Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:01:52

УДК 517.95

Л. М. Кожевникова

О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области

Изучается квазилинейная параболическая система дивергентного вида с энергетическим неравенством, удовлетворяющая условиям монотонности. Для такой системы рассматривается первая смешанная задача в цилиндрической области $\{t > 0\} \times \Omega$, не ограниченной по пространственным переменным, с начальной вектор-функцией φ , вообще говоря, не принадлежащей $L_2(\Omega)$. Выделен класс единственности решений этой задачи, близкий к классу Тэклинда. Кроме того, доказана теорема существования решения с растущей на бесконечности начальной вектор-функцией, принадлежащего установленному классу единственности.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Работа посвящена исследованию классов единственности решений первой смешанной задачи в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$, где Ω – произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, для квазилинейной параболической системы второго порядка

$$\mathbf{u}_t = \operatorname{div}(\mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u})) - \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}), \quad (t, x) \in D, \quad (0.1)$$

$$\mathbf{u}|_{\{t>0\} \times \partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad (0.2)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(x). \quad (0.3)$$

Здесь $\mathbf{u}(t, x)$, $\varphi(x)$ – N -мерные вектор-функции.

Матрица $\mathbf{A}(t, x, \xi)$, элементы которой $A_{ki}(t, x, \xi)$, $k = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, n}$, измеримы по $(t, x) \in D$, при $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^n$ для п.в. $(t, x) \in D$ удовлетворяет условиям

$$(\mathbf{A}(t, x, \xi) - \mathbf{A}(t, x, \eta)) : (\xi - \eta) \geq c_1 |\xi - \eta|^2, \quad (0.4)$$

$$|\mathbf{A}(t, x, \xi) - \mathbf{A}(t, x, \eta)| \leq c_2 |\xi - \eta|, \quad (0.5)$$

$$\mathbf{A}(t, x, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad (0.6)$$

где $\xi : \eta = \sum_{k,i=1}^{N,n} \xi_{ki} \eta_{ki}$, $|\xi|^2 = \xi : \xi$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00934).

Вектор-функция $\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})$, элементы которой $a_k(t, x, \mathbf{u})$, $k = \overline{1, N}$, измеримы по $(t, x) \in D$, при $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ для п.в. $(t, x) \in D$ удовлетворяет условиям

$$(\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}) - \mathbf{a}(t, x, \mathbf{v})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \geq 0, \quad (0.7)$$

$$|\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}) - \mathbf{a}(t, x, \mathbf{v})| \leq c_3 |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^{q^*}, \quad 0 \leq q^* \leq q - 2, \quad q = 2 + 4/n, \quad (0.8)$$

$$\mathbf{a}(t, x, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad (0.9)$$

где $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^N u_k v_k$, $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Будем рассматривать решения задачи (0.1)–(0.3) с начальной вектор-функцией φ , при каждом $r > 0$ принадлежащей $\mathbb{L}_2(\Omega^r)$, где $\Omega^r = \Omega \cap \{|x| < r\}$. Целью настоящей работы является выделение класса единственности решений рассматриваемой задачи (0.1)–(0.3), включающего в себя ограниченные в каждом слое $D^T = (0, T) \times \Omega$ вектор-функции.

Теоремы единственности решения задачи Коши ($\Omega = \mathbb{R}^n$) для уравнения теплопроводности в классах растущих функций были впервые доказаны Е. Хольмгреном [1], А. Н. Тихоновым [2], С. Тэклиндом [3].

В работе [1] еще в 1924 г. было доказано, что если решение задачи

$$u_t = \Delta u, \quad (0.10)$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (0.11)$$

удовлетворяет для всех t из $(0, T)$ и достаточно больших $|x|$, $x \in \mathbb{R}$, оценке

$$|u(t, x)| \leq \exp(\kappa x^2 (\ln |x|)^\alpha),$$

в которой $\alpha \in [0, 1]$, а κ – положительная постоянная (или оценкам

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \exp(\kappa x^2 \ln |x| (\ln \ln |x|)^\alpha), \\ |u(t, x)| &\leq \exp(\kappa x^2 \ln |x| \ln \ln |x| (\ln \ln \ln |x|)^\alpha), \end{aligned}$$

и т.д.), то $u \equiv 0$ в полосе D^T .

А. Н. Тихоновым [2] было установлено, что если решение задачи (0.10), (0.11) ($n = 1$) в D^T подчиняется неравенству

$$|u(t, x)| \leq C e^{\kappa |x|^2}$$

с какой-либо постоянной κ , то $u \equiv 0$ в D^T и для любого положительного ε существует отличное от тождественного нуля решение этой задачи, удовлетворяющее в D^T оценке

$$|u(t, x)| \leq C e^{\kappa |x|^{2+\varepsilon}}.$$

Развивая идеи Е. Хольмгрена, С. Тэклинда [3] показал, что решение $u(t, x)$ задачи (0.10), (0.11) равно тождественно нулю, если в D^T

$$|u(t, x)| \leq \exp(|x| h(|x|)), \quad (0.12)$$

где $h(r)$ – неубывающая положительная функция такая, что

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = \infty. \quad (0.13)$$

Если же функция $h(r)$ такова, что интеграл (0.13) сходится, то построены решения $u(t, x)$ задачи (0.10), (0.11), отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие условию (0.12).

О. А. Ладыженской было рассмотрено параболическое уравнение высокого порядка

$$\begin{aligned} u_t = & \sum_{\sum_{s=1}^n k_s=2p} a_{(k_1 \dots k_n)}(t) \frac{\partial^{2p} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \\ & + \sum_{\sum_{s=1}^n k_s=2p-1} a_{(k_1 \dots k_n)}(t) \frac{\partial^{2p-1} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \dots + a_{(0 \dots 0)}(t)u, \end{aligned} \quad (0.14)$$

коэффициенты которого $a_{(k_1 \dots k_n)}(t)$ непрерывны на $[0, T]$ и при всевозможных действительных α_i и любом $t \in [0, T]$ удовлетворяют условию

$$(-1)^p \sum_{\sum_{s=1}^n k_s=2p} a_{(k_1 \dots k_n)}(t) \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} \leq -\delta \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right)^{2p}.$$

Доказано, что если решение задачи (0.14), (0.11) удовлетворяет в D^T неравенству

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t, x)| \leq e^{\kappa|x|} \frac{2p}{2p-1},$$

то $u(t, x)$ тождественно равно нулю в D^T . Аналогичный результат для параболических систем установлен в работе [5].

Обобщение теоремы С. Тэклинда на случай общего линейного параболического уравнения второго порядка и линейных параболических систем для задачи Коши и общей начально-краевой задачи дано в [6], доказательство получено разработанным О. А. Олейник методом введения параметра. В работах [7]–[9] теоремы единственности решения краевых задач в неограниченных областях для линейных параболических уравнений второго порядка установлены в классах растущих функций, причем класс функций, в котором имеет место единственность решения краевой задачи, определяется геометрическими характеристиками области. Аналогичные теоремы получены А. Г. Гагнидзе методом введения параметра для параболических уравнений и систем с растущими коэффициентами [10], [11]. Классы единственности обобщенных решений начально-краевых задач в неограниченных областях для различных вырождающихся параболических уравнений исследованы Н. О. Максимовой в [12] с помощью метода введения параметра.

Для линейного параболического уравнения второго порядка без младших членов А. К. Гушиным [13] в случае второй краевой задачи, Ф. Х. Мукминовым [14]

– первой краевой задачи выделен класс единственности, близкий к классу С. Тэ-клинда. Сформулируем этот результат. Рассматривается уравнение

$$u_t = \operatorname{div}(A(t, x) \nabla u), \quad (0.15)$$

где $A(t, x)$ – симметрическая матрица размера $n \times n$, элементы которой $a_{ij}(t, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, – измеримые функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности

$$c_1 |y|^2 \leq a_{ij}(t, x) y_i y_j \leq c_2 |y|^2$$

для любого вектора $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(t, x) \in D$.

Если обобщенное решение задачи (0.15), (0.11) со вторым нулевым краевым условием (или первым) удовлетворяет условию: существует такая монотонно неубывающая на полуоси $[1, \infty)$ положительная функция $h(r)$, что выполнено условие (0.13) и для всех $r \geq 1$

$$\int_0^T \int_{\Omega^r} u^2(t, x) dx dt \leq e^{rh(r)},$$

то оно тождественно равно нулю.

В нашей работе результат А. К. Гушина распространен на случай квазилинейных параболических систем вида (0.1).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ – два обобщенных решения задачи (0.1)–(0.3) в D^T с начальной вектор-функцией $\varphi(x)$, удовлетворяющие условию: существует такая монотонно неубывающая на полуоси $[1, \infty)$ положительная функция $h(r)$, что выполнено условие (0.13) и для всех $r \geq 1, t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega^r} |\mathbf{u}^i(t, x)|^2 dx \leq e^{rh(r)}, \quad i = 1, 2, \quad (0.16)$$

то $\mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{u}^2$ для п.в. $(t, x) \in D^T$.

В установленном классе единственности (см. §3) доказана теорема существования решения задачи (0.1)–(0.3) с экспоненциально растущей на бесконечности начальной вектор-функцией $\varphi(x)$.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть $\|\cdot\|_{Q,p}$ – норма в пространстве $L_p(Q)$, причем значения $Q = \Omega$ и $p = 2$ опускаются. Определим гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}_2^{1,1}(D^T)$ как пополнение множества всех гладких в $\overline{D^T}$ функций, равных нулю в окрестности боковой поверхности $\partial\Omega \times (0, T)$, по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^{1,1}(D^T)}^2 = \|u\|_{D^T}^2 + \|\nabla u\|_{D^T}^2 + \|u_t\|_{D^T}^2,$$

гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}_2^{0,1}(D^T)$ как пополнение того же множества функций по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^{0,1}(D^T)}^2 = \|u\|_{D^T}^2 + \|\nabla u\|_{D^T}^2,$$

банахово пространство $\mathring{V}_2^{0,1}(D^T)$, состоящее из всех элементов $\mathring{W}_2^{0,1}(D^T)$, непрерывных по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$, с нормой

$$\|u\|_{\mathring{V}_2^{0,1}(D^T)}^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|^2 + \|\nabla u\|_{D^T}^2.$$

Пространство $\mathring{V}_2^{0,1}(D^T)$ вкладывается в $L_q(D^T)$, $q = 2 + 4/n$, так, что для любой функции $u \in \mathring{V}_2^{0,1}(D^T)$ выполнено неравенство [15, гл. II, § 3, неравенство (3.4)]

$$\|u\|_{D^T, q} \leq \beta \|u\|_{\mathring{V}_2^{0,1}(D^T)}, \quad (1.1)$$

где $\beta = (2(n-1)/(n-2))^{n/(n+2)}$ при $n \geq 3$ и $\beta = \sqrt{2}$ при $n = 2$.

Через $D_a^b(r)$ будем обозначать цилиндр $(a, b) \times \Omega^r$. Пространство $\mathring{V}_{2, \text{loc}}^{0,1}(\overline{D^T})$ состоит из таких функций u , определенных в D^T , для которых при каждом $r > 0$ найдется функция $v \in \mathring{V}_2^{0,1}(D^T)$, совпадающая с функцией u в $D^T(r)$.

Векторные аналоги этих пространств, например $\mathring{\mathbf{W}}_2^{1,1}(D^T) = (\mathring{W}_2^{1,1}(D^T))^N$, в работе выделяются жирным шрифтом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3) в D^T будем называть вектор-функцию $\mathbf{u}(t, x) \in \mathring{\mathbf{V}}_{2, \text{loc}}^{0,1}(\overline{D^T})$, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int_{D^T} \{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_t + \mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\} dx dt = \int_{\Omega} \varphi \cdot \mathbf{v}(0, x) dx \quad (1.2)$$

для любой вектор-функции $\mathbf{v}(t, x) \in \mathring{\mathbf{W}}_2^{1,1}(D^T)$ с ограниченным носителем такой, что $\mathbf{v}(T, x) = \mathbf{0}$.

Это определение корректно, поскольку входящие в (1.2) интегралы конечны. Действительно, пусть $\text{supp } \mathbf{v} \subset D^T(r)$. Ввиду условий (0.8), (0.9) имеем

$$\begin{aligned} \int_{D^T} |\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})| |\mathbf{v}| dx dt &\leq c_3 \int_{D^T} |\mathbf{u}|^{q^*+1} |\mathbf{v}| dx dt \leq c_3 \int_{D^T} (|\mathbf{u}| + |\mathbf{u}|^{q-1}) |\mathbf{v}| dx dt \\ &\leq c_3 (\|\mathbf{u}\|_{D^T(r)} \|\mathbf{v}\|_{D^T} + \|\mathbf{u}\|_{D^T(r), q}^{q-1} \|\mathbf{v}\|_{D^T, q}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Под обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3) с $\varphi \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ понимаем вектор-функцию $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T)$, удовлетворяющую тождеству (1.2) для $\mathbf{v}(t, x) \in \mathring{\mathbf{W}}_2^{1,1}(D^T)$, $\mathbf{v}(T, x) = \mathbf{0}$.

Вектор-функция $\mathbf{u}(t, x)$ – решение задачи (0.1)–(0.3) в D , если при всех $T > 0$ она является решением задачи (0.1)–(0.3) в D^T .

ТЕОРЕМА 1.1. *Если выполнены условия (0.4)–(0.9), то задача (0.1)–(0.3) с $\varphi(x) \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ имеет обобщенное решение $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T)$.*

Доказательство этой теоремы немногим отличается от доказательства существования решения в случае ограниченной области для квазилинейного параболического уравнения [15, гл. V, § 6, теорема 6.7] и поэтому опускается.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ – обобщенные решения задачи (0.1)–(0.3) с начальными вектор-функциями $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ соответственно; тогда для $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\|(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)(t)\|^2 + 2c_1 \int_0^t \|\nabla(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\varphi^1 - \varphi^2\|^2, \quad (1.3)$$

$$\|\mathbf{u}^i(t)\|^2 + 2c_1 \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^i(\tau)\|^2 d\tau \leq \|\varphi^i\|^2, \quad i = 1, 2, \quad (1.4)$$

в которых константа c_1 – из условия (0.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\mathbf{v}_h$ будем обозначать осреднение Стеклова $\frac{1}{h} \times \int_t^{t+h} \mathbf{v}(\tau, x) d\tau$. В (1.2) возьмем $\mathbf{v} = \mathbf{w}_{-h}$, $h \leq \delta$, где $\mathbf{w} \in \mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^t)$ и продолжена нулем вне интервала $(0, t) \subset (0, T - \delta)$. После простых преобразований будем иметь тождество

$$\int_{D^t} \{(\mathbf{u}_h)_\tau \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{A}(\tau, x, \nabla \mathbf{u}))_h : \nabla \mathbf{w} + (\mathbf{a}(\tau, x, \mathbf{u}))_h \cdot \mathbf{w}\} dx d\tau = 0. \quad (1.5)$$

Введем обозначения

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \quad \delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u}^1) - \mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u}^2), \quad \delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}^1) - \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}^2).$$

Запишем тождество (1.5) дважды для $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$ и вычтем из первого второе, получим равенство

$$\int_{D^t} \{(\delta \mathbf{u}_h)_\tau \cdot \mathbf{w} + \delta \mathbf{A}_h : \nabla \mathbf{w} + \delta \mathbf{a}_h \cdot \mathbf{w}\} dx d\tau = 0, \quad (1.6)$$

в котором положим $\mathbf{w} = \delta \mathbf{u}_h$. После интегрирования первого слагаемого находим

$$\frac{1}{2} \|\delta \mathbf{u}_h(\tau)\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_{D^t} \{\delta \mathbf{A}_h : \nabla (\delta \mathbf{u}_h) + \delta \mathbf{a}_h \cdot \delta \mathbf{u}_h\} dx d\tau = 0. \quad (1.7)$$

Из условий (0.5), (0.6) следует, что $|\mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u})| \in L_2(D^T)$ при $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T)$. Пользуясь условиями (0.8), (0.9), установим, что вектор-функция $\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})$ принадлежит $\mathbb{L}_2(D^T)$ при $0 \leq q^* \leq 2/n$ или $\mathbb{L}_{q'}(D^T)$, $q' = q/(q-1) = 2(n+2)/(n+4)$, при $2/(2+n) \leq q^* \leq 4/n$ для $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T)$. Действительно, поскольку $\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbb{L}_q(D^T)$ и $\mathbb{L}_2(D^T)$, то $\mathbf{u} \in \mathbb{L}_p(D^T)$, $p \in [2, q]$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})\|_{D^T}^2 &\leq c_3^2 \int_{D^T} |\mathbf{u}|^{2(q^*+1)} dx dt = c_3^2 \|\mathbf{u}\|_{D^T, 2(q^*+1)}^{2(q^*+1)}, & 0 \leq q^* \leq \frac{2}{n}, \\ \|\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})\|_{D^T, q'}^{q'} &\leq c_3^{q'} \int_{D^T} |\mathbf{u}|^{q'(q^*+1)} dx dt = c_3^{q'} \|\mathbf{u}\|_{D^T, q'(q^*+1)}^{q'(q^*+1)}, & \frac{2}{2+n} \leq q^* \leq \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Принадлежность функций соответствующим пространствам [15, гл. II, § 4, лемма 4.7] обеспечивает сходимость осреднений Стеклова этих функций при $h \rightarrow 0$ к самим функциям в $D^{T-\delta}$ в нормах этих пространств. Таким образом, из (1.7) предельным переходом при $h \rightarrow 0$ получаем тождество

$$\frac{1}{2} \|\delta \mathbf{u}(\tau)\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_{D^t} \{ \delta \mathbf{A} : \nabla (\delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} \} dx d\tau = 0,$$

из него, учитывая условия (0.4), (0.7), установим (1.3). Из (1.3) при $\mathbf{u}^{3-i} = \mathbf{0}$, $\varphi^{3-i} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, следуют неравенства (1.4).

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условия (0.4)–(0.9). При $\varphi(x) \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ задача (0.1)–(0.3) имеет не более одного обобщенного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют два обобщенных решения $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ задачи (0.1)–(0.3) с начальной вектор-функцией φ ; тогда из (1.3) немедленно имеем

$$\frac{1}{2} \|\delta \mathbf{u}(t)\|^2 + c_1 \int_0^t \|\nabla \delta \mathbf{u}\|^2 d\tau \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Из последнего следует, что $\|\delta \mathbf{u}\| = 0$ при любом $t \geq 0$. Теорема доказана.

§ 2. Теорема единственности

Доказательство основной теоремы базируется на следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ – два обобщенных решения задачи (0.1)–(0.3) в D^T с начальными вектор-функциями $\varphi^1(x), \varphi^2(x)$ соответственно, причем $\varphi^1 \equiv \varphi^2$ в Ω^R . Тогда для всех $t \in (0, T]$ и $r \in (0, R)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \int_0^t \|(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)(\tau)\|_{\Omega^r}^2 d\tau &\leq C_1 e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} t \max_{\tau \in [0, t]} \|(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)(\tau)\|_{\Omega^R}^2, \\ \|(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)(t)\|_{\Omega^r}^2 &\leq \frac{C_2}{(R-r)^2} e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} t \max_{\tau \in [0, t]} \|(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)(\tau)\|_{\Omega^R}^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

в которых κ, C_1, C_2 зависят только от c_1, c_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим срезающую функцию

$$\xi_{\rho, \sigma}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \rho + \sigma, \\ \frac{\rho + \sigma - |x|}{\sigma}, & \rho \leq |x| \leq \rho + \sigma, \\ 1, & |x| < \rho. \end{cases}$$

В (1.6) положим $\mathbf{w} = \xi_{\rho, \sigma}^2(x) \delta \mathbf{u}_h$, после интегрирования первого слагаемого получим равенство

$$\frac{1}{2} \|\xi_{\rho, \sigma} \delta \mathbf{u}_h(\tau)\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_{D^t} \{ \delta \mathbf{A}_h : \nabla (\xi_{\rho, \sigma}^2 \delta \mathbf{u}_h) + \delta \mathbf{a}_h \cdot \delta \mathbf{u}_h \xi_{\rho, \sigma}^2 \} dx d\tau = 0,$$

из которого при $h \rightarrow 0$ будем иметь тождество

$$\frac{1}{2} \|\xi_{\rho, \sigma} \delta \mathbf{u}(\tau)\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_{D^t} \{ \delta \mathbf{A} : \nabla (\xi_{\rho, \sigma}^2 \delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} \xi_{\rho, \sigma}^2 \} dx d\tau = 0.$$

Используя условия (0.4), (0.7), из последнего заключаем

$$\frac{1}{2} \|\xi_{\rho,\sigma} \delta \mathbf{u}(\tau)\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + c_1 \int_{D^t} \xi_{\rho,\sigma}^2 |\nabla(\delta \mathbf{u})|^2 dx d\tau \leq 2 \int_{D^t} \xi_{\rho,\sigma} |\nabla \xi_{\rho,\sigma}| |\delta \mathbf{A}| |\delta \mathbf{u}| dx d\tau.$$

Принимая во внимание условие (0.5), выводим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\xi_{\rho,\sigma} \delta \mathbf{u}(\tau)\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + c_1 \int_{D^t} \xi_{\rho,\sigma}^2 |\nabla(\delta \mathbf{u})|^2 dx d\tau \\ & \leq 2c_2 \int_{D^t} \xi_{\rho,\sigma} |\nabla \xi_{\rho,\sigma}| |\nabla(\delta \mathbf{u})| |\delta \mathbf{u}| dx d\tau \\ & \leq \frac{c_1}{2} \int_{D^t} \xi_{\rho,\sigma}^2 |\nabla(\delta \mathbf{u})|^2 dx d\tau + \frac{2c_2^2}{c_1} \int_{D^t} |\nabla \xi_{\rho,\sigma}|^2 |\delta \mathbf{u}|^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\|\xi_{\rho,\sigma} \delta \mathbf{u}(\tau)\|^2 \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + c_1 \int_{D^t} \xi_{\rho,\sigma}^2 |\nabla(\delta \mathbf{u})|^2 dx d\tau \leq \frac{4c_2^2}{c_1} \int_{D^t} |\nabla \xi_{\rho,\sigma}|^2 |\delta \mathbf{u}|^2 dx d\tau.$$

В силу свойств функции $\xi_{\rho,\sigma}$, при $\rho + \sigma \leq R$ из последнего установим неравенство

$$\|\delta \mathbf{u}(t)\|_{\Omega^\rho}^2 + c_1 \int_0^t \|\nabla(\delta \mathbf{u})\|_{\Omega^\rho}^2 d\tau \leq \frac{B}{\sigma^2} \int_0^t \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega^{\rho+\sigma}}^2 d\tau, \quad (2.3)$$

из которого, вводя обозначения $E(t, \rho) = \|\delta \mathbf{u}(t)\|_{\Omega^\rho}^2$, $H(t, \rho) = \int_0^t \|\delta \mathbf{u}(\tau)\|_{\Omega^\rho}^2 d\tau$, будем иметь

$$E(t, \rho) \leq \frac{B}{\sigma^2} H(t, \rho + \sigma), \quad (2.4)$$

где $B = \frac{4c_2^2}{c_1}$. Проинтегрировав (2.4), получим

$$H(t, \rho) \leq \frac{B}{\sigma^2} \int_0^t H(\tau, \rho + \sigma) d\tau. \quad (2.5)$$

Далее неравенства (2.1), (2.2) выводятся из (2.4), (2.5) точно так же, как это сделано в работе [13] при доказательстве аналогичных неравенств. Ради полноты изложения приведем эти доказательства.

Возьмем произвольное $t \in (0, T]$ и произвольное $r \in (0, R)$. Прежде всего заметим, что если $(R - r)^2/t \leq Be^2$, то неравенство (2.1), очевидно, имеет место ($C_1 = e$, $\kappa = (Be^2)^{-1}$). Поэтому далее будем считать, что $(R - r)^2/t > Be^2$. При произвольном натуральном m и $\sigma = (R - r)/m$ из (2.5) находим

$$\begin{aligned} H(t, r) & \leq \frac{B}{\sigma^2} \int_0^t H(\tau, r + \sigma) d\tau \leq \left(\frac{B}{\sigma^2}\right)^2 \int_0^t (t - \tau) H(\tau, r + 2\sigma) d\tau \leq \dots \\ & \dots \leq \left(\frac{B}{\sigma^2}\right)^m \int_0^t \frac{(t - \tau)^{m-1}}{(m-1)!} H(\tau, r + m\sigma) d\tau \leq \left(\frac{B}{\sigma^2}\right)^m \frac{t^m}{m!} H(t, R) \\ & = \frac{1}{m!} \left(\frac{Bm^2t}{(R-r)^2}\right)^m H(t, R) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{Bmet}{(R-r)^2}\right)^m H(t, R) \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-m \ln \frac{(R-r)^2}{Bmet}\right) H(t, R) \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(R-r)^2 \ln z_m}{Bet z_m}\right) H(t, R), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $z_m = \frac{(R-r)^2}{Betm} = \frac{z_1}{m}$, при этом $z_1 = \frac{(R-r)^2}{Bet} > e$. Выберем теперь m так, чтобы $z_m \geq e$, $z_{m+1} < e$; тогда

$$e \leq z_m = \frac{m+1}{m} z_{m+1} < 2e. \quad (2.7)$$

Ввиду того, что функция $f(z) = \frac{\ln z}{z}$ монотонно убывает при $z \geq e$, из (2.7) заключаем

$$\frac{\ln z_m}{z_m} > \frac{1 + \ln 2}{2e}.$$

Тогда из неравенства (2.6) получаем оценку (2.1) с $\kappa = \frac{\ln 2 + 1}{2e^2 B} < \frac{1}{e^2 B}$.

Аналогично доказывается оценка (2.2). Возьмем опять произвольное $t \in (0, T]$ и произвольное $r \in (0, R)$. Если $(R-r)^2/t \leq Be^2$, то в силу неравенства (2.4) с $\sigma = R-r$ имеем оценку

$$E(t, r) \leq \frac{B}{(R-r)^2} H(t, R) \leq \frac{Be}{(R-r)^2} \exp\left(-\frac{1}{Be^2} \frac{(R-r)^2}{t}\right) H(t, R),$$

т.е. в этом случае справедлива оценка (2.2) с $\kappa = (Be^2)^{-1}$, $C_2 = eB$.

Пусть $(R-r)^2/t > Be^2$. Возьмем произвольное натуральное m и $\sigma = (R-r)/m$. Подставляя в неравенство (2.4) оценку (2.5), получим

$$\begin{aligned} E(t, r) &\leq \frac{B}{\sigma^2} H(t, r + \sigma) \leq \left(\frac{B}{\sigma^2}\right)^2 \int_0^t H(\tau, r + 2\sigma) d\tau \leq \dots \\ &\dots \leq \left(\frac{B}{\sigma^2}\right)^m \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-2}}{(m-2)!} H(\tau, r + m\sigma) d\tau \leq \left(\frac{B}{\sigma^2}\right)^m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} H(t, R) \\ &= \frac{m}{m!t} \left(\frac{Bm^2t}{(R-r)^2}\right)^m H(t, R) \leq \frac{m}{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(R-r)^2}{Bet} \frac{\ln z_m}{z_m}\right) H(t, R) \end{aligned}$$

и, снова выбирая m так, чтобы выполнялись неравенства (2.7), т.е.

$$\frac{z_1}{2e} < m \leq \frac{z_1}{e} = \frac{(R-r)^2}{Be^2t},$$

взяв $\kappa = \frac{1+\ln 2}{4e^2 B}$, находим

$$\begin{aligned} E(t, r) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(R-r)^2}{Be^2t^2} e^{-2\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} H(t, R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} Be^2 \kappa^2 (R-r)^2} \left(\kappa \frac{(R-r)^2}{t}\right)^2 \\ &\times e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} H(t, R). \end{aligned}$$

Ввиду того, что точка $z = 2$ является точкой максимума функции $f(z) = z^2 e^{-z}$, из последнего неравенства имеем

$$\begin{aligned} E(t, r) &\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi} Be^4 \kappa^2 (R-r)^2} e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} H(t, R) \\ &= \frac{2^{5+\frac{1}{2}} B}{\sqrt{\pi} (1 + \ln 2)^2 (R-r)^2} e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} H(t, R). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ – два обобщенных решения задачи (0.1)–(0.3) в D^T с начальными вектор-функциями $\varphi^1(x), \varphi^2(x)$ соответственно. Тогда при всех $t \in (0, T]$ и $R > r > 0$ справедливы неравенства

$$\int_0^t \|\delta \mathbf{u}(\tau)\|_{\Omega^r}^2 d\tau \leq 6C_1 e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} t G(t, R) + 3t \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{\Omega R}^2, \quad (2.1')$$

$$\|\delta \mathbf{u}(t)\|_{\Omega^r}^2 \leq \frac{6C_2}{(R-r)^2} e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} t G(t, R) + 3 \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{\Omega R}^2, \quad (2.2')$$

здесь $G(t, R) = \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^1\|_{\Omega R}^2 + \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^2\|_{\Omega R}^2 + \|\varphi^1\|_{\Omega R}^2 + \|\varphi^2\|_{\Omega R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $R > 0$ и обозначим через $\chi_{\Omega R}$ характеристическую функцию множества Ω^R . Пусть $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ – решения задачи (0.1)–(0.3) с начальными вектор-функциями $\varphi^1(x)\chi_{\Omega R}, \varphi^2(x)\chi_{\Omega R} \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ соответственно. Такие решения из $\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T)$ согласно теоремам 1.1, 1.2 существуют и единственны, и для них справедливы оценки утверждения 1.1

$$\|(\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2)(t)\| \leq \|(\varphi^1 - \varphi^2)\chi_{\Omega R}\| = \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{\Omega R}, \quad (2.8)$$

$$\|\mathbf{v}^i(t)\| \leq \|\varphi^i\|_{\Omega R}, \quad i = 1, 2. \quad (2.9)$$

Для доказательства (2.1') используем (2.1), (2.8), (2.9):

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|_{\Omega^r}^2 d\tau \leq \\ & \leq 3 \left\{ \int_0^t \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{v}^1\|_{\Omega^r}^2 d\tau + \int_0^t \|\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2\|_{\Omega^r}^2 d\tau + \int_0^t \|\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2\|^2 d\tau \right\} \\ & \leq 3C_1 e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} t \left\{ \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{v}^1\|_{\Omega R}^2 + \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2\|_{\Omega R}^2 \right\} + 3t \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{\Omega R}^2 \\ & \leq 6C_1 e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} t \left\{ \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^1\|_{\Omega R}^2 + \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^2\|_{\Omega R}^2 + \|\varphi^1\|_{\Omega R}^2 + \|\varphi^2\|_{\Omega R}^2 \right\} \\ & \quad + 3t \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{\Omega R}^2. \end{aligned}$$

Неравенство (2.2') доказывается с использованием (2.2), (2.8), (2.9):

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)(t)\|_{\Omega^r}^2 \leq 3 \{ \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{v}^1\|_{\Omega^r}^2 + \|\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2\|_{\Omega^r}^2 + \|\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2\|^2 \} \\ & \leq \frac{3C_2 t}{(R-r)^2} e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} \left\{ \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{v}^1\|_{\Omega R}^2 + \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2\|_{\Omega R}^2 \right\} \\ & \quad + 3 \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{\Omega R}^2 \\ & \leq \frac{6C_2 t}{(R-r)^2} e^{-\kappa \frac{(R-r)^2}{t}} \left\{ \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^1\|_{\Omega R}^2 + \max_{[0, t]} \|\mathbf{u}^2\|_{\Omega R}^2 + \|\varphi^1\|_{\Omega R}^2 + \|\varphi^2\|_{\Omega R}^2 \right\} \\ & \quad + 3 \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{\Omega R}^2. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ – обобщенные решения задачи (0.1)–(0.3) в D^T с начальными вектор-функциями $\varphi^1(x), \varphi^2(x)$ соответственно, удовлетворяющие условию (0.16); тогда для любых t_1, t_2 : $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, для $R > r > 0$ справедливы неравенства

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega^r}^2 d\tau \leq 24C_1(t_2 - t_1) \exp\left(Rh(R) - \kappa \frac{(R-r)^2}{t_2 - t_1}\right) + 3(t_2 - t_1) \|\delta \mathbf{u}(t_1)\|_{\Omega^R}^2, \quad (2.1'')$$

$$\|\delta \mathbf{u}(t_2)\|_{\Omega^r}^2 \leq 24C_2 \frac{t_2 - t_1}{(R-r)^2} \exp\left(Rh(R) - \kappa \frac{(R-r)^2}{t_2 - t_1}\right) + 3\|\delta \mathbf{u}(t_1)\|_{\Omega^R}^2. \quad (2.2'')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вектор-функции $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ как обобщенные решения задачи (0.1)–(0.3) в $D_{t_1}^{t_2} = (t_1, t_2) \times \Omega$ с начальными данными $\mathbf{u}^1(t_1, x), \mathbf{u}^2(t_1, x)$ соответственно, заданными в момент времени $t = t_1$. Тогда из (2.1'), (0.16) следует (2.1''), а из (2.2'), (0.16) имеем (2.2'').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ получается из оценок (2.1''), (2.2''). Возьмем произвольное $R_0 \geq 1$ и оценим интеграл $H(T, R_0) = \int_{D^T(R_0)} |\mathbf{u}|^2 dx dt$ следующим образом.

Рассмотрим последовательности

$$R_l = 2^l R_0, \quad \Delta t_l = \frac{\kappa(R_{l+1} - R_l)}{8h(R_l)}, \quad l = 1, 2, \dots$$

В силу монотонности функции $h(r)$ и условия (0.13) имеем

$$\sum_{l=1}^m \Delta t_l = \frac{\kappa}{8} \sum_{l=1}^m \frac{R_{l+1} - R_l}{h(R_l)} \geq \frac{\kappa}{8} \sum_{l=1}^m \int_{R_l}^{R_{l+1}} \frac{dr}{h(r)} = \frac{\kappa}{8} \int_{R_1}^{R_{m+1}} \frac{dr}{h(r)} \rightarrow +\infty$$

при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, при любом выборе числа R_0 найдется такой номер m , что

$$\sum_{l=1}^{m+1} \Delta t_l \geq T. \quad (2.10)$$

Пусть $m = m(R_0)$ – наименьший из номеров m , удовлетворяющий неравенству (2.10) так, что

$$\sum_{l=1}^m \Delta t_l < T.$$

Переопределим Δt_{m+1} равенством

$$\Delta t_{m+1} = T - \sum_{l=1}^m \Delta t_l \leq \frac{\kappa(R_{m+2} - R_{m+1})}{8h(R_{m+1})}. \quad (2.11)$$

Определим убывающую последовательность времен $T_0 = T, T_1 = T_0 - \Delta t_1, T_2 = T_1 - \Delta t_2, \dots, T_{m+1} = T_m - \Delta t_{m+1} = 0$.

С помощью неравенства (2.1'') выводим

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^T \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega^{R_0}}^2 d\tau &\leq 24C_1 \Delta t_1 \exp\left(R_1 h(R_1) - \kappa \frac{(R_1 - R_0)^2}{\Delta t_1}\right) + 3\Delta t_1 \|\delta \mathbf{u}(T_1)\|_{\Omega^{R_1}}^2 \\ &\leq 24C_1 T e^{-R_1 h(R_1)} + 3T \|\delta \mathbf{u}(T_1)\|_{\Omega^{R_1}}^2. \end{aligned} \quad (2.12_1)$$

При указанных ниже $C_1^{(l)}$, $C_2^{(l)}$ из (2.1''), (2.2'') заключаем

$$\begin{aligned} &\int_{T_l}^{T_{l-1}} \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega^{R_0}}^2 d\tau + C_1^{(l-1)} \|\delta \mathbf{u}(T_{l-1})\|_{\Omega^{R_{l-1}}}^2 \\ &\leq \int_{T_l}^{T_{l-1}} \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega^{R_{l-1}}}^2 d\tau + C_1^{(l-1)} \|\delta \mathbf{u}(T_{l-1})\|_{\Omega^{R_{l-1}}}^2 \\ &\leq 24C_1 \Delta t_l \exp\left(R_l h(R_l) - \frac{\kappa(R_l - R_{l-1})^2}{\Delta t_l}\right) + 3\Delta t_l \|\delta \mathbf{u}(T_l)\|_{\Omega^{R_l}}^2 \\ &\quad + C_1^{(l-1)} 24C_2 \frac{\Delta t_l}{(R_l - R_{l-1})^2} \exp\left(R_l h(R_l) - \frac{\kappa(R_l - R_{l-1})^2}{\Delta t_l}\right) \\ &\quad + 3C_1^{(l-1)} \|\delta \mathbf{u}(T_l)\|_{\Omega^{R_l}}^2 \leq C_2^{(l)} e^{-R_l h(R_l)} + C_1^{(l)} \|\delta \mathbf{u}(T_l)\|_{\Omega^{R_l}}^2, \end{aligned} \quad (2.12_l)$$

$$C_1^{(0)} = 0, \quad C_1^{(l)} = \sum_{i=1}^l 3^i T, \quad C_2^{(l)} = 24T \left(C_1 + \frac{C_1^{(l-1)} C_2}{2^{2(l-1)}} \right). \quad (2.13)$$

Используя оценки (2.1), (2.2), а также (0.16), (2.11), устанавливаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_m} \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega^{R_0}}^2 d\tau + C_1^{(m)} \|\delta \mathbf{u}(T_m)\|_{\Omega^{R_m}}^2 \\ &\leq \int_0^{T_m} \|\delta \mathbf{u}\|_{\Omega^{R_m}}^2 d\tau + C_1^{(m)} \|\delta \mathbf{u}(T_m)\|_{\Omega^{R_m}}^2 \\ &\leq 4\Delta t_{m+1} C_1 \exp\left(R_{m+1} h(R_{m+1}) - \frac{\kappa(R_{m+1} - R_m)^2}{\Delta t_{m+1}}\right) \\ &\quad + 4 \frac{C_1^{(m)} C_2 \Delta t_{m+1}}{(R_{m+1} - R_m)^2} \exp\left(R_{m+1} h(R_{m+1}) - \frac{\kappa(R_{m+1} - R_m)^2}{\Delta t_{m+1}}\right) \\ &\leq 4T \left(C_1 + \frac{C_1^{(m)} C_2}{2^{2m}} \right) e^{-R_{m+1} h(R_{m+1})} < C_2^{(m+1)} e^{-R_{m+1} h(R_{m+1})}. \end{aligned} \quad (2.12_{m+1})$$

Складывая (2.12_l), $l = \overline{1, m+1}$, получим

$$\begin{aligned} H(T, R_0) &\leq C_2^{(1)} e^{-R_1 h(R_1)} + C_2^{(2)} e^{-R_2 h(R_2)} + \dots + C_2^{(m+1)} e^{-R_{m+1} h(R_{m+1})} \\ &\leq 24T \sum_{l=1}^{\infty} e^{-R_l h(R_l)} \left(C_1 + \frac{C_1^{(l-1)} C_2}{2^{2(l-1)}} \right) \\ &\leq 24T \sum_{l=0}^{\infty} e^{-2^{l+1} R_0 h(1)} \left(C_1 + \frac{C_1^{(l)} C_2}{2^{2l}} \right). \end{aligned}$$

Из (2.13) установим $C_1^{(l)} < \frac{3^{l+1}T}{2}$. Тогда окончательно имеем

$$H(T, R_0) \leq B_1 e^{-R_0 h(1)} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-2^l h(1)} \left(C_1 + B_2 \left(\frac{3}{4} \right)^l \right).$$

Итак, мы показали, что монотонно неубывающая неотрицательная функция $H(T, R_0)$ от R_0 стремится к нулю при $R_0 \rightarrow \infty$. Следовательно, $H(T, R_0) = 0$ для всех R_0 . Теорема доказана.

§ 3. Теорема существования

Здесь докажем существование решения в установленном классе единственности.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для произвольной начальной вектор-функции φ , удовлетворяющей условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $C = C(\varepsilon)$, что для всех $r > 0$ имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{\Omega^r}^2 \leq C(\varepsilon) e^{\varepsilon r^2}, \quad (3.1)$$

существует решение задачи (0.1)–(0.3), удовлетворяющее условию (0.16) с $h(r) = \omega r$, где ω – положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы аналогично доказательству соответствующего утверждения из работы [13].

Возьмем произвольное натуральное l и обозначим через $\mathbf{u}^l$ решение из $\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T)$ задачи (0.1)–(0.3) с начальной вектор-функцией $\varphi(x)\chi_{\Omega^l}(x) \in \mathbb{L}_2(\Omega)$. При произвольных натуральных p, l рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{v}^{l+p,l}(t, x) = \mathbf{u}^{l+p}(t, x) - \mathbf{u}^l(t, x),$$

для нее имеет место представление

$$\mathbf{v}^{l+p,l}(t, x) = \mathbf{v}^{l+p,l+p-1}(t, x) + \mathbf{v}^{l+p-1,l+p-2}(t, x) + \dots + \mathbf{v}^{l+1,l}(t, x).$$

Через $\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(R_0))$ обозначим сужение $\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T)$ на $D^T(R_0)$. Поскольку $\varphi(x)\chi_{\Omega^{l+p}}(x) = \varphi(x)\chi_{\Omega^l}(x) = \varphi(x)$ при $|x| \leq l$, то пара решений $\mathbf{u}^{l+p}, \mathbf{u}^l$ удовлетворяет условиям утверждения 2.1. Из (2.3) с $\sigma = 1$ для любых $R_0 > 0, T > 0$ и всех натуральных p и натуральных $l > R_0 + 1$ выводим соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^{l+p,l}\|_{\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(R_0))}^2 &= \max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}^{l+p,l}(t)\|_{\Omega^{R_0}}^2 + \|\nabla \mathbf{v}^{l+p,l}\|_{D^T(R_0)}^2 \\ &\leq B \left(1 + \frac{1}{c_1} \right) \|\mathbf{v}^{l+p,l}\|_{D^T(R_0+1)}^2 = B_1 \left\| \sum_{m=1}^p \mathbf{v}^{l+m,l+m-1} \right\|_{D^T(R_0+1)}^2 \\ &\leq B_1 \left(\sum_{m=1}^p \|\mathbf{v}^{l+m,l+m-1}\|_{D^T(R_0+1)} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Далее, ввиду того, что вектор-функции $\mathbf{u}^{l+m}$, $\mathbf{u}^{l+m-1}$ удовлетворяют условиям утверждения 2.1 с $R = l + m - 1$, для них справедливо неравенство (2.1). Из него и (3.2), (2.8) заключаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^{l+p,l}\|_{\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(R_0))}^2 &\leq \\ &\leq C_1 B_1 T \left[\sum_{m=1}^p e^{-\frac{\kappa}{2T}(l+m-2-R_0)^2} \max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}^{l+m, l+m-1}(t)\|_{\Omega^{l+m-1}} \right]^2 \\ &\leq B_2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\kappa}{2T}(l+m-2-R_0)^2} \|\varphi\|_{\Omega_{l+m-1}^{l+m}} \right]^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие (3.1) с $\varepsilon = \frac{\kappa}{2T}$, находим

$$\|\mathbf{v}^{l+p,l}\|_{\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(R_0))}^2 \leq B_3 \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\kappa}{2T}(l+m-2-R_0)^2} e^{\frac{\kappa}{4T}(l+m)^2} \right]^2.$$

Так как при $l \geq 4(R_0 + 2)$

$$l + m - R_0 - 2 \geq \frac{3}{4}(l + m),$$

то для таких l и всех натуральных p имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^{l+p,l}\|_{\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(R_0))}^2 &\leq B_3 \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\kappa}{32T}(l+m)^2} \right]^2 \\ &\leq B_3 e^{-\frac{\kappa l^2}{16T}} \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\kappa m^2}{32T}} \right]^2 = B_4 e^{-\kappa' l^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Следовательно, при любых $R_0 > 0$, $T > 0$ последовательность $\mathbf{u}^l$ сходится в $\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(R_0))$ к $\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{V}}_{2,\text{loc}}^{0,1}(\overline{D^T})$.

Покажем, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.2) для любой вектор-функции $\mathbf{v}(t, x) \in \mathring{\mathbf{W}}_2^{1,1}(D^T)$ с ограниченным носителем такой, что $\mathbf{v}(T, x) = \mathbf{0}$. Напишем (1.2) для решений $\mathbf{u}^l$:

$$\int_{D^T} \{ -\mathbf{u}^l \cdot \mathbf{v}_t + \mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u}^l) : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}^l) \cdot \mathbf{v} \} dx dt = \int_{\Omega^l} \varphi \cdot \mathbf{v}(0, x) dx. \quad (3.4)$$

Пусть $\text{supp } \mathbf{v} \subset D^T(k)$. Из доказанного выше следует $\mathbf{u}^l \rightarrow \mathbf{u}$ в $\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(k))$. Используя (0.5), заключаем, что $\mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u}^l) \rightarrow \mathbf{A}(t, x, \nabla \mathbf{u})$ в $\mathbb{L}_2(D^T(k))$. Принимая во внимание условие (0.8) и то, что $\mathring{\mathbf{V}}_2^{0,1}(D^T(k)) \subset \mathbb{L}_q(D^T(k))$, установим,

что $\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}^l) \rightarrow \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})$ в $\mathbb{L}_2(D^T(k))$ при $0 \leq q^* \leq 2/n$ или $\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}^l) \rightarrow \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})$ в $\mathbb{L}_{q'}(D^T(k))$ при $2/(2+n) \leq q^* \leq 4/n$. Действительно, при $0 \leq q^* \leq 2/n$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}^l) - \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})\|_{D^T(k)}^2 &\leq c_3^2 \int_{D^T(k)} |\mathbf{u}^l - \mathbf{u}|^2 (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^{2q^*} dx dt \\ &\leq c_3^2 \int_{D^T(k)} |\mathbf{u}^l - \mathbf{u}|^2 \{1 + (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^{\frac{4}{n}}\} dx dt \leq c_3^2 \|\mathbf{u}^l - \mathbf{u}\|_{D^T(k)}^2 \\ &\quad + c_3^2 \left(\int_{D^T(k)} |\mathbf{u}^l - \mathbf{u}|^q dx dt \right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_{D^T(k)} (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^q dx dt \right)^{\frac{q-2}{q}} \\ &= c_3^2 \|\mathbf{u}^l - \mathbf{u}\|_{D^T(k)}^2 + c_3^2 \|\mathbf{u}^l - \mathbf{u}\|_{D^T(k), q}^2 \|\mathbf{u}^l + \mathbf{u}\|_{D^T(k), q}^{q-2}, \end{aligned}$$

а при $2/(2+n) \leq q^* \leq 4/n$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}(t, x, \mathbf{u}^l) - \mathbf{a}(t, x, \mathbf{u})\|_{D^T(k), q'}^{q'} &\leq c_3^{q'} \int_{D^T(k)} |\mathbf{u}^l - \mathbf{u}|^{q'} (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^{q'q^*} dx dt \\ &\leq c_3^{q'} \int_{D^T(k)} |\mathbf{u}^l - \mathbf{u}|^{q'} \{ (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^{2q'/(n+2)} + (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^{q'(q-2)} \} dx dt \\ &\leq c_3^{q'} \left(\int_{D^T(k)} |\mathbf{u}^l - \mathbf{u}|^2 dx dt \right)^{\frac{q'}{2}} \left(\int_{D^T(k)} (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^2 dx dt \right)^{\frac{2-q'}{2}} \\ &\quad + c_3^{q'} \left(\int_{D^T(k)} |\mathbf{u}^l - \mathbf{u}|^q dx dt \right)^{\frac{q'}{q}} \left(\int_{D^T(k)} (|\mathbf{u}^l| + |\mathbf{u}|)^q dx dt \right)^{\frac{q-q'}{q}} \\ &= c_3^{q'} \|\mathbf{u}^l - \mathbf{u}\|_{D^T(k)}^{q'} \|\mathbf{u}^l + \mathbf{u}\|_{D^T(k)}^{2-q'} \\ &\quad + c_3^{q'} \|\mathbf{u}^l - \mathbf{u}\|_{D^T(k), q}^{q'} \|\mathbf{u}^l + \mathbf{u}\|_{D^T(k), q}^{q-q'}. \end{aligned}$$

Итак, можно перейти к пределу в (3.4) при $l \rightarrow \infty$. Таким образом, доказано, что $\mathbf{u}(t, x)$ есть обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3).

Покажем, что построенное решение $\mathbf{u}$ принадлежит установленному классу единственности. Действительно, так как при любом $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{\Omega^r}^2 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^m(t)\|_{\Omega^r}^2 \leq 2\|\mathbf{u}^l(t)\|_{\Omega^r}^2 + 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}^{m,l}(t)\|_{\Omega^r}^2 \\ &\leq 2\|\mathbf{u}^l(t)\|^2 + 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}^{m,l}\|_{\mathbf{V}_{2,0,1}^{\circ}(D^T(r))}^2, \end{aligned}$$

то при любом $r \geq 1$ и $t \in [0, T]$, взяв $l = [4(r+2)] + 1$ и используя неравенства (2.9), (3.3), (3.1), получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{\Omega^r}^2 &\leq 2\|\varphi\|_{\Omega^l}^2 + 2B_4 e^{-\kappa' l^2} \leq 2C(\varepsilon) e^{\varepsilon l^2} + 2B_4 e^{-\kappa' l^2} \\ &\leq 2C(1) e^{(4(r+2)+1)^2} + 2B_4 e^{-16\kappa'(r+2)^2} \leq e^{\omega r^2}, \end{aligned}$$

т.е. выполнено условие (0.16) с $h(r) = \omega r$.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Holmgren E.* Sur les solutions quasianalytiques d'equations de la chaleur // Arkiv för mat., astr., och fys. 1924. V. 18. № 9. P. 64–95.
2. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Матем. сб. 1935. Т. 42(84). С. 199–216.
3. *Täcklind S.* Sur les class quasianalytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique // Nova Acta Reg. Soc. Schi. Uppsaliensis. Ser. 4. 1936. V. 10. № 3. P. 3–55.
4. *Ладыженская О. А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Матем. сб. 1950. Т. 27(69). С. 175–184.
5. *Эйдельман С. Д.* Оценки решений параболических систем и некоторые их применения // Матем. сб. 1954. Т. 33. С. 57–72.
6. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // УМН. 1987. Т. 33. № 5. С. 7–76.
7. *Ландис Е. М.* О зависимости классов единственности решения второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в неограниченной области от геометрии области // ДАН СССР. 1984. Т. 275. С. 790–793.
8. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // УМН. 1976. Т. 31. № 6. С. 142–166.
9. *Гагнидзе А. Г.* О классах единственности решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка в неограниченной области // УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 193–194.
10. *Гагнидзе А. Г.* О единственности решения задачи Коши для параболического уравнения с растущими коэффициентами // Сообщ. АН ГССР. 1988. Т. 131. № 2. С. 241–243.
11. *Гагнидзе А. Г.* О единственности решения задачи Коши для параболических уравнений высокого порядка с неограниченными коэффициентами // Сообщ. АН ГССР. 1989. Т. 134. № 3. С. 469–471.
12. *Максимова Н. О.* О единственности решений задачи Коши и краевых задач в неограниченных областях для некоторых классов квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1985. № 11. С. 12–31.
13. *Гуцин А. К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1982. Т. 119(161). С. 451–508.
14. *Мужминов Ф. Х.* О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 11. С. 1486–1509.
15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.