Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Городенцев, А. Н. Тюрин, Абелева лагранжева алгебраическая геометрия,
Изв. РАН. Сер. матем., 2001, том 65, выпуск 3, 15–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/im334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:29:23

УДК 512.7+514.7+514.8

А. Л. Горodenцев, А. Н. Тюрин

Абелева лагранжева алгебраическая геометрия

Этой работой начинается детальное изложение геометрической концепции квантования, представленной в серии препринтов [23]–[25], . . . , которая соединяет в себе методы алгебраической и лагранжевой геометрии. Вводится бесконечномерное келерово многообразие $\mathcal{P}^{\text{hw}}$ полувзвешенных планковских циклов, связанное с любым $U(1)$ -расслоением предквантования L на произвольном симплектическом многообразии M . Строится канонически ассоциированное с каждой келеровой поляризацией на M отображение $\mathcal{P}^{\text{hw}} \xrightarrow{\gamma} H^0(M, L)$ в пространство голоморфных сечений расслоения предквантования. Показывается, что это отображение имеет постоянный келеров угол и его “доворот” до голоморфного отображения представляет собой отображение Бортвика–Паоля–Урибе. Простейшей нетривиальной иллюстрацией всех этих конструкций служит теория лежандровых узлов в S^3 .

Библиография: 28 наименований.

Введение

0.1. Квантование. Математическим выражением классической гамильтоновой динамики является симплектическая геометрия (см. [1]). Гладкое (возможно, некомпактное) C^∞ -многообразие M называется *симплектическим*, если на нем зафиксирована *симплектическая структура*, т.е. замкнутая 2-форма ω , задающая кососимметрический изоморфизм $\omega: TM \xrightarrow{\sim} T^*M$ между касательным и кокасательным расслоениями на M (в частности, $\dim M$ четна). Симплектическая форма задает на пространстве гладких функций $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли относительно скобки Пуассона:

$$\{f_1, f_2\} \stackrel{\text{def}}{=} \omega(H_{f_1}, H_{f_2}),$$

где через $H_f \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{-1}(df)$ обозначено *гамильтоново векторное поле* (или *симплектический градиент*) гладкой функции $f \in C^\infty(M)$, однозначно определяемое условием $\omega(H_f, v) = df(v)$ для любого поля v ; потоки вдоль гамильтоновых векторных полей сохраняют симплектическую форму ω и доставляют решение классической системы гамильтоновых уравнений на фазовые траектории частиц.

В идеале, под *квантованием* такой механической системы понимается некая гипотетическая процедура Q , которая бы перерабатывала симплектическое многообразие (M, ω) в гильбертово пространство $Q(M, \omega)$, называемое *пространством волновых функций*, и сопоставляла бы каждой вещественной функции

$f \in C^\infty(M)$ самосопряженный оператор $Q(M, \omega) \xrightarrow{Q(f)} Q(M, \omega)$ на этом пространстве так, чтобы $Q(f)$ линейно зависели от f , константы представлялись бы скалярными гомотетиями и выполнялись бы *коммутационные соотношения Дирака*

$$[Q(f_1), Q(f_2)] = i\hbar Q(\{f_1, f_2\}). \quad (0.1)$$

Кроме того, на получающееся представление обычно накладывают то или иное условие неприводимости. К несчастью, а может быть, и к счастью, удовлетворить перечисленным требованиям невозможно ввиду теоремы Ван Хува (см. [9]). Математические попытки выхода из создавшегося положения сводятся к поискам подходящего расширения области классических объектов и/или надлежащего ослабления перечисленных выше “правил квантования”. Делать это, разумеется, можно многими путями, в результате чего развитие нынешней “квантовой математики” напоминает радиоактивный распад, идущий, преимущественно, по трем лучам, которые можно характеризовать как *алгебраический, аналитический и геометрический*.

Мы не будем здесь останавливаться на первых двух направлениях, развитых в настоящее время особенно широко, отметим лишь, что алгебраическое квантование: квантовые деформации, $*$ -произведения, некоммутативная геометрия и т.д. — обычно полностью игнорирует геометрию исходной классической механической системы, тогда как аналитический подход: пространства Харди, проекторы Сёге, спектральная теория операторов Фурье и т.д. — напротив, очень привязан к ней.

Геометрическое квантование фиксирует на M комплексное линейное векторное расслоение L , снабженное эрмитовой структурой и эрмитовой связностью a с формой кривизны $F_a = i\hbar\omega$. В качестве пространства волновых функций $Q(M, \omega)$ берется пространство $\Gamma(L)$ гладких сечений расслоения L и каждой функции $f \in C^\infty(M)$ сопоставляется оператор

$$Q(f) = i\hbar \nabla_{H_f}^a + f$$

на этом пространстве (в этой формуле $\nabla_{H_f}^a$ в первом слагаемом правой части обозначает индуцированный связностью a оператор ковариантного дифференцирования сечений расслоения L вдоль гамильтонова векторного поля H_f , а второе слагаемое представляет собой оператор умножения сечений на функцию f). Легко проверить, что все такие операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям Дирака (0.1) и самосопряжены относительно стандартной гильбертовой структуры на $\Gamma(L)$, заданной интегрированием поточечного эрмитова скалярного произведения сечений по симплектическому объему на M . Однако даже в простейшем двумерном случае результат такого предквантования не укладывается в описанную выше шрёдингеровскую схему: пространство всех сечений слишком велико.

Геометрическая модификация правил квантования состоит в фиксации на многообразии M дополнительной геометрической структуры — *поляризации*, т.е. выборе замкнутого относительно скобок Ли лагранжева подрасслоения $P \subset TM \otimes \mathbb{C}$

в комплексифицированном касательном расслоении. В качестве пространства волновых функций теперь берется подпространство $\Gamma_P(L) \subset \Gamma(L)$ сечений, ковариантно постоянных в направлениях P . Однако произвольный оператор $Q(f)$ не будет а priori сохранять подпространство $\Gamma_P(L)$, и мы должны ограничиться пространством тех функций f , чьи гамильтоновы потоки сохраняют поляризацию P . К сожалению, такой набор гамильтонианов оказывается слишком беден, и мы опять будем вынуждены чем-то жертвовать . . .

В настоящее время известно несколько теорий, идущих в намеченном только что направлении, и во многих из них имеются хорошо понятые примеры, показывающие, что результат квантования по существу *не зависит* от фиксации дополнительной геометрической жесткости на M . Это наблюдение возрождает надежду на то, что все-таки существует единая универсальная “геометрия квантования”, которая стоит за перечисленными выше “правилами” и объемлет все имеющиеся физически содержательные конкретные примеры. Попыткой создания оснований такой геометрии и является настоящая работа. Эти основания мы видим в абелевой лагранжевой алгебраической геометрии (АЛАГ), берущей начало на “геометрическом луче” квантовой математики и объединяющей в привычных рамках комплексной проективной геометрии как изощренные аналитические методы лагранжевой геометрии, так и физически осмысленную формальную квантовую алгебру. В рамках настоящей работы мы, однако, ограничимся лишь случаем *келеровой* поляризации, приводящей в простейшем примере $M = \mathbb{C}$ к пространству Баргмана–Сегала–Фока голоморфных функций на $\mathbb{C}$ с суммируемым квадратом¹, которое, в частности, содержит гамильтониан гармонического осциллятора.

0.2. От симплектической геометрии к алгебраической. Алгебро-геометрический дух присутствует практически во всех базисных аналитических конструкциях: основными объектами при исследовании классических и квазиклассических механических систем методами симплектической геометрии являются *лагранжевы подмногообразия* (детали этого “симплектического кредо” см. в [25, с. 5]) – симплектическая геометрия алгебраически может трактоваться как категория, морфизмы в которой определяются посредством лагранжевых подмногообразий (см. [25]), что очень близко к мотивной идеологии в алгебраической геометрии; а спектральная теория интегральных операторов Фурье, на которой основано квантование контактных многообразий по Буте де Монвилю и Гийемину, полностью параллельна теории полиномов Гильберта.

Наиболее прямой путь от симплектической геометрии к алгебраической состоит в том, чтобы зафиксировать на M *келерову поляризацию*, т.е. снабдить M комплексной структурой I и эрмитовой метрикой, мнимая часть которой совпадает с ω . Если предположить дополнительно, что класс когомологий $[\omega]$ является целым, то на келеровом многообразии M_I будет существовать голоморфное комплексное эрмитово линейное расслоение L с $c_1(L) = [\omega]$ и эрмитовой связностью a с формой

¹Относительно гауссовой меры, связанной с эрмитовой структурой на тривиальном линейном расслоении.

кривизны $2\pi i\omega$. Стандартная геометрическая конструкция при каждом $k \in \mathbb{N}$ связывает с таким расслоением отображение

$$\varphi_k: M_I \xrightarrow{x \mapsto \text{Ann}(x)} \mathbb{P}H^0(M_I, L^{\otimes k})^* \quad (0.2)$$

из M в комплексное проективное пространство (через $H^0(M_I, L^{\otimes k})$ мы обозначаем пространство глобальных голоморфных сечений расслоения $L^{\otimes k}$ относительно комплексной структуры, индуцированной I). По теореме Кодаиры отображения (0.2) являются при $k \gg 0$ голоморфными вложениями, т.е. позволяют смотреть на M_I как на проективное алгебраическое многообразие.

С другой стороны, аналитически мы можем воспринимать пространство голоморфных сечений как подпространство $H^0(M_I, L^{\otimes k}) \subset C^\infty(M, L^{\otimes k})$ в бесконечномерном пространстве всех гладких сечений. На пространстве гладких сечений имеются скалярное произведение и норма, индуцированные лиувиллевой формой объема $\Omega = \omega^{\wedge n}$ на M и эрмитовой формой $(*, *)_{L^{\otimes k}}$ на $L^{\otimes k}$ по обычным правилам:

$$\langle s_1, s_2 \rangle_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_M (s_1, s_2)_{L^{\otimes k}} \Omega, \quad \|s\|_k \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle s, s \rangle_k}, \quad s_1, s_2, s \in C^\infty(M, L^{\otimes k}).$$

Таким образом, $Q_k(M_I) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(M_I, L^{\otimes k})$ является замкнутым подпространством гильбертова пространства $L^2(M, L^{\otimes k})$ (пополнения $C^\infty(M, L^{\otimes k})$ по описанной только что норме). Гильбертово пространство $Q_k(M_I) \subset L^2(M, L^{\otimes k})$ называется *пространством волновых функций уровня k* , его проективизация – *пространством состояний*, а ортогональный проектор

$$L^2(M, L^{\otimes k}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(M_I, L^{\otimes k})$$

называется *проектором Сёге*. Описанное в предыдущем абзаце голоморфное проективное вложение φ_k в композиции с (происходящим из эрмитовой структуры на $L^{\otimes k}$) изоморфизмом $\mathbb{P}(H^0(M_I, L^{\otimes k})^*) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{P}(H^0(M_I, L^{\otimes k}))}$ дает при $k \gg 0$ антиголоморфное вложение

$$M_I \xrightarrow{\bar{\varphi}_k} \mathbb{P}(H^0(M_I, L^{\otimes k})).$$

Состояния, попавшие в образ этого вложения, называются *когерентными*. Далее, каждой функции $f \in C^\infty(M)$ отвечает *тёплицев оператор*

$$H^0(M_I, L^{\otimes k}) \xrightarrow{T_f^{(k)}} H^0(M_I, L^{\otimes k}): \quad s \mapsto \Pi_k(f \cdot s).$$

Сопоставление $f \mapsto T_f^{(k)}$ задает линейное отображение Березина–Тёплича из (коммутативной) алгебры функций в (некоммутативную) матричную алгебру:

$$C^\infty(M) \xrightarrow{T_k} \text{End}(H^0(M_I, L^{\otimes k})),$$

которое, хотя никоим образом и не согласуется ни с умножением, ни с пуассоновой структурой, имеет хорошую асимптотику по k в том смысле, что согласно теореме Бордемана–Мейнренкена–Шлихенмайера (см. [12]) для любой функции $f \in C^\infty(M)$ существует константа $K_f > 0$ такая, что

$$\|f\|_\infty + \frac{K_f}{k} \leq \|T_f^{(k)}\| \leq \|f\|_\infty,$$

и для любых функций $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ при $k \rightarrow \infty$ мы имеем асимптотику

$$\|k \cdot i[T_{f_1}^{(k)}, T_{f_2}^{(k)}] - T_{\{f_1, f_2\}}^{(k)}\| \sim \|T_{f_1}^{(k)} \cdot T_{f_2}^{(k)} - T_{f_1 \cdot f_2}^{(k)}\| \sim O(1/k),$$

где под $\|f\|_\infty$ имеется в виду $\sup$ -норма на $C^\infty(M)$, а на $\text{End}(H^0(M_I, L^{\otimes k}))$ берется стандартная операторная норма

$$\|T_f^{(k)}\| = \sup_{s \neq 0} (\|T_f^{(k)}(s)\| / \|s\|).$$

Иными словами, условия Дирака выполняются асимптотически при $k \rightarrow \infty$ (это называется хорошим *квазиклассическим поведением*). Более того, Шлихенмайер показал, что отображение Березина–Тёплица доставляет единственную строгую квантовую деформацию алгебры $C^\infty(M)$ с хорошим квазиклассическим поведением.

0.3. АЛАГ. Как мы уже отмечали, в известных примерах, где описанная нами процедура квантования просчитана достаточно подробно, проективные пространства состояний $\mathbb{P}(Q_k(M_I))$ оказываются *post factum* не зависящими от выбора комплексной структуры, которая *a priori* существенно участвует в построении подлежащих гильбертовых пространств $Q_k(M_I)$. Точнее, на голоморфном векторном расслоении $Q_k \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{M}$ над пространством модулей поляризованных комплексных структур на (M, ω) (слой этого расслоения над точкой $I \in \mathcal{M}$ есть пространство $Q_k(M_I)$) имеется естественная *плоская проективная связность* (детали см. в [19]). Этот феномен геометрически обусловлен тем, что в пространстве лагранжеских циклов на M имеется естественное подмногообразие конечной коразмерности, обладающее *внутренней* келеровой структурой, обусловленной одной лишь симплектической геометрией M , что позволяет устроить “универсальное погружение” симплектической геометрии на M в алгебраическую геометрию, которое посредством привычных алгебро-геометрических приемов управляет всеми специальными алгебро-геометрическими свойствами M , возникающими при фиксации на M дополнительных данных. Точный смысл этих слов читатель узнает из следующего далее основного текста настоящей работы.

Организован он так. В § 1 мы напоминаем необходимые нам (по большей части, стандартные) концепции симплектической и дифференциальной геометрии: лагранжеские циклы, униформизация Дарбу–Вейнштейна, взаимодействие симплектической и почти эрмитовой структур, абелевы связности и унитарные характеры фундаментальной группы, якобианы и т.д. В § 2 мы вводим пространства бор-зоммерфельдовых и планковых циклов и дополнительные структуры на

них: расслоения Берри, полувеса и т.д. Мы строим канонические интегрируемые келеровы структуры на пространствах $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$ полувзвешенных планковых циклов уровня k и пространствах $\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}}$ бор-зоммерфельдовых циклов уровня k и фиксированного объема t . Центральное место работы занимает § 3, где мы детально описываем процедуру геометрического квантования посредством келеровой поляризации и даем геометрическое описание голоморфных отображений Бортвика–Пауля–Урибе $\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}} \xrightarrow{\text{BPU}_k} \mathbb{P}(H^0(L^{\otimes k})^*)$. В последнем § 4 мы прослеживаем, как все наши конструкции выглядят в простейшем нетривиальном примере, где в качестве исходной симплектической системы (M, ω) выступает риманова сфера $S^2 \simeq \mathbb{CP}_1$ со стандартной келеровой формой. Лагранжевы циклы при этом превращаются в уникальные кривые на S^2 , а планковые циклы – в лежащие над такими кривыми лежандровы узлы на сфере S^3 , расслоенной над S^2 по Хопфу. Таким образом, эта “простейшая” иллюстрация АЛАГ охватывает теорию лежандровых узлов.

§ 1. Предварительные сведения и обозначения

1.1. Лагранжева геометрия. Через (M, ω) мы всегда обозначаем гладкое $2n$ -мерное ориентированное вещественное многообразие M с фиксированной замкнутой кососимметричной 2-формой ω , задающей изоморфизм между касательным и кокасательным расслоениями:

$$\omega: TM \xrightarrow{\sim} TM^*. \quad (1.1)$$

Фиксируем какое-либо гладкое n -мерное ориентированное вещественное многообразие S , а также некоторый гомотопический класс $\text{Map}_{\text{LA}}(S, M)$ гладких отображений

$$S \xrightarrow{\varphi} M,$$

удовлетворяющих условию $\varphi^*(\omega) = 0$. Пространство $\text{Map}_{\text{LA}}(S, M)$ называется *пространством лагранжевых отображений* (фиксированного топологического типа) и представляет собой бесконечномерное многообразие с естественным действием группы $\text{Diff}_0(S)$ гомотопных тождественному диффеоморфизмов S по правилу

$$h: \varphi \mapsto \varphi \circ h^{-1},$$

где $h \in \text{Diff}_0(S)$, $\varphi \in \text{Map}_{\text{LA}}(S, M)$. Соответствующее пространство орбит

$$\mathfrak{L} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}_{\text{LA}}(S, M) / \text{Diff}_0(S)$$

называется пространством *лагранжевых циклов*².

²В настоящей работе мы полностью игнорируем все вопросы, связанные с глобальной геометрией и топологией пространства $\mathfrak{L}$, и будем заниматься лишь локальным анализом вблизи гладких точек, где $\mathfrak{L}$ допускает довольно простое описание (см. ниже).

Лагранжев цикл $S \xrightarrow{f} M$ называется *гладко вложенным* (соответственно *гладко погруженным*), если φ является гладким вложением (соответственно погружением). В первом случае образ $f(S) \subset M$ называется *лагранжевым подмногообразием* в M , и условие $\varphi^*\omega = 0$ означает, что ω ограничивается на TS в тождественно нулевую форму. В обоих случаях изоморфизм (1.1), доставляемый симплектической структурой на M , отождествляет нормальное расслоение с кокасательным:

$$N_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^*(TM)/TS \simeq \varphi^*(T^*M)/\text{Ann}(TS) \simeq T^*S.$$

1.1.1. *Пример: кокасательное расслоение.* Пусть $M = T^*S \xrightarrow{p} S$ представляет собой кокасательное расслоение гладкого ориентированного многообразия S . Тогда на M имеется каноническая 1-форма η , которая называется *формой действия* и сопоставляет касательному вектору $w \in T_{(\xi, x)}T^*S$, $x \in S$, $\xi \in T_x^*S$, число

$$\eta(w) \stackrel{\text{def}}{=} p^*\xi(w). \quad (1.2)$$

Ее дифференциал $\omega \stackrel{\text{def}}{=} d\eta$ доставляет симплектическую структуру на M . Над локальной открытой картой $U \subset S$, где $T^*S|_U = U \times \mathbb{R}^n$, в координатах

$$(q, p) = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

таких, что q_i суть координаты на U , а p_i – линейные координаты вдоль dq_i на $\mathbb{R}^n$, формы η и ω записываются в виде

$$\eta(p, q) = \sum_{j=1}^n p_j dq_j, \quad \omega(p, q) = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j. \quad (1.3)$$

В частности, слои проекции $M \twoheadrightarrow S$ и нулевое сечение $S \xhookrightarrow{s_0} M$ являются лагранжевыми подмногообразиями в M . Произвольное сечение $S \xhookrightarrow{s} M$ можно воспринимать как график 1-формы $\alpha_s = s^*(\eta)$ такой, что локально $s(x) = (x, \alpha_s(x)) \in U \times \mathbb{R}^n = T^*S|_U$. Этот график является лагранжевым подмногообразием в M тогда и только тогда, когда форма α_s замкнута, поскольку $s^*(\omega) = s^*(d\eta) = ds^*(\eta) = d\alpha_s$.

1.1.2. *Касательное пространство к $\mathcal{L}$ в гладко погруженном цикле.* Касательное пространство $T_\varphi \text{Map}(S, M)$ в гладком погружении $S \xrightarrow{\varphi} M$ представляет собой пространство гладких сечений $C^\infty(S, \varphi^*TM)$ поднятого касательного расслоения на M , поскольку малые 1-параметрические деформации φ суть сдвиги вдоль интегральных траекторий векторных полей v , определенных локально вблизи $\varphi(S)$. Сохранение условия $\varphi^*(\omega) = 0$ при таком сдвиге равносильно равенству

$\varphi^*(\mathcal{L}_v\omega) = 0$. Наконец, касательное пространство к проходящей через φ орбите группы $\text{Diff}_0(S)$ состоит из $v \in C^\infty(S, TS) \subset C^\infty(S, \varphi^*TM)$. Таким образом,

$$T_\varphi(\text{Map}(S, M)/\text{Diff}_0(S)) = \{v \in \mathcal{C}^\infty(S, N_\varphi) \mid \varphi^*(\mathcal{L}ie_v\omega) = 0\}.$$

Описанное в п. 1.1 отождествление нормального расслоения N_φ с кокасательным расслоением $T^*\varphi(S)$ отправляет векторное поле v из предыдущей формулы в 1-форму $\xi = \varphi^*(i_v\omega) \in C^\infty(S, T^*S)$. При этом поля $v \in T_\varphi\mathfrak{L}$ переходят в *замкнутые* 1-формы, поскольку

$$d\xi = d\varphi^*(i_v\omega) = \varphi^*(di_v\omega) = \varphi^*(\mathcal{L}_v\omega + i_vd\omega) = \varphi^*(\mathcal{L}_v\omega) = 0.$$

Мы получаем

1.1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Касательное пространство $T_\varphi\mathfrak{L}$ в гладко погруженном лагранжевом цикле $S \xrightarrow{\varphi} M$ естественно отождествляется с пространством $Z_{\text{DR}}^1(S)$ замкнутых 1-форм на S .*

1.1.4. Униформизация Дарбу–Вейнштейна. Знаменитая теорема Дарбу–Вейнштейна в одной из своих многочисленных переформулировок (см. [18, гл. 4, § 1], [27, § 6] и [28, § 4]) утверждает, что для каждого гладко погруженного лагранжева цикла $S \xrightarrow{\varphi} M$ можно указать открытую трубчатую окрестность U вокруг нулевого сечения кокасательного расслоения T^*S и гладкое погружение $U \xrightarrow{\hat{\varphi}} M$ такое, что $\hat{\varphi}^*\omega = d\eta$ есть стандартная симплектическая структура на T^*S , а ограничение $\hat{\varphi}$ на нулевое сечение совпадает с исходным погружением φ . Если исходное погружение было вложением, то можно считать, что $U = T^*S$, и $\hat{\varphi}$ доставляет симплектический изоморфизм кокасательного расслоения T^*S (оснащенного стандартной симплектической структурой, описанной в п. 1.1.1) с открытой трубчатой окрестностью лагранжева подмногообразия $f(S) \subset M$.

Гладкое погружение $T^*S \supset U \xrightarrow{\hat{\varphi}} M$, продолжающее по Дарбу–Вейнштейну исходное погружение $S \xrightarrow{\varphi} M$, переводит содержащиеся в U графики замкнутых 1-форм в лагранжевы циклы, лежащие вблизи $\varphi(S)$ на M . В результате возникает *экспоненциальное отображение*

$$T_S\mathfrak{L} \supset \mathfrak{U} \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{L}, \quad (1.4)$$

где $\mathfrak{U} \subset Z_{\text{DR}}^1(S)$ состоит из всех 1-форм ξ , график которых содержится в U . Из результатов Вейнштейна [27, § 6], [28, § 4] следует, что образ отображения (1.4) содержит некоторую открытую окрестность исходного цикла φ в подходящей топологии на $\mathfrak{L}$. Таким образом, вблизи гладкого погружения $S \xrightarrow{\varphi} M$ пространство $\mathfrak{L}$ является (бесконечномерным) гладким многообразием, в качестве карты на котором можно использовать окрестность нуля в пространстве замкнутых 1-форм $Z_{\text{DR}}^1(S)$. Подпространства *точных* 1-форм $B_{\text{DR}}^1(S) \subset Z_{\text{DR}}^1(S) = T_S\mathfrak{L}$ составляют на $\mathfrak{L}$ гладкое распределение коразмерности $b_1 = \dim H^1(S, \mathbb{R})$. Локально, вблизи

каждого гладкого погруженного цикла, экспоненциальное отображение интегрирует это распределение до слоения, листы которого имеют коразмерность b_1 и называются *изодрастами*³. Графики двух близких замкнутых 1-форм на S лежат на одной изодрасте, если и только если формы когомологичны.

1.2. Псевдокелерова геометрия. Гладкое вещественное $2n$ -мерное многообразие M называется *псевдоголоморфным* (соответственно *псевдоэрмитовым*), если на TM задана структура комплексного (соответственно эрмитова) расслоения ранга n . Последнее означает, что на TM имеются $\mathbb{R}$ -линейный оператор $TM \xrightarrow{I} TM$, риманова метрика $g: TM \xrightarrow{\sim} TM^*$ и невырожденная кососимметрическая форма $\omega: TM \xrightarrow{\sim} TM^*$, удовлетворяющие условиям $I^2 = -\text{Id}$, $g(v, w) = \omega(Iv, w)$, $\omega(v, Iw) = -\omega(Iv, w)$ и $g(v, Iw) = -g(Iv, w)$ (в действительности тройка (I, g, ω) однозначно восстанавливается по любым двум своим элементам при помощи этих условий). Псевдоголоморфность предполагает лишь наличие одного оператора комплексной структуры I . Псевдоэрмитово многообразие M называется *псевдокелеровым*, если косая форма ω замкнута, т.е. определяет симплектическую структуру M .

Псевдоголоморфные многообразия обладают многими “линейно-алгебраическими” свойствами комплексно-аналитических пространств, поскольку комплексифицированное касательное расслоение на любом псевдоголоморфном многообразии M тоже распадается в прямую сумму $\mathbb{C} \otimes TM = T_+M \oplus T_-M$ собственных подпространств оператора I , отвечающих его собственным значениям $\pm i$. В частности, на таком многообразии определен класс *псевдоголоморфных функций* $M \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, дифференциал которых df аннулирует подпространство T_-M , а также псевдоголоморфные подмногообразия, которые локально определяются как множества общих нулей системы псевдоголоморфных функций, псевдоголоморфные комплексные векторные расслоения и т.д.

1.2.1. ЛЕММА. Пусть $V \subset M$ является (возможно, особым) псевдоголоморфным подмногообразием гладкого псевдоэрмитова многообразия M . Тогда ограничение формы ω на касательный конус $TC_x V \subset V$ в любой точке $x \in V$ невырождено в том смысле, что для любого ненулевого вектора $v \in TC_x V$ существует $u \in TC_x V$ такой, что $\omega(v, u) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Псевдоголоморфность V означает, что оператор I переводит касательный конус $TC_x V$ в себя и тем самым действует на нем биективно, ибо $I^{-1} = -I$. Поскольку риманова метрика g положительно определена, для любого ненулевого вектора $v \in TC_x V$ мы имеем $\omega(v, Iv) = -g(v, v) < 0$ и можем взять $u = Iv$.

1.2.2. СЛЕДСТВИЕ. Никакое ненулевое псевдоголоморфное сечение никакого псевдоголоморфного линейного расслоения на псевдоэрмитовом многообразии не может тождественно зануляться ни на каком лагранжевом цикле.

³Развернутая этимология этого (греческого) термина имеется в [26].

Доказательство. Множество нулей ненулевого псевдоголоморфного сечения линейного расслоения представляет собой псевдоголоморфное подмногообразие Z размерности $\leq (2n-2)$ на исходном $2n$ -мерном псевдоэрмитовом многообразии M . Поэтому если Z содержит какой-либо n -мерный лагранжев цикл S , то ограничение формы ω на TZ обязательно будет вырождено вдоль S , что невозможно по предыдущей лемме.

1.2.3. Пример: касательные расслоения. Пусть $M = TX$ – касательное расслоение произвольного гладкого вещественного n -мерного ориентированного многообразия X . Тогда на M имеется каноническая псевдоголоморфная структура, приходящая из расщепления

$$TM = T(TX) = TX_{\uparrow} \oplus TX_{\rightarrow},$$

в котором “вертикальное” подпространство $TX_{\uparrow} \simeq TX$ представляет собой ядро дифференциала естественной проекции $TX \rightarrow X$, а “горизонтальное” подпространство $TX_{\rightarrow} \simeq TX$ есть образ дифференциала нулевого сечения $X \hookrightarrow TX$. На языке этого разложения оператор умножения на $i \in \mathbb{C}$ в точке $(v, q) \in TX$ с $v \in T_x X$, $q \in X$ переводит касательный вектор $w = (w_1, w_2) \in T_{(v,q)} TX$ в $(-w_2, w_1)$. Более того, эта комплексная структура интегрируема: каждая локальная система координат $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ на X вблизи $q \in X$ дает систему *комплексных* координат $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ на TX с $z_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} x_{\nu} + iy_{\nu}$, где через x_{ν} обозначена линейная координата вдоль базисного вектора $\partial/\partial y_{\nu}$ в слое $T_q X$. Легко проверить, что гладкая замена координат y на X приводит к голоморфной замене координат z на TX , которые, тем самым, составляют комплексно-аналитический атлас. В терминах этого атласа, действие умножения на $i \in \mathbb{C}$ в $T_{(v,q)} TX$ происходит по праву

$$(\partial/\partial x, \partial/\partial y) \mapsto (\partial/\partial y, -\partial/\partial x).$$

Напомним теперь (см. п.1.1.1), что на кокасательном расслоении T^*X есть каноническая симплектическая структура $\omega = d\eta$, симплектический базис которой в касательном пространстве $T(T^*X)$ имеет вид $(dy, \partial/\partial y)$. Следовательно, любой изоморфизм расслоений $TX \xrightarrow{\sim} T^*X$ задает *слабую* псевдокелерову структуру на обоих многообразиях TX, T^*X , т.е. определяет на каждом из них тройку (I, g, ω) , удовлетворяющую всем перечисленным в начале п. 1.2 условиям, за исключением разве что положительности симметрической формы $g(u_1, u_2) = \omega(u_1, Iu_2)$. В частности, если на X задана риманова метрика $TX \xrightarrow{G} T^*X$, то на кокасательном расслоении $M = T^*X$ возникает интегрируемая комплексная структура

$$I: (\xi, v) \mapsto (Gv, -G^{-1}\xi),$$

согласованная с канонической симплектической формой $\omega = d\eta$ из (1.3); более того, в этом случае симметрическая форма $g(u_1, u_2) = \omega(u_1, Iu_2)$ будет положительно определена и $M = T^*X$ будет полноценным (правда, некомпактным) келеровым многообразием.

1.3. Эрмитовы линейные расслоения. В этой работе мы будем иметь дело с комплексными эрмитовыми линейными расслоениями на гладких ориентированных вещественных многообразиях X . Такое расслоение $L \twoheadrightarrow X$ однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим первым классом Чжэня $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ и тавтологически ассоциировано с главным $U(1)$ -расслоением $P \twoheadrightarrow X$ единичных окружностей в L , т.е. $L = P \times_{U(1)} \mathbb{C}$.

Алгебру Ли $\mathfrak{su}(1)$ мы всегда будем отождествлять с $\mathbb{R}$ так, чтобы экспоненциальное отображение $\mathbb{R} = \mathfrak{su}(1) \rightarrow U(1)$ имело вид $t \mapsto e^{2\pi i t}$ и тавтологическое действие $\mathbb{R} = \mathfrak{su}(1)$ на $\mathbb{C}$ происходило по правилу $z \mapsto e^{2\pi i t} z$. Мы обозначаем через ν единственную инвариантную 1-форму на $U(1)$ с $\int_{U(1)} \nu = 1$, а через u – двойственное инвариантное векторное поле, так что $\nu(u) = 1$. Через u мы также будем обозначать соответствующее вертикальное векторное поле на любом главном $U(1)$ -расслоении $P \twoheadrightarrow X$.

1.3.1. Эрмитова связность на главном $U(1)$ -расслоении $P \xrightarrow{p} X$ представляет собой 1-форму α , удовлетворяющую условиям $\mathcal{L}ie_u \alpha = 0$ и $\alpha(u) = 1$, первое из которых означает $U(1)$ -инвариантность формы α , а второе – что α является проектором касательного пространства к P на вертикальное подпространство, касательное к слою, т.е. расщепляет каноническую точную тройку касательных пространств

$$0 \rightarrow TU(1) \xrightleftharpoons{\alpha} TP \xrightarrow{dp} p^*TX \rightarrow 0$$

(и гиперплоскости $\ker \alpha \subset TP$ называются *горизонтальными*). Любое векторное поле v на X может быть (многими способами) поднято до $U(1)$ -инвариантного векторного поля w на P такого, что $dp(w) = v$. Среди таких подъемов w есть единственное горизонтальное векторное поле $\tilde{w} = w - \alpha(w)u$, называемое *горизонтальным подъемом*.

На векторном расслоении L , ассоциированном с P , связность α определяет дифференциальный оператор

$$\mathcal{C}^\infty(X, L) \xrightarrow{\nabla_\alpha} \mathcal{C}^\infty(X, T^*X \otimes L),$$

который называется *ковариантным дифференцированием* сечений. На локальное унитарное сечение σ над маленьким открытым шаром $U \subset X$ этот оператор действует по правилу $\nabla \sigma = 2\pi i \xi_\sigma \otimes \sigma$, где $\xi_\sigma = \sigma_P^* \alpha$ – подъем 1-формы α с P на U вдоль локального сечения $U \xrightarrow{\sigma_P} P$, индуцированного (однозначно с точностью до действия $U(1)$) унитарным сечением $U \xrightarrow{\sigma} L$. Ковариантная производная произвольного локального сечения $f\sigma$ с $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ вычисляется по формуле

$$\nabla(f\sigma) = (df + 2\pi i f \xi_\sigma) \otimes \sigma.$$

При выборе другого локального унитарного базиса $\sigma' = h\sigma$ с $h \in C^\infty(U, U(1))$ коэффициенты ξ_σ заменяются на

$$\xi_{\sigma'} = \xi_\sigma - \frac{i}{2\pi} \frac{dh}{h} = \xi_\sigma - \frac{i}{2\pi} d \log h. \quad (1.5)$$

В частности, локальное сечение $f\sigma$ ковариантно постоянно тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d \log f = -2\pi i \xi_\sigma, \quad (1.6)$$

которое (локально) разрешимо, если и только если $d\xi_\sigma = 0$.

1.3.2. Плоские связности и якобиан. Формула (1.5) показывает, что дифференциалы $d\xi_\sigma$ не зависят от выбора локального унитарного базиса и склеиваются в глобальную замкнутую 2-форму $\omega_a \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^*X)$, которую мы будем называть *вещественной формой кривизны*⁴ связности a . Ее подъем $p^*\omega_a = d\alpha_a$ на главное расслоение $P \xrightarrow{p} X$ действует на пару $U(1)$ -инвариантных векторных полей v_1, v_2 на P по правилу

$$d\alpha(v_1, v_2) = (\mathcal{L}ie_{v_1} \alpha - d(\alpha(v_1)))(v_2) = \mathcal{L}ie_{v_1} \alpha(v_2) = -\alpha([v_1, v_2]).$$

Из выписанных чуть ниже точных последовательностей (1.8) и (1.7) легко усматривается, что класс когомологий $[\omega_a] \in H^2(X, \mathbb{R})$ является целочисленным и совпадает с первым классом Чженя расслоения L :

$$[\omega_a] = c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^2(X, \mathbb{R}).$$

Эрмитова связность a называется *плоской*, если ее кривизна нулевая: $\omega_a = 0$. В этом случае расслоение L топологически тривиально, т.е. обладает глобальным гладким унитарным сечением $X \xrightarrow{\sigma} L$. Одновременно над каждым односвязным открытым множеством U расслоение L будет допускать *ковариантно постоянную* тривиализацию, поскольку уравнения (1.6) будут решаться как $f = ce^{-2\pi i g}$, где g – произвольно зафиксированная функция на U с $dg = \xi_\sigma$, а $c \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная. Ковариантно постоянные над U *унитарные* сечения соответствуют $|c| = 1$ и образуют главное однородное пространство над $U(1)$.

В частности, подъем $\pi^*L \rightarrow \tilde{X}$ плоского расслоения L на универсальную накрывающую $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ всегда имеет глобальное ковариантно постоянное унитарное сечение, и действие фундаментальной группы $\pi_1(X)$ на таких сечениях определяется унитарным характером $\pi_1(X) \xrightarrow{\chi_\alpha} U(1)$. Он называется *голономией* связности α , и значение $\chi(\gamma)$ есть поворот слоя расслоения L при ковариантном параллельном переносе вдоль петли γ . Когомологический класс $[\chi_\alpha] \in H^1(X, U(1))$ не меняется при калибровочных преобразованиях связности α (т.е. при естественном действии группы $\text{Map}(S, U(1))$), и кограничный гомоморфизм длинной последовательности когомологий

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, U(1)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots, \quad (1.7)$$

⁴Обычно *формой кривизны* связности a называют 2-форму $F_a \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi i \omega_a$ со значениями в $\mathfrak{su}(1)$.

ассоциированной с точной тройкой постоянных пучков

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{t \mapsto e^{2\pi i t}} U(1) \longrightarrow 0, \quad (1.8)$$

переводит класс $[\chi_a]$ в $0 = c_1(L)$. Таким образом, калибровочные классы плоских унитарных связностей взаимно однозначно соответствуют когомологическим классам унитарных характеров фундаментальной группы и параметризуются точками вещественного тора

$$J_S \stackrel{\text{def}}{=} H^1(S, \mathbb{R})/H^1(S, \mathbb{Z}), \quad (1.9)$$

который мы будем называть *якобианом* многообразия X .

1.3.3. Якобиевы расслоения. Обозначим через $C = S \times \mathbb{C}$ тривиальное расслоение на S , а через $\mathcal{A}_{\text{FH}}(C)$ – пространство плоских эрмитовых связностей на C . Группа всех гомотопных тождественному диффеоморфизмов $C \xrightarrow{\sim} C$, линейно отображающих слои в слои, изоморфна полупрямому произведению

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}(S, U(1)) \rtimes \text{Diff}_0(S),$$

в котором $\text{Diff}_0(S)$ действует на нормальной подгруппе $\text{Map}(S, U(1))$ по правилу

$$h\gamma h^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \circ h^{-1}.$$

Пространство орбит диагонального действия $\mathcal{G}$ на $\text{Map}_{\text{LA}}(S, M) \times \mathcal{A}_{\text{FH}}(C)$, т.е.

$$\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}_{\text{LA}}(S, M) \times \mathcal{A}_{\text{FH}}(C)/\mathcal{G}, \quad (1.10)$$

называется *якобиевым расслоением* над $\mathfrak{L}$. Его слой над данным гладко погруженным лагранжевым циклом $S \xrightarrow{f} M$ представляет собой пространство классов калибровочно эквивалентных плоских эрмитовых связностей, т.е. якобиан (1.9). Отметим, что имеется канонический линейный эпиморфизм касательного пространства $T_S \mathfrak{L} = Z_{\text{DR}}^1(S)$ базы якобиева расслоения на касательное пространство $TJ_S = H^1(S, \mathbb{R})$ его слоя, переводящий замкнутую 1-форму в ее когомологический класс. Существование такого отображения играет в дальнейшем ключевую, хотя и не всегда заметную, роль.

§ 2. Келерова геометрия лагранжевых циклов

2.1. Предквантовое оснащение. Мы понимаем под таковым фиксацию на симплектическом многообразии (M, ω) комплексного эрмитова линейного расслоения $L \rightarrow M$ с эрмитовой связностью α , вещественная форма кривизны которой совпадает с ω (т.е. сама кривизна равна $F_\alpha = 2\pi i \omega$, см. п. 1.3.2). Такое оснащение

возможно тогда и только тогда, когда когомологический класс симплектической формы является целым:

$$[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z}) \subset H^2(M, \mathbb{R}).$$

В дальнейшем мы всюду предполагаем, что это условие выполнено и некоторое предквантовое оснащение (M, ω, L, α) зафиксировано. Отметим, что при этом $[\omega] = c_1(L)$, а 1-форма α задает *контактную структуру* на главном $U(1)$ -расслоении $P \xrightarrow{p} M$, тавтологически ассоциированном с L , т.е. соответствующая старшая форма $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} = \alpha \wedge p^*\omega^{\wedge n}$ нигде не обращается в нуль⁵.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ мы обозначаем через $P_k \xrightarrow{p_k} M$ главное $U(1)$ -расслоение, тавтологически ассоциированное с $L^{\otimes k}$. Связность α стандартным образом индуцирует на P_k эрмитову связность α_k с вещественной формой кривизны $\omega_k = k\omega$. При $k, m \in \mathbb{N}$ эти главные расслоения организуются в коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P_k & \xrightarrow{\mu_{m,k}} & P_{mk} \\ & \searrow p_k & \swarrow p_{mk} \\ & M & \end{array} \quad (2.1)$$

в которых $P_k \xrightarrow{\mu_{m,k}} P_{mk}$ суть неразветвленные накрытия степени m , задаваемые послойным возведением в m -тую степень: $z \mapsto z^m$. Четверка $(M, \omega, P_k, \alpha_k)$ называется *предквантовым оснащением уровня k* на фазовом пространстве (M, ω) . Эрмитово линейное расслоение $L^{\otimes k} \rightarrow M$ называется *линейным расслоением предквантования k -го уровня*.

2.2. Циклы Бора–Зоммерфельда. Поскольку кривизна связности α_k пропорциональна симплектической форме, ограничение $\varphi^*L^{\otimes k}$ расслоения предквантования на любой лагранжев цикл $S \xrightarrow{\varphi} M$ представляет собой тривиальное расслоение с плоской связностью на S , что задает точку на якобиане J_S (см. (1.9)). Сопоставляя такую точку каждому лагранжеву циклу $S \in \mathfrak{L}$, мы получаем сечение якобиева расслоения $\mathfrak{L} \xrightarrow{j_k} \mathcal{J}$ (см. п. 1.3.3). Множество нулей этого сечения называется *пространством циклов Бора–Зоммерфельда уровня k* (кратко: BS_k -циклов) и обозначается $\mathcal{B}_k$. Иными словами, лагранжев цикл $S \xrightarrow{\varphi} M$ тогда и только тогда является BS_k -циклом, когда голономия связности $\varphi^*\alpha_k$ на тривиальном расслоении $\varphi^*L^{\otimes k}$ тоже тривиальна, т.е. это расслоение допускает *ковариантно постоянную* тривиализацию $\varphi^*L^{\otimes k} \simeq S \times \mathbb{C}$. Поскольку вместе с $\varphi^*L^{\otimes k}$ при этом ковариантно тривиализуются и все степени $\varphi^*L^{\otimes mk}$, мы имеем естественные вложения

$$\mathcal{B}_k \xhookrightarrow{\beta_{k,m}} \mathcal{B}_{mk} \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

⁵Подробнее о контактных структурах см. в [1, добавление 4].

2.3. Циклы Планка и расслоение Берри. Как мы уже упоминали выше, 1-форма связности α_k может рассматриваться как контактная структура на P_k с формой объема

$$\alpha_k \wedge (d\alpha_k)^{\wedge n} = k^n \alpha_k \wedge (p^*\omega)^{\wedge n}. \quad (2.3)$$

Обозначим через $\text{Map}_{\text{LE}}(S, P_k) \stackrel{\text{def}}{=} \{S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k \mid \tilde{\varphi}^*(\alpha_k) = 0\}$ пространство гладких *лежандровых* отображений (их образы $\varphi(S) \subset P$ являются *лежандровыми* циклами для контактной структуры α_k). Пространство орбит

$$\mathcal{P}_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}_{\text{LE}}(S, P_k) / \text{Diff}_0(S)$$

называется *пространством планковых циклов k -го уровня*.

Условимся обозначать через $\varphi = p_k \circ \tilde{\varphi}: S \rightarrow M$ композицию лежандрова отображения $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k$ с канонической проекцией $P_k \xrightarrow{p_k} M$. Поскольку $\varphi^*\omega = d\tilde{\varphi}^*\alpha_k/k = 0$, эта композиция представляет собой BS_k -цикл. Таким образом, любой планков цикл $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k \varphi^*P_k$ есть не что иное, как ковариантно постоянное унитарное сечение расслоения $\varphi^*L^{\otimes k}$ над S , т.е. BS_k -цикл вместе с фиксированной ковариантной тривиализацией $L^{\otimes k}$. Поскольку такие тривиализации образуют главное однородное пространство над $U(1)$ (см. п. 1.3.2), пространство планковых циклов k -го уровня представляет собой главное $U(1)$ -расслоение над BS_k -циклами:

$$\mathcal{P}_k \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{B}_k. \quad (2.4)$$

Это расслоение называется *главным расслоением Берри* уровня k . Тавтологически ассоциированное с ним комплексное линейное эрмитово расслоение $\mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{P}_k$ называется *линейным расслоением Берри*. Как показывают формулы (2.1) и (2.2), послойное возведение в m -ю степень дает неразветвленные m -листные накрытия:

$$\mathcal{P}_k \xrightarrow{\tilde{\mu}_{m,k}} \beta_{m,k}^* \mathcal{P}_{mk} \quad \forall k, m \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

т.е. $\beta_{k,m}^* \mathcal{L}_{mk} = \mathcal{L}_k^{\otimes m}$.

2.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Касательное пространство $T_{\tilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ в гладко вложенном планковом цикле $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k$ естественно отождествляется с пространством гладких функций $C^\infty(S)$; при этом дифференциалы $d\tilde{\mu}_{k,m}$ накрытий (2.5) будут действовать на $C^\infty(S)$ скалярными умножениями на m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая, как и в п. 1.1.2, мы видим, что

$$T_{\tilde{\varphi}}(\text{Map}_{\text{LE}}(S, P_k) / \text{Diff}_0(S)) = \{v \in C^\infty(S, N_{P_k/S}) \mid \tilde{\varphi}^*(\mathcal{L}ie_v \alpha_k) = 0\},$$

т.е. касательный вектор к $\mathcal{P}_k$ в $\tilde{\varphi}$ представляет собой класс локального векторного поля, определенного на P_k вблизи $\tilde{\varphi}(S)$ и такого, что $\mathcal{L}ie_v \alpha_k = 0$ по модулю полей, касательных к $\tilde{\varphi}(S)$. Вертикальная компонента такого поля имеет вид $f_v \cdot u$, где u – стандартное базисное инвариантное унитарное вертикальное векторное поле

на P_k , а $f_v = \alpha_k(v) \in C^\infty(P)$ есть результат свертки v со связностью α_k . Сопоставление

$$v \longmapsto \tilde{\varphi}^* f_v \in C^\infty(S) \quad (2.6)$$

корректно определяет отображение $T_{\tilde{\varphi}} \mathcal{P}_k \longrightarrow C^\infty(S)$, ибо α_k аннулирует касательные к $\tilde{\varphi}(S)$ поля в силу лежандровости $\tilde{\varphi}$. Это отображение является изоморфизмом, поскольку поле v однозначно (по модулю полей, касательных к $\tilde{\varphi}(S)$) восстанавливается из $\tilde{\varphi}^* f_v$. В самом деле, в качестве его вертикальной компоненты можно взять поле $f_v \cdot u$, где f_v – произвольное гладкое продолжение заданной функции $\tilde{\varphi}^* f_v \in C^\infty(S)$ на некоторую окрестность образа $\tilde{\varphi}(S) \subset P_k$, а в качестве горизонтальной компоненты надо взять горизонтальную составляющую любого векторного поля $\tilde{v}$ на P_k такого, что

$$\tilde{v} \lrcorner d\alpha_k = \frac{1}{k} df_v$$

(поскольку $\ker d\alpha_k = \ker p_k^* \omega$ совпадает с вертикальным направлением в TP_k , такое поле существует и его горизонтальная компонента определена корректно). Действительно, ω -произведение горизонтальной компоненты $dp(v - \alpha_k(v) \cdot u)$ исходного векторного поля v с произвольным полем w на M равна

$$\begin{aligned} \omega(dp(v - \alpha_k(v) \cdot u), w) &= p^* \omega(v, \tilde{w}) = \frac{1}{k} d\alpha_k(v, \tilde{w}) \\ &= \frac{1}{k} [\mathcal{L}ie_v \alpha_k + d(\alpha_k(v))] (\tilde{w}) = \frac{1}{k} df_v(\tilde{w}), \end{aligned}$$

где через $\tilde{w}$ обозначен горизонтальный подъем поля w с M на P_k .

2.3.2. Касательное пространство к $\mathcal{B}_k$. Пусть планков цикл $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k$ представляет собой ковариантно постоянное сечение $S \xrightarrow{\sigma} \varphi^* P_k$ над гладко вложенным BS_k -циклом $S \xrightarrow{\varphi} M$. Предыдущее доказательство позволяет интерпретировать дифференциал

$$T_{\tilde{\varphi}} \mathcal{P}_k \xrightarrow{d\pi|_{\tilde{\varphi}}} T_{\varphi} \mathcal{B}_k$$

проекции расслоения Берри k -го уровня $\mathcal{P}_k \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}_k$ как деленный на k внешний дифференциал на многообразии S :

$$C^\infty(S, \mathbb{R}) \xrightarrow{\frac{1}{k} d} B_{\text{DR}}^1(S).$$

Таким образом, подпространство BS_k -циклов $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{L}$ представляет собой *изодрасту*, т.е. $T_S \mathcal{B}_k \simeq B_{\text{DR}}^1(S)$, причем в терминах этого отождествления дифференциалы $d\beta_{k,m}$ вложений (2.2) действуют на $B_{\text{DR}}^1(S)$ скалярными умножениями на m .

2.3.3. Локальные координаты на $\mathcal{P}$ вблизи гладкого цикла. Согласно теореме Дарбу–Вейнштейна (см. п. 1.1.4) подлежащий планкову циклу $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k$ бор-зоммерфельдов цикл $S \xrightarrow{\varphi} M$ можно продолжить до симплектического отображения $U \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M$ некоторой окрестности U нулевого сечения $S \hookrightarrow T^*S$ кокасательного расслоения. Если обозначить через $S_f^{(k)} \subset T^*S$ график точной 1-формы $df/k \in B_{\text{DR}}^1(S)$, то отображение

$$df \mapsto \hat{\varphi}(S_f^{(k)}) \quad (2.7)$$

будет задавать карту на $\mathcal{B}_k$ в окрестности φ , отождествляя эту окрестность с окрестностью нуля в пространстве точных форм $B_{\text{DR}}^1(S)$ (см. п. 1.1.4). Доказательство предложения из п. 2.3.1 показывает, что отображение (2.7) можно продолжить до отождествления некоторой окрестности нуля в $C^\infty(S, \mathbb{R}) = T_{\tilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ с открытой окрестностью $\tilde{\varphi}$ в пространстве планковых циклов $\mathcal{P}_k$. В самом деле, обозначим через $P_k^U = \tilde{\varphi}^*P_k$ прообраз главного расслоения P_k относительно дарбу-вейнштейновского погружения $U \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M$ и рассмотрим ковариантно постоянное продолжение $U \xrightarrow{\hat{\sigma}} P_k^U$ исходной тривиализации $S \xrightarrow{\sigma} \varphi^*P_k$ над нулевым сечением $S \subset U$ на все U (оно существует, поскольку U стягивается на образ нулевого сечения). Мы сопоставим каждой гладкой функции $f \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ с $S_f^{(k)} \subset U$ BS_k -цикл $S_f^{(k)}$ и тривиализуем над ним P_k^U посредством ковариантно постоянного сечения

$$\sigma_f \stackrel{\text{def}}{=} e^{if} \hat{\sigma}|_{S_f^{(k)}}. \quad (2.8)$$

Полученный планков цикл и будет отвечать функции f в предлагаемой нами карте. Итак, мы ввели в окрестности $\tilde{\varphi}$ на $\mathcal{P}_k$ координаты, изображающие точки этой окрестности гладкими функциями на S . Мы будем называть их *координатами Дарбу–Вейнштейна* на $\mathcal{P}_k$.

2.3.4. Комплексные координаты Дарбу–Вейнштейна на $T\mathcal{P}_k$. В п. 1.2.3 мы видели, что на всяком касательном расслоении имеется каноническая интегрируемая комплексная структура. На касательном расслоении $T\mathcal{P}_k$ к пространству планковых циклов соответствующие комплексные координаты отождествляют окрестность точки $(f, \tilde{\varphi})$ (где $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k$ – планков цикл, а $f \in C^\infty(S) = T_{\tilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ – касательный вектор к нему) с окрестностью нуля в пространстве гладких комплекснозначных функций $\psi = \psi_1 + i\psi_2 \in C^\infty(S, \mathbb{C})$. При этом (в соответствии с обозначениями п. 1.2.3) мы считаем, что вещественные части $\psi_1 \in C^\infty(S, \mathbb{R}) = T_{\tilde{\varphi}}\mathcal{P}_k$ дают линейную координатизацию слоев касательного расслоения, а мнимые части $\psi_2 \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ представляют собой описанные выше координаты Дарбу–Вейнштейна на $\mathcal{P}_k$ вблизи $\tilde{\varphi}$. Мы будем называть такие функции $\psi_1 + i\psi_2$ *комплексными координатами Дарбу–Вейнштейна* на $T\mathcal{P}_k$.

2.4. Полуувзвешенные планковы циклы. Мы собираемся скомбинировать каноническую комплексную структуру на $T\mathcal{P}$ с канонической симплектической структурой на $T^*\mathcal{P}$, чтобы получить интегрируемую келерову структуру на подходящем естественном расслоении над $\mathcal{P}$, допускающем послойное отождествле-

ние как с касательным, так и с кокасательным расслоением. Таковым расслоением является расслоение полувесов.

2.4.1. Полувеса. Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(S)$ класс эквивалентных мер на S , содержащий меру μ_0 , индуцированную структурой гладкого многообразия (ср. с [21, § 2–6]). Этот класс содержит подкласс $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ *гладких* мер, получающихся из μ_0 умножением на положительную гладкую функцию. Напомним, что эквивалентность $\lambda \sim \mu$ двух мер λ, μ на S означает, что $\lambda(B) = 0 \Leftrightarrow \mu(B) = 0$ для любого борелевского подмножества $B \subset S$. По теореме Радона–Никодима это равносильно существованию пары положительных интегрируемых вещественных функций

$$\varrho_{\mu\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} \in L^1(S, \lambda), \quad \varrho_{\lambda\mu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \in L^1(S, \mu),$$

которые удовлетворяют условиям

$$\int_B d\mu = \int_B \varrho_{\mu\lambda} d\lambda, \quad \int_B d\lambda = \int_B \varrho_{\lambda\mu} d\mu$$

для любого борелевского подмножества $B \subset S$ и называются *производными Радона–Никодима*. Предыдущие условия обычно коротко записывают в виде $\lambda = \varrho_{\lambda\mu}\mu$, ибо, конечно, $\varrho_{\mu\lambda}\varrho_{\lambda\zeta} = \varrho_{\mu\zeta}$ и $\varrho_{\mu\lambda}\varrho_{\lambda\mu} = 1$ почти всюду относительно любой меры из $\mathfrak{M}$.

По определению *полувес* (в другой терминологии – *σ -функция*) $\vartheta = f\sqrt{\mu}$ на S представляет собой класс эквивалентных пар (f, μ) с $\mu \in \mathfrak{M}$, $f \in L^2_{\mathbb{R}}(S, \mu)$ по отношению $(f_1, \mu_1) \sim (f_2, \mu_2)$, означающему, что $f_1\sqrt{\varrho_{\mu_1\lambda}} = f_2\sqrt{\varrho_{\mu_2\lambda}}$ почти всюду в любой мере из $\lambda \in \mathfrak{M}$. Полувес $f\sqrt{\mu}$ называется *гладким*, если $f \in C^\infty(S)$ и $\mu \in \mathfrak{M}_0$. Непосредственная проверка (см., например, [21, § 2–6] или [17, п. 4.1]) показывает, что полувеса на S составляют полное нормированное векторное пространство $\mathfrak{H}(S)$ над $\mathbb{R}$, при этом норма на $\mathfrak{H}(S)$ индуцирована скалярным произведением

$$(f_1\sqrt{\mu_1}, f_2\sqrt{\mu_2}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_S f_1 f_2 \sqrt{\varrho_{\mu_1\lambda}\varrho_{\mu_2\lambda}} d\lambda, \quad (2.9)$$

а линейные комбинации полувесов определяются по формуле

$$t_1 f_1 \sqrt{\mu_1} + t_2 f_2 \sqrt{\mu_2} \stackrel{\text{def}}{=} (t_1 f_1 \sqrt{\varrho_{\mu_1\lambda}} + t_2 f_2 \sqrt{\varrho_{\mu_2\lambda}}) \sqrt{\lambda}$$

(через λ в обоих случаях обозначается произвольная мера $\mathfrak{M}$). Гладкие полувеса образуют всюду плотное подпространство $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}(S) \subset \mathfrak{H}(S)$.

Группа $\text{Diff}_0(S)$ действует на $\mathfrak{H}(S)$ по правилу

$$(f, \mu) \xrightarrow{h} (f \circ h^{-1}, (h^{-1})^* \mu),$$

переводя $\overset{\circ}{\mathfrak{H}}$ в себя. Пространства орбит диагонального действия $\text{Diff}_0(S)$ на произведениях

$$\mathfrak{L}^{\text{hw}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}_{\text{LA}}(S, M) \times \mathfrak{H}(S) / \text{Diff}_0(S), \quad \mathscr{P}_k^{\text{hw}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}_{\text{LE}}(S, P_k) \times \mathfrak{H}(S) / \text{Diff}_0(S)$$

называются пространствами *полузвешенных* лагранжевых и планковых циклов соответственно. Заменяя в этих определениях $\mathfrak{H}$ на $\mathring{\mathfrak{H}}$, мы получим всюду плотные подпространства $\mathring{\mathfrak{L}}_k^{\text{hw}} \subset \mathfrak{L}_k^{\text{hw}}$ и $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \subset \mathcal{P}_k^{\text{hw}}$ *гладко полузвешенных* циклов. Отображения забывания $\mathfrak{L}^{\text{hw}} \xrightarrow{F} \mathfrak{L}$ и $\mathcal{P}_k^{\text{hw}} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathcal{P}_k$ организуются в следующую коммутативную диаграмму векторных расслоений:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_k^{\text{hw}} & \longrightarrow & \mathcal{B}_k^{\text{hw}} & \hookrightarrow & \mathfrak{L}^{\text{hw}} \\ \tilde{F} = \pi^* F|_{\mathcal{P}_k^{\text{hw}}} \downarrow & & \downarrow F|_{\mathcal{B}_k^{\text{hw}}} & & \downarrow F \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{B}_k & \hookrightarrow & \mathfrak{L} \end{array} \quad (2.10)$$

2.4.2. *Комплексная структура на $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$.* С каждым полувесом $f\sqrt{\mu}$ ассоциировано вложение касательного пространства $T_{\tilde{\varphi}(S)} \mathcal{P}_k = C^\infty(S)$ к планковым циклам в касательное пространство к пространству полувесов $T_{f\sqrt{\mu}} \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{H}$ по правилу

$$f_1 \longmapsto f f_1 \sqrt{\mu}. \quad (2.11)$$

Все вместе эти отображения дают вложение расслоений $T \mathcal{P}_k \hookrightarrow \mathcal{P}_k^{\text{hw}}$, образ которого всюду плотен и совпадает с подрасслоением гладких полувесов: $T \mathcal{P}_k \xrightarrow{\sim} \mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$. Это позволяет перенести на $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ каноническую комплексную структуру с $T \mathcal{P}_k$ (см. п. 2.3.4). В этой структуре комплексная координатная окрестность точки $(\tilde{\varphi}, \vartheta) \in \mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$, отвечающей гладкому планковому циклу $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P$, лежащему над BS_k -циклом $S \xrightarrow{\varphi} M$ (как в п. 2.3.3) и оснащённому полувесом $\vartheta = f\sqrt{\mu}$, отождествляется с окрестностью нуля в пространстве $C^\infty(S, \mathbb{C})$ гладких комплекснозначных функций на S . Полузвешенный планков цикл, отвечающий при этом функции $\psi = \psi_1 + i\psi_2 \in C^\infty(S, \mathbb{C})$, строится следующим образом. Вложение BS_k -цикла $S \xrightarrow{\varphi} M$ продолжается по Дарбу–Вейнштейну до вложения $U \xrightarrow{\hat{\varphi}} M$ некоторой окрестности нулевого сечения $U \subset T^*S$, а ковариантно постоянное сечение $S \xrightarrow{\sigma} \varphi^* P_k$ – до ковариантно постоянного сечения $U \xrightarrow{\hat{\sigma}} P_k^U$ расслоения $P_k^U = \hat{\varphi}^* P_k$ над U (как в п. 2.3.3). Затем мы рассматриваем BS_k -цикл $S_{\psi_2}^{(k)} \subset U$, который является графиком точной 1-формы $d\psi_2/k$, над ним – ковариантно постоянное сечение

$$\sigma_{\psi_2} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\psi_2} \hat{\sigma}|_{S_{\psi_2}^{(k)}}$$

расслоения P_k^U , и его образ в P_k мы берем в качестве планкова цикла, соответствующего функции $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. Вещественная часть ψ задает на этом цикле полувес $\psi_1 \vartheta = f\psi_1 \sqrt{\mu}$.

Описанные только что комплексные координаты мы будем называть *комплексными координатами Дарбу–Вейнштейна*. Ассоциированное с ними разложение касательного пространства к $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ на вещественную и мнимую составляющие имеет вид

$$T_{(\tilde{\varphi}, \vartheta)} \mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \simeq T_{\vartheta} \mathring{\mathfrak{H}}(S) \oplus T_{\tilde{\varphi}} \mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \simeq C^\infty(S) \oplus C^\infty(S). \quad (2.12)$$

2.4.3. *Симплектическая и риманова структуры на $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$.* Рассмотрим произведение двух полувесов $\vartheta_1 = f_1 \sqrt{\mu_1}$, $\vartheta_2 = f_2 \sqrt{\mu_2}$ как произведение функции на меру (ср. с [21, § 2–6]):

$$\vartheta_1 \vartheta_2 \stackrel{\text{def}}{=} f_1 f_2 \sqrt{\varrho_{\mu_1 \lambda} \varrho_{\mu_2 \lambda}} \lambda$$

(с произвольным $\lambda \in \mathfrak{M}$), и определим *интегрирование по $\vartheta_1 \vartheta_2$* формулой

$$\int_S f d\vartheta_1 \vartheta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_S f f_1 f_2 \sqrt{\varrho_{\mu_1 \lambda} \varrho_{\mu_2 \lambda}} d\lambda, \quad (2.13)$$

которая, очевидно, не зависит от выбора $\lambda \in \mathfrak{M}$. В частности, квадрат любого полувеса ϑ можно рассматривать как линейный функционал

$$\varkappa(\vartheta): f \mapsto \int_S f d\vartheta^2 \quad (2.14)$$

на касательном пространстве $T_{\tilde{\varphi}(S)} \mathcal{P}_k \simeq C^\infty(S)$. Иначе говоря, мы имеем послойно квадратичное накрытие векторных расслоений над $\mathcal{P}_k$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_k^{\text{hw}} & \xrightarrow{\varkappa} & T^* \mathcal{P}_k \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{P}_k & \end{array}$$

разветвленное над нулевым сечением. Дифференциал этого накрытия над полувесом ϑ отображает полувес ϑ_1 в линейный функционал

$$d\varkappa_\vartheta(\vartheta_1): f \mapsto 2 \int_S f d\vartheta \vartheta_1$$

на $C^\infty(S) = T_{\tilde{\varphi}(S)} \mathcal{P}_k$ и, тем самым, отождествляет $T^* \mathcal{P}_k$ с $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$.

Пользуясь этим отождествлением, мы можем поднять каноническую 1-форму действия η (см. п. 1.1.1) с кокасательного расслоения $T^* \mathcal{P}_k$ до 1-формы $\mathsf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa^* \eta$ на расслоении полувесов. В терминах расщепления (2.12) форма H действует на касательный вектор $v = (\vartheta_1, f_1) \in T_{(S, \vartheta_0)} \mathcal{P}_k^{\text{hw}} \simeq \mathfrak{H}(S) \oplus C^\infty(S)$ по правилу

$$\mathsf{H}(v) = 2 \int_S f_1 d\vartheta_0 \vartheta_1, \quad (2.15)$$

а ее дифференциал $\Omega = d\mathsf{H}$ – по правилу

$$\Omega((\vartheta_1, f_1), (\vartheta_2, f_2)) = \int_S f_2 d\vartheta_0 \vartheta_1 - \int_S f_1 d\vartheta_0 \vartheta_2, \quad (2.16)$$

которые непосредственно обобщают соответствующие конечномерные формулы⁶ из (1.3).

В терминах комплексных координат Дарбу–Вейнштейна (см. п. 2.4.2) вещественные касательные векторы $(\psi_1, 0)$ симплектически перемножаются с мнимыми касательными векторами $(0, \psi_2)$ по формуле

$$\Omega((\psi_1, 0), (0, \psi_2)) = \int_S \psi_1 \psi_2 d\vartheta_0^2,$$

правая часть которой есть не что иное, как L^2 -произведение ψ_1 и ψ_2 по мере ϑ_0^2 . В частности, Ω согласована (в смысле п. 1.2) с описанной выше комплексной структурой на $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$, т.е. соответствует интегрируемой келеровой структуре на $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$, третья ипостась которой – риманова метрика G на $T_{(S, \vartheta_0)} \mathcal{P}^{\text{hw}} = C^\infty(S) \oplus \mathfrak{H}(S)$ – задается формулой

$$G((\vartheta_1, f_1), (\vartheta_2, f_2)) = \int_S f_2 d\vartheta_1 \vartheta_0 + \int_S f_1 d\vartheta_2 \vartheta_0. \quad (2.17)$$

Итак, нами установлена

2.4.4. ТЕОРЕМА. *Пространство гладко полувзвешенных планковых циклов k -го уровня $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$ несет естественную структуру бесконечномерного келерова многообразия. Симплектическая и риманова формы, ассоциированные с этой келеровой структурой, задаются формулами (2.16) и (2.17). Комплексно-аналитической картой в окрестности каждого гладко погруженного гладко полувзвешенного цикла S служит окрестность нуля в пространстве гладких комплекснозначных функций на S .*

2.5. Полувзвешенные BS_k -циклы фиксированного объема. Естественное действие группы $U(1)$ на $\mathcal{P}_k$ заменами унитарного ковариантно постоянного тривиализующего сечения L над каждым BS_k -циклом канонически продолжается на касательное расслоение $T\mathcal{P}_k$ и, стало быть, на пространство гладко полувзвешенных циклов $\mathcal{P}_k^{\text{hw}} \subset T\mathcal{P}_k$. Оно очевидным образом сохраняет обе формы (2.16), (2.17) (поскольку наше отождествление $T_S \mathcal{P}_k \simeq C^\infty(S)$ вообще не зависит от выбора тривиализации L над S , см. п. 2.3.1). На $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$ имеется естественная $U(1)$ -инвариантная функция объема

$$\mathcal{P}_k^{\text{hw}} \xrightarrow{\text{vol}} \mathbb{R}: (S, \vartheta) \mapsto \int_S \vartheta^2.$$

⁶ Отметим, что такой бесконечномерный аналог канонического формализма в простейшем частном случае $S = S^1$ широко используется при анализе уравнения Кортевега–де Фриза (см. [4] и наш § 4); он также возникает в гамильтоновом анализе вихревых потоков в несжимаемой жидкости.

Ее линии уровня – пространства $\mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}$ полувзвешенных планковых циклов фиксированного объема $t - U(1)$ -инвариантны, и соответствующие им пространства орбит

$$\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}} / U(1)$$

называются пространствами *полувзвешенных BS_k -циклов фиксированного объема t* .

2.5.1. ТЕОРЕМА. *Пространства $\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}}$ тоже являются бесконечномерными келеровыми многообразиями; их келерова структура индуцирована с $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$, в частности, ее симплектическая и риманова формы продолжают задаваться формулами (2.16) и (2.17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $T_{(\tilde{\varphi}(S), \vartheta_0)} \mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}$ в терминах разложения (2.12) состоит из всех пар $v = (f, \vartheta)$, у которых $\int_S d\vartheta \vartheta_0 = 0$, поскольку в координатах Дарбу–Вейнштейна этот интеграл как раз и задает инфинитезимальное приращение объема вдоль касательного вектора v . Факторизация по $U(1)$ спускает такую пару (f, ϑ) в пару $(df, \vartheta) \in T_{(S, \vartheta_0)} \mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}}$. При этом обе формы (2.16), (2.17) остаются корректно определенными, поскольку произвол в подъеме df до f устраняется соотношениями

$$\int_S d\vartheta_1 \vartheta_0 = \int_S d\vartheta_2 \vartheta_0 = 0.$$

2.5.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что предыдущая конструкция представляет собой *симплектическую факторизацию $\mathcal{P}_k^{\text{hw}} / U(1)$* , ибо в силу коммутативности группы $U(1)$ инвариантная функция vol является *отображением моментов* для действия $U(1)$ на $\mathcal{P}_k^{\text{hw}}$, и, факторизуя ее линии уровня, мы следуем стандартной процедуре построения симплектического фактора (детальное обсуждение этой конструкции в общем случае см. в [6] и [8]).

2.6. Предквантовое оснащение пространств $\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}}$. Келеровы многообразия $\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}}$ имеют каноническое предквантовое оснащение. В самом деле, ограничение на $\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}}$ расслоения $\mathcal{P}_k^{\text{hw}} = \tilde{F}^* \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}_k^{\text{hw}}$ (это левая горизонтальная стрелка в верхнем ряду диаграммы (2.10)) доставляет главное $U(1)$ -расслоение

$$\mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}} \xrightarrow{\pi_t^{\text{hw}}} \mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}} \quad (2.18)$$

с эрмитовой связностью $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{H}|_{\mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}}$, которая представляет собой ограничение формы действия (2.15) на пространство планковых циклов объема t . Ее вещественная 2-форма кривизны $\omega_{\mathbf{a}} = \Omega$ тавтологически согласована с симплектической структурой на $\mathcal{B}_k^{\text{hw}}$. Более того, это предквантовое оснащение обладает келеровой поляризацией и может быть подвергнуто *голоморфному квантованию*, которое мы подробно обсудим в следующем параграфе.

2.6.1. *Замечание о взвешиваниях.* Предквантовое оснащение $(\mathcal{B}_{k,t}^{\text{hw}}, \Omega, \mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}, \mathfrak{a})$ позволяет строить предквантовые оснащения на (неполузвешенном) расслоении Берри $\mathcal{P}_{k,t} \xrightarrow{\pi_t} \mathcal{B}_{k,t}$. На этом расслоении а priori нет никакой естественно выделенной эрмитовой связности, и фиксировать такую связность можно посредством подъема универсальной связности $\mathfrak{a}$ на расслоении $\mathcal{P}_{k,t}^{\text{hw}}$ вдоль какого-либо сечения $\mathcal{P}_k \hookrightarrow \mathcal{P}_k^{\text{hw}}$. Выбор такого сечения называется *полузвешиванием* планковых циклов. Полузвешивание планковых циклов, в свою очередь, можно поднимать с полузвешивания BS_k -циклов, которое по определению есть не что иное, как сечение

$$\mathcal{B}_k \hookrightarrow \mathcal{B}_k^{\text{hw}}. \quad (2.19)$$

Например, если многообразие M псевдокелерово, то, ограничивая его риманову метрику g на лагранжевы циклы, мы можем определить на каждом цикле S каноническую форму объема $\mu_{S,g}$, индуцированную метрикой; сопоставление циклу S полувеса $\vartheta_{S,g} = 1 \cdot \sqrt{\mu_{S,g}}$ называется *келеровым полузвешиванием*.

§ 3. Голоморфное квантование

3.1. Келерова поляризация. Для того чтобы проквантовать предквантовое оснащение $(M, \omega, L^{\otimes k}, \alpha_k)$ (см. п. 2.1), его необходимо *поляризовать* (см. [24]). По определению *комплексная* (или *келерова*) поляризация представляет собой (интегрируемую) комплексную структуру I на M , превращающую M_I в комплексное келерово многообразие с келеровой формой ω .

Если зафиксировать такую поляризацию, то форма кривизны связности α_k на $L^{\otimes k}$ будет иметь ходжев тип $(1, 1)$, так что α_k будет задавать на $L^{\otimes k}$ структуру *голоморфного* векторного расслоения над M_I (см. [3, § 3]). Пространство глобальных голоморфных сечений этого расслоения

$$Q_k(M_I) = H^0(M_I, L^{\otimes k}) \quad (3.1)$$

называется *пространством волновых функций уровня k* (см. обзор [5]). В дальнейшем мы для простоты всюду будем предполагать компактность M , из которой, в частности, следует конечномерность всех пространств (3.1). Однако делаем мы это, скорее, отдавая дань алгебро-геометрическим традициям, поскольку все дальнейшие конструкции в равной мере могут быть применены и к некомпактному случаю, в частности к $M = T^*X$, с бесконечномерными пространствами (3.1).

3.1.1. *Пространство Харди, проекторы Сёге и тёплицевы операторы.* Обозначим через $P_{-1} \xrightarrow{p-1} M$ главное $U(1)$ -расслоение, тавтологически ассоциированное с двойственным линейным расслоением L^* к предквантовому эрмитову расслоению L на M_I . Его тотальное пространство является границей расслоения на единичные диски вокруг нулевого сечения L^* :

$$P_{-1} = \partial D_{-1}, \quad D_{-1} \subset L^* \rightarrow M_I. \quad (3.2)$$

Тотальное пространство D_{-1} представляет собой строго псевдовыпуклую комплексную область (см. [2, гл. IX]; еще раз подчеркнем, что комплексная структура на D строго зависит от выбора келеровой комплексной структуры I на M). Через $L^2(P)$ мы, как обычно, будем обозначать гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства гладких комплекснозначных функций $C^\infty(P_{-1}, \mathbb{C})$ на P_{-1} по норме, ассоциированной с эрмитовым произведением

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{P_{-1}} f \bar{g} \alpha_{-1} \wedge (d\alpha_{-1})^{\wedge n}, \quad (3.3)$$

где α_{-1} — двойственная к $\alpha = \alpha_1$ связность на L^* , а $\varrho_{-1} = \alpha_{-1} \wedge (d\alpha_{-1})^{\wedge n}$ — форма объема типа (2.3), индуцированная контактной структурой α_{-1} на P_{-1} .

Замкнутое подпространство $\mathcal{H} \subset L^2(P_{-1})$, состоящее из всех функций, допускающих голоморфное продолжение на D_{-1} , называется *пространством Харди*, а ортогональный проектор на него

$$\Pi: L^2(P_{-1}) \rightarrow \mathcal{H} \quad (3.4)$$

называется *проектором Сёге*. Пространство Харди может быть разложено в топологическую прямую сумму весовых подпространств естественного действия структурной группы $U(1)$ расслоения $L^* \supset D_{-1} \supset P_{-1}$:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_k.$$

Ясно, что k -е весовое подпространство $\mathcal{H}_k$ этого разложения состоит из всех функций на L^* , послойно представляющих собой однородный полином степени k . Иными словами, имеется естественное отождествление $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^{*\otimes k})$, так что весовое разложение в действительности имеет вид

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k H^0(L^{\otimes k}). \quad (3.5)$$

Более того, описанная выше эрмитова структура на $\mathcal{H}$, очевидно, согласуется с естественными эрмитовыми структурами на $H^0(M, L^{\otimes k})$, определяемыми посредством интегрирования скалярных произведений сечений $L^{\otimes k}$ по форме Лиувилля на M :

$$(f, g)_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_M (f, g)_{L^{\otimes k}} \omega^{\wedge n}. \quad (3.6)$$

Ортогональные проекторы $L^2(P_{-1}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(L^{\otimes k})$ называются *проекторами Сёге k -го уровня*. С их помощью каждой гладкой функции f на M можно сопоставить серию *тёплицевых операторов* $H^0(L^{\otimes k}) \xrightarrow{Q_f^{(k)}} H^0(L^{\otimes k})$, которые действуют на сечение $\psi \in H^0(L^{\otimes k})$ по следующему правилу: рассмотрим ψ как элемент

пространства $\mathcal{H} \subset L^2(P_{-1})$, умножим его там на $p_{-1}^* f$ и спроектируем результат на $H^0(L^{\otimes k})$ оператором Π_k , т.е.

$$Q_f^{(k)}(\psi) = \Pi_k(p_{-1}^* f \psi) \in H^0(L^{\otimes k}), \quad (3.7)$$

где, напомним, $P_{-1} \xrightarrow{p-1} M$ – главное $U(1)$ -расслоение, тавтологически ассоциированное с L^* . Тёпличевы операторы на $\mathcal{H}$ образуют пуассонову алгебру, которая представляет собой *квантовую деформацию* пуассоновой алгебры гладких функций на симплектическом многообразии M .

3.1.2. Пространства состояний. Голomorphicное линейное расслоение $L^{\otimes k}$ стандартным образом определяет рациональное отображение $M_I \rightarrow \mathbb{P}(H^0(L^{\otimes k})^*)$, переводящее точку $x \in M_I$ в гиперплоскость

$$\text{Ann}(x) = \{\psi \in H^0(L^{\otimes k}) \mid \psi(x) = 0\}.$$

Длинная когомологическая последовательность

$$\dots \rightarrow H^0(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) \rightarrow H^0(L^{\otimes k}) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) \rightarrow \dots,$$

ассоциированная с точной тройкой пучков на M

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k} \rightarrow L^{\otimes k} \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_M|_x \rightarrow 0$$

(где $\mathcal{I}_x$ – пучок идеалов точки x , res – эпиморфизм ограничения), показывает, что $H^0(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k})$ является гиперплоскостью, если $H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) = 0$. Так как по теоремам Серра $H^1(\mathcal{I}_x \otimes L^{\otimes k}) = 0$ при $k \gg 0$, отображения

$$\varphi_k: M_I \xrightarrow{x \mapsto \text{Ann}(x)} \mathbb{P}(H^0(L^{\otimes k})^*) \quad (3.8)$$

будут при $k \gg 0$ голоморфными вложениями. Комбинируя их с изоморфизмами

$$H^0(L^{\otimes k}) \xrightarrow{\sim} \overline{H^0(L^{\otimes k})}^*, \quad (3.9)$$

доставляемыми эрмитовой структурой (3.6), мы получаем антиголоморфные вложения M_I в проективизации пространств волновых функций:

$$\overline{\varphi}_k: M_I \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(L^{\otimes k}). \quad (3.10)$$

Пространства $\mathbb{P}H^0(L^{\otimes k})$ называются *пространствами состояний*, а состояния, лежащие в образе $\overline{\varphi}_k$, – *когерентными состояниями*.

3.1.3. Важное замечание. Несмотря на то, что главное расслоение предквантизации $P_k \xrightarrow{p_k} M$ совпадает с обратным образом вдоль (3.10) хопфоваго расслоения k -й степени на окружности над $\mathbb{P}H^0(M_I, L^{\otimes k})$, 1-форма связности α_k на P_k не обязана, вообще говоря, совпадать с обратным образом инвариантной 1-формы Фубини–Штуди на расслоении Хопфа.

3.2. Ограничение голоморфных сечений на планковы циклы. Ограничение голоморфного сечения $s \in H^0(M_I, L^{\otimes k})$ на планков цикл $S \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k$ (т.е. на BS_k -цикл $S \xrightarrow{\varphi} M$, оснащенный ковариантно постоянным унитарным сечением $S \xrightarrow{\sigma} \varphi^* L^{\otimes k}$) представляется гладкой комплекснозначной функцией $\psi_{\tilde{\varphi}} \in C^\infty(S, \mathbb{C})$ такой, что $\varphi^* s = \psi_{\tilde{\varphi}} \cdot \sigma$. Более того, линейное отображение

$$H^0(M, L^{\otimes k}) \xrightarrow{s \mapsto \psi_{\tilde{\varphi}}} C^\infty(S, \mathbb{C}) \quad (3.11)$$

инъективно в силу следствия из п. 1.2.2 и $\mathbb{C}$ -*линейно* по отношению к стандартным комплексным структурам на этих пространствах. Напомним, что комплексное векторное пространство $C^\infty(S, \mathbb{C})$ представляет собой слой *голоморфного* касательного расслоения $T_{(\tilde{\varphi}, \vartheta)} \overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ бесконечномерного келерова многообразия $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ полувзвешенных планковых циклов, причем комплексная структура $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ соответствует стандартной комплексной структуре на $C^\infty(S, \mathbb{C})$ (см. п. 2.4.2). Таким образом, мы имеем следующее вложение когерентных пучков над $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{O}_{\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}}, \quad (3.12)$$

в котором первый член есть пучок голоморфных сечений тривиального векторного расслоения со слоем $\mathcal{H}_k = H^0(M_I, L^{\otimes k})$, а второй – пучок голоморфных векторных полей на $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$.

3.2.1. Отображения $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \xrightarrow{\gamma_k} H^0(M, L^{\otimes k})^*$. Сопоставим полувзвешенному планкову циклу $(\tilde{\varphi}, \vartheta)$ комплексно-линейную форму на $H^0(M, L^{\otimes k})$, значение которой на голоморфном сечении $s \in H^0(M, L^{\otimes k})$ равно

$$\int_S \psi_{\tilde{\varphi}} d\vartheta^2 = \int_S \psi_{\tilde{\varphi}} f^2 d\mu \in \mathbb{C}.$$

Мы получаем отображение

$$\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \xrightarrow{\tilde{\gamma}_k} H^0(M, L^{\otimes k})^*, \quad (3.13)$$

гладкое в окрестности каждого гладкого планкова цикла. В локальных комплексных координатах Дарбу–Вейнштейна вблизи $(\tilde{\varphi}, \vartheta)$ на $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ действие линейного функционала $\tilde{\gamma}_k(\psi_1 + i\psi_2)$ на $H^0(M, L^{\otimes k})$ задается формулой

$$s \mapsto \int_S \psi_{\tilde{\varphi}} \psi_1^2 e^{-i\psi_2} d\vartheta^2,$$

поскольку сечение s голоморфно (т.е. $\alpha_k(s) = 0$), а P_k тривиализуется над $S_{\psi_2}^{(k)}$ (т.е. над циклом с координатой $\psi_1 + i\psi_2$, см. п. 2.4.2) сечением $e^{i\psi_2}\hat{\sigma}$. Дифференциал $d\tilde{\gamma}_k$ отображает $\psi_1 + i\psi_2$ в функционал, действующий на $H^0(M, L^{\otimes k})$ по правилу

$$s \longmapsto \int_S \psi_{\tilde{\varphi}}(2\psi_1 - i\psi_2) d\vartheta^2. \quad (3.14)$$

Правая часть представляет собой стандартное эрмитово скалярное произведение на $L^2(S, \mathbb{C})$ по мере ϑ^2 . Поскольку пространство $H^0(M, L^{\otimes k}) \subset L^2(S, \mathbb{C})$ конечномерно, любой $\mathbb{C}$ -линейный функционал на нем представляется в виде (3.14) с подходящей *гладкой* функцией $2\psi_1 - i\psi_2$ (ибо линейный оператор в конечномерное пространство эпиморфен, если его образ всюду плотен). Таким образом, дифференциал $d\tilde{\gamma}_k$ сюръективен.

Композицию отображения (3.14) с доставляемым эрмитовой структурой изоморфизмом (3.9) мы обозначим через

$$\overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \xrightarrow{\gamma_k} H^0(M, L^{\otimes k}). \quad (3.15)$$

Оно сопоставляет гладкому полувзвешенному планковому циклу $(\tilde{\varphi}, \vartheta)$ голоморфное сечение $\gamma_k(\tilde{\varphi}, \vartheta) \in H^0(M, L^{\otimes k})$, удовлетворяющее $\forall s \in H^0(M, L^{\otimes k})$ равенству

$$\int_M (s, \gamma_k(\tilde{\varphi}, \vartheta))_{L^{\otimes k}} d\varrho = \int_S \psi_{\tilde{\varphi}} d\vartheta^2,$$

а его дифференциал $T_{(\tilde{\varphi}, \vartheta)} \xrightarrow{d\gamma_k} H^0(M, L^{\otimes k})$ инъективен и переводит касательный вектор $\psi = \psi_1 + i\psi_2 \in C^\infty(S, \mathbb{C}) = T_{(\tilde{\varphi}, \vartheta)} \overset{\circ}{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ в голоморфное сечение $s_\psi \in H^0(M, L^{\otimes k})$, определяемое равенством

$$\int_M (s, s_\psi)_{L^{\otimes k}} d\varrho = \int_S \psi_{\tilde{\varphi}} \overline{\psi'} d\vartheta^2,$$

где $\psi' = 2\psi_1 + i\psi_2$. Таким образом, он отличается от $\mathbb{C}$ -линейного вложения (3.11), которое задавалось ограничением голоморфных сечений на планков цикл, постоянным $\mathbb{R}$ -линейным множителем, т.е. отображения (3.15) хотя и не голоморфны, однако имеют *постоянный келеров угол*.

3.2.2. Симплектическая редукция отображений γ_k . Отображения (3.15) эквивариантны по отношению к естественным действиям группы $U(1)$ заменами тривиализующего унитарного сечения слева и скалярными гомотетиями справа – это сразу видно из предыдущих формул для его дифференциала. Оба действия имеют согласованные отображения моментов (т.е. $U(1)$ -инвариантные функции) – объем

$$(\tilde{\varphi}, \vartheta) \mapsto \text{vol}(\tilde{\varphi}, \vartheta) = \int_S d\vartheta^2$$

на левом пространстве и эрмитова длина

$$s \mapsto \|s\|^2 = \int_M (s, s)_{L^{\otimes k}} d\varrho$$

на втором. Таким образом, отображение γ_k факторизуется до отображения симплектических факторов

$$(\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} // U(1)) \longrightarrow (H^0(M, L^{\otimes k}) // U(1)).$$

Напомним, что в п. 2.5 мы описали симплектический фактор $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} // U(1)$ (т.е. пространство $U(1)$ -орбит на t -ой поверхности уровня отображения моментов) как пространство $\mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\text{hw}}$ полувзвешенных BS_k -циклов заданного объема t . С другой стороны, результатом симплектической редукции эрмитова векторного пространства V по действию группы $U(1)$ гомотетиями⁷ является, как известно, его проективизация (см. [6]), т.е. $V // U(1) \simeq V / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}V$. В частности, симплектический фактор $\mathcal{H}_k // U(1)$ – это пространство состояний $\mathbb{P}\mathcal{H}_k$. Таким образом, симплектическая редукция γ_k представляет собой отображение

$$\mathring{\mathcal{P}}_{k,t}^{\text{hw}} \xrightarrow{\gamma_{k,t}} \mathbb{P}\mathcal{H}_k$$

с эпиморфным дифференциалом и лишь подкруткой на постоянный келеров угол отличается от стандартного *голоморфного* отображения

$$\mathring{\mathcal{P}}_{k,t}^{\text{hw}} \xrightarrow{\beta_{k,t}} \mathbb{P}\mathcal{H}_k$$

келерова многообразия $\mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\text{hw}}$ в проективное пространство $\mathbb{P}(H^0(\mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\text{hw}}, \mathcal{L}_{k,t})^*)$, соответствующее голоморфному линейному расслоению $\mathcal{L}_{k,t}$, тавтологически ассоциированному с главным $U(1)$ -расслоением Берри $\mathring{\mathcal{P}}_{k,t}^{\text{hw}} \xrightarrow{\pi_t} \mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\text{hw}}$. Мы будем называть это последнее отображение *голоморфным отображением Бортвика–Паоля–Урибе* и обозначать его β_k . Подчеркнем, что γ_k и β_k сопоставляют *состояния* каждому полувзвешенному BS_k -циклу фиксированного объема t .

3.3. Аналитическое описание отображений Бортвика–Паоля–Урибе.

Отображения BPU_k были открыты в рамках чисто аналитической теории (см. [13]). Дабы читатель мог сопоставить оригинальную конструкцию отображений BPU_k с нашим геометрическим определением, мы коротко отметим здесь ее основные моменты. Главным техническим средством при построении BPU_k является продолжение проектора Сёге

$$L^2(P, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(M, L^{\otimes k})$$

⁷ По отношению к отображению моментов $v \mapsto \|v\|^2$.

на подходящее пространство обобщенных функций $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \supset L^2(P, \mathbb{C})$, содержащее, в частности, δ -функции δ_p всех точек $p \in P$ (при этом используется аппарат *тёплицевых структур*, разработанный в [11]; мы обсудим его ниже, в пп. 3.3.1, 3.3.2). Применяя расширенный проектор Сёге ко всем δ_p с $p \in \tilde{\varphi}(S) \subset P$, мы получаем семейство голоморфных сечений $\Pi_k(\delta_{\tilde{\varphi}(x)})$, параметризованное точками $x \in S$. Отображение $\mathring{\mathcal{D}}_k^{\text{hw}} \xrightarrow{\beta_k} H^0(M_I, L^{\otimes k})$ сопоставляет полувзвешенному циклу $(\tilde{\varphi}(S), \vartheta) \in \mathring{\mathcal{D}}_k^{\text{hw}}$ голоморфное сечение

$$\beta_k(S, \vartheta) = \int_S \Pi_k(\delta_{\tilde{\varphi}(x)}) d\vartheta,$$

полученное усреднением этого семейства по S . Если обозначить через

$$K_k(p_1, p_2) = \langle \Pi_k(\delta_{p_2}), \Pi_k(\delta_{p_1}) \rangle$$

шварцево ядро расширенного проектора Сёге $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Pi_k} H^0(M, L^{\otimes k})$, то на диагонали мы будем иметь $K_k(p, p) = \|\Pi_k(\delta_p)\|^2 \in L^2(P_k)$, и L^2 -норма $K_k(p, p)$ как функция от $p \in P$ будет по теореме Римана–Роха иметь при $k \gg 0$ асимптотику

$$\|K_k(p, p)\|^2 = \int_{P_k} K_k(p, p) \alpha_k \wedge (d\alpha_k)^{\wedge n} = \text{rk } H^0(M_I, L^{\otimes k}) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n.$$

3.3.1. Обобщенные тёплицевы операторы. Удалим из кокасательного расслоения T^*P_k нулевое сечение и в полученном пространстве рассмотрим положительный вещественный конус

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{t\alpha_k|_p \subset T^*P_k \setminus \{0\} \mid p \in P_k, t \in \mathbb{R}, t > 0\} \quad (3.16)$$

над графиком формы связности $P_k \xrightarrow{\alpha_k} T^*P_k \setminus \{0\}$. Этот конус является *симплектическим подмногообразием* кокасательного расслоения, рассматриваемого со стандартной симплектической структурой. Согласно [11] пара (Π, Σ) , где Π – обычный проектор Сёге (3.4), называется *тёплицевой структурой*. Всякий псевдодифференциальный оператор n -го порядка A на P_k порождает *обобщенный тёплицев оператор*

$$T_A = \Pi \circ A \circ \Pi: L^2(P) \longrightarrow \mathcal{H},$$

а ограничение $\sigma(T_A) \stackrel{\text{def}}{=} p(A)|_\Sigma$ главного символа $p(A)$ на симплектическое подмногообразии (3.16) называется *символом* обобщенного тёплицева оператора T_A , и эти символы обладают обычными свойствами:

$$\begin{aligned} \sigma(T_{A_1} T_{A_2}) &= \sigma(T_{A_1}) \sigma(T_{A_2}), \\ \sigma([T_{A_1}, T_{A_2}]) &= i\{\sigma(T_{A_1}), \sigma(T_{A_2})\} \end{aligned}$$

(скобка Пуассона в последнем равенстве индуцируется стандартной симплектической структурой на Σ). В частности, обычный (не обобщенный) тёплицев оператор T_f , соответствующий умножению на функцию $f \in L^2(P_k)$, имеет символ $\sigma(T_f) = p_\Sigma^*(f)$, где через p_Σ обозначена композиция проекций $\Sigma \rightarrow P_k \xrightarrow{p_k} M$.

3.3.2. Продолжение проектора Сёге. Конормальное расслоение гладкого планкова цикла $N^*\tilde{\varphi}(S) = \text{Ann}(T\tilde{\varphi}(S)) \subset T^*P_k$, будучи лагранжеевым подмногообразием кокасательного расслоения T^*P_k , определяет согласно [11] серию подпространств *эрмитовых* обобщенных функций $I^m(P_k, N^*S) \subset D(P_k)$ полуцелого порядка $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, при этом $L^2(P_k) \subset I^m(P_k, N^*S)$ как плотное подпространство. Каждая эрмитова обобщенная функция также имеет *символ*, представляющий собой симплектический спинор на N^*S . Установленные в [11] теоремы о композициях эрмитовых обобщенных функций позволяют продолжить проектор Сёге (3.4) до оператора

$$I^m(P_k, N^*\tilde{\varphi}(S)) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{D}(\mathcal{H})$$

следующим образом. Шварцево ядро исходного проектора Сёге Π является элементом пространства $I^{\frac{1}{2}}(P_k \times P_k, \Sigma_2)$, где

$$\Sigma_2 = \{(p_1, t\alpha(p_1)); (p_2, -t\alpha(p_2))\} \subset T^*P_k \times P_k$$

представляет собой изотропное подмногообразие, *сопоставимое* с N^*S в смысле [11, теорема 9.4], что дает возможность применять ассоциированный с Σ_2 интегральный оператор Фурье к эрмитовым обобщенным функциям на N^*S . Таким образом возникает отображение

$$I^m(P_k, N^*\tilde{\varphi}(S)) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}),$$

образ которого обозначается через $J^{m-\frac{n}{2}}(P_k, S) \subset \mathcal{D}(\mathcal{H})$ и называется *пространством лежандровых обобщенных функций порядка $m - \frac{1}{4}\dim M$* . Пространство $J^{\frac{1}{2}}(P_k, S)$ естественно отождествляется с пространством полувесов на S , поскольку символ каждого элемента из $J^{\frac{1}{2}}(P_k, S)$, будучи симплектическим спинором на лежандровом подмногообразии $\tilde{\varphi}(S) \subset P_k$, естественным образом определяет полувес (см. [11] и [13]), и, наоборот, всякий полувес ϑ на S позволяет определить δ -функцию $\delta_{(S, \vartheta)}$, сосредоточенную на цикле, и построить по ней лежандрову обобщенную функцию

$$s(\vartheta) = T_{\mathcal{L}ie_{u_k}}^{m-\frac{1}{2}} \Pi(\delta_S),$$

где через $T_{\mathcal{L}ie_{u_k}}$ обозначен обобщенный тейлицев оператор первого порядка, соответствующий дифференцированию Ли вдоль стандартного базисного $U(1)$ -инвариантного векторного поля u_k на P_k (символом этого оператора является функция t – координата вдоль прямолинейной образующей конуса (3.16)).

§ 4. Пример: лежандровы узлы в S^3

4.1. Предквантовое оснащение сферы Римана. Простейший нетривиальный пример, наглядно иллюстрирующий наши конструкции, возникает, если в качестве исходного симплектического многообразия (M, ω) взять риманову сферу $M = S^2 = \mathbb{CP}_1$ – проективизацию двумерного эрмитова пространства $\mathbb{C}^2$ –

с келеровой структурой, индуцированной стандартной эрмитовой формой на $\mathbb{C}^2$. В стандартной аффинной карте $z = z_0/z_1$ на $\mathbb{CP}_1$ соответствующие риманова метрика и симплектическая форма задаются формулами

$$g = \frac{4dzd\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}, \quad \omega = \frac{4dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}.$$

В качестве линейного расслоения предквантования на $\mathbb{CP}_1$ мы возьмём пучок $L = \mathcal{O}(1)$ однородных форм первой степени со стандартной связностью, которая является ограничением на $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ $U(2)$ -инвариантной 1-формы

$$2\pi i \alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\partial - \bar{\partial}) \log |z|$$

и имеет вещественную форму кривизны ω . Расслоение единичных окружностей в двойственном расслоении $L^* \supset P_{-1} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}_1$ есть не что иное, как расслоение Хопфа

$$S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}_1,$$

слой которого над точкой, изображающей прямую $\ell \subset \mathbb{C}^2$, представляет собой единичную окружность, высекаемую этой прямой на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ (класс этого расслоения служит стандартной “отрицательной” образующей группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$).

4.2. Лагранжевы циклы, или уникурсальные кривые на S^2 . Возьмем в качестве многообразия S – прообраза лагранжевых циклов на $M = S^2$ – окружность $S = S^1$. Поскольку любое гладкое отображение $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^2$ лагранжево ввиду отсутствия на окружности ненулевых 2-форм, пространство лагранжевых отображений $\text{Map}_{\text{LA}}(S^1, S^2)$ есть не что иное, как пространство петель LS^2 , а пространство лагранжевых циклов $\mathfrak{L} = \text{Map}_{\text{LA}}(S^1, S^2)/\text{Diff}_0(S^1)$ представляет собой пространство *уникурсальных кривых* (непараметризованных петель) $\varphi(S^1) \subset S^2$. Отметим, что на каждом касательном пространстве к пространству петель $T_\varphi(LS^2) = C^\infty(S^1, \varphi^*TS^2)$ имеется невырожденная косая форма $\varphi^*\omega$, которая индуцирует косую 2-форму

$$\Omega_{LS^2}(\sigma_1, \sigma_2) = \int_{S^1} \varphi^*\omega^{-1}(\sigma_1) \wedge \varphi^*\omega^{-1}(\sigma_2) \quad (4.1)$$

на $T(LS^2)$. Эта форма $\text{Diff}_0(S^1)$ -инвариантна, замкнута, но невырождена лишь в слабом смысле, т.е. сопоставляет гамильтоновы векторные поля только *сверхгладким* функциям на $\mathfrak{L}$ (см. [14, определение 3.1.5]).

4.2.1. Координаты Дарбу–Вейнштейна. Как это объяснялось в п. 1.1.2, мы можем отождествить некоторую окрестность нулевого сечения нормального расслоения к S^1 при гладком погружении $S^1 \xhookrightarrow{\varphi} S^2$ с окрестностью нулевого сечения кокасательного расслоения на S^1 , которое *тривиально*:

$$N_\varphi S^1 = \varphi^*TS^2/TS^1 \simeq \varphi^*T^*S^2/\text{Ann}(TS^1) = T^*S^1 = S^1 \times \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Мы зафиксируем последнюю тривиализацию, выбрав в качестве глобального базисного сечения кокасательного расслоения инвариантную относительно вращений 1-форму

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} dt,$$

где t – натуральный параметр на окружности (ориентированный угол), так что

$$\int_{S^1} \xi = 1.$$

Эта форма определяет на окружности гладкую меру μ_0 , которую мы и будем использовать далее при рассмотрении полувесов. Согласно п. 1.1.4 всякое гладкое погружение $S^1 \rightarrow S^2$ можно гладко продолжить до отображения $U \xrightarrow{\widehat{\varphi}} S^2$ некоторой окрестности $U \subset T^*S^1$ нулевого сечения кокасательного расслоения так, что $\widehat{\varphi}^*\omega = d\eta$, где η – каноническая форма действия на T^*S^1 . Образы лежащих в U графиков замкнутых 1-форм составят открытую окрестность φ на $\mathfrak{L}$, которую мы будем использовать для локальной координатизации $\mathfrak{L}$ вблизи φ окрестностью нуля в пространстве замкнутых 1-форм на S^1 .

4.2.4 Циклы Бора–Зоммерфельда. Для каждого целого $k \geq 0$ подьем $\varphi^*L^{\otimes k}$ вдоль произвольной петли $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^2$ представляет собой тривиальное комплексное 1-расслоение над S^1 , оснащенное плоской $U(1)$ -связностью $\varphi^*\alpha_k$. Ее голономия – это характер фундаментальной группы $\pi_1(S^1) \xrightarrow{\chi_k} U(1)$, значение которого на образующей $1 \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ равно углу поворота слоя $\varphi^*L^{\otimes k}$ при его параллельном переносе по S^1 на один оборот в положительном направлении:

$$\chi_k(1) = k \cdot \chi_1(1),$$

и, таким образом, представляет собой целое кратное ориентированной площади куска сферы S^2 , ограниченного уникурсальной кривой $\varphi(S^1)$. Отображение

$$j_k: LS^2 \xrightarrow{\varphi \mapsto k \cdot \chi_k(1)} \mathcal{J}$$

является сечением якобиева расслоения (см. п. 1.3.3). Поскольку

$$H^1(S^1, \mathbb{R})/H^1(S^1, \mathbb{Z}) = U(1),$$

в нашем примере якобиево расслоение оказывается главным $U(1)$ -расслоением над LS^2 . Множество нулей $\mathcal{B}_k \subset \mathfrak{L}$ сечения j_k имеет коразмерность 1 и называется *пространством бор-зоммерфельдовых циклов уровня k* . Оно состоит из уникурсальных кривых, площадь которых является рациональным (со знаменателем k) кратным площади сферы; в частности, $\forall k, m \in \mathbb{Z}$ имеются включения

$$\mathcal{B}_k \xrightarrow{\beta_{k,m}} \mathcal{B}_{mk}$$

(ср. с (2.2)).

4.2.3. Замечание о специфике рассматриваемого примера. Отметим, что в нашем примере есть ряд специальных эффектов, отсутствующих в общем случае: во-первых, кокасательное расслоение на $S = S^1$ тривиально; во-вторых, $S = S^1$ является главным однородным пространством над $U(1)$, в частности $U(1) \subset \text{Diff}_0(S^1)$; и наконец, $U(1)$ естественно отождествляется с якобианом $J(S^1) = H^1(S^1, \mathbb{R})/H^1(S^1, \mathbb{R})$.

4.3. Планковы циклы, или лежандровы узлы в S^3 . Планков цикл уровня k представляет собой класс $\text{Diff}_0(S^1)$ -эквивалентных гладких вложений $S^1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S^3$, лежандровых по отношению к контактной форме α_k на $S^3 \simeq P_k$. Такие циклы обычно называют *лежандровыми узлами* на S^3 . С нашей точки зрения, каждый такой узел представляет собой ковариантно постоянное глобальное сечение $S^1 \xrightarrow{\sigma} \varphi^* P_k$ главного расслоения предквантования над бор-зоммерфельдовым циклом $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^2$, или, что то же самое, ковариантно постоянное глобальное унитарное сечение тривиального эрмитова линейного расслоения $\varphi^* L^{\otimes k}$ над S^1 . Таким образом, планковы циклы уровня k образуют главное $U(1)$ -расслоение $\mathcal{P}_k \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{B}_k$ над пространством бор-зоммерфельдовых циклов. Это расслоение называется *главным расслоением Берри* уровня k . Соответствующие эрмитовы линейные расслоения $\mathcal{L}_k$ на $\mathcal{B}_k$ связаны соотношениями

$$\beta_{k,m}^* \mathcal{L}_{mk} = \mathcal{L}_k^{\otimes m}.$$

Касательное пространство $T_{\tilde{\varphi}} \mathcal{P}_k$ в гладком узле $S^1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} P_k \simeq S^3$ отождествляется с пространством гладких функций $C^\infty(S^1)$. С учетом дополнительных совпадений, перечисленных в п. 4.2.3, это почти очевидно: $T_{\tilde{\varphi}} \mathcal{P}_k$ есть пространство гладких сечений нормального расслоения

$$N_{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi}^* T^* P_k / T S^1 = T^* S^1 \oplus T^* U(1) = S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

(последнее равенство соответствует (4.2), а предпоследнее – это глобальное расщепление на горизонтальную и вертикальную компоненты относительно связности⁸ α_k); каждая функция $f \in C^\infty(S^1)$ задает сечение $\tau_f \in C^\infty(S^1, N_{\tilde{\varphi}})$, вертикальная компонента которого равна $k f \xi$, а горизонтальная – $k df$, где $\xi \in C^\infty(T^* S^1)$ – базисная 1-форма на $S^1 = U(1)$, зафиксированная нами в п. 4.2.1 и (4.2), так что $k df = 2\pi k \frac{df}{dt} \xi$.

4.4. Полувзвешенные циклы. Инвариантная форма ξ определяет на S^1 гладкую меру μ_0 и пространство полувесов $\mathring{\mathfrak{H}} = \mathring{\mathfrak{H}}(S^1)$; соответствующие пространства орбит естественного диагонального действия диффеоморфизмов окружности

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{L}}^{\text{hw}} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}_{\text{LA}}(S^1, S^2) \times \mathring{\mathfrak{H}}(S^1) / \text{Diff}_0(S^1), \\ \mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Map}_{\text{LE}}(S^1, S^3) \times \mathring{\mathfrak{H}}(S^1) / \text{Diff}_0(S^1) \end{aligned}$$

⁸В общем случае такое расщепление имеется лишь локально.

суть пространства *полузвешенных* универсальных кривых и лежандровых узлов соответственно. Фиксация полувеса $f\sqrt{\mu}$ на лежандровом узле отождествляет касательное пространство $T_{\tilde{\varphi}}\mathcal{P}_k = C^\infty(S^1)$ с $T_{f\sqrt{\mu}}\mathring{\mathcal{H}} \simeq \mathring{\mathcal{H}}$ путем сопоставления гладкой функции f_1 полувеса $ff_1\sqrt{\mu}$. В результате над каждым гладким узлом $S^1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S^3$ полувеса $\vartheta = f\sqrt{\mu}$, лежащим над универсальной кривой $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^3$, мы имеем разложение (2.12):

$$T_{(\tilde{\varphi}, \vartheta)}\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \simeq T_{\vartheta}\mathring{\mathcal{H}}(S^1) \oplus T_{\tilde{\varphi}}\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}} \simeq C^\infty(S^1) \oplus C^\infty(S^1),$$

и конструкция Дарбу–Вейнштейна отождествляет некоторую окрестность $(\tilde{\varphi}, \vartheta)$ внутри $\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ с окрестностью нуля в пространстве гладких комплекснозначных функций $\psi = \psi_1 + i\psi_2 \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ так, что по мнимой части ψ_2 восстанавливается сам узел как график сечения $(d\psi_2, e^{i\pi\psi_2})$ расслоения

$$\tilde{\varphi}^*P_k|_U \subset T^*S^1 \times U(1),$$

а по вещественной части ψ_1 восстанавливается полувес $\psi_1\vartheta = \psi_1f\sqrt{\mu}$. Таким образом, на пространстве полузвешенных планковых циклов возникает интегрируемая комплексная структура и согласованная с ней симплектическая форма, которая действует в каждом слое касательного расслоения $T_{(\tilde{\varphi}, \vartheta_0)}\mathring{\mathcal{P}}_k^{\text{hw}}$ по правилу

$$\Omega((\vartheta_1, f_1), (\vartheta_2, f_2)) = \int_{S^1} f_2 d\vartheta_0 \vartheta_1 - \int_{S^1} f_1 d\vartheta_0 \vartheta_2$$

и является дифференциалом от 1-формы $\mathbf{H}((\vartheta_1, f_1)) = 2 \int_{S^1} f_1 d\vartheta_0 \vartheta_1$, а также дополняющая их до келеровой тройки риманова метрика

$$G((\vartheta_1, f_1), (\vartheta_2, f_2)) = \int_{S^1} f_2 d\vartheta_1 \vartheta_0 + \int_{S^1} f_1 d\vartheta_2 \vartheta_0.$$

Эта келерова структура спускается (посредством симплектической редукции относительно $U(1)$ -действия на слоях расслоений Хопфа) до келеровой структуры на пространстве $\mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\text{hw}}$ полузвешенных бор-зоммерфельдовых циклов фиксированной длины

$$t = \int_{S^1} d\vartheta^2.$$

Отметим, что в нашем примере слои забывающего отображения

$$\mathring{\mathcal{B}}_{k,t}^{\text{hw}} \twoheadrightarrow \mathcal{B}_{k,t} \quad (4.3)$$

естественно отождествляются с фактором $\text{Diff}_0(S^1)/U(1)$, поскольку выбор полувеса эквивалентен выбору на окружности натурального параметра по модулю поворотов. На пространстве $\text{Diff}_0(S^1)/U(1)$ имеется хорошо известная комплексная

структура (см. [5]). С другой стороны, на пространстве $\mathcal{B}_{k,t}$ также известна почти комплексная структура, задаваемая следующим образом. Если отождествить S^1 с $U(1)$ (как мы уже упоминали в п. 4.2.3), то нормальное расслоение к любой петле $S^1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} S^3$ можно разложить в прямую сумму: $N_{\tilde{\varphi}} = T^*S^1 \oplus T^*U(1)$, что определяет почти комплексную структуру на всем пространстве петель LS^3 , касательное пространство $T_{\tilde{\varphi}}LS^3$ к которому есть пространство гладких сечений $C^\infty(S^1, N_{\tilde{\varphi}})$. Эта почти комплексная структура ограничивается на подпространство лежандровых узлов и спускается до почти комплексной структуры на $\mathcal{B}_{k,t} = \mathcal{P}_{k,t}/U(1)$. Легко видеть, что забывающее отображение (4.3) оказывается по отношению к только что описанным структурам псевдоголоморфным и с псевдоголоморфными слоями.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
3. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Мир, 1982.
4. Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985.
5. Кириллов А. А. Геометрическое квантование // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985.
6. Atiyah M. F. The Moment Map In Symplectic Geometry // Durham Symp. on Global Riemannian Geometry. Ellis Horwood Ltd., 1984. P. 43–51.
7. Atiyah M. F., Bott R. The Yang–Mills Equations Over Riemann Surfaces // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1988. V. 108. P. 523–615.
8. Atiyah M. F., Bott R. The Moment Map And Equivariant Cohomology // Topology. 1984. V. 23. № 1. P. 1–28.
9. Abraham R., Marsden J. Foundation of mechanics. 2nd ed. Reading Mass.: Benjamin, 1978.
10. Bayen F., Flato M., Frostdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D. Deformation theory and quantization. Part I, II, III // Lett. Math. Phys. 1977. V. 1. P. 521–530; // Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 61–151.
11. Boutet de Monvel L., Guillemin V. The spectral theory of Toeplitz operators // Ann. Math. Studies. 1981. V. 99.
12. Bordemann M., Meinreken E., Schlichenmair M. Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $\mathfrak{gl}(n)$, $n \rightarrow \infty$ limits // Commun. Math. Phys. 1994. V. 165. P. 281–296.
13. Borthwick D., Paul T., Uribe A. Legendrian distributions with applications to relative Poincaré series // Invent. math. 1995. V. 122. P. 359–402.
14. Brylinski J.-L. Loop Spaces, Characteristic Classes, And Geometric Quantization // Progress in Math. V. 107. Birkhäuser, 1992.
15. Cattaneo A., Felder G. A path integral approach to the Kontsevich quantization formula. math.QA/9902090.
16. Deligne P. Deformation de l’algebre des fonctions d’une variete symplectic: Comparison entre Fedosov et de Wilde-Lecomte // Sel. Math. New Ser. 1995. V. 1. P. 667–697.
17. De Gosson M. Maslov Classes, Metaplectic Representation, And Lagrangian Quantization // Math. Res. V. 95. Academic Verlag, 1997.
18. Guillemin V., Sternberg S. Geometric Asymptotics. N.Y.: John Wiley & Sons Inc., 1978.

19. *Hitchin N. J.* Flat Connections And Geometric Quantization // Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 347–380.
20. *Hitchin N. J.* Lectures On Special Lagrangian Submanifolds. math.DG/9907034.
21. *MacKey G. W.* Mathematical Foundations Of Quantum Mechanics. Reading, Mass.: Benjamin, 1963.
22. *Rawnsley J. H.* Coherent States And Kähler Manifolds // Quart. J. of Maths. 1997. V. 28. P. 404–415.
23. *Tyurin A. N.* On Bohr–Sommerfeld bases. Univ. of Warwick preprint: Sept. 1999 / Publication 216.
24. *Tyurin A. N.* Geometric quantization and mirror symmetry. math.AG/9902027.
25. *Weinstein A.* Symplectic geometry // BAMS. 1981. V. 5. № 1.
26. *Weinstein A.* Connections of Berry and Hannay Type for Moving Lagrangian Submanifolds // Advances in Math. 1990. V. 82. P. 133–159.
27. *Weinstein A.* Lagrangian Submanifolds And Hamiltonian Systems // Ann. of Math. 1973. V. 98. P. 377–410.
28. *Weinstein A.* Symplectic Manifolds And Their Lagrangian Submanifolds // Adv. in Math. 1971. V. 6. P. 329–346.

Институт теоретической
и экспериментальной физики,
Независимый Московский университет,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
15.VIII.2000