Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Филиппов, Системы функций, получающиеся сжатиями и сдвигами одной функции, в пространствах E_φ с $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 2, 187–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 02:40:51

УДК 517.51

В. И. Филиппов

Системы функций, получающиеся сжатиями и сдвигами одной функции, в пространствах E_φ с $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$

Решается задача П. Л. Ульянова [1] о возможности представления в виде ряда элементов классов $\varphi(L)$ по произвольным системам функций.

Библиография: 10 наименований.

В работе рассматриваются более общие системы функций, чем система Хаара, а именно рассматриваются системы вида

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

где $\psi \in L^\infty(0, 1)$, $\psi(t) = 0$, $t \notin (0, 1)$, $\|\psi\|_\infty \neq 0$, в пространствах E_φ .

Исследуется, является ли данная система функций системой представления в пространствах E_φ ? Полученные результаты рассматриваются в пространствах E_φ ; в работах [2], [3] рассматриваются более общие системы, но в пространствах L^p , $0 < p < \infty$. В работе [4] рассматриваются подсистемы системы Хаара в пространствах E_φ .

Приведем понятия и утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть $|E|$ – мера Лебега множества E , будем также применять обозначение $\text{mes}(E)$, а $\chi_E(t)$ – характеристическая функция множества E .

Следуя работе [10], дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система элементов $\{f_k\}_{k=1}^n$ F -пространства $E(E, \|\cdot\|)$, где множество E вещественное [6, с. 36] (определение F -пространства см. в [6, с. 81]), называется *системой представления* (с.п.) в пространстве E , если для произвольного элемента $f \in E$ существует ряд $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| = 0,$$

где $\{c_k\}$ – последовательность действительных чисел.

Пусть Φ – совокупность четных, конечных, неубывающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций φ таких, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(\infty) = \infty$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для функции φ выполнены условия

$$\varphi(t) \in \Phi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) > 0, \quad t > 0, \quad \varphi(t) \in C[0, \infty). \quad (1)$$

Через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех тех измеримых функций $f(x)$ на $(0, 1)$, для которых

$$\int_0^1 \varphi(f(t)) dt < \infty$$

(см. [1], [7, с. 1–5]).

Если f и g принадлежат классу $\varphi(L)$, то величину

$$\rho_{\varphi}(f, g) = \int_0^1 \varphi(f - g) dt$$

условно назовем φ -расстоянием. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из класса $\varphi(L)$ называется *сходящейся по φ -расстоянию к функции $f \in \varphi(L)$* , если $(f - f_n) \in \varphi(L)$ для $n \geq n_0$ при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\varphi}(f - f_n) = 0.$$

Класс $\varphi(L)$ в общем случае не является линейным. Если класс $\varphi(L)$ пополнить по линейности, то получим множество $\varphi^*(L)$, в котором можно ввести квазинорму (φ -норму) элементов с помощью функционала

$$\|f\|_{\varphi} = \inf \left\{ u > 0: \int_0^1 \varphi\left(\frac{f(t)}{u}\right) dt < u \right\}, \quad f \in \varphi^*(L),$$

так, что $\varphi^*(L)$ станет F -пространством. В этом случае из сходимости по φ -норме следует сходимость по φ -расстоянию для элементов из класса $\varphi(L)$ (см. [7, с. 1–5]).

Пространство $\varphi^*(L)$ в общем случае несепарабельное. Класс $\varphi(L)$ сепарабелен в смысле сходимости по φ -расстоянию тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет ω -условию, т. е. $\varphi(t+1) = O\{\varphi(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$ (см. [1]).

Через E_{φ} обозначим замыкание в $\varphi^*(L)$ множества ограниченных ступенчатых функций.

Пространство E_{φ} является сепарабельным F -пространством (см. [7, с. 36]).

Будем говорить, что функция φ удовлетворяет Δ_2 -условию, если $\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае если выполнено Δ_2 -условие, то $\varphi(L) = \varphi^*(L) = E_{\varphi}$ и сходимость по φ -норме эквивалентна сходимости по φ -расстоянию, в противном случае $E_{\varphi} \subset \varphi(L) \subset \varphi^*(L)$ (см. [7, с. 53]).

Из работ [2], [5], [8] мы имеем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А [5], [8]. Пусть для функций φ_1 и φ_2 выполнено условие (1). Если $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$, $t \geq t_0 \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_1(t)/t) = 0$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система представления в E_{φ_2} , то $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в E_{φ_1} .

ТЕОРЕМА В [2]. Если $\psi_1 \in L_1(0, 1)$, $\int_0^1 \psi(t) dt \neq 0$, $\psi(t) = 0$, $t \notin (0, 1)$, то система

$$\{\psi_{k,n}\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

является системой представления в $L_1(0, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [9, с. 91]. Функция φ называется *вогнутой на $[0, \infty)$* , если

$$\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y) \leq \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

для всех $x, y \geq 0$.

Прежде чем сформулировать основной результат, докажем вспомогательные факты.

ЛЕММА 1. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t)/t) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех измеримых множеств $E \subset (0, 1)$ таких, что $|E| < \delta$, имеет место неравенство

$$\left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_{\varphi} < \varepsilon,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ фиксировано.

Утверждение леммы для простоты будем записывать в виде

$$\left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_{\varphi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |E| \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_{\varphi} &= \inf \left\{ u > 0: \int_0^1 \varphi \left(\frac{\lambda \chi_E(t)}{u|E|} \right) dt < u \right\} \\ &= \inf \left\{ u > 0: |E| \varphi \left(\frac{\lambda}{u|E|} \right) < u \right\} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |E| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t)/t) = 0$ и φ вогнута на $[0, \infty)$. Тогда для произвольных измеримых множеств $E \subset (0, 1)$ и функций $f \in L_1(0, 1)$ таких, что

$$\text{supp } f \subset E, \quad 0 < \int_E |f(t)| dt < \lambda,$$

где λ – некоторое фиксированное положительное число, получаем

$$\|f\|_{\varphi} \leq \left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_{\varphi},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех измеримых множеств $E \subset (0, 1)$ таких, что $|E| < \delta$, имеет место неравенство

$$\|f\|_{\varphi} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\|f\|_{\varphi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |E| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f(t) = \alpha\chi_{E_1}(t) + \beta\chi_{E_2}(t)$, где $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E = (E_1 \cup E_2) \subset (0, 1)$, $\alpha, \beta \geq 0$. Пусть $0 < \int_0^1 f(t) dt < \lambda$. В этом случае

$$\begin{aligned} \|f\|_\varphi &= \inf \left\{ u > 0: \int_{E_1} \varphi\left(\frac{\alpha}{u}\right) dt + \int_{E_2} \varphi\left(\frac{\beta}{u}\right) dt < u \right\} \\ &= \inf \left\{ u > 0: |E_1| \varphi\left(\frac{\alpha}{u}\right) + |E_2| \varphi\left(\frac{\beta}{u}\right) < u \right\} \\ &\leq \inf \left\{ u > 0: (|E_1| + |E_2|) \varphi\left(\frac{\frac{\alpha|E_1|}{|E_1|+|E_2|} + \frac{\beta|E_2|}{|E_1|+|E_2|}}{u}\right) < u \right\} \\ &\leq \inf \left\{ u > 0: \int_E \varphi\left(\frac{\lambda}{|E|u}\right) dt < u \right\} = \left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_\varphi. \end{aligned}$$

То, что

$$\left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } |E| \rightarrow 0$$

и при фиксированном λ , следует из леммы 1.

Рассмотрим теперь положительную ступенчатую функцию $f(t)$, заданную на множестве $E \subset (0, 1)$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}(t), \quad 0 < \int_E f(t) dt < \lambda, \quad (2)$$

где $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_\varphi &= \inf \left\{ u > 0: \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \varphi\left(\frac{\alpha_i}{u}\right) dt < u \right\} \\ &= \inf \left\{ u > 0: \sum_{i=1}^n |E_i| \varphi\left(\frac{\alpha_i}{u}\right) < u \right\} \\ &\leq \inf \left\{ u > 0: \left(\sum_{i=1}^n |E_i| \right) \varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i |E_i|}{\sum_{i=1}^n |E_i|}}{u}\right) < u \right\} \\ &= \inf \left\{ u > 0: \int_{\sum_{i=1}^n E_i} \varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i |E_i|}{\sum_{i=1}^n |E_i|} \chi_{\{\sum_{i=1}^n E_i\}}(t)}{u}\right) dt < u \right\} \\ &\leq \left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_\varphi. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $f(t) \in L_1(0, 1)$, $\text{supp } f \subset E \subset (0, 1)$, $0 < \int_E |f(t)| dt = \lambda_0 < \lambda$. Тогда существует последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ ступенчатых функций вида (2) таких, что

$$\begin{aligned} \int_E |f_n - f| dt &< \frac{1}{n}, \quad \|f - f_n\|_\varphi < \frac{1}{n}, \quad \text{supp } f_n \subset E, \\ \int_E |f_n| dt &= \lambda_n, \quad \lambda_0 \leq \lambda_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Следовательно, найдется $n \geq n_0$ такое, что $\lambda_0 \leq \lambda_n < \lambda$ при $n \geq n_0$.

Очевидно, что $|\lambda_n - \lambda_0| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как соотношение (3) выполняется для каждой функции из последовательности $\{f_n\}$, то получаем

$$\|f\|_\varphi \leq \|f_n\|_\varphi + \frac{1}{n} \leq \left\| \frac{\lambda_n}{|E|} \chi_E(t) \right\|_\varphi + \frac{1}{n} \leq \left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_\varphi + \frac{1}{n}.$$

Ввиду того, что n произвольное, используя лемму 1, получаем

$$\|f\|_\varphi \leq \left\| \frac{\lambda}{|E|} \chi_E(t) \right\|_\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |E| \rightarrow 0. \quad (4)$$

ЛЕММА 3. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t)/t) = 0$ и φ вогнута на $[0, \infty)$. Пусть $\psi \in L_\infty(0, 1)$, $\|\psi\|_\infty \neq 0$, $\int_0^1 \psi(t) dt = 0$. Если для подсистемы $\{\psi_{n_l}\}$ системы

$$\begin{aligned} \{\psi_{n,k}(t)\} &= \{\psi(2^n t - k)\}, \\ n &= 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \quad \psi(t) = 0, \quad t \notin (0, 1), \end{aligned} \quad (5)$$

выполнено условие: $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}$ существует такое $m > N$, что

$$\text{mes} \left\{ t: \sum_{l=N}^m |\psi_{n_l}(t)| \neq 0 \right\} > 1 - \varepsilon, \quad (6)$$

то для произвольных $\varepsilon > 0$, $\Delta = (\alpha, \beta) \subset (0, 1)$, $\gamma > 0$ существует сумма $\sum_{l=N}^m c_l \psi_{n_l}$ такая, что

$$\left\| \gamma \chi_\Delta(t) - \sum_{l=N}^m c_l \psi_{n_l} \right\|_\varphi < \varepsilon, \quad (7)$$

$$\left\| \sum_{l=N}^n c_l \psi_{n_l} \right\|_\varphi \leq 9 \|\gamma \chi_\Delta\|_\varphi, \quad N \leq n \leq m, \quad (8)$$

$$\text{mes} \left\{ t: \left| \gamma \chi_\Delta(t) - \sum_{l=N}^m c_l \psi_{n_l} \right| > \varepsilon \right\} < \varepsilon. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты положим, что $\gamma > 0$. Для $\gamma < 0$ доказательство аналогично.

Пусть ε – произвольное положительное число такое, что $\varepsilon < \frac{1}{2} \|\gamma \chi_\Delta(t)\|_\varphi$. Пусть $\tau > 0$ такое, что $\|\tau \chi_\Delta\|_\varphi < \varepsilon/2$, $\gamma > \tau$.

Для простоты дальнейших рассуждений положим

$$M = \sup \text{vrai}_{t \in (0,1)} \psi(t) \geq |\inf \text{vrai}_{t \in (0,1)} \psi(t)|$$

(в противном случае рассмотрим $-\psi$) и

$$g_l(t) = \frac{1}{M} \psi_{n_l}(t).$$

Таким образом, $|g_l(t)| \leq 1$, $t \in (0, 1)$, $l = 1, 2, \dots$

Назовем сумму

$$\sum_{l=N_1}^{m_1} c_l \psi_{n_l},$$

где N_1 , m_1 и c_l , $N_1 \leq l \leq m_1$, выбраны определенным образом, *пачкой*. Элементу $g_i(t)$ соответствует элемент $\psi_{n_0, k_0}(t)$, где $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 \leq k_0 \leq 2^{n_0} - 1$.

Назовем множество

$$E_i = \left\{ t: \frac{k_0}{2^{n_0}} \leq t \leq \frac{k_0 + 1}{2^{n_0}} \right\}$$

основанием элемента $g_i(t)$. Очевидно, что $\text{supp } g_l(t) \subset E_l$.

Из леммы 2 следует, что для функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям леммы 2, $\varepsilon > 0$ и $\lambda = 3\gamma\Delta > 0$, найдется номер n_1 такой, что для множеств E таких, что $|E| < 1/n_1$, получаем

$$\|f(t)\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{4}, \quad 6\gamma|\Delta|n_1 \geq \gamma.$$

Пусть $P = 6\gamma|\Delta|n_1$, $W(P, \tau) = \text{mes}\{t: P - \tau \leq (P/M)\psi(t) \leq P\}$. Очевидно, что $W(\lambda_1, \tau) \geq W(\lambda_2, \tau)$ при $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Пусть $0 < \eta < \min\{1/(2n_1), W(P, \tau/2)\}$. Легко видеть, что

$$\|\gamma\chi_E(t)\|_\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |E| \rightarrow 0. \quad (10)$$

Построим первую пачку следующим образом. Выберем исходя из (6) элементы $g_i(t)$ таким образом, чтобы их основания не пересекались, а объединение оснований содержалось в Δ и по мере мало отличалось от $|\Delta|$. Возьмем $N_1 \geq n_1$. Так как $|E_i| \rightarrow 0$ для $i \rightarrow \infty$, то из (6) следует, что для $\eta/4$ существуют m_1 , $N_1^1 > N_1$ такие, что

$$\left\{ \bigcup_{l \in \Omega_1} E_l \right\} \subset \Delta, \quad |\Delta| - \left| \bigcup_{l \in \Omega_1} E_l \right| < \frac{\eta}{4},$$

где

$$\Omega_1 = \left\{ l: N_1^1 \leq l \leq m_1, E_l \subset \Delta, E_l \cap \left\{ \bigcup_{i=N_1^1}^{l-1} E_i \right\} = \emptyset, \bigcup_{i=N_1^1}^{N_1^1-1} E_i = \emptyset \right\}.$$

Положим $c_l = \gamma$ при $l \in \Omega_1$ и $c_l = 0$ при $l \notin \Omega_1$. Получим, что

$$\left\| \sum_{l=N_1^1}^n c_l g_l(t) \right\|_\varphi \leq \|\gamma\chi_\Delta(t)\|_\varphi, \quad N_1^1 \leq n \leq m_1.$$

Для функции

$$G_1(t) = \gamma\chi_\Delta(t) - \sum_{l=N_1^1}^{m_1} c_l g_l(t) \geq 0$$

верно неравенство

$$\text{mes}\{t: |G_1(t)| \leq \tau\} \geq \left(|\Delta| - \frac{2}{3n_1} \right) K,$$

где $K = W(P, \tau/2) - \eta$, так как $\eta < 1/(2n_1)$.

Тогда k -я пачка, где $k \geq 2$, строится рекуррентно, так же как и первая, следующим образом.

Функция

$$G_{k-1}(t) = \gamma \chi_{\Delta}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=N_i}^{m_i} c_j g_j(t)$$

ограничена на $(0, 1)$. Поэтому в силу теоремы Лузина для функции $G_{k-1}(t)$ существует ступенчатая функция

$$P_{k-1}(t) = \sum_{j=1}^{j_0} b_j \chi_{B_j}(t), \quad B_j \cap B_i = \emptyset, \quad i \neq j,$$

с разрывами в двоично-рациональных точках такая, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ t: |P_{k-1}(t)| \leq |G_{k-1}(t)|, |P_{k-1}(t) - G_{k-1}(t)| \leq \frac{\tau}{2} \right\} &> |\Delta| - \frac{\eta}{8^k}, \\ \|G_{k-1} - P_{k-1}\|_1 &< \frac{\gamma|\Delta|}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Мы выбрали N_k таким образом, чтобы

$$N_k > m_{k-1}, \quad |E_l| < \min_{1 \leq j \leq j_0} \{|B_j|\}, \quad l \geq N_k. \quad (11)$$

Для $\eta/4^{k+1}$ из условия (6) найдем $m_k \geq N_k$ таким образом, чтобы

$$\left(\bigcup_{l \in \Omega_k} E_l \right) \subset \Delta, \quad |\Delta| - \left| \bigcup_{l \in \Omega_k} E_l \right| < \frac{\eta}{4^{k+1}}, \quad (12)$$

где

$$\Omega_k = \left\{ l: N_k \leq l \leq m_k, \quad E_l \subset \Delta, \quad E_l \cap \left\{ \bigcup_{i=N_k}^{l-1} E_i \right\} = \emptyset, \quad \bigcup_{i=N_k}^{N_k-1} E_i = \emptyset \right\}.$$

Положим $c_l = P_{k-1}(t)$, $l \in \Omega_k$, $t \in E_l$, если $\tau/2 < |P_{k-1}(t)| \leq P$, и $c_l = 0$ для остальных номеров.

Из (12), из $|E_l| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ и выбора коэффициентов следует, что

$$|c_l g_l(t)| \leq |P_{k-1}(t)|, \quad t \in (0, 1), \quad l \in \Omega_k.$$

Согласно (12) получаем

$$\left| \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l(t) \right| \leq |P_{k-1}(t)|, \quad t \in (0, 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |G_k(t)| dt &= \int_0^1 \left| G_{k-1} - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l \right| dt \leq \int_0^1 |G_{k-1} - P_{k-1}| dt \\
&+ \int_0^1 \left| P_{k-1} - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l \right| dt \leq \frac{\gamma|\Delta|}{2^{k+1}} \\
&+ \int_{\{t: P_{k-1}(t) \geq 0\}} \left| P_{k-1} - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l \right| dt \\
&+ \int_{\{t: P_{k-1}(t) < 0\}} \left| \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l - P_{k-1} \right| dt \leq \int_0^1 |P_{k-1}| dt + \frac{\gamma|\Delta|}{2^{k+1}} \\
&\leq \frac{\gamma|\Delta|}{2^k} + \|G_{k-1}\|_1 \leq 3\gamma|\Delta|.
\end{aligned} \tag{13}$$

Проверим, что

$$\text{mes}\{t: |G_k(t)| \leq \tau\} \geq \sum_{j=1}^k d_j, \tag{14}$$

где

$$d_1 = \left(|\Delta| - \frac{2}{3n_1} \right) K, \quad d_j = \left(|\Delta| - \frac{2}{3n_1} - \sum_{i=1}^{j-1} d_i \right) K, \quad j \geq 2.$$

Очевидно, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ сходится к $|\Delta| - 2/(3n_1)$.

Докажем (14) методом математической индукции. Для $k = 1$ доказательство следует из построения первой пачки.

Пусть (14) верно для $k - 1$, докажем для k . Обозначим

$$D_{k-1} = \{t: |G_{k-1}(t)| \leq \tau\}.$$

Из предположения индукции следует, что $|D_{k-1}| \geq \sum_{j=1}^{k-1} d_j$.

Рассмотрим подмножество A_{k-1} множества D_{k-1} такое, что

$$A_{k-1} = \min_{t \in (\alpha, \beta)} \{(\alpha, t) \cap D_{k-1}\}, \quad |A_{k-1}| = \sum_{j=1}^{k-1} d_j.$$

Так как

$$\text{mes}\{t: |G_k(t)| > P\} < \frac{1}{2n_1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то имеем

$$\begin{aligned}
&\text{mes}\{t: |G_k(t)| \leq \tau\} \geq \text{mes}\{t: |G_{k-1}(t)| \leq \tau\} \\
&+ \text{mes}\left\{t: \tau < |G_{k-1}(t)| \leq P, \left| G_{k-1}(t) - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l(t) \right| \leq \tau\right\} \geq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq |A_{k-1}| + \text{mes} \left\{ t: \tau < |G_{k-1}(t)| \leq P, \left| G_{k-1}(t) - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l(t) \right| \leq \tau \right\} \\
&\geq |A_{k-1}| + \text{mes} \left\{ t: \tau < |G_{k-1}(t)| \leq P, \frac{\tau}{2} < |P_{k-1}(t)| \leq P, \right. \\
&\quad \left. |G_{k-1}(t) - P_{k-1}(t)| \leq \frac{\tau}{2}, \left| P_{k-1}(t) - \sum_{l=N_k}^{m_k} c_l g_l(t) \right| \leq \frac{\tau}{2} \right\} \\
&\geq |A_{k-1}| + \left(|\Delta| - \frac{1}{2n_1} - |A_{k-1}| - \frac{\eta}{8^k} \right) K \\
&\geq |A_{k-1}| + \left(|\Delta| - \frac{2}{3n_1} - |A_{k-1}| \right) K.
\end{aligned}$$

Так как ряд $\sum_{j=1}^{\infty} d_j$ сходится к $|\Delta| - 2/(3n_1)$, то найдется номер l_0 такой, что для всех $k \geq l_0$ имеем $\sum_{j=1}^k d_j > |\Delta| - 1/n_1$.

В силу того, что $E_j \cap E_i = \emptyset$, $j \neq i$, $i, j \in \Omega_k$, справедливо

$$\left| \sum_{l=N_k}^n c_l g_l(t) \right| \leq \left| \sum_{l=N_k}^i c_l g_l(t) \right|, \quad N_k \leq n \leq i \leq m_k, \quad t \in (0, 1).$$

Для $k \geq l_0 \geq 3$ получим

$$\begin{aligned}
\text{mes}\{Z\} &> |\Delta| - \frac{1}{n_1}, \quad Z = \{t: |G_k(t)| \leq \tau\}, \\
\text{mes}\{Y\} &< \frac{1}{n_1}, \quad Y = \{t: |G_k(t)| > \tau\}.
\end{aligned}$$

В силу построения имеем $\int_0^1 |G_k(t)| dt \leq 3\gamma|\Delta|$. К тому же $\text{mes}(Y) < 1/n_1$. А функция $\chi_Y(t)G_k(t)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому

$$\|\chi_Y(t)G_k(t)\|_{\varphi} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (15)$$

Получим

$$\|G_k(t)\|_{\varphi} \leq \|G_k(t)\chi_Z(t)\|_{\varphi} + \|G_k(t)\chi_Y(t)\|_{\varphi} \leq \|\chi_{\Delta}(t)\tau\|_{\varphi} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Тем самым соотношение (7) установлено.

Пусть теперь

$$N_i \leq n \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Тогда

$$\left| \sum_{l=N_i}^n c_l g_l(t) \right| \leq \left| \sum_{l=N_i}^{m_i} c_l g_l(t) \right|, \quad N_i \leq n \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (16)$$

Рассмотрим

$$\left\| \sum_{j=1}^i \sum_{l=N_j}^{m_j} c_l g_l(t) \right\|_{\varphi} \leq \|G_i(t)\|_{\varphi} + \|\gamma \chi_{\Delta}(t)\|_{\varphi}. \quad (17)$$

Функция $G_i(t)$ в силу (13) удовлетворяет условиям леммы 2, где в качестве E рассматривается множество $\Delta = (\alpha, \beta)$. Действительно,

$$|G_i(t)| \geq 0, \quad t \in (0, 1), \quad \int_0^1 |G_i(t)| dt \leq 3\gamma|\Delta|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\|G_i(t)\|_{\varphi} \leq \left\| \frac{3\gamma|\Delta|}{|\Delta|} \chi_{\Delta}(t) \right\|_{\varphi} \leq 3\|\gamma \chi_{\Delta}(t)\|_{\varphi}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (18)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=N_i}^{m_i} c_l g_l(t) \right\|_{\varphi} &= \|G_i(t) - G_{i-1}(t)\|_{\varphi} \\ &\leq \|G_i(t)\|_{\varphi} + \|G_{i-1}(t)\|_{\varphi} \leq 6\|\gamma \chi_{\Delta}(t)\|_{\varphi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, в силу (16)–(19) получаем

$$\left\| \sum_{l=N_1}^n c_l g_l(t) \right\|_{\varphi} \leq \|G_{i-1}(t)\|_{\varphi} + \left\| \sum_{l=N_i}^{m_i} c_l g_l(t) \right\|_{\varphi} \leq 9\|\gamma \chi_{\Delta}(t)\|_{\varphi}.$$

Таким образом соотношение (8) установлено.

Если мы возьмем $\tau < \varepsilon$ и $1/n_1 < \varepsilon$, то из (14) получим (9).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t)/t) = 0$ и функция φ вогнута на $[0, \infty)$. Пусть функция ψ принадлежит $L_{\infty}(0, 1)$, $\|\psi\|_{\infty} \neq 0$, где

$$\int_0^1 \psi(t) dt = 0, \quad \psi(t) = 0, \quad t \notin (0, 1).$$

Для того чтобы подсистема $\{\psi_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ системы

$$\{\psi_{n,k}\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

была системой представления в E_{φ} , необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m > N: \quad \text{mes} \left\{ t: \sum_{l=N}^m |\psi_{n_l}(t)| \neq 0 \right\} > 1 - \varepsilon. \quad (20)$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что условие (20) не выполнено. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $m > N$

$$\text{mes} \left\{ t: \sum_{l=N}^m |\psi_{n_l}(t)| = 0 \right\} > \varepsilon. \quad (21)$$

Зафиксируем это N . Пусть $D_\varepsilon = \{t: \sum_{l=N}^\infty |\psi_{n_l}(t)| = 0\}$. Из (21) следует, что $|D_\varepsilon| > 0$. Легко видеть, что существует функция $g_0(t) \in E_\varphi$ такая, что $g_0(t)\chi_{D_\varepsilon}(t) \in E_\varphi$ и

$$\inf_{\{c_l\}_{l=1}^{N-1}} \left\{ \left\| g_0(t)\chi_{D_\varepsilon}(t) - \sum_{l=1}^{N-1} c_l \psi_{n_l} \right\|_\varphi \right\} = \delta > 0.$$

Если бы это было не так, то конечномерные системы функций были бы системами представления в пространстве E_φ , но пространство E_φ бесконечномерно. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \inf_{\{c_l\}_{l=1}^\infty} \left\{ \left\| g_0(t)\chi_{D_\varepsilon}(t) - \sum_{l=1}^\infty c_l \psi_{n_l} \right\|_\varphi \right\} \\ & \geq \inf_{\{c_l\}_{l=1}^{N-1}} \left\{ \left\| \left(g_0(t)\chi_{D_\varepsilon}(t) - \sum_{l=1}^{N-1} c_l \psi_{n_l} \right) \chi_{A_\varepsilon}(t) \right\|_\varphi \right\} = \delta > 0. \end{aligned}$$

Из этого следует, что система $\{\psi_{n_l}\}_{l=1}^\infty$ неполна в E_φ . Получили противоречие с условием теоремы.

Достаточность. Из теоремы Лузина следует, что для произвольных $f \in E_\varphi$ и $\varepsilon > 0$ существует $V(t) \in C_{(0,1)}$ такая, что

$$\begin{aligned} \|f - V\|_\varphi &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|V\|_\varphi < 2\|f\|_\varphi, \\ \text{mes} \left\{ t: V(t) = f(t) \right\} &> 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для всякой непрерывной функции $V(t)$ найдется ступенчатая функция $H(t)$ такая, что

$$|V(t) - H(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad t \in (0, 1), \quad (23)$$

$$\|f - H\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (24)$$

Тогда

$$\|H(t)\|_\varphi \leq 2\|f(t)\|_\varphi. \quad (25)$$

Представим $H(t)$ в виде $H(t) = H_1^+(t) - H_1^-(t)$, где

$$\begin{aligned} H_1^+(t) &= H(t), & \text{если } H(t) &\geq 0, \\ H_1^+(t) &= 0, & \text{если } H(t) < 0, \\ H_1^-(t) &= -H(t), & \text{если } H(t) < 0, \\ H_1^-(t) &= 0, & \text{если } H(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Из леммы 3 следует, что можно построить полиномы по подсистеме $\{\psi_{n_l}\}$ такие, что

$$\text{mes}\left\{t: \left|H_1^+(t) - \sum_{l=N_1}^{m_1} c_l g_l(t)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (26)$$

$$\left\|H_1^+(t) - \sum_{l=N_1}^{m_1} c_l g_l(t)\right\|_{\varphi} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (27)$$

$$\left\|\sum_{l=N_1}^n c_l g_l\right\|_{\varphi} \leq 2\|H_1^+\|_{\varphi}, \quad N_1 \leq n \leq m_1. \quad (28)$$

Аналогично и для $H_1^-(t)$

$$\text{mes}\left\{t: \left|H_1^-(t) - \sum_{l=n_1^1}^{m_1^1} c_l g_l(t)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (29)$$

$$\left\|H_1^-(t) - \sum_{l=n_1^1}^{m_1^1} c_l g_l(t)\right\|_{\varphi} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (30)$$

$$\left\|\sum_{l=n_1^1}^n c_l g_l\right\|_{\varphi} \leq 2\|H_1^-\|_{\varphi}, \quad m_1 < n_1^1 \leq n \leq m_1^1. \quad (31)$$

Из (22), (23), (26) и (29) следует, что

$$\text{mes}\left\{t: \left|f(t) - \sum_{l=N_1}^{m_1^1} c_l g_l(t)\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon. \quad (32)$$

Из (30), (27) и (24) получаем

$$\left\|f(t) - \sum_{l=N_1}^{m_1^1} c_l g_l(t)\right\|_{\varphi} < \varepsilon. \quad (33)$$

А из (25), (28) и (31) следует, что

$$\left\|\sum_{l=N_1}^n c_l g_l\right\|_{\varphi} \leq 4\|H\|_{\varphi} \leq 8\|f\|_{\varphi}, \quad N_1 \leq n \leq m_1^1. \quad (34)$$

Построим по индукции числа

$$N_1 = n_1 < m_1 < n_1^1 < m_1^1 < \dots < n_k < m_k < n_k^1 < m_k^1 < \dots,$$

функции $H_k(t) = H_k^+ - H_k^-(t)$ и суммы

$$\sum_{l=n_k}^{m_k^1} c_l g_l = \sum_{l=n_k}^{m_k} c_l g_l - \sum_{l=n_k^1}^{m_k^1} c_l g_l \quad (35)$$

такие, что

$$\left\| f - \sum_{j=1}^k \sum_{l=n_j}^{m_j^1} c_l g_l \right\|_{\varphi} < \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k \geq 2, \quad (36)$$

$$\left\| \sum_{l=n_k}^n c_l g_l(t) \right\|_{\varphi} \leq 4 \|H_k\|_{\varphi} \leq 8 \left\| f - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=n_j}^{m_j^1} c_l g_l \right\|_{\varphi} < \frac{2^3 \varepsilon}{2^{k-1}}, \quad n_k \leq n \leq m_k^1, \quad (37)$$

$$\text{mes} \left\{ t: \left| f(t) - \sum_{j=1}^k \sum_{l=n_j}^{m_j^1} c_l g_l(t) \right| > \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \right\} < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}. \quad (38)$$

Тогда для любого $n \geq m_k^1$ найдется $k \geq 2$ такое, что $n_k \leq n \leq m_k^1$. Из (33), (35)–(37) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{l=N_1}^n c_l g_l \right\|_{\varphi} &\leq \left\| f - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=n_j}^{m_j^1} c_l g_l \right\|_{\varphi} \\ &+ \left\| \sum_{l=n_k}^n c_l g_l \right\|_{\varphi} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} + 8 \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Более того, из (38) получаем, что

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{m_k^1}(t)$$

почти всюду.

Из теорем А, В и теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t)/t) = 0$ и φ вогнута на $[0, \infty)$. Если $\psi \in L_{\infty}(0, 1)$, $\|\psi\|_{\infty} \neq 0$, то подсистема $\{\psi_{n_l}\}$ системы

$$\begin{aligned} \{\psi_{n,k}\} &= \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1, \\ \psi(t) &= 0, \quad t \notin (0, 1), \end{aligned}$$

является системой представления в E_{φ} тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m > N: \quad \text{mes} \left\{ t: \sum_{l=N}^m |\psi_{n_l}|(t) \neq 0 \right\} > 1 - \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство необходимости теоремы 2 такое же, как доказательство необходимости теоремы 1.

Чтобы доказать достаточность теоремы 2, мы используем теорему 1 для случая $\int_0^1 \psi(t) dt = 0$. В случае $\int_0^1 \psi(t) dt \neq 0$ мы используем теоремы А и В, когда $\varphi_2(t) = |t|^1$ и $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t)/t) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле условие вогнутости функции в теореме 2 можно опустить. Это следует из теоремы А и того, что для произвольной функции φ_1 , удовлетворяющей условию (1), $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_1(t)/t) = 0$, существует вогнутая функция φ_2 , удовлетворяющая условию (1), $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_2(t)/t) = 0$, такая, что $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$, $t \geq t_0 \geq 0$. Функция φ_2 удовлетворяет условиям теоремы 2. А в силу теоремы А все системы представления в пространстве E_{φ_2} будут системами представления в пространстве E_{φ_1} .

Автор выражает благодарность С. В. Конягину за ценные советы, которые помогли улучшить результаты работы.

Список литературы

1. Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы $\Phi(L)$ // УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 3–52.
2. Filippov V. I., Oswald P. Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // J. appr. theory. 1995. V. 82. № 1. P. 15–29.
3. Филиппов В. И. О подсистемах системы Хаара в пространствах E_{φ} с $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t)/t) = 0$ // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 97–106.
4. Filippov V. I. On the completeness and other properties of some function systems in L_p , $0 < p < \infty$ // J. of appr. theory. 1998. V. 94. P. 42–53.
5. Filippov V. I. Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_{φ} . Preprint / Institute of Biomathematics and Biometrics, GSF-National Research Center for Environment and Health, Neuherberg/Munich, Germany, January 2000. № 00-11.
6. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
7. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces // Lecture Notes in Math. № 1034. N. Y.: Springer, 1983.
8. Иванов В. И. Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 34–77.
9. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
10. Талалаев А. А. Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем // Матем. сб. 1981. Т. 115(157). № 4. С. 499–541.

Саратовский государственный университет
E-mail: FilippovVI@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
13.V.1999