Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша,
Изв. РАН. Сер. матем., 2001, том 65, выпуск 3, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/im333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:17:44

УДК 517.5

Б. И. Голубов

Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша

Известно неравенство Харди, в котором l_1 -норма последовательности коэффициентов Фурье интеграла от функции из пространства Харди $H(T)$, состоящего из 2π -периодических функций, оценивается сверху через норму этой функции в пространстве $H(T)$. В статье вводится двоичное пространство Харди $H(\mathbb{R}_+)$ и доказывается аналог указанного неравенства для преобразования Фурье–Уолша.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Известна следующая теорема Харди (см. [1] или [2, гл. 7]).

ТЕОРЕМА А. Если функция $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ принадлежит пространству Харди H в единичном круге $|z| < 1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $f(e^{it})$ – ее граничная функция на окружности $|z| = 1$, то

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt.$$

Э. Хилле и Я. Д. Тамаркин [3] доказали следующий аналог этой теоремы.

ТЕОРЕМА В. Если функция $f(z)$ принадлежит пространству Харди $H(\mathbb{R}_+^2)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$, а $\hat{f}(x)$ – преобразование Фурье ее граничной функции $f(x)$ на действительной оси, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\hat{f}(x)|}{x} dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

В статье [4] (см. также [5, с. 109]) доказан аналог теоремы А, в котором коэффициенты $\{a_n\}$ заменены коэффициентами Фурье по ортонормированной на отрезке $[0, 1)$ системе Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{+\infty}$ функций $f \in H([0, 1))$, где $H([0, 1))$ – так называемое двоичное пространство Харди на отрезке $[0, 1)$. Это пространство определяется следующим образом.

Полуинтервал вида $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, назовем *двоичным отрезком на $[0, 1)$* , а множество всех таких отрезков обозначим через Δ . Длину отрезка $I \in \Delta$ обозначим через $|I|$. Для функции $f \in L([0, 1))$ определим *двоичную максимальную функцию на $[0, 1)$* :

$$M(f)(x) = \sup_{x \in I, I \in \Delta} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|, \quad x \in [0, 1).$$

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 99-01-00355).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Двоичным пространством Харди* $H([0, 1])$ назовем множество всех таких функций $f \in L([0, 1])$, для которых $M(f) \in L([0, 1])$, с нормой $\|f\|_{H([0, 1])} = \|M(f)\|_{L([0, 1])}$.

Поскольку $M(f)(x) \geq |f(x)|$ почти всюду на $[0, 1]$, то $H([0, 1]) \subset L([0, 1])$, причем $\|f\|_{H([0, 1])} \geq \|f\|_{L([0, 1])}$.

Следующая теорема является аналогом теоремы А для рядов Фурье–Уолша.

ТЕОРЕМА С. Пусть $f \in H([0, 1])$, а $\hat{f}(n)$ – коэффициенты Фурье–Уолша функции f , т.е.

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) w_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n} \leq 25\sqrt{2} \|f\|_{H([0, 1])}$$

(см. [5, с. 109]).

В данной статье вводится двоичное пространство Харди $H(\mathbb{R}_+)$ и доказывается аналог теоремы А для преобразования Фурье–Уолша.

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

Полуинтервал вида $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ при $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ назовем *двоичным отрезком ранга n* , а множество всех таких отрезков обозначим через D . Для функции $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ определим двоичную максимальную функцию на $\mathbb{R}_+$:

$$M(f)(x) = \sup_{x \in I, I \in D} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Двоичным пространством Харди* $H(\mathbb{R}_+)$ назовем множество всех таких функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, для которых $M(f) \in L(\mathbb{R}_+)$, с нормой $\|f\|_{H(\mathbb{R}_+)} = \|M(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)}$.

Очевидно, что $H(\mathbb{R}_+) \subset L(\mathbb{R}_+)$, причем $\|f\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}$.

Пусть $D_n = [0, 2^{-n})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для функции $f \in L(D_n)$ введем двоичную максимальную функцию

$$M_n(f)(x) = \sup_{x \in I, I \subset D_n} \left| \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \right|, \quad x \in D_n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Двоичным пространством Харди $H(D_n)$ назовем множество всех таких функций $f \in L(D_n)$, для которых $M_n(f) \in L(D_n)$, с нормой $\|f\|_{H(D_n)} = \|M_n(f)\|_{L(D_n)}$.*

Очевидно, что $H(D_0) \equiv H([0, 1])$, где $H([0, 1])$ – двоичное пространство Харди на $[0, 1]$ (см. определение 1). В [5, с. 104] показано, что пространство $H([0, 1])$ полно. Легко доказать, что пространства $H(\mathbb{R}_+)$ и $H(D_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, полны. Очевидно, что пространства $H(D_0)$ и $H(D_n)$ изоморфны при любом $n \in \mathbb{Z}_+$.

Напомним определение преобразования Фурье–Уолша, которое впервые появилось в работе [6]. Для числа $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod{2}, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod{2}, \quad (1.1)$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Поскольку $x_{-n} = 0$ для $n \geq n(x)$, то для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Обобщенные функции Уолша определяются для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi_y(x) = (-1)^{t(x, y)}. \quad (1.2)$$

Преобразование Фурье–Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi_x(y) f(y) dy \quad (1.3)$$

(см. [5, гл. 9] или [7, гл. 6]). Если же функция f принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$, то $F[f] \equiv \tilde{f}$ определяется как предел по норме пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ последовательности функций $\int_{D_n} \psi_x(y) f(y) dy$.

Преобразование Фурье–Уолша имеет свойства, аналогичные свойствам обычного преобразования Фурье. Очевидно, для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Фурье–Уолша ограничено и $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$. Поэтому из сходимости последовательности функций f_n к функции f в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ вытекает, что $\tilde{f}_n$ сходится к $\tilde{f}$ равномерно на $\mathbb{R}_+$. Справедлив также аналог теоремы Планшереля.

ТЕОРЕМА D. *Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, причем $\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$, $F[\tilde{f}] = f$.*

Отметим также следующий результат.

ТЕОРЕМА Е. Если $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ или $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\tilde{g}(x) dx.$$

Все эти факты о преобразовании Фурье–Уолша можно найти в [5, гл. 9] или в [7, гл. 6]. Нам понадобятся также следующие свойства обобщенных функций Уолша (1.2) (см. [5, гл. 9]):

$$\psi_y(x) = \psi_x(y), \quad \psi_y(x) = \pm 1 \quad \text{для } (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad (1.4)$$

$$\int_k^{k+1} \psi_x(t) dt = \begin{cases} w_k(x), & 0 \leq x < 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\psi_y(x) = \psi_{[y]}(x)\psi_{[x]}(y). \quad (1.6)$$

На $\mathbb{R}_+$ введем операцию сложения $\oplus$, положив для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$: $x \oplus y = z$, где число z в двоичной системе счисления имеет двоичные разряды:

$$z_n \equiv x_n + y_n \pmod{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus 0,$$

а x_n, y_n вычисляются по правилу (1.1). Отметим, что для $n \in \mathbb{N}$ x_n является n -м двоичным разрядом дробной части числа $x \in \mathbb{R}_+$, а x_{-n} является n -м двоичным разрядом целой части этого числа. При этом двоично-рациональным числам $x \in \mathbb{R}_+$ сопоставляются конечные двоичные разложения, т.е. $x_n = 0$ для $n \geq n(x)$.

Обобщенные функции Уолша удовлетворяют равенству

$$\psi_t(x \oplus y) = \psi_t(x)\psi_t(y), \quad (1.7)$$

если $t, x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y$ двоично-иррационально. Таким образом, при фиксированных t и x равенство (1.7) выполняется для всех $y \in \mathbb{R}_+$, за исключением счетного множества.

Отметим, что обобщенные функции Уолша с целым неотрицательным нижним индексом выражаются через функции Уолша:

$$\psi_k(x) = w_k(x - [x]), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (1.8)$$

где $\{w_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – система функций Уолша в нумерации Пэли (см. [7, с. 10]). Эта система функций определяется следующим образом.

Пусть функция $r_0(x)$ равна 1 на $[0, 1/2)$ и равна -1 на $[1/2, 1)$. Продолжим эту функцию периодически с периодом 1 на $\mathbb{R}_+$. После этого положим $r_k(x) = r_0(2^k x)$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}_+$. Функции $r_k(x)$ называются *функциями Радемахера*. С их помощью определяются функции Уолша $w_n(x)$. Положим $w_0(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$. Если же n натуральное, то представим его в двоичной системе счисления: $n = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i 2^i$, где $\varepsilon_k = 1$, а остальные ε_i равны 0 или 1. После этого положим

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^k (r_i(x))^{\varepsilon_i}.$$

Система $\{w_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ортонормирована на $\Delta = [0, 1)$, ее функции принимают лишь значения 1 или -1 и продолжены с периодом 1 на $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что из (1.7) и (1.8) вытекает равенство

$$w_n(x)w_n(y) = w_n(x \oplus y), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.9)$$

где $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y$ двоично-иррационально. Таким образом, при фиксированном x равенство (1.9) выполняется для всех $y \in \mathbb{R}_+$, за исключением счетного множества.

Известно (см. [7, с. 11]), что при $n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ функция $w_m(x)$ на двоичном отрезке $I_k^n = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ принимает постоянное значение, равное 1 или -1 . Обозначим это значение через $w_{m,k}^n$. Ниже нам понадобятся следующие известные результаты (см. [7, с. 21 и 27]).

ТЕОРЕМА F. *Матрица $\|2^{-n/2}w_{m,k}^n\|$, $m, k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ является симметричной и ортогональной.*

ЛЕММА ПЭЛИ. *При $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} w_k(x) = \begin{cases} 2^n, & 0 \leq x < 2^{-n}, \\ 0, & 2^{-n} \leq x < 1. \end{cases}$$

Поскольку функции Уолша продолжены с отрезка $[0, 1)$ на $\mathbb{R}_+$ периодически с периодом 1, то предыдущее равенство таким же образом продолжается на $\mathbb{R}_+$.

Для функции $f \in L(D_n)$ нам потребуется следующий интегральный модуль непрерывности:

$$\omega(f, \delta)_{L(D_n)} = \sup_{0 \leq u \leq \delta} \int_0^{2^n-u} |f(x+u) - f(x)| dx, \quad \delta \in D_n. \quad (1.10)$$

§ 2. Леммы

Рассмотрим систему функций

$$a_{m,n}(x) = 2^{-n} \psi_{m2^{-n}}(x) X_{[0,2^n)}(x), \quad m, n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.1)$$

где $X_E(x)$ – характеристическая функция множества E , т.е. $X_E(x) = 1$ для $x \in E$ и $X_E(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R}_+ \setminus E$.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства $\tilde{a}_{m,n}(x) = X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(x)$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.1) согласно (1.3), (1.5) и (1.9) имеем

$$\begin{aligned}
2^n \tilde{a}_{m,n}(x) &= \int_0^{2^n} \psi_t\left(\frac{m}{2^n}\right) \psi_t(x) dt = \int_0^{2^n} \psi_t\left(x \oplus \frac{m}{2^n}\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_k^{k+1} \psi_t\left(x \oplus \frac{m}{2^n}\right) dt \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{2^n-1} w_k\left(x \oplus \frac{m}{2^n}\right), & 0 \leq x \oplus \frac{m}{2^n} < 1, \\ 0, & x \oplus \frac{m}{2^n} \geq 1. \end{cases} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму Пэли, получим

$$\tilde{a}_{m,n}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \oplus \frac{m}{2^n} < 2^{-n}, \\ 0, & x \oplus \frac{m}{2^n} \geq 2^{-n}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Согласно определению операции сложения $\oplus$ равенство (2.3) равносильно равенству $\tilde{a}_{m,n}(x) = X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(x)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\int_{D_n} a_{m,n}(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} a_{m,n}(x) dx = 0.$$

Утверждение следствия вытекает из леммы 1 на основании равенства

$$\int_{\mathbb{R}_+} a_{m,n}(x) dx = \tilde{a}_{m,n}(0).$$

ЛЕММА 2. Для $0 \leq x < 2^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ справедливо равенство

$$\psi_{m2^{-n}}(x) = w_m(2^{-n}x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k \leq x < k+1$ согласно введенному перед формулировкой теоремы F обозначению имеет место равенство $w_m(2^{-n}x) = w_{m,k}^n$. Поэтому для функции

$$b_{m,n}(y) = 2^{-n} w_m(2^{-n}y) X_{[0, 2^n)}(y), \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

согласно равенству (1.5) имеем

$$\begin{aligned}
2^n \tilde{b}_{m,n}(y) &= \int_0^{2^n} w_m(2^{-n}t) \psi_y(t) dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_k^{k+1} w_m(2^{-n}t) \psi_y(t) dt \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{m,k}^n \int_k^{k+1} \psi_y(t) dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{m,k}^n w_k(y) X_{[0,1)}(y). \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Если $y \in I_j^n = [j2^{-n}, (j+1)2^{-n})$, $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, то из предыдущего равенства согласно теореме F имеем

$$\tilde{b}_{m,n}(y) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{m,k}^n w_{k,j}^n = \delta_{m,j}, \quad (2.5)$$

где $\delta_{m,j}$ – символ Кронекера, т.е. $\delta_{m,j} = 0$ при $m \neq j$ и $\delta_{m,m} = 1$. Равенство (2.5) доказано при условии $y \in [0, 1)$. Если же $y \geq 1$, то из (2.4) следует равенство $\tilde{b}_{m,n}(y) = 0$. Тем самым доказано равенство $\tilde{b}_{m,n}(y) = X_{[2^{-n}m, 2^{-n}(m+1))}(y)X_{[0,1)}(y)$. Но по условию $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, и поэтому $\tilde{b}_{m,n}(y) = X_{[2^{-n}m, 2^{-n}(m+1))}(y)$ для $y \in \mathbb{R}_+$. Отсюда согласно лемме 1 следует, что $\tilde{a}_{m,n}(y) = \tilde{b}_{m,n}(y)$ для $y \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, на основании теоремы D $a_{m,n}(x) = b_{m,n}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$, что равносильно утверждению леммы 2.

ЛЕММА 3. Для $0 \leq x < 2^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $2^ni \leq m < 2^n(i+1)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, справедливо равенство

$$\psi_{m2^{-n}}(x) = w_i(x)w_{m-2^ni}(2^{-n}x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно равенствам (1.6) и (1.7) имеем

$$\psi_{m2^{-n}}(x) = \psi_{[m2^{-n}]}(x)\psi_{[x]}(2^{-n}m) = w_i(x)\psi_{[x]}(2^{-n}m). \quad (2.6)$$

Пусть $m' = m - 2^ni$. Тогда $0 \leq m' < 2^n$ и согласно лемме 2

$$\psi_{m'2^{-n}}(x) = w_{m'}(2^{-n}x). \quad (2.7)$$

С другой стороны, полагая $i = 0$, получим $m' = m$, и равенство (2.6) принимает вид $\psi_{m'2^{-n}}(x) = \psi_{[x]}(2^{-n}m')$. Отсюда и из (2.7) получим $\psi_{[x]}(2^{-n}m') = w_{m'}(2^{-n}x)$. Поэтому равенство (2.6) примет вид $\psi_{m2^{-n}}(x) = w_i(x)w_{m'}(2^{-n}x)$. Лемма доказана.

Известно, что система функций

$$\{2^{-n/2}\psi_{m2^{-n}}(x)X_{[0,2^n)}(x)\}_{m=0}^\infty \equiv \{a_m(x)\}_{m=0}^\infty \quad (2.8)$$

ортонормирована на $D_n = [0, 2^n)$ при любом фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. [7, с. 38]).

Действительно, применяя лемму 1 и теорему E для $m, k \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} a_m(x)a_k(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{a}_m(x)\tilde{a}_k(x) dx \\ &= 2^n \int_{\mathbb{R}_+} X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(x)X_{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})}(x) dx = \delta_{m,k}, \end{aligned}$$

где $\delta_{m,k}$ – символ Кронекера, т.е. $\delta_{m,k} = 0$ для $m \neq k$ и $\delta_{m,m} = 1$.

Для функции $f \in L(D_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, через $\hat{f}(k)$ обозначим ее коэффициенты Фурье по ортонормированной системе (2.8), т.е. положим

$$\hat{f}(k) = 2^{-n/2} \int_{D_n} f(t)\psi_{k2^{-n}}(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.9)$$

ЛЕММА 4. Для любой функции $f \in L(D_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, подпоследовательность частных сумм $\{S_{2^m}(f)\}_{m=0}^\infty$ ее ряда Фурье по системе (2.8) сходится к f почти всюду на D_n и в метрике пространства $L(D_n)$. Более того, справедливо неравенство

$$\|S_{2^{n+m}}(f) - f\|_{L(D_n)} \leq 2\omega(f, 2^{-m})_{L(D_n)}, \quad (2.10)$$

где справа стоит интегральный модуль непрерывности функции f в метрике пространства $L(D_n)$ (см. (1.10)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.9) на основании (1.9) имеем

$$\begin{aligned} S_{2^{n+m}}(f, x) &= \sum_{k=0}^{2^{n+m}-1} \hat{f}(k) 2^{-n/2} \psi_{k2^{-n}}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n} \int_{D_n} f(t) w_k(2^{-n}t) w_k(2^{-n}x) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{-n} \int_{D_n} f(t) w_j(2^{-n}t) w_j(2^{-n}x) w_i(t) w_i(x) dt \\ &= 2^{-n} \int_{D_n} f(t) D_{2^n} \left(\frac{x}{2^n} \oplus \frac{t}{2^n} \right) dt \\ &\quad + 2^{-n} \int_{D_n} f(t) D_{2^n} \left(\frac{x}{2^n} \oplus \frac{t}{2^n} \right) [D_{2^m}(x \oplus t) - 1] dt = \\ &= \int_{D_n} 2^{-n} \int_{D_n} f(t) D_{2^n} \left(\frac{x}{2^n} \oplus \frac{t}{2^n} \right) D_{2^m}(x \oplus t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда на основании леммы Пэли следует равенство

$$S_{2^{n+m}}(f, x) = 2^m \int_{I_j^m} f(t) dt, \quad (2.11)$$

где I_j^m – тот двоичный отрезок ранга m , который содержит точку $x \in D_n$. Из (2.11) вытекает, что последовательность $\{S_{2^m}(f)\}_{m=0}^\infty$ сходится к f почти всюду на D_n . Остается доказать неравенство (2.10).

Из равенства (2.11) для $i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ и $I_j^m = \left[i + \frac{j}{2^m}, i + \frac{j+1}{2^m} \right)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_i^{i+1} |S_{2^{n+m}}(x, f) - f(x)| dx &= \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{I_j^m} |S_{2^{n+m}}(x, f) - f(x)| dx \\ &= \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{I_j^m} \frac{1}{|I_j^m|} \left| \int_{I_j^m} (f(t) - f(x)) dt \right| dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{I_j^m} \frac{1}{|I_j^m|} \int_{I_j^m} |f(t) - f(x)| dt dx. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Применяя тождество П. Л. Ульянова (см. [8] или [7, с. 223])

$$\int_a^b \int_a^b |f(x) - f(y)| dx dy = 2 \int_0^{b-a} \left\{ \int_a^{b-t} |f(y+t) - f(y)| dy \right\} dt$$

в случае $[a, b] = I_j^m$, из (2.12) получим

$$\begin{aligned} & \int_i^{i+1} |S_{2^{n+m}}(x, f) - f(x)| dx \\ & \leq \sum_{j=0}^{2^m-1} 2^{m+1} \int_0^{2^{-m}} \left\{ \int_{i+\frac{j}{2^m}}^{i+\frac{j+1}{2^m}-u} |f(y+u) - f(y)| dy \right\} du \\ & = 2^{m+1} \int_0^{2^{-m}} \left\{ \int_i^{i+1-u} |f(y+u) - f(y)| dy \right\} du. \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства по $i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$, придем к неравенству

$$\|S_{2^{n+m}}(f) - f\|_{L(D_n)} \leq 2^{m+1} \int_0^{2^{-m}} \left\{ \int_0^{2^n-u} |f(y+u) - f(y)| dy \right\} du.$$

Отсюда на основании определения (1.10) модуля непрерывности $\omega(f, \delta)_{L(D_n)}$ получим

$$\|S_{2^{n+m}}(f) - f\|_{L(D_n)} \leq 2\omega(f, 2^{-m})_{L(D_n)}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если $f \in H(D_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\hat{f}(0) = 0$, то для коэффициентов Фурье (2.9) функции f справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(k)|}{k} \leq \frac{25}{2^{(n-3)/2}} \|f\|_{H(D_n)}. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.9) согласно лемме 2 и теореме С (см. введение) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{|\hat{f}(k)|}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} 2^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{D_n} f(t) w_k(2^{-n}t) dt \right| \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \left| \int_{D_0} f(2^n x) w_k(x) dx \right| \leq 25 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \|\varphi_n\|_{H(D_0)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\varphi_n(x) = f(2^n x)$, $x \in D_0$. Но легко проверить, что $\|\varphi_n\|_{H(D_0)} = 2^{-n} \|f\|_{H(D_n)}$. Поэтому из (2.14) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{|\hat{f}(k)|}{k} \leq 25 \cdot 2^{-(n-1)/2} \|f\|_{H(D_n)}. \quad (2.15)$$

Из (2.9) согласно лемме 3

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^n}^{\infty} \frac{|\hat{f}(k)|}{k} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n_i}}^{2^{n(i+1)}-1} \frac{|\hat{f}(k)|}{k} \\ &\leq 2^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n_i}}^{2^{n(i+1)}-1} \frac{1}{i} 2^{-n/2} \left| \int_{D_n} f(x) w_i(x) w_{k-2^{n_i}}(2^{-n}x) dx \right|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Учитывая тот факт, что $w_j(t) = w_{j,m}^n = \pm 1$ для $t \in I_m^n = [m2^{-n}, (m+1)2^{-n})$, где $j, m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_n} f(x) w_i(x) w_j(2^{-n}x) dx \right| &= \left| \sum_{m=0}^{2^n-1} w_{j,m}^n \int_m^{m+1} f(x) w_i(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^{2^n-1} \left| \int_m^{m+1} f(x) w_i(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Поэтому из (2.16) и теоремы С следует неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^n}^{\infty} \frac{|\hat{f}(k)|}{k} &\leq 2^{-n/2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{2^n-1} \left| \int_m^{m+1} f(x) w_i(x) dx \right| \\ &= 2^{-n/2} \sum_{m=0}^{2^n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left| \int_m^{m+1} f(x) w_i(x) dx \right| \\ &\leq 2^{-n/2} \sum_{m=0}^{2^n-1} 25\sqrt{2} \|f_m\|_{H(D_0)} \leq 25 \cdot 2^{-(n-1)/2} \|f\|_{H(D_n)}, \end{aligned}$$

где $f_m(x) = f(x+m)$ для $x \in [0, 1)$. Складывая это неравенство с неравенством (2.15), получим неравенство (2.13). Лемма доказана.

§ 3. Аналог теоремы Харди

ТЕОРЕМА. Если $f \in H(\mathbb{R}_+)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{f}(x)|}{x} dx \leq 50\sqrt{2} \|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f_n(x) = \left(f(x) - 2^{-n} \int_{D_n} f(t) dt \right) X_{D_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.2)$$

Ниже мы будем обозначать через $f_n(x)$ и функцию (3.2), и ее сужение на D_n . Так как $\psi_0(x) \equiv 1$, то $\hat{f}_n(0) = 0$. Поэтому согласно лемме 4 справедливо равенство

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \hat{f}_n(k) 2^{-n/2} \psi_{2^{-n}k}(x) \right\} X_{D_n}(x), \quad (3.3)$$

где ряд справа сходится в метрике пространства $L(\mathbb{R}_+)$. Применяя преобразование Уолша к обеим частям равенства (3.3) и пользуясь леммой 1, получим

$$\tilde{f}_n(x) = 2^{n/2} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \hat{f}_n(k) X_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))}(x) \right\}, \quad (3.4)$$

причем ряд справа равномерно сходится к $\tilde{f}_n(x)$ на $\mathbb{R}_+$. Но так как двоичные отрезки

$$I_k^n = [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

не пересекаются, то скобки в правой части (3.4) можно опустить. В результате получим равенство

$$\tilde{f}_n(x) = 2^{n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_n(k) X_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))}(x),$$

причем ряд справа равномерно сходится к $\tilde{f}_n(x)$ на $\mathbb{R}_+$. Отсюда следует равенство

$$|\tilde{f}_n(x)| = 2^{n/2} \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_n(k)| X_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{f}_n(x)|}{x} dx = 2^{n/2} \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_n(k)| \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq 2^{n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}_n(k)|}{k}. \quad (3.5)$$

На основании следствия 1 из леммы 1 $\hat{f}_n(k) = \hat{f}(k)$, $k = 1, 2, \dots$, где $\hat{f}(k)$ вычисляются по формулам (2.9). Поэтому из неравенства (3.5), применяя лемму 5, получим

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{f}_n(x)|}{x} dx \leq 50\sqrt{2} \|f\|_{H(D_n)} \leq 50\sqrt{2} \|f\|_{H(\mathbb{R}_+)}. \quad (3.6)$$

Поскольку $\|f_n - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то $\tilde{f}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$, $n \rightarrow \infty$, для $x \in \mathbb{R}_+$. Поэтому из (3.6) на основании классической теоремы Фату (см. [9, гл. 7]) вытекает неравенство (3.1). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some new properties of Fourier constants // *Math. Annalen.* 1926. V. 97. P. 159–209.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
3. *Hille E., Tamarkin J. D.* On the absolute integrability of Fourier transforms // *Fundamenta Math.* 1935. V. 25. P. 329–352.
4. *Ladshawala N. R.* Absolute summability of Walsh–Fourier series // *Pacific J. Math.* 1976. V. 65. P. 103–108.
5. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1990.
6. *Fine N. J.* The generalized Walsh functions // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1950. V. 69. P. 66–77.
7. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
8. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // *Матем. сб.* 1964. Т. 63. №3. С. 356–391.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Московский государственный
инженерно-физический институт
(технический университет)
E-mail: golubov@math.mipt.ru

Поступило в редакцию
17.V.2000