Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, Х. Петерссон, Теорема Пэли–Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 2, 201–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:44:31

УДК 517.982.4

А. Ю. Хренников, Х. Петерссон

Теорема Пэли–Винера для обобщенных целых функций на бесконечномерных пространствах

Изучаются целые функции на бесконечномерных пространствах. В основе лежит изучение пространств функций, голоморфных по Гато и ограниченных на некоторых подмножествах (ограниченные целые функции). Основная цель – описание фурье-образа соответствующих пространств обобщенных целых функций (ультрараспределений) посредством бесконечномерной теоремы Пэли–Винера. Введены целые функции экспоненциального типа и доказано обобщение классической теоремы Пэли–Винера. Решающую роль в этой теории играет размерностно-инвариантная оценка, приведенная в лемме 4.12.

Библиография: 43 наименования.

§ 1. Введение

Последние 20 лет были временем быстрого развития бесконечномерного анализа, особенно теории распределений на бесконечномерных пространствах (см., например, [1]–[22]). Это развитие, в частности, мотивировалось нуждами квантовой теории поля. Имеются два основных подхода к теории распределений на бесконечномерных пространствах:

- 1) распределения на бесконечномерном пространстве с фиксированной (обычно гауссовой, но, в принципе, любой квазиинвариантной) мерой;
- 2) теория, инвариантная относительно меры¹ (т.е. не связанная ни с какой выделенной мерой).

Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки, о которых мы не будем говорить в этой статье. Заметим только, что для построения L_2 -пространств на бесконечномерных пространствах требуется фиксировать меру. С другой стороны, похоже, что теорию фейнмановских интегралов и исчисление бесконечномерных псевдодифференциальных операторов (ПДО) можно успешно развивать в рамках теории, инвариантной относительно меры (см. [2], [8], [25], [26]).

В этой статье используется инвариантный относительно меры подход к теории бесконечномерных распределений. Мы введем пространства целых функций на бесконечномерных локально выпуклых пространствах и изучим аналог классической теоремы Пэли–Винера для целых функций. Как и в конечномерном случае, это дает описание фурье-образа соответствующего пространства обобщенных функций. Подобное явное описание фурье-образа играет важную роль при описании

¹Этот подход к теории бесконечномерных распределений развивали С.В. Фомин [1], О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе, А.В. Угланов, А.Ю. Хренников и В.И. Богачев (см. [2]–[8]).

фейнмановских интегралов, основанном на подходе Альбеверио–Хег–Крона и Смолянова–Угланова (см. [6]–[9]).

В отличие от конечномерного случая, комплекснозначные голоморфные по Гато функции на бесконечномерном пространстве не обязательно непрерывны и даже не обязательно ограничены на компактах. Функция голоморфна по Гато, если ее сужение на любое конечномерное пространство голоморфно (см. §2). Например, существуют голоморфные по Гато функции на банаховых пространствах, не ограниченные ни на каком шаре достаточно большого радиуса (см. [17]–[19]). Поэтому различные авторы часто вводят пространства целых функций, состоящие из голоморфных по Гато функций, удовлетворяющих некоторым условиям непрерывности или ограниченности (см. [13]–[22]). Другой способ обойти эту трудность состоит в том, чтобы сначала ввести некоторое пространство целых функций, а затем рассмотреть множества (часто называемые *ограничивающими*), на которых все функции из этого пространства ограничены (см. [13], [18], [19]).

В нашей статье используются пространства голоморфных по Гато функций, ограниченных на каждом множестве из заданного набора ограниченных множеств (ограниченные целые функции). Затем мы обобщим основной результат на вложенные подпространства пространств такого типа (§7). Мы определим преобразование Фурье на двойственном пространстве подобно конечномерному случаю и введем пространства функций экспоненциального типа. Классическая теорема Пэли–Винера обобщается на бесконечномерный случай. Как обычно, в бесконечномерном анализе существенно новые результаты опираются на размерностно-инвариантные оценки на конечномерных пространствах. В нашей работе такая основная оценка приведена в лемме 4.12.

Обозначим через $H(\mathbb{C}^n)$ пространство всех голоморфных функций n комплексных переменных, а через $A(\mathbb{C}^n)$ – пространство $H(\mathbb{C}^n)$, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Преобразование Фурье–Бореля $\mathcal{F}: A'(\mathbb{C}^n) \mapsto \mathcal{F}A'(\mathbb{C}^n)$ на двойственном пространстве задается формулой

$$\mathcal{F}\lambda(z) \equiv \langle \lambda, e_z \rangle, \quad e_z(\cdot) \equiv e^{\langle \cdot, z \rangle} \in A(\mathbb{C}^n),$$

где скобка $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть $\langle z, \xi \rangle \equiv z_1 \xi_1 + \dots + z_n \xi_n$. Фурье-образ $\mathcal{F}A'(\mathbb{C}^n)$ совпадает с пространством $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ голоморфных функций так называемого экспоненциального типа (теорема Пэли–Винера). Голоморфная функция g принадлежит $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$, если функция $g(z)e^{-(r_1|z_1|+\dots+r_n|z_n|)}$ ограничена для некоторого набора $r = (r_1, \dots, r_n)$ из n неотрицательных целых чисел. При этом преобразование Фурье $\mathcal{F}: A'(\mathbb{C}^n) \mapsto \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ становится изоморфизмом, если снабдить $A'(\mathbb{C}^n)$ сильной топологией $\beta(A', A)$, а $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ – некоторой индуктивной топологией (см. §3).

§ 2. Ограниченные целые функции

Пусть X – векторное пространство над полем комплексных чисел. Обозначим через $H_G(X)$ пространство комплекснозначных голоморфных по Гато функций на X , т. е. всех функций $f: X \mapsto \mathbb{C}$, которые голоморфны на каждом конечномерном подпространстве в X , или, эквивалентно (по теореме Хартогса), всех функций, для которых $f_{x;s} \in H(\mathbb{C})$ при любых $x, s \in X$. Здесь $f_{x;s}$ означает функцию

$f_{x;s}(z) \equiv f(x + zs)$, $z \in \mathbb{C}$. Более общо, при $x \in X$ и $s = (s_1, \dots, s_n) \in X^n$ мы используем обозначение

$$f_{x;s_1, \dots, s_n}(z) \equiv f(x + z_1 s_1 + \dots + z_n s_n), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (2.1)$$

или просто $f_{x;s}$, подразумевая, что $s \in X^n$. Пространство $H_G(X)$ замкнуто относительно обычных операций, таких как сдвиг или умножение на функцию из $H_G(X)$ (детали см. в [12]). Кроме того, $H_G(X)$ замкнуто относительно дифференцирования в том смысле, что для любого $s \in X$ функция $\partial_s f: X \mapsto \mathbb{C}$, $\partial_s f(x) \equiv \frac{d}{dz} f_{x;s}(0)$, принадлежит $H_G(X)$. Легко проверить, что

$$\frac{d}{dz_2} (\partial_{s_1} f)_{x;s_2}(0) = \frac{d}{dz_2 dz_1} f_{x;s_1, s_2}(0), \quad s_1, s_2 \in X,$$

так что порядок дифференцирований не важен. Поэтому для любого $s = (s_1, \dots, s_n) \in X^n$ и любого мультииндекса $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ производная $\partial_s^m f$ корректно определена и удовлетворяет равенству $\partial_s^m f(x) = \partial^m f_{x;s}(0)$. При каждом $x_0 \in X$ отображение

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \partial_x f(x_0) = \partial_{x_1, \dots, x_n}^{(1, \dots, 1)} f(x_0)$$

является симметрической n -линейной формой и, следовательно, $X \ni x \mapsto \partial_x f(x_0) = \partial_{x, \dots, x} f(x_0)$ есть однородный полином степени n .

Обозначим пространство n -линейных форм на X через $\mathcal{L}_n(X)$, а соответствующее пространство однородных полиномов через $\mathcal{P}_n(X)$.

Заметим, что всякая функция $f \in H_G$ удовлетворяет равенству $f(x) = f_{0;x}(1)$ при всех $x \in X$, так что f разлагается в “степенной ряд”

$$f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{(\cdot)}^n f(0), \quad (2.2)$$

сходящийся поточечно. Это разложение единственно, т.е. если $f \in H_G$ и $f(x) = \sum P_n(x)$ для некоторого $P_n \in \mathcal{P}_n(X)$, то $P_n(x) = \frac{1}{n!} \partial_x^n f(0)$. Действительно, это вытекает из аналогичного свойства в $A(\mathbb{C})$ и замечания о том, что

$$f(zx) = \sum \frac{1}{n!} \partial_x^n f(0) z^n = \sum P_n(x) z^n$$

для всех $x \in X$ и $z \in \mathbb{C}$.

Нам понадобится формула Коши для нескольких комплексных переменных: если $s = (s_k) \in X^n$ и $m = (m_k) \in \mathbb{N}^n$, то

$$\partial_s^m f(x) = \frac{m!}{(2\pi i)^n} \int \dots \int_{\gamma_k} \frac{f(x + \xi_1 s_1 + \dots + \xi_n s_n)}{\xi_1^{m_1+1} \dots \xi_n^{m_n+1}} d\xi, \quad x \in X,$$

где γ_k , $k = 1, \dots, n$, суть произвольные гладкие кривые, обходящие вокруг начала координат в комплексной плоскости.

Пусть X – локально выпуклое векторное пространство над $\mathbb{C}$, а $B(X)$ – множество всех ограниченных подмножеств X . Обозначим через $\mathbf{B}(X)$ семейство наборов множеств из $B(X)$. Для каждого $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ определим $A_\Theta(X)$ (пространство Θ -ограниченных целых функций) как пространство всех функций $f \in H_G(X)$, ограниченных на каждом множестве $B \in \Theta$. Снабдим $A_\Theta(X)$ топологией, порожденной полунормами

$$\|f\|_B = \sup_{x \in B} |f(x)|, \quad B \in \Theta. \quad (2.3)$$

Заметим, что $A(\mathbb{C}^n)$ совпадает с $A_\Theta(\mathbb{C}^n)$, если Θ есть семейство всех компактных (или ограниченных) множеств в $\mathbb{C}^n$. Можно записать $A_\Theta(X) = \bigcap_{B \in \Theta} A_B(X)$, где $A_B(X)$ есть пространство всех аналитических функций, ограниченных на B , снабженное топологией (2.3), а $A_\Theta(X)$ есть соответствующий проективный предел. Кроме того, всегда можно считать, что вместе с каждым $B \in \Theta$ в Θ входят все его подмножества. Оказывается полезным наложить на семейство множеств Θ следующие дополнительные условия (касающиеся покрытий):

- C1) множества из Θ уравновешены и выпуклы;
- C2) для любых $B_1, B_2 \in \Theta$ найдется $B_3 \in \Theta$ такое, что $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$;
- C3) для любых $B \in \Theta$ и $r > 0$ существует $B_r \in \Theta$ с $rB \subseteq B_r$.
- C4) $\text{lh} \bigcup_{B \in \Theta} B = X$, где $\text{lh}(\cdot)$ означает линейную оболочку.

Из условий C1)–C4) вытекает, что для всякого конечного набора $B_1, \dots, B_n \in \Theta$ существует множество $B_0 \in \Theta$, содержащее сумму $B_1 + \dots + B_n$. Кроме того, условие C4) вместе с C1)–C3) влечет, что на самом деле $\bigcup_{B \in \Theta} B = X$. Семейство множеств, удовлетворяющее условиям C1)–C4), назовем *C-семейством*.

Поскольку равномерный предел ограниченных функций тоже ограничен, из полноты $A(\mathbb{C})$ вытекает, что пространство $A_\Theta(X)$ полно.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – локально выпуклое пространство, а $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – любое C-семейство. Тогда пространство $A_\Theta(X)$ полно.

Из формулы Коши вытекает, что $A_\Theta(X)$ замкнуто относительно дифференцирования. Действительно, если $s \in X$, то при любом $x \in B \in \Theta$ имеем

$$|\partial_s f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(x + e^{i\theta} s) e^{-i\theta} d\theta \right| \leq \|f\|_{B_s}, \quad B_s = B + \bigcup_{|z|=1} zs. \quad (2.4)$$

Следовательно, функция $\partial_s f$ ограничена на каждом множестве B . Так как мы уже знаем, что $\partial_s f \in H_G(X)$, то получаем $\partial_s f \in A_\Theta(X)$. Из (2.4) также вытекает, что отображение $f \mapsto \partial_s f$ непрерывно.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть X – локально выпуклое пространство, а $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – любое C-семейство. Тогда пространство $A_\Theta(X)$ замкнуто относительно дифференцирования, а отображение $\partial_s: A_\Theta(X) \mapsto A_\Theta(X)$ непрерывно.

Из предположения об уравновешенности множеств в Θ вытекает

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть X – локально выпуклое пространство, а $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – любое C-семейство. Тогда для всех $f \in A_\Theta(X)$ имеем $\partial_{(\cdot)}^n f(0) \in A_\Theta$, $n = 0, 1, \dots$, и ряд Тейлора (2.2) сходится абсолютно в $A_\Theta(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \Theta$ – произвольное множество. Фиксируем произвольное $r > 1$. Поскольку B уравновешено, имеем $rB \supseteq B$ и по формуле Коши получаем, что

$$|\partial_x^n f(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{rB}$$

для всех $x \in B$. Следовательно, $\partial_{(\cdot)}^n f(0) \in A_\Theta$ при всех n , причем

$$\|\partial_{(\cdot)}^n f(0)\|_B \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{rB}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Абсолютная сходимость ряда Тейлора (2.2) вытекает из оценки

$$\sum_n \frac{1}{n!} \|\partial_{(\cdot)}^n f(0)\|_B \leq \|f\|_{rB} \sum_n \frac{1}{r^n} < \infty.$$

Обратно, в силу полноты $A_\Theta(X)$ получаем, что если система однородных полиномов $P_n \in \mathcal{P}_n(X)$ удовлетворяет $\sum_n \|P_n\|_B < \infty$ для каждого ограниченного множества $B \in \Theta$, то $\sum P_n$ задает некоторую функцию из $A_\Theta(X)$.

Включения $A_{B_1}(X) \hookrightarrow A_{B_2}(X)$ непрерывны при $B_1 \subseteq B_2$. В силу условия С2) можно записать $A'_\Theta(X) = \bigcup_{B \in \Theta} A'_B(X)$, где каждое из пространств $A'_B(X)$ снабжено топологией, порожденной полунормой $\|\lambda\|_B \equiv \sup_{\|f\|_B=1} |\langle \lambda, f \rangle|$, а $A'_\Theta(X)$ снабжено соответствующей индуктивной топологией. (Заметим, что мы используем одинаковые обозначения для порождающих полунорм на $A'_\Theta(X)$ и на $A_\Theta(X)$.)

§ 3. Преобразование Фурье и функции экспоненциального типа

Напомним некоторые основные факты конечномерной теории аналитических обобщенных функций. Преобразование Фурье–Бореля $\mathcal{F}: A'(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathcal{F}A'(\mathbb{C}^n)$ на двойственном пространстве $A'(\mathbb{C}^n)$ определяется формулой

$$(\mathcal{F}\lambda)(z) \equiv \langle \lambda, e_z \rangle, \quad e_z(\cdot) \equiv e^{\langle \cdot, z \rangle} \in A(\mathbb{C}^n),$$

где $\langle \xi, z \rangle \equiv z_1 \xi_1 + \dots + z_n \xi_n$. Образ Фурье $\mathcal{F}A'(\mathbb{C}^n)$ состоит из всех голоморфных функций экспоненциального типа $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ (теорема Пэли–Винера). Пространство $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ задается формулой $\text{Exp}(\mathbb{C}^n) = \bigcup_r \text{Exp}_r(\mathbb{C}^n)$, где $\text{Exp}_r(\mathbb{C}^n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$, есть пространство целых функций g , удовлетворяющих $|g(z)| \leq M e^{(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|)}$ для некоторого $M \geq 0$. Снабжая каждое $\text{Exp}_r(\mathbb{C}^n)$ топологией нормы

$$\|g\|_r \equiv \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |g(z) e^{-(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|)}|,$$

а $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ – соответствующей индуктивной топологией, получим, что $\mathcal{F}: A'(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ есть изоморфизм. Здесь $A'(\mathbb{C}^n)$ снабжено сильной топологией $\beta(A', A)$. Действительно, тейлоровские разложения элементов из $A(\mathbb{C}^n)$ сходятся в $A(\mathbb{C}^n)$, поэтому всякий непрерывный линейный функционал однозначно задается своими значениями на мономах. Тем самым $\mathcal{F}$ есть взаимно

однозначное отображение. Обратное отображение $\mathcal{F}^{-1}(g) = \lambda$ задается для каждого $g \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ формулой

$$\langle \lambda, h \rangle = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} \frac{h^{(p)}(0)g^{(p)}(0)}{p!}, \quad h \in A(\mathbb{C}^n). \quad (3.1)$$

Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с векторным пространством Y так, что $Y \subseteq X'$, и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times Y \mapsto \mathbb{C}$ есть соответствующая билинейная форма. Обозначим через $A_Y(X)$ пространство функций вида

$$f = h \circ \pi_F \equiv h^F, \quad (3.2)$$

где $h \in A(\mathbb{C}^n)$ и $\pi_F: X \mapsto \mathbb{C}^n$ есть проектор,

$$\pi_F(x) \equiv (\langle x, y_1 \rangle, \dots, \langle x, y_n \rangle), \quad F = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$$

(можно считать, что векторы в F линейно независимы). Из условия $Y \subseteq X'$ вытекает, что $A_Y(X) \subseteq A_\Theta(X)$ для всякого C -семейства $\Theta \in \mathbf{B}(X)$. Действительно, всякий проектор π_F отображает $\sigma(X, Y)$ -ограниченные множества на ограниченные множества, а значит, он переводит ограниченные множества из X в ограниченные. Поэтому все функции вида (3.2) принадлежат пространству $A_\Theta(X)$.

Для всякого векторного пространства Y , спаренного с X , как показано выше, определим Y -преобразование Фурье $\mathcal{F} = \mathcal{F}_Y: A'_\Theta(X) \mapsto \mathcal{F}A'_\Theta(X)$ формулой

$$(\mathcal{F}\lambda)(y) \equiv \langle \lambda, e_y \rangle, \quad e_y(\cdot) \equiv \exp\langle \cdot, y \rangle \in A_Y(X)$$

(ср. с конечномерным случаем). Обозначим через $T_Y(X)$ пространство тригонометрических полиномов, т. е. подпространство $A_Y(X)$, натянутое на векторы e_y , $y \in Y$. Из того что пространство тригонометрических полиномов от n комплексных переменных плотно в $A(\mathbb{C}^n)$ для любого n , вытекает плотность $T_Y(X)$ в $A_Y(X)$ относительно топологии, индуцированной из $A_\Theta(X)$. Следовательно,

$$\text{Ker } \mathcal{F} = T_Y(X)^\perp = A_Y(X)^\perp = \overline{A_Y(X)}^\perp.$$

Иными словами, $\mathcal{F}$ является взаимно однозначным отображением тогда и только тогда, когда $A_Y(X)$ плотно в $A_\Theta(X)$.

Для всякого C -семейства $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ обозначим через $\text{Exp}_\Theta(Y)$ пространство всех функций $\varphi \in H_G(Y)$ таких, что

$$|\varphi(y)| \leq M \exp \|y\|_B = M \exp \left(\sup_{y \in B} |\langle x, y \rangle| \right) \quad (3.3)$$

для некоторых M и $B \in \Theta$. По определению можно записать

$$\text{Exp}_\Theta(Y) = \bigcup_{B \in \Theta} \text{Exp}_B(Y),$$

где $\text{Ехр}_B(Y)$ есть пространство функций из $H_G(Y)$, удовлетворяющих оценке (3.3). Снабдим каждое пространство $\text{Ехр}_B(Y)$ топологией нормы

$$\|\varphi\|_B \equiv \sup_{y \in X} |\varphi(y)e^{-\|y\|_B}|,$$

а $\text{Ехр}_\Theta(Y)$ – соответствующей индуктивной локально выпуклой топологией. Рассмотрим некоторые общие свойства пространства $\text{Ехр}_\Theta(Y)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$, и пусть $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – произвольное C -семейство. Тогда пространство $\text{Ехр}_\Theta(Y)$ замкнуто относительно сдвигов, дифференцирования и умножения на функции из $\text{Ехр}_\Theta(Y)$ и соответствующие отображения непрерывны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что умножение $M_\psi: \text{Ехр}_\Theta(Y) \mapsto \text{Ехр}_\Theta(Y)$, $M_\psi(\varphi) \equiv \varphi\psi$, непрерывно для всякой функции $\psi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$, удовлетворяющей $|\psi(y)| \leq M \exp \|x\|_{B_\psi}$. Для произвольного $B \in \Theta$ и $\varphi \in \text{Ехр}_B(Y)$ имеем

$$|\varphi(y)\psi(y)| \leq M \|\varphi\|_B \exp(\|y\|_{B_\psi} + \|y\|_B) = M \|\varphi\|_B \exp \|x\|_{B+B_\psi}.$$

Это показывает, что

$$\|\varphi\psi\|_{B+B_\psi} = \sup_{x \in B+B_\psi} (|\varphi(x)\psi(x)| \exp(-\|x\|_{B+B_\psi})) \leq M \|\varphi\|_B.$$

Из этой оценки следует, что M_ψ непрерывно отображает $\text{Ехр}_B(Y)$ в $\text{Ехр}_{B+B_\psi}(Y)$. Заключаем, что отображение $M_\psi: \text{Ехр}_\Theta(Y) \mapsto \text{Ехр}_\Theta(Y)$ непрерывно.

Докажем, что $\partial_s \varphi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$ для всех $\varphi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$ и что отображение $\partial_s: \text{Ехр}_\Theta(Y) \mapsto \text{Ехр}_\Theta(Y)$ непрерывно. Если $|\varphi(y)| \leq \|\varphi\|_B \exp \|y\|_B$, то по формуле Коши имеем

$$|\partial_s \varphi(y)| \leq \|\varphi\|_B \exp(\|y\|_B + \|s\|_B). \quad (3.4)$$

Тем самым $\partial_s \varphi \in \text{Ехр}_B(Y)$ и ∂_s непрерывно отображает $\text{Ехр}_B(Y)$ в $\text{Ехр}_B(Y)$. Следовательно, отображение $\partial_s: \text{Ехр}_\Theta(Y) \mapsto \text{Ехр}_\Theta(Y)$ непрерывно.

Непрерывность сдвига τ_h , $h \in Y$, где $\tau_h(\varphi)(y) \equiv \varphi(y+h)$, очевидна.

Следующая теорема описывает другое свойство пространства $\text{Ехр}_\Theta(Y)$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$, и пусть $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – произвольное C -семейство. Тогда для любых фиксированных $y_0 \in Y$ и $\varphi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$ n -линейное отображение $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \partial_y \varphi(y_0)$ непрерывно в Θ -полярной топологии на Y . При этом ряд Тейлора (2.2) сходится равномерно и абсолютно в окрестности нуля в этой топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$ удовлетворяет оценке $|\varphi(y)| \leq M \times \exp \|y\|_B$, $B \in \Theta \in \mathbf{B}(X)$. Тогда по формуле Коши

$$\begin{aligned} |\partial_y \varphi(y_0)| &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \varphi \left(y_0 + \sum_{k=1}^n e^{i\theta_k} y_k \right) e^{-i\theta_1} \cdots e^{-i\theta_n} d\theta_1 \cdots d\theta_n \right| \\ &\leq M \exp(\|y_0\|_B + \|y_1\|_B + \cdots + \|y_n\|_B). \end{aligned}$$

Таким образом, если $\|y_k\|_B \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, то из n -линейности отображения $y \mapsto \partial_y \varphi(y_0)$ получаем, что

$$|\partial_y \varphi(y_0)| \leq M e^{n+\|y_0\|_B} \|y_1\|_B \cdots \|y_n\|_B. \quad (3.5)$$

Заметим, что эта оценка верна, даже если $\|y_k\|_B = 0$ при некотором k . Этим доказана первая часть. Вторая часть является простым следствием оценки (3.5), поскольку для всех $y \in Y$ мы имеем

$$|\partial_y^n \varphi(0)| = |\partial_{y, \dots, y} \varphi(0)| \leq M e(e\|y\|_B)^n.$$

Следовательно, ряд Тейлора (2.2) сходится равномерно и абсолютно в любой окрестности нуля вида $U_\delta = \{y \in Y : \|y\|_B \leq \delta\}$.

Всюду далее мы обозначаем через Y_Θ пространство Y , снабженное Θ -полярной топологией (равномерной сходимости на множествах из Θ). Следующий факт очень важен для дальнейшего.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$, и пусть $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – произвольное C -семейство. Тогда всякая функция $\varphi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$ непрерывна на Y_Θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные $y_0 \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Для всех $\varphi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$ и $y \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(y) - \varphi(y_0) &= \varphi_{y_0; y-y_0}(1) - \varphi_{y_0; y-y_0}(0) \\ &= \int_0^1 \varphi'_{y_0; y-y_0}(t) dt = \int_0^1 \partial_{y-y_0} \varphi(y_0 + t(y-y_0)) dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если $|\varphi(y)| \leq M \exp \|y\|_B$ и $\|s\|_B \leq \delta$, $s \in Y$, то оценка (3.5) из предыдущего доказательства дает, что $|\partial_s \varphi(y)| \leq M e \delta \exp(\|y\|_B)$. Следовательно, если $\|y - y_0\|_B \leq \delta$, то из (3.6) получаем

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| \leq \delta M e \int_0^1 \exp(\|y_0 + t(y-y_0)\|_B) dt \leq \delta e^\delta M e^{\|y_0\|_B+1}.$$

Значит, для достаточно малых δ имеем $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| \leq \varepsilon$, как только $\|y - y_0\|_B \leq \delta$, чем непрерывность и доказана.

Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$. Нас интересует отношение между пространством $\text{Ехр}_\Theta(Y)$ и образом $\mathcal{F}A'_\Theta(X)$, где $\Theta \in \mathbf{B}(X)$. На самом деле всегда $\mathcal{F}A'_\Theta(X) \subseteq \text{Ехр}_\Theta(Y)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$. Тогда для всякого C -семейства $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ имеем $\mathcal{F}A'_\Theta(X) \subseteq \text{Exp}_\Theta(Y)$ и отображение $\mathcal{F}: A'_\Theta(X) \mapsto \text{Exp}_\Theta(Y)$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что ряд Тейлора $\sum \frac{1}{n!} \langle \cdot, y \rangle^n$ сходится к e_y в $A_\Theta(X)$. Значит,

$$(\mathcal{F}\lambda)(y) = \sum \frac{1}{n!} \langle \lambda, \langle \cdot, y \rangle^n \rangle.$$

Для всякого $\lambda \in A'_\Theta(X)$ существует множество $B \in \Theta$ такое, что

$$|\langle \lambda, f \rangle| \leq \|\lambda\|_B \|f\|_B, \quad \|\lambda\|_B = \sup_{\|f\|_B=1} |\langle \lambda, f \rangle|.$$

Получаем оценку

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}\lambda)(y)| &\leq \sum \frac{1}{n!} |\langle \lambda, \langle \cdot, y \rangle^n \rangle| \leq \sum \frac{1}{n!} \|\lambda\|_B \|y^n\|_B \\ &= \|\lambda\|_B \sum \frac{1}{n!} \|y\|_B^n = \|\lambda\|_B \exp \|y\|_B. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Надо доказать, что $\mathcal{F}\lambda \in H_G(Y)$ (т.е. $\mathcal{F}\lambda$ голоморфна на каждом конечномерном подпространстве Y). Оценки типа (3.7) показывают, что всякое такое конечномерное сужение записывается как абсолютно сходящийся ряд целых функций, что и доказывает наше утверждение.

Наконец, покажем, что $\mathcal{F}$ непрерывно. Надо доказать, что каждое сужение $\mathcal{F}_B: A'_B(X) \mapsto \text{Exp}_\Theta(Y)$ непрерывно. Но (3.7) влечет, что $|(\mathcal{F}\lambda)(y)| \leq \|\lambda\|_B \times \exp \|y\|_B$ для всех $\lambda \in A'_B(X)$, откуда

$$\|\mathcal{F}\lambda\|_B = \sup_{y \in B} |(\mathcal{F}\lambda)(y) e^{-\|y\|_B}| \leq \|\lambda\|_B. \quad (3.8)$$

Этим доказано, что $\mathcal{F}$ непрерывно отображает $A'_B(X)$ в $\text{Exp}_B(Y)$, что является достаточным условием для непрерывности $\mathcal{F}$.

§ 4. Теорема Пэли–Винера

В этом параграфе доказывается включение $\text{Exp}_\Theta(Y) \subseteq \mathcal{F}A'_\Theta(X)$ для некоторых пространств и классов ограниченных множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть X, Y – спаренные пространства и $E = (e_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq Y$, где A – некоторое множество индексов. E -полидиском в X называется множество вида

$$C_r \equiv \{x \in X: |\langle x, y \rangle| \leq r_\alpha, \alpha \in A\},$$

где $r = (r_\alpha \geq 0)_{\alpha \in A}$.

Заметим, что всякий E -полидиск уравновешен и выпукл.

Наш основной результат формулируется в терминах тотальных и топологически свободных множеств, поэтому напомним их определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Подмножество E локально выпуклого пространства Y называется *тотальным* в Y , если $Y = \overline{\text{lh}}E$, где $\overline{\text{lh}}E$ означает замкнутую линейную оболочку E .

Поскольку семейство замкнутых подпространств одно и то же для всех двойственных топологий, всякое тотальное множество тотально и относительно любой другой двойственной топологии. В частности, подмножество тотально тогда и только тогда, когда оно слабо тотально. Действительно, по теореме Хана–Банаха подмножество E тотально тогда и только тогда, когда оно разделяет точки двойственного пространства (т.е. $E^\perp = \{0\}$).

Напомним теперь понятие топологически свободного множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Подмножество $E = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$ локально выпуклого пространства Y называется *топологически свободным* в Y , если для каждого элемента $e_{\alpha_0} \in E$ имеем $e_{\alpha_0} \notin \overline{\text{lh}}(E \setminus \{e_{\alpha_0}\})$.

Конечно, топологически свободное множество также алгебраически свободно (т.е. линейно независимо). Кроме того, свойство множества быть топологически свободным однозначно определяется двойственным пространством. По теореме Хана–Банаха $E = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$ топологически свободно в Y тогда и только тогда, когда для каждого e_{α_0} существует $f_{\alpha_0} \in Y'$ с $\langle f_{\alpha_0}, e_\alpha \rangle = \delta_\alpha^{\alpha_0}$, $\alpha \in A$. Следовательно, для всякого топологически свободного семейства $E = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$ существует ортогональное множество $F = (f_\alpha)_{\alpha \in A}$ в Y' , т.е. $\langle f_\beta, e_\alpha \rangle = \delta_\alpha^\beta$, $\alpha, \beta \in A$.

Приведем примеры.

ПРИМЕР 4.4. Любое ортонормированное семейство в пространстве G со скалярным произведением топологически свободно, и всякое ортонормированное семейство содержится в максимальном ортонормированном множестве. В гильбертовом пространстве, кроме того, всякое максимальное ортонормированное семейство тотально. Следовательно, в гильбертовом пространстве всегда существует тотальное топологически свободное подмножество.

ПРИМЕР 4.5. Пусть $C[0, 1]$ есть банахово пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с равномерной нормой. По теореме Вейерштрасса множество мономов $M = (x^n: n = 0, 1, \dots)$ тотально в $C[0, 1]$, т.е. пространство полиномов плотно в $C[0, 1]$. Но M не является топологически свободным в $C[0, 1]$ (см. [37]).

C -семейство Θ , состоящее из E -полидисков C_r , $E = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$, называется ℓ_1 -замкнутым, если для каждого $C_r \in \Theta$ существует последовательность $\delta = (\delta_\alpha > 1)$ с $\delta^{-1} = (\delta_\alpha^{-1}) \in \ell_1(A)$ такая, что $C_{r_\delta} \in \Theta$, где $r_\delta = (\delta_\alpha r_\alpha)$ (или, точнее, $C_{r_\delta} \subseteq C_{r'}$ для некоторого $C_{r'} \in \Theta$). Заметим, что из этого свойства вытекает счетность множества индексов A , так что можно считать A совпадающим с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$. Обозначим через $\Delta = \{\delta = (\delta_k > 1) : \delta^{-1} \in \ell_1\}$ семейство последовательностей упомянутого типа. Хорошо известно, что ряд $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_\infty} \delta^{-\alpha}$ сходится для любой последовательности $\delta \in \Delta$, где $\delta^\alpha = \prod_j \delta_j^{\alpha_j}$ и $\mathbb{N}_\infty = \bigoplus_{j=1}^\infty \mathbb{N}$. Это свойство играет центральную роль в доказательстве нашего основного результата.

ТЕОРЕМА 4.6 (Пэли–Винер). Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$. Пусть $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ есть ℓ_1 -замкнутое

C -семейство E -полидисков в X , где $E = (e_j)_j$ – тотальное множество в Y_Θ , являющееся $\sigma(Y, X)$ -топологически свободным. Тогда $\mathcal{F}: A'_\Theta(X) \mapsto \text{Exp}_\Theta(Y)$ есть сюръективный строгий морфизм.

Кроме того, если $\varphi \in \text{Exp}_\Theta(Y)$ удовлетворяет оценке

$$|\varphi(y)| \leq M \exp \sup_{x \in C_r} |\langle x, y \rangle|,$$

то для произвольного $\delta \in \Delta$ с $C_{r_\delta} \in \Theta$ существует функционал $\lambda \in A'_\Theta(X)$ такой, что

$$|\langle \lambda, f \rangle| \leq M D_\delta \sup_{x \in C_{r_\delta}} |f(x)|, \quad \mathcal{F}\lambda = \varphi, \quad (4.1)$$

где $D_\delta \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_\infty} \delta^{-\alpha}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Напомним, что линейное отображение $u: E \mapsto F$ между локально выпуклыми пространствами E и F называется *строгим морфизмом*, если соответствующая биекция $\bar{u}: E/\text{Ker } u \mapsto u(E)$ есть изоморфизм (заметим, что непрерывность $\bar{u}$ влечет непрерывность u).

Нам потребуется несколько лемм.

ЛЕММА 4.8. Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$. Тогда для всякого C -семейства $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ отображение $Y_\Theta \ni y \mapsto e_y \in A_\Theta(X)$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $y_\alpha \rightarrow y$ в Y_Θ , и рассмотрим соответствующую сеть (e_{y_α}) в $A_\Theta(X)$. Надо показать, что $e_{y_\alpha} \rightarrow e_y$ в $A_\Theta(X)$. Пусть $B \subseteq X$ – любое множество из Θ . Тогда существует α_0 такое, что

$$\sup_{\alpha \succeq \alpha_0} \|y_\alpha\|_B = M < \infty, \quad \|y_\alpha\|_B = \sup_{x \in B} |\langle x, y_\alpha \rangle|.$$

При $x \in B$ и $\alpha \succeq \alpha_0$ для всех $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle x, y_\alpha \rangle^n - \langle x, y \rangle^n| &\leq |\langle x, y_\alpha \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\quad \times |\langle x, y_\alpha \rangle^{n-1} + \langle x, y_\alpha \rangle^{n-2} \langle x, y \rangle + \dots + \langle x, y \rangle^{n-1}| \\ &\leq |\langle x, y_\alpha \rangle - \langle x, y \rangle| n M^n \end{aligned}$$

(заметим, что $\|y\|_B \leq M$). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\alpha_1 \succeq \alpha_0$ так, что $\|y_\alpha - y\|_B M e^M \leq \varepsilon$ при $\alpha \succeq \alpha_1$. Тогда при $\alpha \succeq \alpha_1$ имеем

$$\begin{aligned} \|e_{y_\alpha} - e_y\|_B &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|\langle x, y_\alpha \rangle^n - \langle x, y \rangle^n\|_B \\ &\leq \|y_\alpha - y\|_B M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n M^{n-1} = \|y_\alpha - y\|_B M e^M \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $e_{y_\alpha} \rightarrow e_y$.

Пусть $A: \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}^n$ – линейный оператор $((n \times m)$ -матрица). Определим отображение $T_A: \text{Exp}(\mathbb{C}^n) \mapsto \text{Exp}(\mathbb{C}^m)$ так:

$$T_A(g) \equiv g \circ A = g_A.$$

Аналогично определяется отображение $T_{A^T}: A(\mathbb{C}^m) \mapsto A(\mathbb{C}^n)$, где A^T – оператор, транспонированный к A . Отображения T_{A^T} и T_A , очевидно, непрерывны.

ЛЕММА 4.9. Пусть $A: \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}^n$ – любой линейный оператор. Тогда

$$T_A = \mathcal{F} T'_{AT} \mathcal{F}^{-1}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную $g \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$. Заметим, что

$$T_{AT}(e_\xi) = \exp\langle A\xi, \cdot \rangle = e_{A\xi},$$

так что по формуле (3.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T'_{AT} \mathcal{F}^{-1} g)(\xi) &= \langle \mathcal{F}^{-1} g, e_{A\xi} \rangle = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} \frac{e_{A\xi}^{(p)}(0) g^{(p)}(0)}{p!} \\ &= \sum_p \frac{((A\xi)_1^{p_1} \dots (A\xi)_n^{p_n}) g^{(p)}(0)}{p!} = g(A\xi) = g_A(\xi). \end{aligned}$$

Обозначим через $\text{Exp}_G(Y)$ пространство всех функций $\varphi: Y \mapsto \mathbb{C}$, все конечномерные сужения которых экспоненциального типа, т. е. $\varphi_F \equiv \varphi \circ \pi_F \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ для всех (линейно независимых) n -наборов $F = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$, где $\pi_F: Y^n \mapsto \mathbb{C}^n$ есть “депроектор”,

$$\pi_F(z) \equiv z_1 y_1 + \dots + z_n y_n. \quad (4.3)$$

Ясно, что $\text{Exp}_\Theta(Y) \subseteq \text{Exp}_G(Y)$ для всякого семейства $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ в локально выпуклом пространстве X . Из предыдущей леммы вытекает

ЛЕММА 4.10. Пусть X и Y – спаренные пространства. Тогда всякая функция $\varphi \in \text{Exp}_G(Y)$ определяет линейный функционал λ на $A_Y(X)$ по формуле

$$\langle \lambda, f \rangle \equiv \langle \lambda_F, h \rangle, \quad f = h^F = h \circ \pi_F, \quad \lambda_F = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_F). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функционал λ , как выше:

$$\langle \lambda, f \rangle \equiv \langle \lambda_F, h \rangle, \quad (4.5)$$

где $f = h \circ \pi_F$ и $\lambda_F = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_F)$, и покажем, что это определение корректно, т. е. что

$$\langle \lambda_F, h \rangle = \langle \lambda_{\tilde{F}}, \tilde{h} \rangle \quad (4.6)$$

всякий раз, когда $f = h \circ \pi_F = \tilde{h} \circ \pi_{\tilde{F}}$ для некоторых $h \in A(\mathbb{C}^n)$, $\tilde{h} \in A(\mathbb{C}^m)$, $F = (y_1, \dots, y_n)$, $\tilde{F} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$. Заметим, что если $f = h \circ \pi_F = \tilde{h} \circ \pi_{\tilde{F}}$, то существуют голоморфная функция $\hat{h} \in A(\mathbb{C}^p)$ и линейно независимая система $\hat{F} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_p)$ такие, что $\text{lh } \hat{F} = \text{lh}(F \cup \tilde{F})$ и $f = \hat{h} \circ \pi_{\hat{F}}$. Здесь, как и везде в статье, $\text{lh}(\cdot)$ означает линейную оболочку. Следовательно, достаточно доказать (4.6) в случае, когда $\text{lh } \tilde{F} \subseteq \text{lh } F$. В матричных обозначениях пусть $[\tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_m] = [y_1 \dots y_n]A$ для некоторой $(n \times m)$ -матрицы A , где $m \leq n$, и пусть λ_F и $\lambda_{\tilde{F}}$ – соответствующие функционалы из $A'(\mathbb{C}^n)$ и $A'(\mathbb{C}^m)$. Тогда φ_F и $\varphi_{\tilde{F}}$ связаны формулой $\varphi_F \circ A = \varphi_{\tilde{F}}$, а h и $\tilde{h}$ – формулой $h = \tilde{h} \circ A^T$, т. е. $T_A(\varphi_F) = \varphi_{\tilde{F}}$ и $T_{AT}(\tilde{h}) = h$. Теперь (4.6) вытекает из леммы 4.9. Действительно, (4.2) влечет $T'_{AT} \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} T_A$, значит,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_F, h \rangle &= \langle \mathcal{F}^{-1}(\varphi_F), T_{AT} \tilde{h} \rangle = \langle T'_{AT} \mathcal{F}^{-1}(\varphi_F), \tilde{h} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1} T_A(\varphi_F), \tilde{h} \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} \varphi_{\tilde{F}}, \tilde{h} \rangle = \langle \lambda_{\tilde{F}}, \tilde{h} \rangle, \end{aligned}$$

и доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. Эту лемму можно рассматривать как теорему Пэли–Винера для пространства $A_Y(X)$, снабженного некоторой индуктивной топологией. Действительно, зададим на $A_Y(X)$ индуктивную топологию, порожденную отображениями $J_F: A(\mathbb{C}^n) \mapsto A_Y(X)$, $J_F(h) \equiv h \circ \pi_F$, где F пробегает все конечные линейно независимые множества в Y . Тогда лемма утверждает, что $\mathcal{F}: A'_Y(X) \mapsto \text{Exp}_G(Y)$ есть биекция. Пространство тригонометрических полиномов $T_Y(X)$ плотно в $A_Y(X)$ в указанной индуктивной топологии. Следовательно, $\mathcal{F}$ есть взаимно однозначное отображение. Кроме того, поскольку функционал λ на $A_Y(X)$ принадлежит $A'_Y(X)$ тогда и только тогда, когда все композиции $\lambda \circ J_F$ принадлежат $A'(\mathbb{C}^n)$, мы видим, что $A'_Y(X) \subseteq \text{Exp}_G(Y)$ (см. детали в [40]). Предыдущая лемма влечет, что $\mathcal{F}$ – сюръекция.

Следующая (“размерностно-инвариантная”) лемма является ключевым моментом нашего исследования.

ЛЕММА 4.12. Пусть $g \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет оценке

$$|g(z)| \leq M e^{(r_1|z_1| + \dots + r_n|z_n|)},$$

и пусть $\lambda = \mathcal{F}^{-1}g \in A'(\mathbb{C}^n)$.

Тогда для всякой последовательности $\delta = (\delta_k > 1) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|\langle \lambda, h \rangle| \leq M D_\delta \sup_{z \in eC_{r_\delta}} |h(z)| = M D_\delta \|h\|_{eC_{r_\delta}},$$

где C_r есть полидиск радиуса $r = (r_1, \dots, r_n)$, а $D_\delta \equiv \sum_{p \in \mathbb{N}^n} \delta^{-p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $r_k > 0$ при всех k (иначе положим $r_k = 1$). Для всякого натурального $k \in \mathbb{N}$ положим $k' = \max(1, k) \geq 1$. По формуле Коши для всех $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $\rho = \rho(p) = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho_j > 0$, имеем оценку

$$|g^{(p)}(0)| \leq M p! \rho_1^{-p_1} \dots \rho_n^{-p_n} \exp(r_1 \rho_1 + \dots + r_n \rho_n).$$

Если некоторое p_j равно нулю, то эта оценка верна и для $\rho_j = 0$ при соглашении, что $0^0 = 1$. Выбрав $\rho_k = p_k / r_k$ при $k = 1, \dots, n$, получаем оценку

$$|g^{(p)}(0)| \leq M p! \prod_{k=1}^n \left[\frac{r_k}{p'_k} e \right]^{p_k} \leq M p^p \prod_{k=1}^n \left[\frac{r_k}{p'_k} e \right]^{p_k} = M (er)^p.$$

Теперь формула Коши дает для всех $h \in A(\mathbb{C}^n)$ оценку

$$|h^{(p)}(0)| \leq \frac{1}{(e\delta r)^p} \|h\|_{eC_{r_\delta}}.$$

Подставляя это в формулу $\langle \lambda, h \rangle = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} (h^{(p)}(0) g^{(p)}(0)) / p!$, получаем требуемую оценку.

Теперь все готово для доказательства теоремы 4.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6. Пусть $\varphi \in \text{Exp}_\Theta$, причем

$$|\varphi(y)| \leq M \exp\left(\sup_{x \in C_r} |\langle x, y \rangle|\right)$$

для некоторого E -полидиска $C_r \in \Theta$, $r = (r_j)$. Покажем, что φ есть образ некоторого функционала $\lambda \in A'_\Theta(X)$, удовлетворяющего (4.1). Поскольку $Z = \text{lh } E$ плотно в Y_Θ , достаточно доказать, что существует функционал $\lambda_Z \in A'_Z(X)$ с $\langle \lambda_Z, e_y \rangle = \varphi(y)$ для $y \in Z \subseteq Y$ и что он удовлетворяет (4.1) на $A_Z(X)$. Действительно, по теореме Хана–Банаха любой такой функционал допускает непрерывное продолжение $\lambda \in A'_\Theta(X)$ с сохранением оценки (4.1). Более того, предположение о тотальности E в Y_Θ влечет, что преобразование Фурье функционала λ равно φ . Действительно, для всякого y существует сеть (z_α) в Z , сходящаяся к y в Y_Θ . По лемме 4.8 $e_{z_\alpha} \rightarrow e_y$ в $A_\Theta(X)$. Поскольку φ непрерывна на Y_Θ (теорема 3.3), имеем

$$\varphi(y) = \lim \varphi(z_\alpha) = \lim \langle \lambda_Z, e_{z_\alpha} \rangle = \lim \langle \lambda, e_{z_\alpha} \rangle = \langle \lambda, e_y \rangle = \mathcal{F}\lambda(y), \quad (4.7)$$

что и доказывает наше утверждение.

Сужение φ_Z функции φ на Z принадлежит $\text{Exp}_G(Z)$. Поэтому сужение φ на каждое конечномерное подпространство в Z есть функция экспоненциального типа. По лемме 4.10 φ задает линейный функционал $\lambda_Z = (\lambda_F)_{F \in \mathbf{F}(Z)}$ на $A_Z(X)$ по формуле (4.4), $\lambda_F = \mathcal{F}^{-1}\varphi_F$. Здесь $\mathbf{F}(Z)$ есть семейство конечных (упорядоченных) множеств векторов из Z . Поскольку Z натянута на E , функционалы $(\lambda_{\tilde{F}})_{\tilde{F} \in \mathbf{F}(E)}$ определяют искомый линейный функционал λ_Z , где $\mathbf{F}(E)$ есть семейство конечных (упорядоченных) множеств векторов из E . Из условия, что E топологически свободно в слабой топологии, вытекает, что при всех $\tilde{F} = (e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \in \mathbf{F}(E)$ для $C_{r_{\tilde{F}}} \equiv C_{r_{j_1}} \times \dots \times C_{r_{j_n}}$ мы имеем

$$\pi_{\tilde{F}}(C_r) = C_{r_{j_1}} \times \dots \times C_{r_{j_n}} \equiv C_{r_{\tilde{F}}}. \quad (4.8)$$

Действительно, очевидно, что $\pi_{\tilde{F}}(C_r) \subseteq C_{r_{\tilde{F}}}$. Обратно, возьмем произвольное $z = (z_k) \in C_{r_{\tilde{F}}}$ с $|z_k| \leq r_{j_k}$, $k = 1, \dots, n$. Поскольку E топологически свободно, существует ортогональная система $(f_j \in X)_j$ с $\langle f_i, e_j \rangle = \delta_i^j$. Полагая $x_z \in \sum z_k f_{j_k} \in X$, получим, что $x_z \in C_r$ и $\pi_{\tilde{F}}(x_z) = z$. Этим доказано равенство (4.8). Согласно условиям на φ всякое сужение $\varphi_{\tilde{F}} = \varphi \circ \pi_{\tilde{F}}$, $\tilde{F} \in \mathbf{F}(E)$, удовлетворяет

$$|\varphi_{\tilde{F}}(z)| = M \exp\left(\sup_{\xi \in C_{r_{\tilde{F}}}} |\langle \xi, z \rangle|\right).$$

По лемме 4.12 для $\lambda_{\tilde{F}} = \mathcal{F}^{-1}\varphi_{\tilde{F}}$ имеем

$$|\langle \lambda_{\tilde{F}}, h \rangle| \leq M \sum_{p \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\delta_{j_1}^{p_1} \dots \delta_{j_n}^{p_n}} \|h\|_{eC_{(r_{\tilde{F}})_\delta}} \leq MD_\delta \|h\|_{eC_{(r_{\tilde{F}})_\delta}}.$$

Пусть $f \in A_Z(X)$ и $f = h \circ \pi_{\tilde{F}}$. Из (4.8) следует, что

$$\begin{aligned} |\langle \lambda_Z, f \rangle| &= |\langle \lambda_{\tilde{F}}, h \rangle| \leq MD_\delta \|h\|_{eC_{(r_{\tilde{F}})_\delta}} = MD_\delta \|h\|_{e\pi_{\tilde{F}}(C_{r_\delta})} \\ &= MD_\delta \|h \circ \pi_{\tilde{F}}\|_{eC_{r_\delta}} = MD_\delta \|f\|_{eC_{r_\delta}}. \end{aligned}$$

Этим доказано, что $\lambda_Z \in A'_Z(X)$, где $A_Z(X)$ снабжено топологией, индуцированной из $A_\Theta(X)$. Кроме того, $\langle \lambda_Z, e_y \rangle = \varphi_Z(y) = \varphi(y)$ для $y \in Z$, что вместе с предыдущими рассуждениями завершает первую часть доказательства.

Осталось доказать, что $\mathcal{F}$ – строгий морфизм, т.е. что отображение

$$\overline{\mathcal{F}}^{-1}: \text{Exp}_\Theta(Y) \mapsto A'_\Theta(X) / \text{Ker } \mathcal{F}$$

непрерывно, где $\overline{\mathcal{F}}: A'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F} \mapsto \text{Exp}_\Theta(Y)$ есть каноническая биекция. Поскольку топология $\text{Exp}_\Theta(Y)$ индуктивная, достаточно доказать, что каждое сужение $\overline{\mathcal{F}}_r^{-1}: \text{Exp}_{C_r}(Y) \mapsto A'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F}$ непрерывно. Обозначим через $J_{\mathcal{F}}: A'_\Theta \mapsto A'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F}$ каноническую сюръекцию, и пусть $J_{\mathcal{F}}(U) \subseteq A'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F}$ – любая фундаментальная окрестность начала координат в $A'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F}$, где U – окрестность начала координат в A'_Θ . Поскольку топология A'_Θ индуктивная, получаем, что U содержит множество вида $U_r(\varepsilon) = \{\lambda \in A'_{eC_{r_\delta}} : \|\lambda\|_{eC_{r_\delta}} \leq \varepsilon\}$, где $C_{r_\delta} \in \Theta$, $\delta^{-1} \in \ell_1$. Рассмотрим окрестность $V_r = \{\varphi \in \text{Exp}_{C_r}(Y) : \|\varphi\|_{C_r} \leq \varepsilon D_\delta^{-1}\}$ начала координат в $\text{Exp}_{C_r}(Y)$. Из первой части доказательства следует, что $\overline{\mathcal{F}}^{-1}(V_r) \subseteq J_{\mathcal{F}}(U_r(\varepsilon)) \subseteq J_{\mathcal{F}}(U)$. Действительно, если $\varphi \in V_r$, то $|\varphi(y)| \leq \varepsilon D_\delta^{-1} \exp \|y\|_{C_r}$ и по первой части доказательства в $U_r(\varepsilon)$ существует функционал λ с $\mathcal{F}\lambda = \varphi$. Доказательство закончено.

В заключение этого параграфа упомянем обобщение теоремы 4.6 на произведение пространств. Пусть X_k , $k = 1, \dots, n$, – локально выпуклые пространства, спаренные с Y_k , $k = 1, \dots, n$, соответственно, причем $Y_k \subseteq X'_k$ для всех k . Рассмотрим каноническое спаривание между $X = \prod X_k$ и $Y = \prod Y_k$ по формуле

$$\langle (x_k), (y_k) \rangle \equiv \sum_{k=1}^n \langle x_k, y_k \rangle. \quad (4.9)$$

Тогда $X' = \prod X'_k \supseteq \prod Y_k = Y$. Начиная отсюда, мы будем для простоты считать, что $n = 2$. Пусть $E_k = (e_{\alpha_k})_{\alpha_k \in A_k}$, $k = 1, 2$, суть слабо топологически свободные множества в Y_k , $k = 1, 2$, соответственно. Тогда $E \equiv E_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times E_2$ слабо топологически свободно в Y и $Z \equiv \text{lh } E = Z_1 \times Z_2$, где $Z_k = \text{lh } E_k$, $k = 1, 2$. Пусть далее Θ_1 и Θ_2 – слабо ограниченные E_k -полидиски в X_1 и X_2 соответственно, причем Z_1 и Z_2 плотны в Y_1 и Y_2 относительно соответствующих Θ_i -полярных топологий. Тогда $Z \equiv Z_1 \times Z_2$ плотно в $Y_{\Theta_1} \times Y_{\Theta_2}$ по определению топологии произведения. Следовательно, E тотально в $Y_{\Theta_1} \times Y_{\Theta_2}$. Но топология произведения $Y_{\Theta_1} \times Y_{\Theta_2}$ на Y совпадает с полярной топологией Y_Θ , где $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \equiv \{B_1 \times B_2 : B_k \in \Theta_k, k = 1, 2\}$. Следовательно, E тотально в Y_Θ . Отсюда следует, что множества, входящие в Θ , можно описать как E -полидиски и что Θ является C -семейством, если Θ_k были таковыми. Кроме того, Θ будет ℓ_1 -замкнутым, если Θ_k , $k = 1, 2$, обладали этим свойством ($C_{r_{\delta_1}^1} \times C_{r_{\delta_2}^2} \in \Theta$, $((\delta_i^1 \delta_j^2)^{-1})_{ij} \in \ell_1$). Аналогичные рассуждения проходят для любого конечного числа спариваний, и мы получаем следующую обобщенную версию теоремы 4.6.

ТЕОРЕМА 4.13. Пусть X_k , $k = 1, \dots, n$, суть локально выпуклые пространства, спаренные с Y_k , $k = 1, \dots, n$, соответственно, причем $Y_k \subseteq X'_k$ при каждом k . Пусть $X = \prod X_k$ и $Y = \prod Y_k$ спарены посредством (4.9). При

каждом k пусть $\Theta_k \in \mathbf{B}(X_k)$ – ℓ_1 -замкнутое C -семейство E_k -полидисков $C_{r^k} = \prod_m C_{r_m^k}$, причем при каждом k множество E_k тотально в Y_{Θ_k} и является $\sigma(Y_k, X_k)$ -топологически свободным в Y_k . Положим $\Theta = \prod \Theta_k$. Тогда $\mathcal{F}: A'_\Theta(X) \mapsto \text{Exp}_\Theta(Y)$ есть сюръективный строгий морфизм. Справедливо утверждение, аналогичное (4.1), т. е. если $\varphi \in \text{Exp}_\Theta(Y)$ удовлетворяет оценке $|\varphi(y)| \leq M \exp \sup_{x \in C_{r^1} \times \dots \times C_{r^n}} |\langle x, y \rangle|$, то для произвольных $\delta^j \in \Delta$ с $C_{r_{\delta_j}^j} \in \Theta_j$ существует функционал $\lambda \in A'_\Theta(X)$ такой, что

$$|\langle \lambda, f \rangle| \leq MD_{\delta_1} \dots D_{\delta_n} \sup_{x \in C_{r_{\delta_1}^1} \times \dots \times C_{r_{\delta_n}^n}} |f(x)|, \quad \mathcal{F}\lambda = \varphi,$$

где $D_{\delta_j} \equiv \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_\infty} (\delta^j)^{-\alpha}$.

§ 5. Приложение к пространствам последовательностей

Результаты предыдущего параграфа применимы к пространствам последовательностей X и Y , спаренным скобкой

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_n), \quad y = (y_n). \quad (5.1)$$

Обозначим через σ пространство всех последовательностей над полем комплексных чисел, т. е. σ можно алгебраически отождествить с $\mathbb{C}^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Пусть σ_+ есть подмножество σ , состоящее из неотрицательных последовательностей. Для всякой последовательности $s \in \sigma$ обозначим $s_+ = (|s_n|) \in \sigma_+$. Для двух последовательностей $x, x' \in \sigma_+$ будем писать $x \leq x'$, если $x_n \leq x'_n$ для всех n . Обозначим через $X^+ = X \cap \sigma_+$ множество неотрицательных последовательностей, содержащихся в пространстве X . Наконец, если $s \in \sigma$, то последовательность $(x_n s_n)$ будет иногда обозначаться через x_s .

Пусть X, Y – пространства последовательностей, спаренные скобкой (5.1). Допустим, что каждое из пространств X, Y содержит прямую сумму $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{C}$ и является полным по Рейнхардту, т. е. $x_s \in X$ ($y_s \in Y$) для всех $x \in X$ ($y \in Y$) и $s \in \sigma$ с $|s_j| \leq 1$. Всякий “обычный полидиск” $C_r = \{x: x_+ \leq r = (r_n)\}$ является E -полидиском, где $E = (e_m)$ и $e_m = (\delta_n^m)_n \in Y$, $m = 1, 2, \dots$. Предположение о том, что X содержит $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{C}$, влечет, что E является $\sigma(Y, X)$ -топологически свободным в Y . Кроме того, $\text{lh } E = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{C}$ плотна в Y_Θ для всякого C -семейства полидисков Θ в X . Наконец, заметим, что всякое C -семейство полидисков будет ℓ_1 -замкнуто, если X ℓ_1 -замкнуто в том смысле, что для каждого $x \in X$ существует $\delta = \delta(x) \in \Delta$ такое, что $x_\delta \in X$. Поэтому теорема 4.6 влечет следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть X и Y – пространства последовательностей, спаренные скобкой (5.1). Допустим, что $Y \subseteq X'$ и что X является ℓ_1 -замкнутым. Пусть $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ есть C -семейство ограниченных полидисков $C_r = \text{PC}_{r_k}$ в X . Тогда $\mathcal{F}: A'_\Theta(X) \mapsto \text{Exp}_\Theta(Y)$ есть сюръективный строгий морфизм и справедливо утверждение, аналогичное (4.1).

ПРИМЕР 5.2. Пусть $X = \mathbb{C}^\infty$ снабжено топологией произведения, а Y есть прямая сумма $\mathbb{C}_\infty = \bigoplus_{k=1}^\infty \mathbb{C}$. Тогда X является ℓ_1 -замкнутым и $\mathcal{F}: A'_\Theta(\mathbb{C}^\infty) \mapsto \text{Ehr}_\Theta(\mathbb{C}_\infty)$ есть сюръективный строгий морфизм для всякого C -семейства полидисков (заметим, что всякий полидиск ограничен).

Пусть, наоборот, $X = \mathbb{C}_\infty$ и $Y = \mathbb{C}^\infty$, причем X снабжено топологией прямой суммы. Тогда X опять ℓ_1 -замкнуто и следствие 5.1 дает, что $\mathcal{F}: A'_\Theta(\mathbb{C}_\infty) \mapsto \text{Ehr}_\Theta(\mathbb{C}^\infty)$ есть сюръективный строгий морфизм для всякого C -семейства “конечномерных” полидисков.

Оказывается, что теория, развитая выше, становится очень элегантной в некоторых ядерных пространствах последовательностей, введенных Кёте (пространствах Кёте). Но мы увидим, что изучение этих пространств покрывает очень широкий класс других пространств – ядерных пространств с базисом. Их более подробное изучение см. в [13].

Для любой последовательности $\rho \in \sigma_+$ обозначим через $\Lambda(\rho)$ пространство ℓ_1 с весом ρ , т. е.

$$\Lambda(\rho) = \{x = (x_n): x_\rho \equiv (\rho_n x_n) \in \ell_1\}$$

с топологией, порожденной полунормой $p_\rho(x) = \|x\|_\rho \equiv \|x_\rho\|_1$, где $\|\cdot\|_1$ есть обычная ℓ_1 -норма. Для всякого набора $\mathbb{P} = (\rho \in \sigma_+)$ неотрицательных последовательностей обозначим через $\Lambda(\mathbb{P})$ соответствующий проективный предел, т. е. $\Lambda(\mathbb{P})$ есть пространство

$$\Lambda(\mathbb{P}) = \bigcap_{\rho \in \mathbb{P}} \Lambda(\rho)$$

с топологией, порожденной полунормами $\|x\|_\rho$, $\rho \in \mathbb{P}$. Легко проверить, что пространство $\Lambda(\mathbb{P})$ полно и элементы $e_j = (\delta_i^j)_i$ образуют абсолютный базис Шаудера (т. е. $p'(x = \sum x_n e_n) \equiv \sum |x_n| p(e_n)$ есть непрерывная полунорма для каждой непрерывной полунормы p). Пространство $\Lambda(\mathbb{P})$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}$ обладает следующим свойством: для каждого k существует $\rho = (\rho_n) \in \mathbb{P}$ с $\rho_k > 0$. Такие семейства $\mathbb{P}$ будем называть *хаусдорфовыми*. Критерий Гротендика–Пича гласит, что $\Lambda(\mathbb{P})$ ядерно тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}$ является ℓ_1 -замкнутым в том смысле, что для каждого веса ρ найдутся последовательность $\delta \in \Delta$ и веса $\rho^j \in \mathbb{P}$ такие, что

$$\rho_\delta \leq C(\rho^1 + \dots + \rho^n) \quad (5.2)$$

для некоторого $C > 0$. Поэтому мы будем также называть семейство $\mathbb{P}$ *ядерным*, если оно ℓ_1 -замкнуто. В этом случае каждое замкнутое ограниченное множество компактно. Фактически, верна

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $\mathbb{P} = (\rho \in \sigma_+)$ – ядерное хаусдорфово семейство. Тогда полидиски C_r , $r = (r_n) \in \Lambda^+(\mathbb{P})$, образуют фундаментальную систему ограниченных (компактных) множеств в $\Lambda(\mathbb{P})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что всякий полидиск C_r , $r = (r_n) \in \Lambda^+(\mathbb{P})$, замкнут и ограничен. Пусть B – любое ограниченное множество. Положим $r_n = \sup_{x \in B} |x_n|$. Тогда $B \subseteq C_r$. Надо доказать, что $r \in \Lambda(\mathbb{P})$, т. е. что $r_\rho \in \ell_1$ для произвольного $\rho \in \mathbb{P}$. Но согласно (5.2) для всякого $\rho \in \mathbb{P}$ существуют такие $\rho^k \in \mathbb{P}$,

$k = 1, \dots, n$, и $s \in \ell_1 \cap \sigma_+$, что $\rho \leq \sum \rho_s^k \equiv \rho'_s$, где $\rho' = \sum \rho^k$. Поскольку B ограничено, а $\|\cdot\|_{\rho'}$ – непрерывная полунорма на $\Lambda(\mathbb{P})$, мы имеем $r_{\rho'} \in \ell_\infty$. Таким образом, $r_\rho \leq r_{\rho'_s} \leq Ms \in \ell_1$ для некоторой константы $M > 0$.

Поскольку элементы $e_m = (\delta_n^m)_n$, $m = 1, 2, \dots$, образуют базис Шаудера в $\Lambda(\mathbb{P})$, двойственное пространство отождествляется с некоторым пространством последовательностей с помощью отображения $j: \Lambda'(\mathbb{P}) \ni \lambda \mapsto (\lambda(e_n))_n \in \sigma$. С учетом этого отождествления имеем следующее описание $\Lambda'(\mathbb{P})$ (см. [13]).

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть $\mathbb{P}$ – ядерное хаусдорфово семейство. Тогда j есть топологический изоморфизм между $\Lambda'(\mathbb{P})$ и $\Lambda(\mathbb{P}')$, где*

$$\mathbb{P}' = (\rho')_{\rho' \in \Lambda^+(\mathbb{P})}, \quad \Lambda^+(\mathbb{P}) = \Lambda(\mathbb{P}) \cap \sigma_+,$$

и где $\Lambda'(\mathbb{P})$ снабжено сильной топологией. При этом элементы $e_m = (\delta_n^m)_n$ образуют абсолютный базис в $\Lambda'(\mathbb{P})$.

Мы видим, что достаточное условие ℓ_1 -замкнутости $X = \Lambda(\mathbb{P})$ состоит в том, что $\mathbb{P}$ равномерно ℓ_1 -замкнуто (или равномерно ядерно), т. е. можно взять одно и то же $\delta \in \Delta$ для всех ρ в (5.2). Фактически отсюда следует, что $X^+ = \Lambda^+(\mathbb{P})$ в свою очередь равномерно ℓ_1 -замкнуто. По теореме 5.4 $X' = \Lambda(X^+)$ также ℓ_1 -замкнуто. Суммируя все это, в силу следствия 5.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Пусть $\mathbb{P} = (\rho \in \sigma_+)$ – равномерно ядерное хаусдорфово семейство, а Θ – произвольное C -семейство ограниченных (компактных) полидисков в $\Lambda(\mathbb{P})$. Тогда $\mathcal{F}: A'_\Theta(\Lambda(\mathbb{P})) \mapsto \text{Exp}_\Theta(\Lambda'(\mathbb{P}))$ есть сюръективный строгий морфизм и справедливо утверждение, аналогичное (4.1).*

Пусть E – локально выпуклое пространство с абсолютным базисом (f_n) , а $\mathcal{P} = (p)$ – семейство полунорм, задающее топологию на E . Для каждой $p \in \mathcal{P}$ обозначим $\rho_p = (p(f_n)) \in \sigma_+$ и положим $\mathbb{P}_E = (\rho_p)_{p \in \mathcal{P}}$. Это дает естественное отображение $J_E: E \mapsto \Lambda(\mathbb{P}_E)$, $\sum x_n f_n \mapsto \sum x_n e_n = (x_n)$. Получаем, что если E полно, то J_E является изоморфизмом между E и пространством последовательностей $\Lambda(\mathbb{P}_E)$. Таким образом, пространства $\Lambda(\mathbb{P})$ покрывают очень широкий класс локально выпуклых пространств. Следующие два примера иллюстрируют красивые приложения, основанные на этом наблюдении.

ПРИМЕР 5.6. Мы знаем, что $A(\mathbb{C}^n)$ – рефлексивное ядерное пространство Фреше–Монтеля. Кроме того, при $n = 1$ мономы $e_k = z^k$, $k = 0, 1, \dots$, образуют абсолютный базис. Полунормы $\|h\|_m \equiv \sup_{|z| \leq m} |h(z)|$ задают топологию на $A(\mathbb{C})$. Значит, $A(\mathbb{C})$ изоморфно $\Lambda(\mathbb{P})$, где $\mathbb{P} = ((\|e_n\|_m = m^n)_n : m = 0, 1, \dots)$. Это семейство равномерно ℓ_1 -замкнуто. По теореме 5.4 сильно двойственное пространство отождествляется с $\Lambda(\mathbb{P}')$, $\mathbb{P}' = \Lambda^+(\mathbb{P})$, посредством изоморфизма $A'(\mathbb{C}) \ni \lambda \mapsto (\lambda, z^n)_n \in \Lambda(\mathbb{P}')$. С другой стороны, известно, что $A'(\mathbb{C})$ отождествляется с $\text{Exp}(\mathbb{C})$. Фактически $\text{Exp}(\mathbb{C})$ и $\Lambda(\mathbb{P}')$ связаны отображением $\text{Exp}(\mathbb{C}) \ni g = \sum g_n z^n \mapsto (n!g_n) \in \Lambda(\mathbb{P}')$. Пространство $\Lambda(\mathbb{P}')$ можно описать как пространство всех последовательностей $y \in \sigma$ таких, что $|y_n| \leq Mr^n$ при $n = 0, 1, \dots$ для некоторых M и $r > 0$. Следствие 5.5 приводит к изящному результату о том, что

$$\mathcal{F}: A'_\Theta(A(\mathbb{C})) \mapsto \text{Exp}_\Theta(\text{Exp}(\mathbb{C})) \quad (5.3)$$

есть сюръективный строгий морфизм для всякого C -семейства $\Theta \in \mathbf{B}(A(\mathbb{C}))$, состоящего из полидисков (относительно базиса $(e_m = z^m)_m$).

Поскольку $\mathbb{P}$ равномерно ℓ_1 -замкнуто и A рефлексивно, мы можем поменять местами A и $A' = \text{Exp}$ в (5.3).

ПРИМЕР 5.7. Пространство функций Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ есть рефлексивное ядерное пространство Фреше–Монтеля. Пусть $n = 1$. Тогда функции Эрмита ϕ_n , задаваемые при $n = 0, 1, \dots$ формулами

$$\phi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{x^2/2}, \quad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} A_+^n \phi_0(x), \quad n > 1,$$

где $A_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})$, образуют абсолютный базис в $S(\mathbb{R})$. Кроме того, топология $S(\mathbb{R})$ задается полунормами $(\|\varphi\|_m = \|(A_- A_+ + 1)^m \varphi\|_2)_m$, $m = 0, 1, \dots$, где $\|\cdot\|_2$ есть L_2 -норма и $A_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$ (см. [43]). Тогда $\|\phi_n\|_m = (1+n)^m$ для всех m и n , и мы получаем, что $S(\mathbb{R})$ изоморфно $\Lambda(\mathbb{P})$, где $\mathbb{P} = ((\|\phi_n\|_m = (1+n)^m)_{n=0: m=0, 1, \dots})$. Это семейство равномерно ℓ_1 -замкнуто. Сильно двойственное пространство $S' \simeq \Lambda(\mathbb{P}')$, где $\mathbb{P}' = \Lambda^+(\mathbb{P})$, можно описать как пространство всех последовательностей $y = (y_n)$, для которых имеем $|y_n| \leq M(1+n)^m$ при $n = 0, 1, \dots$ для некоторых M и m . По следствию 5.5 получаем, что

$$\mathcal{F}: A'_\Theta(S(\mathbb{R})) \mapsto \text{Exp}_\Theta(S'(\mathbb{R})) \quad (5.4)$$

есть сюръективный строгий морфизм для любого C -семейства $\Theta \in \mathbf{B}(S)$, состоящего из полидисков (относительно базиса $(\phi_n)_n$).

Как и в предыдущем примере, поскольку $\mathbb{P}$ равномерно ℓ_1 -замкнуто и S рефлексивно, можно поменять местами S и S' в (5.4).

§ 6. Некоторые свойства преобразования Фурье

Между пространствами $A(\mathbb{C}^n)$ и $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ имеется спаривание $\langle h, g \rangle \equiv \langle \mathcal{F}^{-1}g, h \rangle$, где скобка в правой части индуцируется двойственностью между A и A' . Кроме того, эта билинейная форма задается формулой (3.1). Сопряженный оператор $\mathcal{F}'$ аналогично индуцирует спаривание $\langle f, g \rangle \equiv \langle \mathcal{F}'^{-1}f, g \rangle$ между $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$ и образом $\mathcal{F}'$ в бидвойственном пространстве $A''(\mathbb{C}^n)$. Но так как $\mathcal{F}$ – изоморфизм, то $\mathcal{F}'$ – биекция и $\mathcal{F}'^{-1} = \mathcal{F}^{-1'}$. Отождествляя $A = A''$ (напомним, что A рефлексивно), получим, что эти спаривания совпадают:

$$\langle h, g \rangle \equiv \langle \mathcal{F}^{-1}g, h \rangle = \langle \mathcal{F}'^{-1}h, g \rangle, \quad h \in A(\mathbb{C}^n), \quad g \in \text{Exp}(\mathbb{C}^n).$$

Для всякого подпространства $N \subseteq \mathbb{C}^n$ обозначим через Exp_N подпространство в $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$, состоящее из функций из $\text{Exp}(\mathbb{C}^n)$, ограниченных на $\alpha + N$ для каждого $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Аналогично определяется пространство $A_N(\mathbb{C}^n) \subseteq A(\mathbb{C}^n)$.

Из формулы (3.1) и леммы 4.9 легко вытекает

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $N \subseteq \mathbb{C}^n$ – любое подпространство $\mathbb{C}^n$. Тогда $\langle h, g \rangle = 0$ для $g \in \text{Exp}_N$ и $h|_{N^\perp} = 0$, а также для $h \in A_N$ и $g|_{N^\perp} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \text{Exp}_N$ и $h|_{N^\perp} = 0$. По лемме 4.9 $\langle T_{A^T} h, T_{A^{-1}} g \rangle = \langle h, g \rangle$ для всякой ортогональной матрицы A (т.е. $A^{-1} = A^T$). Можно считать, что N имеет вид $\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} = \{0\}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$, $m \leq n$, и, следовательно, $N^\perp = \mathbb{C}^m \times \{0\}^{n-m}$. Условие на g по теореме Лиувилля влечет, что g должна иметь вид $g(z_1, \dots, z_n) = g'(z_1, \dots, z_m)$ для некоторой $g' \in \text{Exp}(\mathbb{C}^m)$. Следовательно, $g^{(p)}(0) = 0$ для всех $p = (p_1, \dots, p_n)$ с $p_k \neq 0$ при некотором $k > m$. Если $h|_{N^\perp} = 0$, то $h^{(p)}(0) = 0$ для всех $p = (p_1, \dots, p_m, 0, \dots, 0)$. По формуле (3.1) заключаем тогда, что $\langle h, g \rangle = 0$.

Второе утверждение есть следствие симметричности формулы (3.1).

Исследуем теперь, до какой степени теорема 6.1 может быть обобщена на пространства $A_\Theta(X)$ и Exp_Θ . Напомним, что хотя преобразование Фурье $\mathcal{F}$, вообще говоря, не является взаимно однозначным отображением, индуцированное им отображение $\overline{\mathcal{F}}: A'_\Theta(X)/\text{Ker } \mathcal{F} \mapsto \text{Exp}_\Theta(Y)$ является изоморфизмом, если выполнены условия теоремы 4.6. При этом мы знаем, что $\text{Ker } \mathcal{F} = \overline{A_Y(X)}^\perp$. Следовательно, пространства $A_{Y_\Theta}(X) \equiv \overline{A_Y(X)}$ и $\text{Exp}_\Theta(Y)$ допускают спаривание:

$$\langle f, \varphi \rangle \equiv \langle \overline{\mathcal{F}}^{-1} \varphi, f \rangle = \langle \lambda, f \rangle, \quad f \in A_{Y_\Theta}(X), \quad \varphi \in \text{Exp}_\Theta(Y),$$

где λ – произвольный функционал с $\mathcal{F}\lambda = \varphi$, а в правой части стоит значение λ на f . В частности, если $f = h \circ \pi_F \in A_Y(X)$, то $\langle f, \varphi \rangle$ совпадает с $\langle h, \varphi_F \rangle$, где $\varphi_F = \varphi \circ \overline{\pi}_F$.

Поскольку $\mathcal{F}$ – строгий морфизм, образ сопряженного оператора $\mathcal{F}': \text{Exp}_\Theta(Y) \mapsto A''_\Theta$ является $\sigma(A''_\Theta, A'_\Theta)$ -замкнутым. Значит,

$$\text{Im } \mathcal{F}' = \overline{\text{Im } \mathcal{F}'} = \text{Ker } \mathcal{F}^\perp = (A_{Y_\Theta}(X)^\perp)^\perp.$$

Отождествляя $A_{Y_\Theta}(X) = \overline{A_Y(X)}$ с подпространством в A''_Θ , получаем, что $\text{Im } \mathcal{F}' = A_{Y_\Theta}(X)$, где черта означает $\sigma(A''_\Theta, A'_\Theta)$ -замыкание. Таким образом, сопряженный оператор $\mathcal{F}'$ задает спаривание $\langle f, g \rangle \equiv \langle \mathcal{F}'^{-1} f, g \rangle$ между $A_{Y_\Theta}(X)$ и $\text{Exp}_\Theta(Y)$. Заметим, что $\mathcal{F}'$ является взаимно однозначным отображением, поскольку $\mathcal{F}$ сюръективно. В частности, упомянутые спаривания совпадают на $A_{Y_\Theta}(X) \times \text{Exp}_\Theta(Y)$, т.е.

$$\langle f, \varphi \rangle \equiv \langle \overline{\mathcal{F}}^{-1} \varphi, f \rangle = \langle \mathcal{F}'^{-1} f, \varphi \rangle, \quad f \in A_{Y_\Theta}(X), \quad \varphi \in \text{Exp}_\Theta(Y).$$

Для всякого подпространства $N \subseteq Y$ обозначим через $A_N(X)$ пространство всех функций из $A_Y(X)$, которые ограничены на $\alpha + N$ для каждого $\alpha \in Y$. Аналогично определяется пространство $\text{Exp}_N \subseteq \text{Exp}_\Theta(Y)$. Имеем следующее обобщение теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $N \subseteq Y$ – любое подпространство. Тогда $\langle f, \varphi \rangle = 0$, если $f \in A_N(X)$ и $\varphi|_{N^\perp} = 0$. Пусть, кроме того, N является $\sigma(Y, X)$ -замкнутой. Тогда $\langle f, \varphi \rangle = 0$, если $\varphi \in \text{Exp}_N$ и $f|_{N^\perp} = 0$, $f \in A_Y(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\varphi|_{N^\perp} = 0$ и $f = h \circ \pi_F \in A_N \subseteq A_Y$. Заметим, что предположение $h \circ \pi_F \in A_N$ влечет, что $h \in A_M(\mathbb{C}^n)$, где $M = \pi_F(N)$. Кроме того, $\langle f, \varphi \rangle = \langle h, \varphi_F \rangle$, где $\varphi_F = \varphi \circ \bar{\pi}_F$ и $\bar{\pi}_F: \mathbb{C}^n \mapsto Y$ есть депроектор $\bar{\pi}_F(z) = \sum_{k=1}^n z_k y_k$. Значит, в силу теоремы 6.1 достаточно доказать, что φ_F равняется нулю на $M^\perp$. Легко видеть, что проектор $\bar{\pi}_F$ есть оператор, сопряженный $\pi_F: \langle X, Y \rangle \mapsto \langle \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n \rangle$. Следовательно, для всякого подмножества $U \subseteq X$ имеем $\pi_F(U)^\perp = {}^t\pi_F^{-1}(U^\perp) = \bar{\pi}_F^{-1}(U^\perp)$. Таким образом, $M^\perp = \pi_F(N)^\perp = \bar{\pi}_F^{-1}(N^\perp)$ и, следовательно, $\bar{\pi}_F(M^\perp) \subseteq N^\perp \subseteq \mathbb{C}^n$. Но φ равняется нулю на $N^\perp$, поэтому $\varphi_F = \varphi \circ \bar{\pi}_F$ равняется нулю на $M^\perp$.

Допустим, что N слабо замкнуто, т.е. $N = N^{\perp\perp}$. Пусть $\varphi \in \text{Ехр}_N(Y)$ и $f = h \circ \pi_F \in A_Y$ равняется нулю на $N^\perp$. Отсюда следует, что h равняется нулю на $\pi_F(N^\perp) = M$. Поскольку $\langle f, \varphi \rangle = \langle h, \varphi_F \rangle$, достаточно доказать, что $\varphi_F \in \text{Ехр}_{M^\perp}(\mathbb{C}^n)$. Но по сказанному выше $M^\perp = \pi_F(N^\perp)^\perp = \bar{\pi}_F^{-1}(N^{\perp\perp}) = \bar{\pi}_F^{-1}(N)$. Поэтому для любого $\alpha \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\varphi_F(\alpha + M^\perp) = \varphi(\beta + \bar{\pi}_F \bar{\pi}_F^{-1}(N)) \subseteq \varphi(\beta + N), \quad \beta = \bar{\pi}_F(\alpha).$$

Правая часть есть ограниченное множество в $\mathbb{C}$ по условию на φ . Доказательство закончено.

Заметим, что по определению $\text{Ехр}_\Theta(Y)$ любая функция $\varphi \in \text{Ехр}_\Theta(Y)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi(y)| \leq M \exp \|y\|_B$ для некоторого $B \in \mathbf{B}(X)$. Но отсюда следует, что $\varphi \in \text{Ехр}_{B^\perp}$. Поскольку $B^\perp \subseteq X$ является $\sigma(Y, X)$ -замкнутым, получаем, что $\langle f, \varphi \rangle$ обращается в нуль для всех $f \in A_Y(X)$ таких, что $f|_M = 0$. Здесь $M = B^{\perp\perp} = \bigcup_{n=1}^\infty nB$ есть $\sigma(X, Y)$ -замкнутая линейная оболочка B .

Предыдущую теорему можно обобщить в нескольких направлениях. Действительно, если $f \in \bar{A}_N(X)$ и $\varphi|_{N^\perp} = 0$, то $\langle f, \varphi \rangle$ равно нулю. Аналогично, если $\varphi \in \text{Ехр}_N$ для слабо замкнутого $N \subseteq Y$ и если $f \in A_Y(X)$ есть предел функций из $A_Y(X)$, равный нулю на $N^\perp$, то $\langle f, \varphi \rangle = 0$.

§ 7. Обобщение результатов на другие пространства

Пусть X – локально выпуклое пространство над $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{A}_\Theta(X)$ – (топологическое) подпространство в $A_\Theta(X)$. Здесь $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ есть некоторое C -семейство ограниченных множеств в X . Если Y – векторное пространство, спаренное с X так, что $Y \subseteq X'$ и $A_Y(X) \subseteq \mathfrak{A}_\Theta(X)$, то можно определить преобразование Фурье $\mathcal{F}: \mathfrak{A}'_\Theta(X) \mapsto \mathcal{F}(\mathfrak{A}'_\Theta(X))$ на двойственном пространстве тем же способом, что и выше. В силу теоремы Хана–Банаха фурье-образы $\mathcal{F}(\mathfrak{A}'_\Theta(X))$ и $\mathcal{F}(A'_\Theta(X))$ совпадают. Поэтому применима теорема 3.4. Действительно, если ввести на двойственном пространстве $\mathfrak{A}'_\Theta(X)$ индуктивную топологию, аналогичную топологии на $A'_\Theta(X)$, то непрерывность $\mathcal{F}$ сохранится. Всюду ниже мы считаем, что $\mathfrak{A}'_\Theta(X)$ снабжено именно этой топологией. Суммируя все это, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$, а $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – C -семейство. Пусть $\mathfrak{A}_\Theta(X)$ – любое (топологическое) подпространство $A_\Theta(X)$. Тогда $\mathcal{F}\mathfrak{A}'_\Theta(X) \subseteq \text{Ехр}_\Theta(Y)$ и отображение $\mathcal{F}: \mathfrak{A}'_\Theta(X) \mapsto \text{Ехр}_\Theta(Y)$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\mathfrak{A}_\Theta(X)$ есть (топологическое) подпространство $A_\Theta(X)$. По теореме 3.4 $\mathcal{F}A'_\Theta(X) \subseteq \text{Epr}_\Theta(Y)$. Всякий непрерывный функционал $\lambda \in \mathfrak{A}'_\Theta(X)$ имеет непрерывное линейное продолжение на $A'_\Theta(X)$. Поскольку $A_Y(X) \subseteq \mathfrak{A}_\Theta(X)$, преобразования Фурье этих функционалов должны совпадать. Этим доказано, что $\mathcal{F}\mathfrak{A}'_\Theta(X) = \mathcal{F}A'_\Theta(X) \subseteq \text{Epr}_\Theta(Y)$. Непрерывность $\mathcal{F}: \mathfrak{A}'_\Theta(X) \mapsto \text{Epr}_\Theta(Y)$ вытекает из оценок, аналогичных (3.7) и (3.8).

Поскольку фурье-образы $\mathcal{F}(\mathfrak{A}'_\Theta(X))$ и $\mathcal{F}(A'_\Theta(X))$ совпадают, теорема 4.6 легко обобщается следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть X – локально выпуклое пространство, спаренное с Y так, что $Y \subseteq X'$. Пусть $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ есть ℓ_1 -замкнутое C -семейство E -полидисков в X , причем $E = (e_j)_j$ тотально в Y_Θ и $\sigma(Y, X)$ -топологически свободно. Пусть $\mathfrak{A}_\Theta(X)$ – любое (топологическое) подпространство $A_\Theta(X)$. Тогда $\mathcal{F}: \mathfrak{A}'_\Theta(X) \mapsto \text{Epr}_\Theta(Y)$ есть сюръективный строгий морфизм, и справедливо утверждение, аналогичное (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем, что $\mathcal{F}$ – сюръекция. Остается доказать, что $\overline{\mathcal{F}}^{-1}: \text{Epr}_\Theta(Y) \mapsto \mathfrak{A}'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F}$ непрерывно. Но это вытекает из наблюдения, что $\overline{\mathcal{F}}^{-1}$ есть композиция непрерывных отображений

$$\text{Epr}_\Theta(Y) \mapsto A'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F} \mapsto \mathfrak{A}'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F},$$

где $A'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F} \mapsto \mathfrak{A}'_\Theta / \text{Ker } \mathcal{F}$ – естественное вложение, а ядра берутся в соответствующих пространствах.

Для пространств последовательностей из теоремы 5.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть X, Y – пространства последовательностей, спаренные скобкой (5.1), причем $Y \subseteq X'$. Пусть $\Theta \in \mathbf{B}(X)$ – C -семейство полидисков $C_r = \text{PC}_{r_k}$. Допустим, что X ℓ_1 -замкнуто. Пусть $\mathfrak{A}_\Theta(X)$ – любое (топологическое) подпространство $A_\Theta(X)$. Тогда $\mathcal{F}: \mathfrak{A}'_\Theta(X) \mapsto \text{Epr}_\Theta(Y)$ есть сюръективный строгий морфизм, и справедливо утверждение, аналогичное (4.1).

Как уже отмечалось, фурье-образы $\mathcal{F}(\mathfrak{A}'_\Theta(X))$ и $\mathcal{F}(A'_\Theta(X))$ совпадают для всякого топологического подпространства $\mathfrak{A}_\Theta(X) \subseteq A_\Theta(X)$. Напомним также, что

$$\text{Ker } \mathcal{F} = \overline{A_Y(X)}^\perp.$$

Таким образом, $\mathcal{F}$ есть взаимно однозначное отображение тогда и только тогда, когда $A_Y(X)$ плотно в рассматриваемом пространстве $\mathfrak{A}_\Theta(X)$.

В заключение статьи заметим, что теорию обобщенных аналитических функций бесконечного числа комплексных переменных можно распространить на поля с неархимедовыми нормированиями, в частности на поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (ср. [27]). Такая теория была бы применима к моделям p -адической квантовой физики (см. [32]).

Авторы хотели бы поблагодарить О. Г. Смолянова, К. Чисельмана, С. Динеена, Б. Густавссона и Л. Лемперта за полезные обсуждения. Этот проект был поддержан грантом Королевской академии наук Швеции по сотрудничеству со странами бывшего Советского Союза, позволившим осуществить визиты О. Г. Смолянова в Векшё и А. Хренникова в Москву (1999 г. и 2000 г.).

Список литературы

1. *Фомин С. В.* Обобщенные функции бесконечного числа переменных и их преобразование Фурье // УМН. 1968. Т. 23. № 2. С. 215–216.
2. *Смолянов О. Г.* Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шредингеру // ДАН СССР. 1982. Т. 263. С. 558–562.
3. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Аналитические свойства бесконечномерных распределений // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 3–84.
4. *Смолянов О. Г., Хренников А. Ю.* Центральная предельная теорема для обобщенных мер на бесконечномерном пространстве // ДАН СССР. 1985. Т. 281. С. 279–283.
5. *Смолянов О. Г., Хренников А. Ю.* Алгебра бесконечномерных псевдодифференциальных операторов // ДАН СССР. 1987. Т. 292. С. 1310–1313.
6. *Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т.* Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
7. *Угланов А. В.* Об одной конструкции фейнмановского интеграла // ДАН СССР. 1982. Т. 262. С. 37–40.
8. *Хренников А. Ю.* Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и их приложения к квантовой теории поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 6. С. 1265–1291.
9. *Alberverio S., Hoegh-Krohn R.* Mathematical theory of Feynman path integral // Lecture Notes in Math. 1976. V. 523.
10. *Kondratiev Yu., Streit L., Westerkamp W., Yan J.-A.* Generalized functions in an infinite dimensional analysis // IAS Report. 1995. № 1995-002.
11. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Киев: Наук. думка, 1988.
12. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1951.
13. *Dineen S.* Complex analysis in locally convex spaces. Amsterdam: North Holland, 1981.
14. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces. Berlin a.o.: Springer-Verlag, 1999.
15. *Dineen S.* Unbounded holomorphic functions on a Banach space // J. London Math. Soc. 1972. V. 2. P. 461–465.
16. *Nachbin L.* Topology on spaces of holomorphic mappings. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
17. *Aron R. M.* Entire functions of unbounded type on a Banach space // Boll. Un. Mat. Ital. 1974. V. 9. P. 28–31.
18. *Kiselman C. O.* Geometric aspects of the theory of bounds for entire functions in normed spaces // Infinite Dimensional Holomorphy and Applications / Ed. M. C. Matos. North Holland Mathematics Studies 12, 1977. P. 249–275.
19. *Kiselman C. O.* On the radius of convergence of an entire function in a normed space // Ann. Polon. Math. 1976. V. 33. P. 39–55.
20. *Kiselman C. O.* Croissance des fonctions plurisousharmoniques en dimension infinie. Preprint Univ. Upsalla, 1984.
21. *Kiselman C. O.* The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions // Invent. Math. 1978. V. 49. P. 137–148.
22. *Kiselman C. O.* Plurisubharmonic functions and plurisubharmonic topologies // Advances in holomorphy. 1979. P. 431–449.
23. *Lempert L.* The Dolbeault complex in infinite dimensions. 1 // J. of the Amer. Math. Soc. 1998. V. 11. P. 485–520.
24. *Lempert L.* The Dolbeault complex in infinite dimensions. 2 // J. of the Amer. Math. Soc. 1999. V. 12. P. 775–793.
25. *Хренников А. Ю.* Фейнмановские интегралы на фазовом пространстве и символы бесконечномерных псевдодифференциальных операторов // Матем. заметки. 1995. Т. 37. С. 734–742.
26. *Хренников А. Ю.* Вторичное квантование и псевдодифференциальные операторы // ТМФ. 1986. Т. 66. С. 339–349.
27. *Khrennikov A.* p -adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer Acad, 1994.

28. *Khrennikov A.* Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical systems and Biological Models. Dordrecht: Kluwer Acad, 1997.
29. *Хренников А. Ю.* Обобщенные функции и гауссовские континуальные интегралы по неархимедовым функциональным пространствам // Изв. РАН. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 780–814.
30. *Хренников А. Ю.* Интегрирование по обобщенным мерам на топологических векторных пространствах // Тр. Моск. матем. об-ва 1986. Т. 49. С. 115–132.
31. *Albeverio S., Khrennikov A., Smolyanov O.* The probabilistic Feynman–Kac formula for an infinite-dimensional Schrödinger equation with exponential and singular potentials // Potential Analysis 1999. V. 11. P. 157–181.
32. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
33. *Hida T.* Analysis of Brownian functionals // Carleton Math. Lecture notes. № 13. Carleton Univ., 1975.
34. *Hida T., Kuo H.-H., Potthoff J., Streit L.* White noise: an infinite dimensional calculus. Dordrecht: Kluwer Academic, 1993.
35. *Kuo H.-H.* White noise distribution theory. Boca-Raton: CRC Press, 1996.
36. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.
37. *Horvath J.* Topological vector spaces and distributions. I. Reading. Mass.: Addison-Wesley, 1966.
38. *Ahlfors L.* Complex analysis. 3d ed. N.Y.: McGraw-Hill, 1979.
39. *Treves F.* Linear partial differential equations with constant coefficients. N.Y.: Gordon and Breach, 1966.
40. *Petersson H.* Properties of analytic maps on locally convex spaces. Reports from Växjö University – Mathematics, natural sciences and technology. ISBN 91-7636-206-X. Nr 1, 1999.
41. *Petersson H.* Generalized functions on $\mathbb{C}^\infty$ and $\bigoplus_k^\infty \mathbb{C}_k$. Reports from Växjö University–Mathematics, natural sciences and technology. ISBN 91-7636-210-8. Nr 4, 1999.
42. *Petersson H.* Bounded entire functions on infinite-dimensional spaces and Paley–Wiener theorem. Reports from Växjö University–Mathematics, natural sciences and technology. ISBN 91-7636-216-7. Nr 9, 1999.
43. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

Поступило в редакцию
13.IX.1999

Перевод с английского А. В. ДОМРИНА