы математики. Дифференциальные уравнения, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **166**, Наука, М., 1984, 91–106; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, J. Kopacek, D. M. Lekveishvili, O. A. Olejnik, “Sharp estimates in Hölder spaces and precise Saint-Venant principle for solutions of the biharmonic equation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **166** (1986), 97–116.
10. В. М. Миклюков, “Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением”, *Матем. сб.*, **111(153)**:1 (1980), 42–66; англ. пер.: V. M. Mikljukov, “On the asymptotic properties of subsolutions of quasilinear equations of elliptic type and mappings with bounded distortion”, *Math. USSR-Sb.*, **39**:1 (1981), 37–60.
11. Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **196**:7 (2005), 67–100;

- англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, "Stabilization of a solution of the first mixed problem for a quasi-elliptic evolution equation", *Sb. Math.*, **196**:7 (2005), 999–1032.
12. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.
 13. В. П. Михайлов, "О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей", *Матем. сб.*, **101(143)**:2(10) (1976), 163–188; англ. пер.: V. P. Mihailov, "On the boundary values of solutions of elliptic equations in domains with a smooth boundary", *Math. USSR-Sb.*, **30**:2 (1976), 143–166.
 14. В. П. Михайлов, "О существовании граничного значения у бигармонических функций", *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 81–94; англ. пер.: V. P. Mikhailov, "Existence of boundary values for biharmonic functions", *Sb. Math.*, **195**:12 (2004), 1781–1793.
 15. В. П. Михайлов, "О существовании граничного значения у полигармонической функции", *Сиб. матем. журн.*, **46**:5 (2005), 1125–1137; англ. пер.: V. P. Mikhailov, "Existence of the boundary value of a polyharmonic function", *Siberian Math. J.*, **46**:5 (2005), 902–912.
 16. А. К. Гущин, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", *Матем. сб.*, **137(179)**:1(9) (1988), 19–64; англ. пер.: A. K. Gushchin, "On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation", *Math. USSR-Sb.*, **65**:1 (1990), 19–66.
 17. А. К. Гущин, "О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка", *Сиб. матем. журн.*, **46**:5 (2005), 1036–1052; англ. пер.: A. K. Gushchin, "On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equations", *Siberian Math. J.*, **46**:5 (2005), 826–840.
 18. А. К. Гущин, "О гладкости решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с квадратично суммируемой граничной функцией", *Докл. РАН*, **415**:1 (2007), 10–13; англ. пер.: A. K. Gushchin, "Smoothness of solutions to the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with a square integrable boundary function", *Dokl. Math.*, **76**:1 (2007), 486–489.
 19. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
 20. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1971; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Dekker, New York, 1971.

В. Ф. Гилимшина (V. F. GILIMSHINA)

Башкирский государственный педагогический университет

им. М. Акмуллы, г. Уфа

E-mail: gilvenera@mail.ru

Поступило в редакцию

28.07.2008

Ф. Х. Мукминов (F. Kh. MUKMINOV)

Башкирский государственный педагогический университет

им. М. Акмуллы, г. Уфа

E-mail: mfkh@rambler.ru