Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О группе Брауэра арифметической схемы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 2, 155–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/im330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 05:41:44

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О группе Брауэра арифметической схемы

Для поверхности Энриквеса V над числовым полем k с k -рациональной точкой доказывается, что l -компонента $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна, если и только если $l \neq 2$. Для регулярного проективного гладкого многообразия, удовлетворяющего гипотезе Тейта для дивизоров над числовым полем, находится простой критерий конечности l -компоненты $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)$. Более того, для арифметической модели X многообразия V доказывается вариант гипотезы Артина о конечности группы Брауэра X . Даются приложения к вопросу о конечности l -компонент групп Шафаревича–Тейта.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Пусть V – такое гладкое проективное гиперкэлерово многообразие над числовым полем k , что $V(k) \neq \emptyset$ и число Бетти $b_2(V \otimes \bar{k}) > 3$. Тогда для любого простого числа l l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна [19, теорема 3.3]. Более того, предположим, что k – чисто мнимое числовое поле и существует собственный плоский морфизм $\pi: X \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$, где A – кольцо целых поля k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V , все схемные слои морфизма π приведены, существует такое сечение $\theta: \mathrm{Spec}(A) \rightarrow X$ морфизма π , что $\theta(\mathrm{Spec}(A))$ пересекается в точности с одной неприводимой компонентой любого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \mathrm{Spec}(A)$ (мы называем $\pi: X \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ *арифметической моделью* V). Тогда для любого простого числа l l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(X)$ конечна [19, следствие 6.2].

В этой статье мы исследуем вопрос о конечности l -компонент $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ и $\mathrm{Br}'(X)$ для поверхности Энриквеса V над числовым полем k .

Напомним, что геометрически минимальная модель V поверхности Энриквеса характеризуется как гладкая проективная поверхность с $H^1(V, \mathcal{O}_V) = (0)$, $H^2(V, \mathcal{O}_V) = (0)$, $(\Omega_V^2)^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_V$.

ТЕОРЕМА 0.1. *Пусть V – гладкая проективная геометрически минимальная поверхность Энриквеса над числовым полем k . Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$ и l – простое число. Тогда l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна, если и только если $l \neq 2$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Центра грантов Новосибирского государственного университета, при частичной поддержке DFG-гранта Forschergruppe Arithmetik (университеты Маннгейма и Гейдельберга, апрель 1999). Я хотел бы поблагодарить оба университета за теплое гостеприимство и превосходные условия для работы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для гладкой проективной поверхности S над конечным полем $\mathbb{F}_q$ конечность l -компоненты $\mathrm{Br}(S) \simeq \mathrm{Br}(S)/\mathrm{Br}(\mathbb{F}_q)$ для *одного* простого числа $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ влечет конечность l -компоненты $\mathrm{Br}(S)$ для *любого* простого числа $l \neq \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ [21, теорема 5.2]. Более того, если $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$, то конечность l -компонент $\mathrm{Br}(S) \simeq \mathrm{Br}(S)/\mathrm{Br}(\mathbb{F}_q)$ для *одного* простого числа (включая случай $l = \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$) влечет конечность l -компоненты $\mathrm{Br}(S)$ для *любого* простого числа l [10, теорема 4.1]. Теорема 0.1 показывает, что для поверхности Энриквеса V над числовым полем ситуация существенно отличается от ситуации над конечным полем.

Для гладкого проективного многообразия V над числовым полем k и для простого числа l рассмотрим l -адическое представление в этальных когомологиях

$$\rho_l: \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \mathrm{GL}(H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))).$$

Дж. Тэйт предположил, что

$$\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Lie} \, \mathrm{Im}(\rho_l)}$$

[20, гипотеза 1]. Эта гипотеза влечет соотношение

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}, \quad (0.1)$$

где (по определению [21, §4]) $\mathrm{NS}(V)$ является образом $\mathrm{Pic}(V)$ в $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$. Если (0.1) выполняется для всех достаточно больших конечных расширений поля k , то гипотеза Тэйта верна.

Следующий результат является естественным обобщением теоремы 0.1 на случай регулярного гладкого проективного многообразия, удовлетворяющего гипотезе Тэйта.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k . Предположим, что

$$V(k) \neq \emptyset, \quad H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0), \quad \mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}),$$

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$$

для простого числа l и для многообразия V .

Тогда l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна, если и только если l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$.

Следующая теорема является модификацией теоремы 6.1 из [19] и дает вариант гипотезы М. Артина [11, гл. IV, §2, вопрос 2.19] о конечности группы Брауэра арифметической собственной схемы над $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

ТЕОРЕМА 0.3. Пусть V – такое гладкое проективное многообразие над числовым полем k , что $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$,

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$$

для некоторого простого числа l . Предположим существование собственного плоского морфизма $\pi: X \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$, где A – кольцо целых поля k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V , все схемные слои морфизма π

приведены, существует такое сечение $\theta: \text{Spec}(A) \rightarrow X$ морфизма π , что $\theta(\text{Spec}(A))$ пересекается в точности с одной неприводимой компонентой любого сменного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \text{Spec}(A)$ (мы называем $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(A)$ арифметической моделью V).

Если l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, то l -примарная компонента группы $\text{Br}'(X)$ конечна.

Следующий результат дает интересные соотношения между группами Брауэра геометрической и арифметической моделей многообразия V над чисто трансцендентным расширением числового поля.

ТЕОРЕМА 0.4. Пусть V – гладкое проективное многообразие над $k(t)$, где $k(t)$ – поле рациональных функций алгебраически независимой переменной t над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k(t)) \neq \emptyset$, и пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – такой собственный плоский k -морфизм гладких проективных k -многообразий, что общий слой π изоморфен V (мы называем $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ геометрической моделью V).

Тогда существует естественное вложение

$$\text{Br}'(X)/\text{Br}(k) \hookrightarrow \text{Br}'(V)/\text{Br}(k(t)).$$

Если $H^1(V \otimes \bar{k}(t), \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}(t)}) = (0)$, $\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t)) = \text{NS}(V)$, простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t))]_{\text{tors}})$ и

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}(t), \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}(t)/k(t))},$$

то l -примарные компоненты групп $\text{Br}'(X)/\text{Br}(k)$ и $\text{Br}'(V)/\text{Br}(k(t))$ конечны. Более того, в рассматриваемом случае предположим существование собственного плоского морфизма $\varphi: \Xi \rightarrow \text{Spec}(A)$, где A – кольцо целых в k , Ξ – регулярная схема, общий слой φ изоморфен X , все сменные слои морфизма φ приведены, существует такое сечение $\theta: \text{Spec}(A) \rightarrow \Xi$ морфизма φ , что $\theta(\text{Spec}(A))$ пересекается в точности с одной неприводимой компонентой любого сменного слоя $\varphi^{-1}(v)$, $v \in \text{Spec}(A)$ (мы называем $\varphi: \Xi \rightarrow \text{Spec}(A)$ арифметической моделью X); тогда l -компонента группы $\text{Br}'(\Xi)$ конечна.

Следующая теорема показывает, что при некоторых предположениях можно вывести гипотезу Тэйта для регулярного многообразия X над числовым полем k из гипотезы Тэйта для общего слоя V сюръективного k -морфизма $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$.

ТЕОРЕМА 0.5. Пусть V – гладкое проективное многообразие над $k(t)$, где $k(t)$ – поле рациональных функций алгебраически независимой переменной t над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – такой собственный плоский k -морфизм гладких проективных k -многообразий, что общий слой π изоморфен V (мы называем $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ геометрической моделью V).

Если $H^1(V \otimes \bar{k}(t), \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}(t)}) = (0)$, $\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t)) = \text{NS}(V)$, $V(k(t)) \neq \emptyset$, $\text{NS}(X \otimes \bar{k}) = \text{NS}(X)$, простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t))]_{\text{tors}})$ и $\text{Card}([\text{NS}(X \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, канонический морфизм

$$\text{Br}'(X)(l) \rightarrow [\text{Br}'(X \otimes \bar{k})(l)]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

сюръективен и

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))},$$

то существует канонический изоморфизм

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(X \otimes \overline{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

Пусть C – регулярная превосходная неприводимая 1-мерная схема, K – поле рациональных функций на C . Пусть $\widehat{K}_v$ – пополнение K относительно нормирования, определенного замкнутой точкой $v \in C$. Множество всех таких пополнений используется в определении группы Шафаревича–Тэйта абелева многообразия J над K :

$$\mathrm{III}(C, J) = \mathrm{Ker} \left[H^1(\mathrm{Spec}(K), J) \rightarrow \prod_{\mathrm{codim}_C(v)=1} H^1(\mathrm{Spec}(\widehat{K}_v), J) \right].$$

Пусть K_v^{h} (соответственно K_v^{sh}) – поле частных обычной гензелезации $\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{h}}$ (соответственно строгой гензелезации $\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{sh}} = \mathcal{O}_{C,\bar{v}}$) локального кольца $\mathcal{O}_{C,v}$. Мы определяем “гензелеву” и “строго гензелеву” модификации группы Шафаревича–Тэйта следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathrm{III}^{\mathrm{h}}(C, J) &= \mathrm{Ker} \left[H^1(\mathrm{Spec}(K), J) \rightarrow \prod_{\mathrm{codim}_C(v)=1} H^1(\mathrm{Spec}(K_v^{\mathrm{h}}), J) \right], \\ \mathrm{III}^{\mathrm{sh}}(C, J) &= \mathrm{Ker} \left[H^1(\mathrm{Spec}(K), J) \rightarrow \prod_{\mathrm{codim}_C(v)=1} H^1(\mathrm{Spec}(K_v^{\mathrm{sh}}), J) \right]. \end{aligned}$$

Имеем

$$\mathrm{III}(C, J) = \mathrm{III}^{\mathrm{h}}(C, J) \hookrightarrow \mathrm{III}^{\mathrm{sh}}(C, J).$$

ТЕОРЕМА 0.6. Пусть C – такая регулярная превосходная нётерова 1-мерная неприводимая схема, что поле вычетов любой замкнутой точки $v \in C$ конечно, K – поле рациональных функций на C . Тогда для абелева многообразия J над K $\mathrm{III}(C, J) = \mathrm{III}^{\mathrm{h}}(C, J) \hookrightarrow \mathrm{III}^{\mathrm{sh}}(C, J)$ является подгруппой конечного индекса. Более того, если геометрический слой минимальной модели Нерона многообразия J в любой точке $v \in C$ связан (например, если J имеет хорошую редукцию в каждой точке $v \in C$), то $\mathrm{III}(C, J) = \mathrm{III}^{\mathrm{h}}(C, J) = \mathrm{III}^{\mathrm{sh}}(C, J)$.

ТЕОРЕМА 0.7. Пусть C – гладкая проективная кривая над числовым полем k , V – гладкая проективная поверхность над k , и пусть $f: V \rightarrow C$ – k -морфизм с 1-мерными приведенными и неприводимыми геометрическими слоями. Предположим, что выполняются следующие условия:

а) существует сечение $\theta: C \rightarrow V$ морфизма f , $C(k) \neq \emptyset$, общий слой V_η морфизма f гладкий;

б) сечение θ определяет изоморфизм $\mathrm{Pic}^0(C) \simeq \mathrm{Pic}^0(V)$.

Если $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$, то для любого достаточно большого простого числа l l -примарные компоненты групп $\mathrm{III}^{\mathrm{sh}}(C, \mathrm{Pic}^0(V_\eta))$ и $\mathrm{III}(C, \mathrm{Pic}^0(V_\eta))$ конечны.

СЛЕДСТВИЕ 0.8. Пусть V – гладкая проективная поверхность над числовым полем k , и пусть $f: V' \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – такой пучок Лефшеца сечений V гиперповерхностями степени $d \geq 3$, что любой замкнутый слой геометрически приведен и неприводим с не более чем одной обыкновенной двойной особой точкой. Мы обозначаем через V'_η общий слой f .

Если $H^1(V, \mathcal{O}_V) = (0)$ и $\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$, то для любого достаточно большого простого числа l l -примарные компоненты групп $\text{III}^{\text{sh}}(\mathbb{P}_k^1, \text{Pic}^0(V'_\eta))$ и $\text{III}(\mathbb{P}_k^1, \text{Pic}^0(V'_\eta))$ конечны.

Напомним, что имеется список регулярных поверхностей, удовлетворяющих гипотезе Тэйта: рациональная поверхность, поверхность Энриквеса [19, лемма 3.2], поверхность типа КЗ [17], поверхность Ферма [19, §3.3].

Автор благодарен Р. Пинку за возможность издать препринт [18], содержащий первоначальную версию этой статьи, и за теплое гостеприимство во время моего пребывания в университете Маннгейма.

§ 1. О группе Брауэра поверхности Энриквеса

1.1. ЛЕММА. Пусть k – числовое поле. Тогда для любого простого числа p $\text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ является бесконечной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – такое конечное множество неархимедовых точек k , что $\text{char}(k(v)) \equiv 1 \pmod{p}$ для любой точки $v \in S$. Если $l = \text{char}(k(v))$, то для некоторого натурального числа f мы имеем $\text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) = l^f$; более того, поскольку $l \equiv 1 \pmod{p}$, мы получаем соотношение $\text{Norm}_{k/\mathbb{Q}}(v) \equiv 1 \pmod{p}$.

Следуя работам Х. Коха, обозначим через k_S максимальное p -расширение поля k , неразветвленное вне S . Пусть k_v – пополнение k , определенное дискретным нормированием v . Для данного поля L пусть

$$\delta(L) = \begin{cases} 1, & \text{если } L \text{ содержит корень из единицы степени } p, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ с тривиальным действием $\text{Gal}(k_S/k)$. Пусть E – группа всех единиц k . Мы имеем

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(k_S/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &= \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} H^1(\text{Gal}(k_S/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ &= \sum_{\substack{v \in S \\ \text{char}(k(v))=p}} [k_v : \mathbb{Q}_p] - \delta(k) - r + 1 + \sum_{v \in S} \delta(k_v) + \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} B_S, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где r – число всех архимедовых точек k , и

$$0 \leq \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} B_S \leq \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \text{Cl}(k)_p + \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} E/E^p$$

[9, предложения 11.8, 11.7]. В силу хорошо известной теоремы Дирихле множество $\{l \mid l \text{ – простое число, } l \equiv 1 \pmod{p}\}$ бесконечно [15, гл. VI, §4, теорема 2]. Поэтому множество

$$T = \{v \mid v \text{ – неархимедова точка } k, \text{char}(k(v)) \equiv 1 \pmod{p}\}$$

бесконечно. Заметим, что $S \subset T$.

Для любого $v \in T$ имеем $\delta(k_v) = 1$. Действительно, $l = \text{char}(k(v))$, поэтому $p|(l-1)|\text{Card}(k(v)^\times)$; в силу леммы Гензеля поле k_v содержит примитивный корень из единицы степени $\text{Card}(k(v)^\times)$ [4, гл. II, §7]; в частности, k_v содержит корень из единицы степени p . Поэтому (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(k_S/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \\ = \sum_{\substack{v \in S \\ \text{char}(k(v))=p}} [k_v : \mathbb{Q}_p] - \delta(k) - r + 1 + \text{Card}(S) + \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} B_S. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для любого натурального числа N можно выбрать $S = S(N)$ настолько большим, что

$$\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(k_S/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \geq N.$$

Это утверждение следует из (1.2) и из бесконечности множества T . С другой стороны, естественный сюръективный морфизм $\text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{Gal}(k_S/k)$ дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(k_S/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

являющуюся началом канонической точной последовательности инфляции – ограничения

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(k_S/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\inf} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k_S), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

[4, гл. IV, §5, предложение 5.1]. Поэтому $\dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \geq N$ для любого натурального числа N . Лемма доказана.

1.2. В этом пункте мы доказываем теорему 0.1.

Напомним, что существует точная последовательность

$$0 \rightarrow (\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}})^* \rightarrow \pi_1(V \otimes \bar{k})^{\text{ab}} \rightarrow \prod_l T_l(\text{Alb}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0,$$

где $(\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}})^*$ – группа, двойственная по Понтрягину к конечной группе $\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}$ [11, гл. III, §4, следствие 4.19]. Равенство $H^1(V, \mathcal{O}_V) = (0)$ показывает, что $\text{Alb}(V \otimes \bar{k}) = (0)$. С другой стороны, поверхность Энрикеса $V \otimes \bar{k}$ является фактором односвязной поверхности типа КЗ по инволюции без неподвижных точек [6, гл. 4, §5]. В частности, $\pi_1(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\text{Pic}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}} = \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

имеет каноническую образующую Ω_V^2 , определенную над k . Поэтому $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ действует тривиально на $\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}$.

Если $l \neq 2$, то $l > \text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$; поскольку $H^2(V, \mathcal{O}_V) = (0)$, то мы имеем равенство $\text{rank NS}(V \otimes_k \bar{k}) = h^{1,1}(V \otimes_k \bar{k})$. В силу теоремы 3.3 из [19] l -примарная компонента группы $\text{Br}(V)/\text{Br}(k)$ конечна.

Предположим, что $l = 2$. Тогда мы имеем точную последовательность 2-при-
марных компонент [19, точная последовательность (2.14)]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(2) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(V)(2) \rightarrow \mathrm{Br}(V \otimes \bar{k})(2)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(2) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассмотрим точную последовательность $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}} \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})/\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}} \rightarrow 0.$$

Она дает точную последовательность

$$\begin{aligned} [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})/\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}}]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}}) \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Заметим, что $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}})$ аннулируется $2 = \mathrm{Card}(\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}})$,
поэтому

$$\mathrm{Im}[[\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})/\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}}]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}})]$$

является конечной 2-группой.

В силу (1.3) и (1.4) остается показать, что $H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}})$ – бес-
конечная 2-группа. Напомним, что $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ действует тривиально на $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Поэтому

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})_{\mathrm{tors}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

и теорема 0.1 следует из леммы 1.1.

§ 2. Гипотеза Тэйта и группа Брауэра регулярного многообразия

2.1. В этом пункте мы доказываем теорему 0.2.

Хорошо известно, что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$ – касательное пространство в нуле
группы $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})$ [13, лекция 24]. Поэтому $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = (0)$. Следовательно,

$$\mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})/\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}),$$

и точная последовательность (2.11) из [19] имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поскольку $\mathrm{NS}(V) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$, то группа $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ действует тривиально на
 $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathbb{Z}^\rho \oplus [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}}$ (неканонический изоморфизм, где выполнено
равенство $\rho = \mathrm{rank} \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$). Поэтому

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}^\rho) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), [\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}}), \end{aligned}$$

так как $\mathbb{Z}^\rho$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и в результате мы имеем $\text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}^\rho) = (0)$.

Следовательно, точная последовательность (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Все группы в (2.2) являются группами кручения, поэтому мы получаем точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k)(l) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V)(l) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$ аннулируется числом $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$.

Если простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, то подгруппа l -кручения в $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$ тривиальна, и (2.3) дает изоморфизм

$$\text{Br}(k)(l) \simeq \text{Ker}[\text{Br}'(V)(l) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}],$$

поэтому утверждение следует из конечности $\text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ [19, теорема 2.4].

Если простое число l делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, то подгруппа l -кручения в $[\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}$ нетривиальна, поэтому она содержит подгруппу $E \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

Рассмотрим точную последовательность $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$0 \rightarrow E \rightarrow \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}} \rightarrow \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}/E \rightarrow 0$$

с тривиальным действием $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Она дает точную последовательность

$$\begin{aligned} [\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}/E]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), E) \\ \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}). \end{aligned}$$

Заметим, что $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), E)$ аннулируется числом $l = \text{Card}(E)$, поэтому

$$\text{Im}[[\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}/E]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), E)]$$

является конечной l -группой. В силу (2.3) остается показать, что $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), E)$ – бесконечная l -группа.

Поскольку $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ действует тривиально на $E \simeq \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, мы имеем соотношение

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), E) \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}),$$

поэтому теорема 0.2 следует из леммы 1.1.

2.2. В этом пункте мы доказываем теорему 0.3.

Пусть $i_y: \text{Spec}(k(y)) \rightarrow X$ – каноническое вложение $y \in X$ и

$$\text{Div}_X^{\text{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок “вертикальных” дивизоров Картье.

Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии X)

$$0 \rightarrow G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V} \rightarrow \text{Div}_X^{\text{vert}} \rightarrow 0,$$

где $h: V \rightarrow X$ – вложение общего слоя π [19, (6.1)]. Она дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}'(X) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \quad (2.4)$$

(см. [19, (6.4)]).

Начиная с этого места мы обозначаем через $k(y)^s$ сепарабельное замыкание $k(y)$ в $\overline{k(y)}$. Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, то существует каноническое вложение $\text{Br}(k) \hookrightarrow \text{Br}'(V)$. С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(A) \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_{v \text{ неарх}} \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^3(\text{Spec}(A), G_m) \rightarrow H^3(\text{Spec}(k), G_m) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

[11, гл. III, §3, пример 2.22(e)]. В силу глобальной теории полей классов существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \left[\bigoplus_{v \text{ неарх}} \text{Br}(k_v) \right] \oplus \left[\bigoplus_{v \text{ арх}} \text{Br}(k_v) \right] \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

где k_v – пополнение k , определенное точкой v .

Рассмотрим каноническую проекцию

$$\text{pr}_{\text{арх}}: \left[\bigoplus_{v \text{ неарх}} \text{Br}(k_v) \right] \oplus \left[\bigoplus_{v \text{ арх}} \text{Br}(k_v) \right] \rightarrow \left[\bigoplus_{v \text{ арх}} \text{Br}(k_v) \right],$$

и пусть

$$\text{Br}(k)^{\text{неарх}} = \text{Br}(k) \cap \text{Ker}(\text{pr}_{\text{арх}}).$$

Поскольку $\left[\bigoplus_{v \text{ арх}} \text{Br}(k_v) \right]$ – конечная группа, мы видим, что $\text{Br}(k)^{\text{неарх}} \hookrightarrow \text{Br}(k)$ – подгруппа конечного индекса, и существует каноническое вложение

$$\text{Br}(k)^{\text{неарх}} \hookrightarrow \left[\bigoplus_{v \text{ неарх}} \text{Br}(k_v) \right]. \quad (2.5)$$

Используя существование коммутативных диаграмм [11, гл. III, § 3, пример 2.22, (с), (f)] для всех неархимедовых точек v :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k_v) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^2(\mathrm{Spec}(k), G_m) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{array}$$

мы перепишем (2.5) как

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} \rightarrow \bigoplus_{\substack{v \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{codim}_{\mathrm{Spec}(A)}(v)=1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \quad (2.6)$$

Рассмотрим каноническое вложение $i_v: \mathrm{Spec}(k(v)) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Spec}(A), R^q i_{v*} \mathbb{Z}) \implies H^{p+q}(\mathrm{Spec}(k(v)), \mathbb{Z})$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1},$$

где $E_1^2 = \mathrm{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [11, приложение В]; следовательно, мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^1(\mathrm{Spec}(A), i_{v*} \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathrm{Spec}(k(v)), \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\mathrm{Spec}(A), R^1 i_{v*} \mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(\mathrm{Spec}(A), i_{v*} \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Ker}[H^2(\mathrm{Spec}(k(v)), \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^0(\mathrm{Spec}(A), R^2 i_{v*} \mathbb{Z})] \rightarrow H^1(\mathrm{Spec}(A), R^1 i_{v*} \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Известно, что $R^q i_{v*} \mathbb{Z} = (0)$ для всех $q > 0$ [11, гл. III, § 2, пример 2.22 (а)]; поэтому (2.7) дает изоморфизм

$$H^2(\mathrm{Spec}(A), i_{v*} \mathbb{Z}) \simeq H^2(\mathrm{Spec}(k(v)), \mathbb{Z});$$

с другой стороны, $H^2(\mathrm{Spec}(k(v)), \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ [11, гл. III, § 2, пример 2.22]. Следовательно,

$$H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}) = \bigoplus_{\substack{v \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{codim}_{\mathrm{Spec}(A)}(v)=1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

[11, гл. III, § 2, пример 2.22 (а)]. Поэтому (2.6) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} \rightarrow H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}). \quad (2.8)$$

Пусть $\theta: \mathrm{Spec}(A) \rightarrow X$ – сечение морфизма π , удовлетворяющее условиям теоремы. Оно определяет инъективные морфизмы

$$\pi^*: \mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V), \quad H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}) \hookrightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$$

[19, (6.12)]. Пусть $B = \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2h_*G_{m,V})]$. Очевидно, что (2.4) и (2.8) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \\ & & & & \cup & & \cup \\ 0 & \longrightarrow & \text{Br}(k)^{\text{неарх}} \cap B & \longrightarrow & H^2(\text{Spec}(A), \text{Div}_{\text{Spec}(A)}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Следовательно, $\text{Br}'(X) \cap \text{Br}(k)^{\text{неарх}} = (0)$ внутри $\text{Br}'(V)$. Поэтому

$$\text{Br}'(X) \hookrightarrow \text{Br}'(V) / \text{Br}(k)^{\text{неарх}};$$

с другой стороны, существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) / \text{Br}(k)^{\text{неарх}} \rightarrow \text{Br}'(V) / \text{Br}(k)^{\text{неарх}} \rightarrow \text{Br}'(V) / \text{Br}(k) \rightarrow 0$$

с конечной группой $\text{Br}(k) / \text{Br}(k)^{\text{неарх}}$. Остается показать, что l -примарная компонента группы $\text{Br}'(V) / \text{Br}(k)$ конечна.

Хорошо известно, что $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = (0)$ – касательное пространство в нуле группы $\text{Pic}^0(V \otimes \bar{k})$ [13, лекция 24]. Поэтому $\text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = (0)$. Следовательно,

$$\text{Pic}(V \otimes \bar{k}) \simeq \text{Pic}(V \otimes \bar{k}) / \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V \otimes \bar{k}),$$

и поэтому (2.11) из [19] имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k) &\rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В силу предложения 2.3 из [19] все группы в (2.9) являются группами кручения, поэтому мы получаем точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k)(l) &\rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V)(l) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С другой стороны, $\text{NS}(V \otimes \bar{k})$ имеет конечное множество образующих, и любая образующая “определена” над конечным расширением, поэтому мы можем выбрать такое конечное расширение Галуа K/k , что $\text{NS}(V \otimes K) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Более того, $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))$ – конечная группа [4, гл. IV, § 6, следствие 2].

Рассмотрим каноническую точную последовательность “инфляции–ограничения” [4, гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K)) &\xrightarrow{\text{inf}} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ &\xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Поскольку $\text{NS}(V \otimes K) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$, то группа $\text{Gal}(\bar{k}/K)$ действует тривиально на $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathbb{Z}^\rho \oplus [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}$ (неканонический изоморфизм, где $\rho = \text{rank NS}(V \otimes \bar{k})$). Следовательно,

$$\begin{aligned} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) \oplus \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}), \end{aligned}$$

так как $\mathbb{Z}^\rho$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и в итоге мы имеем $\text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) = (0)$.

Следовательно,

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$$

аннулируется числом $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$. Поскольку простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, то подгруппа l -кручения в $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$ тривиальна (иначе эта группа содержит элемент порядка l , который аннулируется числом $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, поэтому он аннулируется 1 (наибольшим общим делителем l и $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$)).

Поэтому (2.11) и конечность $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))$ показывают, что группа

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) = H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))(l) \quad (2.12)$$

конечна.

С другой стороны, соотношения

$$V(k) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

дают конечность $[\text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ [19, теорема 2.4]. В частности,

$$\text{Ker}[\text{Br}'(V)(l) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

– подгруппа конечного индекса в $\text{Br}'(V)(l)$. Следовательно, мы получаем из (2.10) и (2.12) конечность группы $\text{Br}'(V)(l)/\text{Br}(k)(l) = [\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)](l)$. Теорема 0.3 доказана.

2.3. Пусть K – поле алгебраических функций одной переменной над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и V – геометрически неприводимая гладкая проективная поверхность над K . Обозначим через S полную гладкую модель поля K над k .

По определению V имеет стабильные редукции во всех точках поля K , если и только если существует такой собственный морфизм $\pi: X \rightarrow S$ гладких связных k -схем, что его общий схемный слой изоморфен V и выполнены следующие условия:

- а) любой геометрический слой $X_{\bar{s}}$ приведен;
- б) $X_{\bar{s}}$ является объединением гладких неприводимых компонент с нормальными пересечениями на $X \otimes_k \bar{k}$.

Согласно хорошо известной теореме о стабильной редукции любая гладкая проективная поверхность над K имеет стабильные редукции во всех точках некоторого конечного алгебраического расширения K .

Напомним, что поверхность V имеет *стабильное сильное вырождение* [16, § 1] в точке v поля K , если и только если V имеет стабильную редукцию в точке v и для любой неприводимой компоненты $E \subset X_{\bar{v}}$

$$H^0(E, \Omega_E^2) = (0).$$

Если поверхность V имеет стабильное сильное вырождение в некоторой точке v поля K , то для любого конечного алгебраического расширения K' поля K поверхность $V \otimes_K K'$ имеет стабильное сильное вырождение в любой точке v' поля K' , лежащей над v [16, предложение 1.3].

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть $k(t)$ – поле рациональных функций алгебраически независимой переменной t над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть V – гладкое проективное многообразие над $k(t)$. Предположим, что $H^1(V \otimes \overline{k(t)}, \mathcal{O}_{V \otimes \overline{k(t)}}) = (0)$, $\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) = \text{NS}(V)$, $V(k(t)) \neq \emptyset$, простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}})$ и

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))}.$$

Тогда l -примарная компонента группы $\text{Br}'(V)/\text{Br}(k(t))$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))}.$$

С другой стороны, $H^1(V \otimes \overline{k(t)}, \mathcal{O}_{V \otimes \overline{k(t)}}) = (0)$ – касательное пространство в нуле группы $\text{Pic}^0(V \otimes \overline{k(t)})$ [13, лекция 24]. Поэтому $\text{Pic}^0(V \otimes \overline{k(t)}) = (0)$. Следовательно,

$$\text{Pic}(V \otimes \overline{k(t)}) \simeq \text{Pic}(V \otimes \overline{k(t)})/\text{Pic}^0(V \otimes \overline{k(t)}) = \text{NS}(V \otimes \overline{k(t)}),$$

и точная последовательность (2.11) из [19] имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k(t)) &\rightarrow \text{Ker} \left[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \overline{k(t)})^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))} \right] \\ &\rightarrow H^1 \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), \text{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) \right) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})$, то группа $\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))$ действует тривиально на $\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) \simeq \mathbb{Z}^\rho \oplus [\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}}$ (неканонический изоморфизм, где $\rho = \text{rank } \text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})$). Следовательно,

$$\begin{aligned} H^1 \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), \text{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) \right) &= \text{Hom}_{\text{cont}} \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), \text{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) \right) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}} \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), \mathbb{Z}^\rho \right) \oplus \text{Hom}_{\text{cont}} \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), [\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}} \right) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}} \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), [\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}} \right), \end{aligned}$$

так как $\mathbb{Z}^\rho$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и в итоге мы имеем $\text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), \mathbb{Z}^\rho) = (0)$.

Поэтому точная последовательность (2.13) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k(t)) &\rightarrow \text{Ker} \left[\text{Br}'(V) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \overline{k(t)})^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))} \right] \\ &\rightarrow H^1 \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), [\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}} \right) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Все группы в (2.14) являются группами кручения, и мы получаем точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k(t))(l) &\rightarrow \text{Ker} \left[\text{Br}'(V)(l) \rightarrow \text{Br}'(V \otimes \overline{k(t)})(l)^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))} \right] \\ &\rightarrow H^1 \left(\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), [\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}} \right)(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} H^1\left(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), [\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}}\right) = \\ = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\left(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), [\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}}\right) \end{aligned}$$

аннулируется числом $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}})$.

Если простое число l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}})$, то подгруппа l -кручения в $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)), [\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}})$ тривиальна, (2.15) дает изоморфизм

$$\mathrm{Br}(k(t))(l) \simeq \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \overline{k(t)})(l)^{\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))}],$$

и утверждение следует из конечности группы $\mathrm{Br}'(V \otimes \overline{k(t)})(l)^{\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))}$ [19, теорема 2.4]. Теорема доказана.

2.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $k(t)$ – поле рациональных функций алгебраически независимой переменной t над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть V – гладкое проективное многообразие над $k(t)$. Предположим, что $H^1(V \otimes \overline{k(t)}, \mathcal{O}_{V \otimes \overline{k(t)}}) = (0)$, $\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) = \mathrm{NS}(V)$, $V(k(t)) \neq \emptyset$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- а) V – поверхность типа КЗ;
- б) V – поверхность со стабильным сильным вырождением в некоторой точке поля $k(t)$, и l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}})$.

Тогда l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k(t))$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.4 мы должны показать, что

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))}.$$

В случае а) утверждение доказано в [19, § 3.3].

Пусть V – поверхность со стабильным сильным вырождением в некоторой точке $k(t)$ и l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}})$. Тогда

$$\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/\overline{k(t)})} \quad (2.16)$$

(см. [16, теорема 1.4] и принцип Лефшеца, согласно которому можно рассматривать $\mathbb{C}$ вместо $\overline{k}$).

Легко видеть, что (2.16) дает следующее соотношение:

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))},$$

потому что

$$\begin{aligned} \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) &\hookrightarrow \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) \hookrightarrow \mathrm{NS}(V), \\ \mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) &= \mathrm{NS}(V), \\ \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/\overline{k(t)}) &\hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t)). \end{aligned}$$

Следствие доказано.

2.6. В этом пункте мы доказываем теорему 0.4.

Пусть $i_y: \text{Спес}(k(y)) \rightarrow X$ – каноническое вложение $y \in X$ и

$$\text{Div}_X^{\text{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье.

Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии X)

$$0 \rightarrow G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V} \rightarrow \text{Div}_X^{\text{vert}} \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

где $h: V \rightarrow X$ – вложение общего слоя π . Действительно, пусть η – общая точка $\mathbb{P}_k^1$; тогда для любого этального морфизма $U \rightarrow X$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times_X U & \hookrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{\eta\} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^1 \end{array}$$

где каждый прямоугольник дает диаграмму расслоенного произведения. Мы видим, что $V \times_X U$ является общим слоем канонического морфизма $U \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. Поскольку

$$H^0(U, h_* G_{m,V}) = H^0(V \times_X U, G_m),$$

то существует каноническое вложение $G_{m,X} \rightarrow h_* G_{m,V}$, которое на U представляет собой вложение $H^0(U, \mathcal{O}_U^\times) \hookrightarrow H^0(V \times_X U, \mathcal{O}_{V \times_X U}^\times)$. Коядро этого отображения является пучком вертикальных дивизоров Картье $\text{Div}_X^{\text{vert}}$.

Имеем

$$\text{Div}_X = \bigoplus_{\substack{y \in X \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{\substack{y \in V \\ \text{codim}_X(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z} \right) \oplus \text{Div}_X^{\text{vert}}.$$

С другой стороны, $H^1(X, \text{Div}_X) = (0)$ [11, гл. III, §2, пример 2.22]. Следовательно, $H^1(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) = (0)$. Поэтому (2.17) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(X, G_m) &\rightarrow H^2(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^2(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}) \\ &\rightarrow H^3(X, G_m) \rightarrow H^3(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^3(X, \text{Div}_X^{\text{vert}}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q h_* G_{m,V}) \implies H^{p+q}(V, G_{m,V})$$

дает точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow E_2^{3,0},$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$ [11, приложение В]. Поэтому мы имеем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, h_* G_{m,V}) \rightarrow H^1(V, G_m) \rightarrow H^0(X, R^1 h_* G_{m,V}) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(X, h_* G_{m,V}) \\ \rightarrow \text{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^1(X, R^1 h_* G_{m,V}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Слой $R^1 h_* G_{m,V}$ изоморфен $H^1(V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m)$ в геометрической точке $\bar{x} \rightarrow x \in X$ [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)], где $\mathcal{O}_{X,\bar{x}} = \mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}$ – строгая гензелизация локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ [11, гл. I, § 4, замечание 4.11]. Очевидно, что $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}})$ является схемой над $\mathbb{P}_k^1, \pi(x)$.

Напомним, что строгая гензелизация $\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}$ регулярного локального нётерова кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным локальным нётеровым кольцом [7, предложение 18.8.8, следствие 18.8.13]. Следовательно, это кольцо факториально, и поэтому $H^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}), G_m) = \text{Pic}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}}) = (0)$ [8, гл. II, § 6, предложение 6.2, следствие 6.16].

Если $\bar{x} \rightarrow x \in V$, то $\pi(x)$ – общая точка $\mathbb{P}_k^1$, поэтому $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – схема над $k(t)$, и $V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} &= H^1(V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) \\ &= H^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) = \text{Pic}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = (0). \end{aligned}$$

Если $\bar{x} \rightarrow x \in X \setminus V$, то $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}^{\text{sh}})$ – схема над дискретно нормированным кольцом $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1, \pi(x)}$. Пусть η – общая точка $\mathbb{P}_k^1$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) & \hookrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{\eta\} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^1 \end{array}$$

где каждый прямоугольник дает диаграмму расслоенного произведения. Видно, что $V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – общий слой канонического морфизма $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. С другой стороны, морфизм $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ является композицией канонических морфизмов

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1, \pi(x)}) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1.$$

Напомним, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1, \pi(x)}$ – дискретно нормированное кольцо. Следовательно, $V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – открытая подсхема в $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$. Поскольку $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ и $V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – нётеровы регулярные схемы, то они локально факториальны. Поэтому существуют естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \text{Cl}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) &\simeq \text{Pic}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})), \\ \text{Cl}(V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) &\simeq \text{Pic}(V \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \end{aligned}$$

[8, гл. II, § 6, следствие 6.16]. Поскольку $V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ – открытая подсхема нётерового регулярной схемы $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$, то существует точная последовательность

$$\operatorname{Cl}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \rightarrow \operatorname{Cl}(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) \rightarrow 0$$

[8, гл. II, § 6, предложение 6.5]. Поэтому равенство $\operatorname{Pic}(\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = (0)$ дает равенство $\operatorname{Pic}(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})) = (0)$. В частности,

$$(R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} = H^1(V \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), G_m) = (0).$$

Следовательно, $(R^1 h_* G_{m,V})_{\bar{x}} = (0)$ для всех геометрических точек $\bar{x} \rightarrow x \in X$. Значит, $R^1 h_* G_{m,V} = (0)$, и (2.19) дает следующий изоморфизм:

$$H^2(X, h_* G_{m,V}) \simeq \operatorname{Ker}[\operatorname{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})].$$

Поэтому (2.18) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Br}'(X) \rightarrow \operatorname{Ker}[\operatorname{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* G_{m,V})] \rightarrow H^2(X, \operatorname{Div}_X^{\operatorname{vert}}). \quad (2.20)$$

Начиная с этого места мы обозначаем через $k(y)^s$ сепарабельное замыкание $k(y)$ в $\overline{k(y)}$. Поскольку $V(k(t)) \neq \emptyset$, то существует каноническое вложение $\operatorname{Br}(k(t)) \hookrightarrow \operatorname{Br}'(V)$.

С другой стороны, существует каноническая точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Br}(\mathbb{P}_k^1) \rightarrow \operatorname{Br}(k(t)) \rightarrow \bigoplus_{\operatorname{codim}_{\mathbb{P}_k^1}(v)=1} \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(k(v)^s/k(v)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \rightarrow H^3(\mathbb{P}_k^1, G_m) \rightarrow H^3(\operatorname{Spec}(k(t)), G_m) \end{aligned}$$

[11, гл. III, § 3, пример 2.22(a)].

Пусть $g: \operatorname{Spec}(k(t)) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ – вложение общей точки $\mathbb{P}_k^1$. Мы имеем точную последовательность пучков в этальной топологии $\mathbb{P}_k^1$:

$$0 \rightarrow G_{m,\mathbb{P}_k^1} \rightarrow g_* G_{m,k(t)} \rightarrow \operatorname{Div}_{\mathbb{P}_k^1} \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

[11, гл. III, § 2, пример 2.22]. Рассмотрим спектральную последовательность Лере

$$H^p(\mathbb{P}_k^1, R^q g_* G_{m,k(t)}) \implies H^{p+q}(\operatorname{Spec}(k(t)), G_m).$$

Поскольку $\mathbb{P}_k^1$ – превосходная схема, мы имеем $R^q g_* G_{m,k(t)} = (0)$ для $q > 0$ [11, гл. III, § 2, пример 2.22(b)]. Поэтому точная последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1}$$

(где $E_1^2 = \operatorname{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$) [11, приложение В] дает соотношение

$$H^2(\operatorname{Spec}(k(t)), G_m) = H^2(\mathbb{P}_k^1, g_* G_{m,k(t)});$$

так как $H^1(\mathbb{P}_k^1, \operatorname{Div}_{\mathbb{P}_k^1}) = (0)$ [11, гл. III, § 2, пример 2.22], то мы получаем из (2.21) точную последовательность

$$0 \rightarrow H^2(\mathbb{P}_k^1, G_m) \rightarrow H^2(\operatorname{Spec}(k(t)), G_m) \rightarrow H^2(\mathbb{P}_k^1, \operatorname{Div}_{\mathbb{P}_k^1}). \quad (2.22)$$

Соотношение $V(k(t)) \neq \emptyset$ показывает, что существует сечение $\theta: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow X$. Легко видеть, что для любой геометрической точки $\bar{v} \rightarrow v$ индекс пересечения $(\theta(\mathbb{P}_k^1) \cdot_{X \otimes \bar{k}} \pi^{-1}(\bar{v}))$ равен 1. Следовательно, $\theta(\mathbb{P}_k^1)$ пересекается в точности с одной неприводимой компонентой любого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \mathbb{P}_k^1$.

Поэтому любой вертикальный дивизор Картье D с носителем в $\pi^{-1}(v)$ может быть единственным образом представлен в виде

$$D = n_0 \cdot \pi^{-1}(v) + \sum_i n_i \cdot D_i,$$

где $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 0, 1, \dots$, D_i – такие неприводимые компоненты $\pi^{-1}(v)$, что $D_i \cap \theta(\mathbb{P}_k^1) = \emptyset$, и мы получаем следующее разложение пучков:

$$\mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}} = \pi^*(\mathrm{Div}_{\mathbb{P}_k^1}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{y \in X \setminus V \\ \mathrm{codim}_X(y)=1 \\ \{y\} \cap \theta(\mathbb{P}_k^1) = \emptyset}} i_{y*} \mathbb{Z} \right).$$

Это разложение определяет инъективные морфизмы

$$\pi^*: \mathrm{Br}(k(t)) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V), \quad H^2(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{Div}_{\mathbb{P}_k^1}) \hookrightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})$$

(см. [19, § 6.1]).

Пусть $B = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow H^0(X, R^2 h_* \mathbf{G}_{m,V})]$. Заметим, что $H^2(\mathbb{P}_k^1, \mathbf{G}_m) = \mathrm{Br}(\mathbb{P}_k^1) = \mathrm{Br}(k)$ [19, лемма 2.1]. С другой стороны, (2.20) и (2.22) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}_k^1, \mathbf{G}_m) & \longrightarrow & H^2(\mathrm{Spec}(k(t)), \mathbf{G}_m) \cap B & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{Div}_{\mathbb{P}_k^1}) \\ & & \cap & & \cap & & \cap \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \end{array} \quad (2.23)$$

Пусть $C = \mathrm{Im}[H^2(\mathrm{Spec}(k(t)), \mathbf{G}_m) \cap B \rightarrow H^2(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{Div}_{\mathbb{P}_k^1})]$. Тогда (2.23) дает коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k(t)) \cap B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \cap & & \cap & & \cap \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}). \end{array}$$

Мы получаем змеевидную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(k(t)) \cap B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \cap & & \cap & & \cap \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k) & \longrightarrow & B/(\mathrm{Br}(k(t)) \cap B) & \longrightarrow & H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})/C \end{array}$$

с точной последовательностью

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k) \rightarrow B/(\mathrm{Br}(k(t)) \cap B) \rightarrow H^2(X, \mathrm{Div}_X^{\mathrm{vert}})/C$$

[2, §1, предложение 2]. С другой стороны, $B/(\mathrm{Br}(k(t)) \cap B)$ является образом подгруппы $B \hookrightarrow \mathrm{Br}'(V)$ в $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k(t))$ при каноническом морфизме $\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k(t))$. Поэтому мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k(t)). \quad (2.24)$$

Предположим, что $H^1(V \otimes \overline{k(t)}, \mathcal{O}_{V \otimes \overline{k(t)}}) = (0)$, $\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) = \mathrm{NS}(V)$, простое число l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\mathrm{tors}})$ и

$$\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))}.$$

В силу теоремы 2.4 l -компонента группы $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k(t))$ конечна. Следовательно, (2.24) дает конечность l -компоненты группы $\mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k)$.

Остается показать конечность l -компоненты группы $\mathrm{Br}'(\Xi)$.

Пусть $i_y: \mathrm{Spec}(k(y)) \rightarrow \Xi$ – каноническое вложение $y \in \Xi$ и

$$\mathrm{Div}_{\Xi}^{\mathrm{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in \Xi \setminus X \\ \mathrm{codim}_{\Xi}(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье.

Существует точная последовательность пучков (в этальной топологии Ξ)

$$0 \rightarrow G_{m,\Xi} \rightarrow \nu_* G_{m,X} \rightarrow \mathrm{Div}_{\Xi}^{\mathrm{vert}} \rightarrow 0,$$

где $\nu: X \rightarrow \Xi$ – вложение общего слоя φ [19, (6.1)]. Она дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}'(\Xi) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(X) \rightarrow H^0(\Xi, R^2 \nu_* G_{m,X})] \rightarrow H^2(\Xi, \mathrm{Div}_{\Xi}^{\mathrm{vert}}) \quad (2.25)$$

(см. [19, (6.4)]).

Напомним, что (2.8) имеет вид

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} \rightarrow H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}), \quad (2.26)$$

где $\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} \hookrightarrow \mathrm{Br}(k)$ – подгруппа конечного индекса.

Пусть $\theta: \mathrm{Spec}(A) \rightarrow \Xi$ – сечение морфизма φ , удовлетворяющее условиям теоремы. Оно определяет инъективные морфизмы

$$\mathrm{Br}(k) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X), \quad H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}) \hookrightarrow H^2(\Xi, \mathrm{Div}_{\Xi}^{\mathrm{vert}})$$

[19, (6.12)]. Пусть $B' = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(X) \rightarrow H^0(\Xi, R^2 \nu_* G_{m,X})]$. Очевидно, что (2.25) и (2.26) дают коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Br}'(\Xi) & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & H^2(\Xi, \mathrm{Div}_{\Xi}^{\mathrm{vert}}) \\ & & & & \cup & & \cup \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} \cap B' \longrightarrow H^2(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Div}_{\mathrm{Spec}(A)}).$$

Значит, $\mathrm{Br}'(\Xi) \cap \mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} = (0)$ внутри $\mathrm{Br}'(X)$. Поэтому

$$\mathrm{Br}'(\Xi) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}};$$

с другой стороны, существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} \rightarrow \mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}} \rightarrow \mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k) \rightarrow 0$$

с конечной группой $\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Br}(k)^{\mathrm{неарх}}$. Поскольку l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}(k)$ конечна, мы получаем конечность l -компоненты группы $\mathrm{Br}'(\Xi)$. Теорема 0.4 доказана.

2.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $k(t)$ – поле рациональных функций алгебраически независимой переменной t над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть V – гладкое проективное многообразие над $k(t)$. Предположим, что $H^1(V \otimes \bar{k}(t), \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}(t)}) = (0)$, $\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t)) = \text{NS}(V)$, $V(k(t)) \neq \emptyset$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- а) V – поверхность типа КЗ;
- б) V – поверхность со стабильным сильным вырождением в некоторой точке поля $k(t)$ и l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t))]_{\text{tors}})$.

Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – собственный плоский k -морфизм гладких проективных многообразий над k , и общий слой π изоморфен V (мы называем $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ геометрической моделью V).

Тогда существует естественное вложение

$$\text{Br}'(X)/\text{Br}(k) \hookrightarrow \text{Br}'(V)/\text{Br}(k(t))$$

и l -примарная компонента группы $\text{Br}'(X)/\text{Br}(k)$ конечна.

Это вытекает непосредственно из следствия 2.5 и теоремы 0.4.

2.8. В этом пункте мы доказываем теорему 0.5.

Согласно теореме 0.4 l -примарная компонента группы $\text{Br}'(X)/\text{Br}(k)$ конечна; поэтому $H^1(X \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{X \otimes \bar{k}}) = (0)$ [19, теорема 5.3] и точная последовательность (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(X) \rightarrow \text{Br}'(X \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(X \otimes \bar{k})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\text{NS}(X \otimes \bar{k}) = \text{NS}(X)$, то группа Галуа $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ действует тривиально на $\text{NS}(X \otimes \bar{k})$. Поэтому в рассматриваемом случае мы получаем точную последовательность (2.3) l -примарных компонент:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(k)(l) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(X)(l) \rightarrow \text{Br}'(X \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(X \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})(l) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Заметим, что $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(X \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(X \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$ аннулируется числом $\text{Card}([\text{NS}(X \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$. Подгруппа l -кручения в $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), [\text{NS}(X \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$ тривиальна, так как l не делит $\text{Card}([\text{NS}(X \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$. Следовательно, (2.27) дает изоморфизм

$$\text{Br}(k)(l) \simeq \text{Ker}[\text{Br}'(X)(l) \rightarrow \text{Br}'(X \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}].$$

С другой стороны, сюръективность канонического морфизма

$$\text{Br}'(X)(l) \rightarrow \text{Br}'(X \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

дает конечность группы $\text{Br}'(X \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$, так как группа

$$\text{Im}[\text{Br}'(X)(l) \rightarrow \text{Br}'(X \otimes \bar{k})(l)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}] \simeq \text{Br}'(X)(l)/\text{Br}(k)(l)$$

конечна.

Хорошо известно, что l -примарная компонента когомологической группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k}) = H^2(X \otimes \bar{k}, G_m)$ изоморфна $(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)^{\rho_0(X \otimes \bar{k}, l)} \oplus$ (конечная группа) [11, гл. V, §3, замечание 3.29(d)]. Следовательно,

$$T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varprojlim \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})_{l^m} = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k}))$$

– свободный конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль ранга $\rho_0(X \otimes \bar{k}, l)$. Последовательность Куммера

$$1 \rightarrow \mu_{l^m} \rightarrow G_m \xrightarrow{l^m} G_m \rightarrow 1$$

дает точную последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^1(X \otimes \bar{k}, G_m) \xrightarrow{l^m} H^1(X \otimes \bar{k}, G_m) \rightarrow H^2(X \otimes \bar{k}, \mu_{l^m}) \\ \rightarrow H^2(X \otimes \bar{k}, G_m) \xrightarrow{l^m} H^2(X \otimes \bar{k}, G_m) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем точную последовательность $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k}) \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

[11, гл. V, §3, замечание 3.29(d)].

Точная последовательность (2.28) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow [H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ \rightarrow [[T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})] \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для любой открытой нормальной подгруппы U $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l]^U)$$

аннулируется числом $\mathrm{Card}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)/U)$ [4, гл. IV, §6, следствие 1]. Значит,

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = (0), \\ H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l) = \varprojlim H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\mathrm{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = (0). \end{aligned}$$

Поэтому (2.29) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \rightarrow [H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ \rightarrow [[T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})] \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Так как $T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})$ – свободный конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль, то мы видим, что $[T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ – свободный конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} &= [\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k}))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &= \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, [\mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) = T_l[\mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(l)]. \end{aligned}$$

Напомним, что $\mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ – конечная группа. Поэтому

$$T_l[\mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(l)] = (0).$$

Следовательно, $[[T_l \mathrm{Br}'(X \otimes \bar{k})] \otimes \mathbb{Q}_l]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)} = (0)$, и (2.30) дает изоморфизм

$$\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq [H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Теорема 0.5 доказана.

2.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть V – гладкое проективное многообразие над $k(t)$, где $k(t)$ – поле рациональных функций алгебраически независимой переменной t над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – таковой собственный плоский k -морфизм гладких проективных k -многообразий, что общий слой π изоморфен V (мы называем $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ геометрической моделью V). Предположим, что $H^1(V \otimes \overline{k(t)}, \mathcal{O}_{V \otimes \overline{k(t)}}) = (0)$, $\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)}) = \text{NS}(V)$, $V(k(t)) \neq \emptyset$, $\text{NS}(X \otimes \overline{k}) = \text{NS}(X)$, простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}})$ и $\text{Card}([\text{NS}(X \otimes \overline{k})]_{\text{tors}})$, канонический морфизм

$$\text{Br}'(X)(l) \rightarrow [\text{Br}'(X \otimes \overline{k})(l)]^{\text{Gal}(\overline{k}/k)}$$

сюръективен и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- а) V – поверхность типа КЗ;
- б) V – поверхность со стабильным сильным вырождением в некоторой точке поля $k(t)$.

Тогда существует канонический изоморфизм

$$\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(X \otimes \overline{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует непосредственно из теоремы 0.5, потому что в п. 2.5 мы доказали соотношение

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/k(t))}.$$

§ 3. О конечности строго гензелевой модификации группы Шафаревича–Тэйта

3.1. Для любого поля L мы обозначаем через $\bar{L}$ максимальное сепарабельное алгебраическое расширение L .

Пусть C – регулярная превосходная неприводимая 1-мерная схема, K – поле рациональных функций на C . Пусть $\widehat{K}_v$ – пополнение K относительно нормирования, определенного замкнутой точкой $v \in C$. Множество всех таких пополнений используется для определения группы Шафаревича–Тэйта абелева многообразия J над K :

$$\text{Ш}(C, J) = \text{Ker} \left[H^1(\text{Spec}(K), J) \rightarrow \prod_{\text{codim}_C(v)=1} H^1(\text{Spec}(\widehat{K}_v), J) \right].$$

Имеет смысл использовать обычную гензелизацию и строгую гензелизацию локального кольца $\mathcal{O}_{C,v}$ вместо пополнения и определить *гензелеву* и *строго гензелеву* модификации группы Шафаревича–Тэйта.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть K_v^h (соответственно K_v^{sh}) – поле дробей обычной гензелизации $\mathcal{O}_{C,v}^h$ (соответственно строгой гензелизации $\mathcal{O}_{C,v}^{\text{sh}} = \mathcal{O}_{C,\bar{v}}$) локального кольца $\mathcal{O}_{C,v}$. Для абелева многообразия J над K определим

$$\begin{aligned}\Pi^h(C, J) &= \text{Ker} \left[H^1(\text{Spec}(K), J) \rightarrow \prod_{\text{codim}_C(v)=1} H^1(\text{Spec}(K_v^h), J) \right], \\ \Pi^{\text{sh}}(C, J) &= \text{Ker} \left[H^1(\text{Spec}(K), J) \rightarrow \prod_{\text{codim}_C(v)=1} H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J) \right].\end{aligned}$$

Очевидно, что вложения $K \hookrightarrow K_v^h \hookrightarrow K_v^{\text{sh}}$ и $K \hookrightarrow K_v^h \hookrightarrow \hat{K}_v$ индуцируют включения $\Pi^h(C, J) \hookrightarrow \Pi^{\text{sh}}(C, J)$ и $\Pi^h(C, J) \hookrightarrow \Pi(C, J)$.

Более того,

$$\Pi^h(C, J) = \Pi(C, J). \quad (3.1)$$

Действительно, существуют канонические вложения

$$\mathcal{O}_{C,v} \hookrightarrow \mathcal{O}_{C,v}^h \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{C,v},$$

где $\hat{\mathcal{O}}_{C,v} = (\hat{\mathcal{O}}_{C,v}^h)$ – пополнение $\mathcal{O}_{C,v}$ (см. [7, теорема 18.6.6], [11, гл. I, § 1, замечание 1.2; гл. I, § 4, упражнение 4.9]). Пусть K_v^h – поле дробей $\mathcal{O}_{C,v}^h$. Тогда $\hat{K}_v^h$ – поле дробей $(\hat{\mathcal{O}}_{C,v}^h) = \hat{\mathcal{O}}_{C,v}$. Следовательно, $(\hat{K}_v^h) = \hat{K}_v$. Вложение $K_v^h \hookrightarrow \hat{K}_v$ индуцирует каноническое вложение

$$H^1(\text{Spec}(K_v^h), J) \hookrightarrow H^1(\text{Spec}(\hat{K}_v), J). \quad (3.2)$$

Действительно, элемент $H^1(\text{Spec}(K_v^h), J)$ представлен торсором P над K_v^h , который продолжается до плоской проективной схемы $\mathcal{P}$ над $\mathcal{O}_{C,v}^h$. Если $P(\hat{K}_v) \neq \emptyset$, то $P(\hat{K}_v) = \mathcal{P}(\hat{\mathcal{O}}_{C,v}) \neq \emptyset$, поэтому в силу аппроксимационной теоремы Гринберга $\mathcal{P}(\hat{\mathcal{O}}_{C,v}/\hat{m}_v^i) \neq \emptyset$ для всех i [5, следствие 2]; с другой стороны, поскольку $(\hat{\mathcal{O}}_{C,v}^h) = \hat{\mathcal{O}}_{C,v}$, то мы получаем равенство $\mathcal{O}_{C,v}^h/(m_v^h)^i = \hat{\mathcal{O}}_{C,v}/\hat{m}_v^i$ для всех i [1, гл. III, § 2, п. 12, изоморфизм (21)]; следовательно, $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{C,v}^h/(m_v^h)^i) \neq \emptyset$ для всех i , что (по аппроксимационной теореме Гринберга [5, следствие 2]) влечет соотношение $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{C,v}^h) \neq \emptyset$; поэтому $P(K_v^h) \neq \emptyset$ и утверждение (3.2) доказано. Соотношение (3.1) следует из (3.2).

В частности,

$$\Pi(C, J) \hookrightarrow \Pi^{\text{sh}}(C, J). \quad (3.3)$$

3.3. В этом пункте мы доказываем теорему 0.6.

Пусть $\mathcal{O}_{C,v}^h$ – обычная гензелизация локального кольца $\mathcal{O}_{C,v}$. Это превосходное гензелево дискретно нормированное кольцо с конечным полем вычетов. В силу (3.1) мы имеем

$$\Pi^h(C, J) = \Pi(C, J).$$

Максимальное неразветвленное расширение $(\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\text{un}}$ кольца $\mathcal{O}_{C,v}^h$ совпадает со строгой гензелизацией $\mathcal{O}_{C,v}^h$ [11, гл. I, § 4, замечание 4.11]. В частности, $(\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\text{un}} = \mathcal{O}_{C,v}^{\text{sh}} = \mathcal{O}_{C,\bar{v}}$. Следовательно, $(K_v^h)^{\text{un}} = K_v^{\text{sh}}$. Мы обозначаем через $\mathbb{F}_{q_v}$ поле вычетов точки $v \in C$.

Рассмотрим каноническую точную последовательность инфляции – ограничения [4, гл. IV, § 5, предложение 5.1]:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1\left(\mathrm{Gal}((K_v^h)^{\mathrm{un}}/K_v^h), J((K_v^h)^{\mathrm{un}})\right) &\xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(\mathrm{Gal}(\overline{K_v^h}/K_v^h), J(\overline{K_v^h})) \\ &\xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\mathrm{Gal}(\overline{K_v^h}/(K_v^h)^{\mathrm{un}}), J(\overline{K_v^h})). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Утверждаем, что существует каноническое вложение

$$H^1\left(\mathrm{Gal}((K_v^h)^{\mathrm{un}}/K_v^h), J((K_v^h)^{\mathrm{un}})\right) \hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\overline{\mathbb{F}_{q_v}})), \quad (3.5)$$

где J_v – специальный слой минимальной модели Нерона многообразия J в точке $v \in C$ и $\pi_0(J_v) = J_v/J_v^0$ – конечная групповая схема над $\mathbb{F}_{q_v}$. Этот факт доказан в [12, гл. I, § 3, предложение 3.8] для *полного* локального кольца с конечным полем вычетов. Поскольку доказательство зависит только от леммы Гензеля, оно остается верным для гензелева кольца $\mathcal{O}_{C,v}^h$. Действительно, пусть $\mathcal{A}$ – минимальная модель Нерона многообразия $J \otimes_K K_v^h$ над $\mathcal{O}_{C,v}^h$. Мы обозначаем через $\mathcal{A}^0$ открытую групповую подсхему в $\mathcal{A}$ с общим слоем $J \otimes_K K_v^h$ и специальным слоем – компонентой нуля в J_v . Так как $\mathcal{A}$ гладкая над $\mathcal{O}_{C,v}^h$, то лемма Гензеля показывает, что отображение редукции $\mathcal{A}((\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\mathrm{un}}) \rightarrow \mathcal{A}_v(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}) = J_v(\overline{\mathbb{F}_{q_v}})$ сюръективно (действительно,

$$\mathcal{A} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,v}^h)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{sh}}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{sh}})$$

– гладкая схема над строго гензелевым кольцом $\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{sh}} = (\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\mathrm{un}}$, поэтому отображение редукции

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{sh}}) \rightarrow \mathcal{A}_v(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}) = J_v(\overline{\mathbb{F}_{q_v}})$$

сюръективно [11, гл. I, § 4, упражнение 4.13]). Следовательно, существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{A}^0((\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\mathrm{un}}) \rightarrow \mathcal{A}((\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\mathrm{un}}) \rightarrow \pi_0(J_v)(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}) \rightarrow 0.$$

Более того, $\mathcal{A}((\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\mathrm{un}}) = J((K_v^h)^{\mathrm{un}})$, потому что $\mathcal{A} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,v}^h)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{sh}}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C,v}^{\mathrm{sh}})$ – минимальная модель Нерона многообразия $J \otimes_K (K_v^h)^{\mathrm{un}}$. С другой стороны, существует канонический изоморфизм

$$\mathrm{Gal}((K_v^h)^{\mathrm{un}}/K_v^h) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v}).$$

Остается показать, что $H^1(\mathrm{Gal}((K_v^h)^{\mathrm{un}}/K_v^h), \mathcal{A}^0((\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\mathrm{un}})) = (0)$.

Элемент $\alpha \in H^1(\mathrm{Gal}((K_v^h)^{\mathrm{un}}/K_v^h), \mathcal{A}^0((\mathcal{O}_{C,v}^h)^{\mathrm{un}}))$ может быть представлен $\mathcal{A}^0$ -торсором P . Так как J_v^0 – связная алгебраическая группа над конечным полем, хорошо известная теорема С. Ленга [14, гл. VI, § 1.4, следствие 1] показывает, что J_v^0 -торсор $P \otimes_{\mathcal{O}_{C,v}^h} \mathbb{F}_{q_v}$ тривиален, и поэтому $P_v(\mathbb{F}_{q_v})$ – непустое множество. Лемма Гензеля показывает, что отображение $P(\mathcal{O}_{C,v}^h) \rightarrow P_v(\mathbb{F}_{q_v})$ сюръективно [11, гл. I, § 4, пример 4.13]), поэтому $P(\mathcal{O}_{C,v}^h)$ непусто и, значит, $\alpha = 0$. Соотношение (3.5) доказано.

Существует такое конечное расширение $\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}$ поля $\mathbb{F}_{q_v}$, что $\text{Gal}(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v})$ действует тривиально на конечном $\text{Gal}(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v})$ -модуле $\pi_0(J_v)(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}})$. Рассмотрим каноническую точную последовательность инфляции – ограничения [4, гл. IV, § 5, предложение 5.1]:

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}})) \xrightarrow{\inf} H^1(\text{Gal}(\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\mathbb{F}_{q_v})) \\ \xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Gal}(\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\mathbb{F}_{q_v})).$$

Очевидно, что $H^1(\text{Gal}(\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\mathbb{F}_{q_v}))$ – конечная группа, так как $H^1(\text{Gal}(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}))$ – конечная группа [4, гл. IV, § 6, следствие 2] и

$$H^1(\text{Gal}(\mathbb{F}_{q_v}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\mathbb{F}_{q_v})) = \text{Hom}_{\text{cont}}\left(H^1(\text{Gal}(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v}), \pi_0(J_v)(\widetilde{\mathbb{F}_{q_v}}))\right) \\ \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \pi_0(J_v)(\mathbb{F}_{q_v}))$$

– конечная группа.

Соотношение (3.5) показывает, что $H_v = H^1(\text{Gal}((K_v^h)^{\text{un}}/K_v^h), J((K_v^h)^{\text{un}}))$ – конечная группа.

Очевидно, что $f_{\text{sh},v}: H^1(\text{Spec}(K), J) \rightarrow H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J)$ – композиция канонических морфизмов

$$H^1(\text{Spec}(K), J) \xrightarrow{f_{h,v}} H^1(\text{Spec}(K_v^h), J) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J),$$

потому что $K \hookrightarrow K_v^h \hookrightarrow K_v^{\text{sh}}$. Мы перепишем (3.4) как

$$0 \rightarrow H_v \xrightarrow{\inf} H^1(\text{Spec}(K_v^h), J) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J). \quad (3.6)$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f_{h,v}) & \longrightarrow & \text{Ker}(f_{\text{sh},v}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\text{Spec}(K), J) & \xrightarrow{\text{id}} & H^1(\text{Spec}(K), J) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_v & & \downarrow f_{h,v} & & \downarrow f_{\text{sh},v} & & \\ 0 \longrightarrow & H_v & \xrightarrow{\inf} & H^1(\text{Spec}(K_v^h), J) & \xrightarrow{\text{res}} & H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J) & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Coker}(f_v) & \longrightarrow & \text{Coker}(f_{h,v}) & \longrightarrow & \text{Coker}(f_{\text{sh},v}) & & \end{array}$$

Змеевидная диаграмма [2, гл. X, § 1.2, предложение 2] дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f_{h,v}) \rightarrow \text{Ker}(f_{\text{sh},v}) \rightarrow \text{Coker}(f_v) = H_v. \quad (3.7)$$

Конечность H_v показывает, что $\text{Ker}(f_{h,v}) \hookrightarrow \text{Ker}(f_{\text{sh},v})$ – подгруппа конечного индекса.

Пусть A, B, D, F – подгруппы в $H^1(\text{Spec}(K), J)$. Если $A \hookrightarrow D$ – подгруппа конечного индекса и $B \hookrightarrow F$ – подгруппа конечного индекса, то $A \cap B \hookrightarrow D \cap F$ – подгруппа конечного индекса.

Действительно, D/A и F/B – конечные группы. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow D/A \rightarrow 0.$$

Очевидно, что образ $D \cap B$ в D/A – конечная группа, изоморфная $(D \cap B)/(A \cap B)$. С другой стороны, точная последовательность

$$0 \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow F/B \rightarrow 0$$

показывает, что образ $D \cap F$ в F/B является конечной группой, изоморфной $(D \cap F)/(D \cap B)$. Существует точная последовательность

$$0 \rightarrow (D \cap B)/(A \cap B) \rightarrow (D \cap F)/(A \cap B) \rightarrow (D \cap F)/(D \cap B) \rightarrow 0.$$

Поэтому $(D \cap F)/(A \cap B)$ – конечная группа.

Если J имеет хорошую редукцию в точке $v \in C$, то $\pi_0(J_v) = (0)$ и $H_v = (0)$; в этом случае (3.6) дает соотношение $\text{Ker}(f_{h,v}) = \text{Ker}(f_{sh,v})$. Поскольку J имеет хорошие редукции во всех точках вне конечного подмножества $S \subset C$, то мы видим по замечанию, сделанному выше, что

$$\text{III}^h(C, J) = \bigcap_{\text{codim}_C(v)=1} \text{Ker}(f_{h,v}) \hookrightarrow \bigcap_{\text{codim}_C(v)=1} \text{Ker}(f_{sh,v}) = \text{III}^{sh}(C, J)$$

– подгруппа конечного индекса.

Начиная с этого места мы предполагаем, что геометрический слой минимальной модели Нерона многообразия J в любой точке $v \in C$ связан. В этом случае $\pi_0(J_v) = (0)$ и $H_v = (0)$; поэтому (3.7) дает соотношение $\text{Ker}(f_h) = \text{Ker}(f_{sh})$. Следовательно, $\text{III}^h(C, J) = \text{III}^{sh}(C, J)$. Теорема 0.6 доказана.

3.4. Мы хотим прояснить взаимоотношения между группой Брауэра поверхности V с пучком кривых над C , гипотезой Тэйта для V и конечностью l -примарных компонент $\text{III}^{sh}(C, J)$, где J – якобиево многообразие общей кривой пучка.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1 из [19].

3.5. ТЕОРЕМА. Пусть C – гладкая проективная кривая над числовым полем k , и пусть $f: V \rightarrow C$ – плоский проективный k -морфизм с 1-мерными слоями. Мы предполагаем, что V и общий слой f гладкие. Предположим, что выполняются следующие условия:

- а) существует сечение $\theta: C \rightarrow V$ морфизма f , $C(k) \neq \emptyset$;
- б) сечение θ определяет изоморфизм $\text{Pic}^0(C) \simeq \text{Pic}^0(V)$.

Если $\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ и l – достаточно большое простое число, то l -примарная компонента группы $\text{Br}(V)/\text{Br}(C)$ конечна.

3.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Хорошо известно, что в характеристике нуль пространство модулей гладких проективных кривых рода $g \geq 4$ с якобиевой жесткостью уровня N ($N \geq 3$) содержит некоторые проективные кривые, так что для некоторой проективной гладкой кривой C существует неизотривиальное семейство $f: V \rightarrow C$ с гладкими и неприводимыми 1-мерными геометрическими слоями рода g .

3.7. С другой стороны, мы имеем список регулярных поверхностей, удовлетворяющих гипотезе Тэйта: рациональная поверхность, поверхность Энриквеса [19, лемма 3.2], поверхность типа КЗ [17], поверхность Ферма [19, § 3.3].

3.8. В этом пункте мы доказываем теорему 0.7.

Пусть K – поле рациональных функций на C . Сечение $\theta: C \rightarrow V$ дает вложение $H^3(C, G_m) \hookrightarrow H^3(V, G_m)$, так что спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q f_* G_m) \implies H^{p+q}(V, G_m)$$

определяет инъективный морфизм $E_2^{3,0} \rightarrow E^3$. Согласно лемме 1.1 из [19] мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_1^2 \rightarrow E_2^{1,1} \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

где $E_1^2 = \text{Ker}[E^2 \rightarrow E_2^{0,2}]$. Поскольку f – строго плоский собственный морфизм с приведенными и связными геометрическими слоями, то $\theta_C \simeq f_* \theta_V$ как пучки на $C_{\text{ét}}$, и $f_* G_m = G_m$ [11, гл. V, § 3.1–3.5]. Более того, θ определяет вложение $H^2(C, G_m) \hookrightarrow H^2(V, G_m)$.

Поэтому (3.8) дает точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}(C) = H^2(C, G_m) &\rightarrow \text{Ker}[H^2(V, G_m) \rightarrow H^0(C, R^2 f_* G_m)] \\ &\rightarrow H^1(C, R^1 f_* G_m) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}(C) \rightarrow \text{Ker}[\text{Br}(V) \rightarrow H^0(C, R^2 f_* G_m)] \rightarrow H^1(C, R^1 f_* G_m) \rightarrow 0.$$

Очевидно, что $V(k) \neq \emptyset$. По теореме 3.5 мы имеем следующий результат: для любого простого числа $l \gg 0$ l -примарная компонента группы $\text{Br}(V)/\text{Br}(C)$ конечна. Следовательно, для любого $l \gg 0$ l -примарная компонента группы кручения $H^1(C, R^1 f_* G_m)$ конечна.

Пусть $i: \eta \hookrightarrow C$ – вложение общей точки C , и пусть $B = i_*(i^*(R^1 f_* G_m))$. Рассмотрим канонический морфизм $R^1 f_* G_m \rightarrow B$ и определим

$$E = \text{Ker}[R^1 f_* G_m \rightarrow B], \quad F = \text{Coker}[R^1 f_* G_m \rightarrow B].$$

Слой $R^1 f_* G_m$ в геометрической точке $\bar{v} \rightarrow v \in C$ изоморфен группе $H^1(V \times_C \text{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}), G_m)$ [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)], где $\theta_{C,\bar{v}} = \theta_{C,v}^{\text{sh}}$ – строгая гензелизация локального кольца $\theta_{C,v}$ [11, гл. I, § 4, замечание 4.11]. Очевидно, что $\text{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) = \text{Spec}(\theta_{C,v}^{\text{sh}})$ – схема над $\theta_{C,v}$.

С другой стороны, $i^*(R^1 f_* G_m)$ – групповая схема локально конечного типа над η , поэтому слой B в геометрической точке $\bar{v} \rightarrow v \in C$ изоморфен $H^0(\eta \times_C \text{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}), i^*(R^1 f_* G_m))$ [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)]. Очевидно, что

$$B_{\bar{v}} = H^0(\eta \times_C \text{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}), i^*(R^1 f_* G_m)) \simeq H^1(V_{\eta} \times_C \text{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}), G_m). \quad (3.9)$$

Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 V_\eta \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) & \xhookrightarrow{\quad} & V \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V_\eta & \xhookrightarrow{\quad} & V \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 \eta & \xhookrightarrow{\quad} & C
 \end{array}$$

где каждый прямоугольник дает диаграмму расслоенного произведения.

Напомним, что строгая гензелизация $\theta_{C,\bar{v}}$ регулярного локального нётерова кольца $\theta_{C,v}$ является регулярным локальным нётеровым кольцом [7, предложение 18.8.8, следствие 18.8.13].

Рассмотрим диаграмму расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc}
 \eta \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) & \xhookrightarrow{\quad} & \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \eta & \xhookrightarrow{\quad} & C
 \end{array} \tag{3.10}$$

Мы видим из (3.10), что $\eta \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}})$ – общий слой канонического морфизма $\operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) \rightarrow C$. С другой стороны, морфизм $\operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) \rightarrow C$ является композицией канонических морфизмов

$$\operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) \rightarrow \operatorname{Spec}(\theta_{C,v}) \hookrightarrow C.$$

Напомним, что $\theta_{C,v}$ – дискретно нормированное кольцо или поле. Следовательно, $\eta \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}})$ – открытая подсхема в $\operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}})$ и $V_\eta \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}})$ – открытая подсхема в $V \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}})$.

Очевидно, что $V \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,v})$ – регулярная схема. С другой стороны, $\theta_{C,\bar{v}}$ – объединение этальных конечных расширений $\theta_{C,v} \hookrightarrow B_i$, и поэтому

$$\theta_{C,\bar{v}} = \varinjlim B_i, \quad \operatorname{Spec}(\theta_{C,\bar{v}}) = \varprojlim \operatorname{Spec}(B_i);$$

с другой стороны, следующая диаграмма расслоенных произведений

$$\begin{array}{ccc}
 V \times_C \operatorname{Spec}(B_i) & \longrightarrow & V \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,v}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \operatorname{Spec}(B_i) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(\theta_{C,v})
 \end{array}$$

показывает, что $V \times_C \operatorname{Spec}(B_i)$ – регулярная нётерова схема, потому что $V \times_C \operatorname{Spec}(B_i) \rightarrow V \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,v})$ – этальный конечный морфизм [11, гл. 1, § 5, замечание 5.5]. В частности, для $x \in V \times_C \operatorname{Spec}(\theta_{C,v})$ и для любой такой точки $y_i \in V \times_C \operatorname{Spec}(B_i)$, что y_i отображается в x , мы имеем соотношение

$$m_{y_i} = m_x \cdot \theta_{V \times_C \operatorname{Spec}(B_i), y_i}$$

[7, теорема 17.6.1(c')]. Если

$$y \in \varprojlim V \times_C \operatorname{Spec}(B_i) = V \times_C \varprojlim \operatorname{Spec}(B_i) = V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}),$$

то мы имеем соотношение

$$m_y = m_x \cdot \mathcal{O}_{V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), y};$$

следовательно, m_y порождается

$$\dim(\mathcal{O}_{V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), y}) = \dim(\mathcal{O}_{V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,v}), x})$$

элементами, и поэтому $V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}})$ – регулярная схема.

Поскольку $V_\eta \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}})$ – открытая подсхема нётеровой регулярной схемы $V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}})$, то существует каноническая точная последовательность

$$0 \rightarrow E_{\bar{v}} \rightarrow H^1(V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), G_m) \rightarrow H^1(V_\eta \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), G_m) \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

[8, гл. II, § 6, предложение 6.5, следствие 6.16]. Поэтому для всех геометрических точек $\bar{v}$ имеем $F_{\bar{v}} = (0)$, и мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow E \rightarrow R^1 f_* G_m \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Поскольку геометрический слой $f^{-1}(\bar{v}) = V_{\bar{v}}$ приведен и неприводим, точная последовательность (3.11) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot \{ \text{класс } f^{-1}(\bar{v}) \text{ в } H^1(V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), G_m) \} \\ \rightarrow H^1(V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), G_m) \rightarrow H^1(V_\eta \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), G_m) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

[8, гл. II, § 6, предложение 6.5, следствие 6.16]. Очевидно, что приведенное неприводимое многообразие $f^{-1}(\bar{v})$ является дивизором $(t_{\bar{v}})$ функции $t_{\bar{v}}$, где $t_{\bar{v}}$ – образующая максимального идеала в $\mathcal{O}_{C,\bar{v}}$. Поэтому класс $f^{-1}(\bar{v})$ в $H^1(V \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), G_m)$ равен нулю и $E_{\bar{v}} = (0)$. Следовательно,

$$B = R^1 f_* G_m.$$

Мы знаем, что для любого $l \gg 0$ l -компонента группы $H^1(C, B)$ конечна.

Пусть $J = \operatorname{Pic}^0(V_\eta) = B_\eta^0 = \operatorname{Ker}[B_\eta \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}_\eta]$ и $A = i_*(J)$. Мы получаем из [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)] и (3.9) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_{\bar{v}} &= (i_*(J))_{\bar{v}} = H^0(\eta \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), J) = J(K_v^{\text{sh}}) = \operatorname{Pic}^0(V_\eta)(K_v^{\text{sh}}), \\ B_{\bar{v}} &= H^0(\eta \times_C \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{C,\bar{v}}), i^*(R^1 f_* G_m)) = i^*(R^1 f_* G_m)(K_v^{\text{sh}}) = \operatorname{Pic}(V_\eta)(K_v^{\text{sh}}). \end{aligned}$$

Поэтому $A = \operatorname{Ker}[B \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}_C]$.

Существование сечения $f: V \rightarrow C$ дает точную последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}_C \rightarrow 0.$$

Соответствующая точная последовательность когомологий имеет вид

$$\mathbb{Z} \rightarrow H^1(C, A) \rightarrow H^1(C, B) \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

потому что $H^1(C, \mathbb{Z}) = (0)$ (действительно, группа этальных когомологий $H^1(C, \mathbb{Z})$ является группой кручения [12, гл. II, § 2, лемма 2.10], и поэтому из последовательности когомологий для

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{l} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

мы получаем точную последовательность $0 \rightarrow H^1(C, \mathbb{Z}) \xrightarrow{l} H^1(C, \mathbb{Z})$ для всех простых чисел l , и, следовательно, $\forall l \ H^1(C, \mathbb{Z})(l) = (0)$.

Поскольку $A = i_*(J)$, то спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q i_*(J)) \implies H^{p+q}(\eta, J)$$

определяет точную последовательность $0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1}$ [11, приложение В]. Она имеет вид $0 \rightarrow H^1(C, i_*(J)) \rightarrow H^1(\eta, J) \rightarrow H^0(C, R^1 i_*(J))$; другими словами, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(C, A) \rightarrow H^1(\eta, J) \rightarrow H^0(C, R^1 i_*(J)). \quad (3.13)$$

Заметим, что $H^1(\eta, J) = H^1(\text{Gal}(\overline{k(\eta)}/k(\eta)), J(\overline{k(\eta)}))$ – группа кручения [3, § 10, следствие теоремы 10.1], поэтому (3.13) показывает, что $H^1(C, A)$ – группа кручения. Следовательно, (3.12) дает точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \rightarrow H^1(C, A) \rightarrow H^1(C, B) \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

где $\delta \in \mathbb{Z}$, $\delta \neq 0$.

По определению слой $R^1 i_*(J)$ в геометрической точке $\bar{v} \rightarrow v \in C$ равен

$$(R^1 i_*(J))_{\bar{v}} = \varinjlim H^0(U, R^1 i_*(J))$$

для всех коммутативных диаграмм типа

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftarrow & \bar{v} \\ \downarrow & \swarrow & \\ C & & \end{array}$$

с этальным морфизмом $U \rightarrow C$. Напомним, что в этой ситуации существует каноническое отображение $H^0(U, R^1 i_*(J)) \rightarrow (R^1 i_*(J))_{\bar{v}}$, которое обозначается через $s \rightarrow s_{\bar{v}}$ [11, гл. II, § 2, замечание 2.9(c)].

Для любой точки $v \in C$ выберем геометрическую точку $\bar{v} \rightarrow v \in C$ и рассмотрим каноническое отображение

$$H^0(C, R^1 i_*(J)) \rightarrow \prod_v (R^1 i_*(J))_{\bar{v}} \quad \left(s \rightarrow \prod_v s_{\bar{v}} \right).$$

Предположим, что образ $s \in H^0(C, R^1 i_*(J))$ равен нулю. По определению $(R^1 i_*(J))_{\bar{v}}$ для любой точки $v \in C$ существует такой этальный морфизм $U_v \rightarrow C$, что его образ содержит v и $s|_{U_v} = 0$. Семейство $(U_v \rightarrow C)$ является покрытием C , поэтому $s = 0$.

Следовательно, существует вложение

$$H^0(C, R^1 i_*(J)) \hookrightarrow \prod_v (R^1 i_*(J))_{\bar{v}}. \quad (3.15)$$

С другой стороны, $(R^1 i_*(J))_{\bar{v}}$ изоморфно $H^1(\eta \times_C \text{Spec}(\mathcal{O}_{C, \bar{v}}), J)$ [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)]. Очевидно, что

$$H^1(\eta \times_C \text{Spec}(\mathcal{O}_{C, \bar{v}}), J) = H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J).$$

Поэтому (3.15) имеет вид

$$H^0(C, R^1 i_*(J)) \hookrightarrow \prod_v H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J). \quad (3.16)$$

В силу (3.13) и (3.16) мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(C, A) \rightarrow H^1(\text{Spec}(K), J) \rightarrow \prod_v H^1(\text{Spec}(K_v^{\text{sh}}), J).$$

Значит, $H^1(C, A) = \text{III}^{\text{sh}}(C, J)$. Поскольку $H^1(C, B)(l)$ – конечная группа для $l \gg 0$, то мы получаем из (3.14) конечность группы $\text{III}^{\text{sh}}(C, J)(l)$. Конечность $\text{III}(C, J)(l)$ следует из (3.3). Теорема 0.7 доказана.

3.9. Пусть V – гладкая проективная поверхность над числовым полем k . Существует такой пучок Лефшеца $f: V' \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ сечений V гиперповерхностями степени $d \geq 3$, что выполняются следующие условия:

- а) $V' \rightarrow V$ – раздутие конечного множества точек;
- б) плоский морфизм $f: V' \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ имеет сечение, его общий слой V'_η является гладкой кривой, любой замкнутый слой геометрически приведен и неприводим с не более чем одной обыкновенной двойной особой точкой [11, гл. V, § 3, теорема 3.1, замечание 3.2].

Если гипотеза Тэйта верна для V , то она выполняется для V' .

3.10. В этом пункте мы доказываем следствие 0.8.

Сечение θ морфизма f определяет изоморфизм тривиальных алгебраических групп $(0) = \text{Pic}^0(\mathbb{P}_k^1) \simeq \text{Pic}^0(V')$, потому что $H^1(V', \mathcal{O}_{V'}) = (0)$. Поэтому все следует из теоремы 0.7.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
2. Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
3. Cassels J. W. S. Diophantine equations with special reference to elliptic curves. Survey article // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 193–291.
4. Касселс Дж., Фрелих А. Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1969.
5. Greenberg M. Rational points in Henselian discrete valuation rings // Publ. Math. IHES. 1966. V. 31. P. 59–64.
6. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
7. Grothendieck A. Eléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes des schémas // Publ. Math. IHES. 1967. V. 32.
8. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
9. Кох Х. Теория Галуа p -расширений. М.: Мир, 1973.
10. Milne J. S. On a conjecture of Artin and Tate // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 517–533.
11. Милн Дж. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
12. Milne J. S. Arithmetic duality theorems. N.Y.: Academic Press, Inc., 1986.
13. Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.
14. Серр Ж. -П. Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.
15. Серр Ж. -П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
16. Танкеев С. Г. Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 2. С. 398–434.
17. Танкеев С. Г. Поверхности типа КЗ над числовыми полями и l -адические представления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 6. С. 1252–1271.
18. Tankeev S. G. On the Brauer group of arithmetic scheme. Preprint / Manuskripte der Forschergruppe Arithmetik, 7. Universität Mannheim–Universität Heidelberg, 1999.
19. Танкеев С. Г. О группе Брауэра // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 4. С. 141–162.
20. Tate J. Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. N.Y.: Harper and Row, 1965. P. 93–110.
21. Tate J. On the conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer and a geometric analog // Séminaire Bourbaki 1965/66. Exposé 306. P. 1–26.

Владимирский государственный университет
 E-mail: tankeev-m2@vpti.vladimir.su

Поступило в редакцию
 1.II.2000