Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Явление буферности в математической модели генератора ван дер Поля с распределенными параметрами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 67–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/im336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:26:26

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Явление буферности в математической модели генератора Ван дер Поля с распределенными параметрами

Для математической модели распределенного генератора Ван дер Поля, представляющей собой нелинейную краевую задачу гиперболического типа, устанавливается явление буферности, т.е. существование при подходящем выборе параметров любого фиксированного числа устойчивых циклов.

Библиография: 22 наименования.

Введение

Будем говорить о феномене буферности, если в системе дифференциальных уравнений с частными производными при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование любого конечного числа устойчивых циклов (периодических по времени решений). В случае гиперболических уравнений исследование этого явления по инициативе Ю. С. Колесова начато в [1]. Затем оно было продолжено в работах [2]–[4], из результатов которых следует, что буферность типична для гиперболических краевых задач, причем в некоторых случаях возможна даже гипербуферность [4], т.е. существование сразу счетного числа устойчивых циклов.

С одной стороны, в задачах радиофизики буферность актуальна, например в связи с моделированием процессов памяти и созданием запоминающих ячеек [5]. Но с другой стороны, при конструировании стабильных автогенераторов надо считаться с этим явлением как с негативным фактором, так как оно может приводить к спонтанным переходам системы с одного периодического режима на другой под влиянием флуктуационных факторов, т.е. к своеобразной форме хаоса. Поэтому представляет существенный интерес описание простейших радиофизических устройств, обладающих свойством буферности.

Одним из таких физических устройств, как показано теоретически в работах [6], [7] и экспериментально в статье [8], является RCLG-автогенератор с отрезком длинной линии в цепи обратной связи. Другим примером служит автогенератор, содержащий отрезок длинной линии с туннельным диодом; соответствующий теоретический и экспериментальный анализ проведен в [9], [10].

В настоящей публикации, продолжающей начатый в статьях [6]–[10] цикл исследований явления буферности в задачах радиофизики, рассматривается математическая модель классического генератора Ван дер Поля с распределенными параметрами, представляющая собой систему телеграфных уравнений с нелинейностями как в самих уравнениях, так и в граничных условиях. Показано, что

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-00157).

при определенных предположениях в такой модели имеет место феномен буферности. Используемый при этом математический аппарат суть метод бесконечномерной нормализации, являющийся специальным вариантом асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского [11] и опирающийся в алгоритмическом плане на метод квазинормальных форм, разработанный Ю. С. Колесовым [12], [13].

§ 1. Общие свойства краевой задачи

1.1. Математическая модель. Идея формирования математической модели распределенного генератора Ван дер Поля связана, в первую очередь, с автогенератором, имеющим сосредоточенные параметры и рассмотренным самим Ван дер Полем (см., например, [14], [15]). Напомним, что речь идет о классическом одноламповом генераторе, схема которого представлена на рис. 1, а; здесь L , C , R – сосредоточенные индуктивность, емкость и активное сопротивление, а E_g – напряжение источника, питающего сетку. Относительно лампы предполагается, что анодный ток i_a в ней зависит только от ее сеточного напряжения u_c по закону

$$i_a = f(u_c), \quad (1.1)$$

где нелинейная функция f – характеристика лампы – имеет график, показанный на рис. 1, б. Здесь величина i_{a0} определяется постоянным сеточным напряжением u_{c0} , а точка A соответствует режиму работы лампы при отсутствии колебаний и называется *рабочей точкой*.

Рис. 1

Как известно, переменная составляющая напряжения в генераторе Ван дер Поля удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = M \frac{di_a}{dt}, \quad (1.2)$$

где M – коэффициент взаимоиנדукции между анодной цепью и колебательным контуром в цепи сетки (см. рис. 1, а). Аппроксимируем участок характеристики (1.1) в окрестности рабочей точки A кубическим полиномом:

$$i_a = i_{a0} + s_0 u + s_1 u^2 - s_2 u^3, \quad (1.3)$$

где $s_0, s_2 > 0$, а знак s_1 произволен. Подставив, далее, равенство (1.3) в соотношение (1.2), проведя необходимые нормировки переменных и введя характеристический параметр, придем (см. [15]) к классическому уравнению Ван дер Поля

$$\ddot{x} + r(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Отдельно остановимся на физическом смысле правой части уравнения (1.2). Величина $-M di_a/dt$ представляет собой э.д.с. обратной связи, наводимую в колебательном контуре благодаря “индуктивному” воздействию на него анодного тока. Таким образом, через взаимную индукцию между сеточной (основной) и анодной (вспомогательной) цепями (с индуктивностями L и L_0 соответственно) происходит “подкачка” энергии в колебательный контур в цепи сетки (в основную цепь), пополняющая часть его энергии, теряемой на сопротивлении R .

Допустим теперь, что электрические параметры L, C, R основной цепи равномерно распределены на отрезке проводника длины l ; тогда получим генератор, изображенный на рис. 2. Относительно активного элемента (усилителя Y , имеющего произвольную природу) по-прежнему будем предполагать, что его характеристика задается равенством (1.1).

Рис. 2

Пренебрегая распределенной проводимостью G , для переменных составляющих напряжения u и тока i в линии $0 \leq x \leq l$ стандартным образом приходим к системе уравнений

$$u_x = -Li_t - Ri + M \frac{di_a}{dt}, \quad i_x = -Cu_t, \quad (1.4)$$

где (ср. с (1.3))

$$i_a = i_{a0} + s_0 u|_{x=l} + s_1 u^2|_{x=l} - s_2 u^3|_{x=l}. \quad (1.5)$$

Отметим, что при $M = 0$ система переходит в обычную систему телеграфных уравнений, а слагаемое $M di_a/dt$ играет здесь ту же роль, что и аналогичный член в уравнении (1.2), — описывает обратную связь. Эффект этой обратной связи, очевидно, тот же, что и в классическом генераторе Ван дер Поля, однако теперь “подкачка” энергии в основную цепь осуществляется по всей длине линии $0 \leq x \leq l$. Ясно и другое: если во вспомогательной цепи сопротивление $R_0 \ll R$, то естественно пренебречь в ней падением напряжения на сопротивлении R_0 , а значит, можно считать, что величина i_a определяется только значением напряжения u на конце линии (см. (1.5)).

Выполняя в системе (1.4) нормировки $i\sqrt{L/C} \rightarrow i$, $x/l \rightarrow x$, $t/(l\sqrt{LC}) \rightarrow t$ и вводя обозначения $\varepsilon = Rl\sqrt{C/L}$, $\beta_j = Ms_j/\sqrt{LC}$, $j = 0, 1, 2$, переходим к системе уравнений ($t \geq 0$; $0 \leq x \leq 1$)

$$u_t = -i_x, \quad i_t = -u_x - \varepsilon i + \frac{d}{dt}[\beta_0 u|_{x=1} + \beta_1 u^2|_{x=1} - \beta_2 u^3|_{x=1}], \quad (1.6)$$

которую, в свою очередь, дополним граничными условиями

$$i|_{x=0} = 0, \quad i|_{x=1} = 0. \quad (1.7)$$

Заметим, что первое из условий (1.7) – следствие разомкнутости основной цепи на конце $x = 0$, а второе вытекает из предполагаемой идеальности усилителя, т.е. наличия у него бесконечно большого входного активного сопротивления.

Описанный автогенератор с распределенными параметрами по физической сути максимально приближен к классическому сосредоточенному генератору Ван дер Поля. Поэтому будем называть его *распределенным генератором Ван дер Поля*. Краевая задача (1.6), (1.7), представляющая одну из возможных математических моделей этого генератора, была предложена (на основе развитой в работе [16] методики) в заметке [17]. Следует упомянуть и статью [18], где предпринят теоретический анализ модели (1.6), (1.7) и приведены результаты физического эксперимента.

1.2. Разрешимость начальной задачи. Положим

$$v = f(t) - i, \quad f(t) = \beta_0 u|_{x=1} + \beta_1 u^2|_{x=1} - \beta_2 u^3|_{x=1},$$

и перейдем от задачи (1.6), (1.7) к эквивалентной краевой задаче

$$u_t = v_x, \quad v_t = u_x + \varepsilon(f(t) - v), \quad (1.8)$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=1} = \beta_0 u|_{x=1} + \beta_1 u^2|_{x=1} - \beta_2 u^3|_{x=1}. \quad (1.9)$$

В дальнейшем нам потребуется гильбертово пространство $W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$ со скалярным произведением

$$(g, h) = \int_0^1 (g(x), h(x)) dx + \int_0^1 (g'(x), h'(x)) dx,$$

где $(*, *)$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через Σ нелинейное многообразие функций $(u(x), v(x)) \in W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, удовлетворяющих условиям (1.9) и равенству

$$\int_0^1 u(x) dx = 0, \quad (1.10)$$

а через $B(r)$ – замкнутый шар в пространстве $W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$ радиуса r с центром в нуле.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть в краевых условиях (1.9) коэффициент $\beta_0 \neq 1$. Тогда по любому $T > 0$ можно указать такие достаточно малые $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(T) > 0$ и $r = r(T) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ любое решение $(u(t, x, \varepsilon), v(t, x, \varepsilon))$ краевой задачи (1.8), (1.9) с произвольными начальными условиями

$$u|_{t=0} = u(x), \quad v|_{t=0} = v(x) : \quad (u(x), v(x)) \in \Sigma \cap B(r) \quad (1.11)$$

однозначно определено на отрезке $|t| \leq T$, принадлежит при каждом t многообразию Σ и сильно непрерывно по t в метрике $W_2^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся сначала в разрешимости задачи (1.8), (1.9), (1.11) при $\varepsilon = 0$. В этом случае решение системы (1.8) с начальными условиями (1.11) имеет вид

$$u(t, x) = \varphi(t + x) + \psi(t - x + 1), \quad v(t, x) = \varphi(t + x) - \psi(t - x + 1), \quad (1.12)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{[u(x) + v(x)]}{2}, \quad \psi(x) = \frac{[u(1 - x) - v(1 - x)]}{2}. \quad (1.13)$$

Подставляя формулы (1.12) в граничные условия (1.9), получим однозначный способ продолжения функций (1.13) с отрезка $0 \leq x \leq 1$ на всю ось посредством равенств

$$\varphi(t) - \psi(t + 1) = \varphi(t + 1) - \psi(t) = H[\varphi(t + 1) + \psi(t)]; \quad (1.14)$$

здесь $H(z) = \beta_0 z + \beta_1 z^2 - \beta_2 z^3$.

Для доказательства разрешимости системы разностных уравнений (1.14) в сторону возрастания t рассмотрим сначала вспомогательное уравнение $\varphi - \psi = H(\varphi + \psi)$ и применим к нему в точке $\varphi = \psi = 0$ теорему о неявной функции (ее справедливость обеспечивает условие $\beta_0 \neq 1$). В итоге получим функцию $\varphi = G(\psi)$, $G(0) = 0$, определенную на некотором отрезке $|\psi| \leq q$, где $q > 0$ достаточно мало. Возвращаясь к системе (1.14), заключаем, что при дополнительном условии

$$|\psi(t)| \leq q \quad (1.15)$$

она эквивалентна системе явных разностных уравнений

$$\varphi(t + 1) = G(\psi(t)), \quad \psi(t + 1) = \varphi(t) - H(G(\psi(t)) + \psi(t)).$$

Остается заметить, что, во-первых, при подходящей малости радиуса r в условии (1.11) решение $(\varphi(t), \psi(t))$ этой системы однозначно продолжается методом шагов на любой фиксированный отрезок $0 \leq t \leq T$ (с сохранением неравенства (1.15)); во-вторых, $\varphi(t), \psi(t) \in W_2^1(0, T)$ в силу того, что начальные функции удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi(0) - \psi(1) = \varphi(1) - \psi(0) = H(\varphi(1) + \psi(0)).$$

Ясно, что аналогичные выводы справедливы относительно разрешимости системы (1.14) в сторону убывания t .

Отдельно остановимся на доказательстве справедливости для компоненты $u(t, x)$ решения системы (1.12) равенства (1.10). Из первого уравнения (1.8) и граничных условий (1.9) для функции

$$m(t) = \int_0^1 u(t, x) dx \quad (1.16)$$

получаем уравнение $dm/dt \equiv 0$, а отсюда и из условия $m(0) = 0$ (см. (1.10)) заключаем, что $m(t) = 0$ при всех t .

При $0 < \varepsilon \ll 1$ ситуация в принципе не меняется. В этом случае, рассматривая слагаемое $\varepsilon f(t)$ во втором уравнении (1.8) как неоднородность и интегрируя систему (1.8) методом Римана (см., например, [19]), для неизвестных u, v также получаем явные формулы. Подставляя их в краевые условия (1.9), приходим к системе нелинейных интегральных уравнений, разрешимость которой при $0 < \varepsilon \ll 1$ вытекает из уже установленной ее разрешимости при $\varepsilon = 0$ и теоремы о неявной функции. Теорема доказана.

Из теоремы 1.1 следует, что решения краевой задачи (1.8), (1.9) порождают в фазовом пространстве Σ сильно непрерывную по t группу ограниченных нелинейных операторов $U^t(h)$, $h = \text{colop}(u(0, x), v(0, x))$. Из способа построения этой группы вытекает, что она гладко (по Фреше) зависит от начального условия h и параметров. А это, в свою очередь, позволяет практически без изменений распространить на краевую задачу (1.8), (1.9) основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений: теоремы Ляпунова и Андронова–Витта об устойчивости по первому приближению, утверждения об интегральных многообразиях и т.д.

Обратим внимание, что при отказе от условия (1.10) у краевой задачи (1.8), (1.9) появляется однопараметрическое семейство состояний равновесия $(u_0, H(u_0))$, $-\infty < u_0 < \infty$. Физический же смысл имеет только одно из них – нулевое. Поэтому становится понятен смысл ограничения (1.10): оно “отсекает” все посторонние положения равновесия. Дополнительный аргумент в пользу принятия этого ограничения состоит и в том, что при учете распределенной проводимости (т.е. при замене первого уравнения (1.8) на $u_t = v_x - \alpha u$, $\alpha > 0$) для функции (1.16) справедливо уравнение $m' + \alpha m = 0$, у которого любое решение $m(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

1.3. Линейный анализ. В дальнейшем будем интересоваться периодическими решениями краевой задачи (1.8), (1.9), бифурцирующими из нулевого состояния равновесия. Поэтому сначала исследуем его на устойчивость.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\beta_0(1 - \text{ch } \mu) + \mu \lambda^{-1} \text{sh } \mu = 0, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2 + \varepsilon \lambda}, \quad (1.17)$$

для определения его спектра устойчивости. Несложный анализ показывает, что, во-первых, при $\varepsilon = \beta_0 = 0$ корни уравнения (1.17) простые, чисто мнимые и исчерпываются равенствами $\lambda = \pm i\omega_n$, $\omega_n = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, а отвечающие им решения линеаризованной задачи имеют вид

$$u = \exp(\pm i\omega_n t) \cos \omega_n x, \quad v = \pm i \exp(\pm i\omega_n t) \sin \omega_n x;$$

во-вторых, при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta_0 = \gamma\varepsilon$, $\gamma \sim 1$, корни уравнения (1.17) распадаются на две группы: $\lambda_{2n+1}(\varepsilon)$, $\bar{\lambda}_{2n+1}(\varepsilon)$ и $\lambda_{2n+2}(\varepsilon)$, $\bar{\lambda}_{2n+2}(\varepsilon)$, $n = 0, 1, \dots$, допускающие равномерную по n асимптотику

$$\begin{aligned}\lambda_{2n+1}(\varepsilon) &= i\omega_{2n+1} + \varepsilon(2\gamma - 1/2) + O(\varepsilon^2), \\ \lambda_{2n+2}(\varepsilon) &= i\omega_{2n+2} - \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Из формул (1.18) следует, что нулевое решение задачи (1.8), (1.9) экспоненциально устойчиво при $\gamma < 1/4$ и неустойчиво при $\gamma > 1/4$, причем в последнем случае в полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > 0$ переходят сразу все корни (1.18) с нечетными номерами – наблюдается так называемая взрывная неустойчивость. Данное обстоятельство в совокупности с резонансностью частот при $\varepsilon = 0$ (в счетном числе) приводит, вообще говоря, к реализации в задаче (1.8), (1.9) разрывных колебаний (см. [17]). Поэтому ниже ее автоколебания будем исследовать при условии

$$\beta_0 = \varepsilon/4 + \varepsilon^2\gamma,\tag{1.19}$$

где параметр $\gamma > 0$ имеет порядок единицы. Как будет ясно из последующего анализа, диапазон (1.19) изменения параметра β_0 соответствует плавному переходу от устойчивого нулевого состояния равновесия (при $\gamma < 0$) через гладкие автоколебания и явление буферности (при средних $\gamma > 0$) к разрывным колебаниям (при достаточно больших γ).

Итак, исследованию подлежит краевая задача (ср. с (1.8), (1.9))

$$\begin{aligned}u_t &= v_x, \quad v_t = u_x - \varepsilon v + \varepsilon[(\varepsilon/4 + \varepsilon^2\gamma)u|_{x=1} - u^3|_{x=1}], \\ v|_{x=0} &= v|_{x=1} = (\varepsilon/4 + \varepsilon^2\gamma)u|_{x=1} - u^3|_{x=1}.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Равенства $\beta_2 = 1$ (см. (1.9)) добиваемся за счет подходящей нормировки переменных u, v ; случай $\beta_1 = 0$ (симметричная характеристика f , см. (1.8)) рассматривается лишь для простоты, так как все полученные результаты остаются в силе и при $\beta_1 \neq 0$.

§ 2. Метод бесконечной нормализации

2.1. Построение нормальной формы. Сначала изложим формальный алгоритм построения нормальной формы краевой задачи (1.20), а его обоснование дадим ниже.

Следуя методике Ю. С. Колесова (см. [12], [13]), подставим в задачу (1.20) ряды

$$\begin{aligned}u &= \varepsilon u_0(t, s, x) + \varepsilon^2 u_1(t, s, \tau, x) + \varepsilon^3 u_2(t, s, \tau, x) + \dots, \\ v &= \varepsilon v_0(t, s, x) + \varepsilon^2 v_1(t, s, \tau, x) + \varepsilon^3 v_2(t, s, \tau, x) + \dots,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $s = \varepsilon^2 t$, $\tau = \varepsilon t$,

$$\begin{aligned}u_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} [z_n(s) \exp(i\omega_{2n+1}t) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_{2n+1}t)] \cos \omega_{2n+1}x, \\ v_0 &= i \sum_{n=0}^{\infty} [z_n(s) \exp(i\omega_{2n+1}t) - \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_{2n+1}t)] \sin \omega_{2n+1}x,\end{aligned}\tag{2.2}$$

а комплексные “амплитуды” z_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_{2n+1}^2 |z_n|^2$ (в этом случае $u_0, v_0 \in W_2^1$ по переменной x). Приравняв затем коэффициенты при ε^2 и ε^3 , для нахождения 2-периодических по t функций $u_j, v_j, j = 1, 2$, получим краевые задачи

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_0, \quad v_1 \Big|_{x=0} = \frac{1}{4} u_0 \Big|_{x=1}; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{\partial u_1}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial s} - \frac{\partial v_1}{\partial \tau} - v_1 + \frac{1}{4} u_0 \Big|_{x=1}, \\ v_2 \Big|_{x=0} &= \frac{1}{4} u_1 \Big|_{x=1} + \gamma u_0 \Big|_{x=1} - u_0^3 \Big|_{x=1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Исключая из системы (2.3) переменную v_1 , приходим к краевой задаче

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_1 = -\frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} u_0 \Big|_{x=1},$$

решение u_1 которой имеет вид ряда:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n A_n(x) \exp(i\omega_{2n+1}t) + \bar{z}_n \bar{A}_n(x) \exp(-i\omega_{2n+1}t) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [w_n(\tau) \exp(i\omega_{2n+2}t) + \bar{w}_n(\tau) \exp(-i\omega_{2n+2}t)] \cos \omega_{2n+2}x. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь второе слагаемое – произвольное периодическое решение однородной краевой задачи, отвечающее собственным частотам ω_n с четными номерами, а комплексные “амплитуды” w_n таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_{2n+2}^2 \cdot |w_n|^2$.

Подчеркнем, что разрешимость краевых задач ($' = d/dx$)

$$A_n'' + \omega_{2n+1}^2 A_n = i\omega_{2n+1} \cos \omega_{2n+1}x, \quad A_n' \Big|_{x=0} = -i\omega_{2n+1}/4$$

для определения коэффициентов $A_n(x)$ ряда (2.5) обеспечивается за счет констант, фигурирующих в граничных условиях. Сами же решения $A_n(x)$, удовлетворяющие дополнительным условиям $A_n(1) = 0$, имеют вид

$$A_n(x) = [i(2x-1)/4] \sin \omega_{2n+1}x. \quad (2.6)$$

Таким образом, проявляется формальная математическая причина специального выбора (1.19) коэффициента β_0 . Учитывая представление (2.5) в первом уравнении (2.3), получим

$$v_1 = \frac{1}{4} u_0 \Big|_{x=1} + \int_0^x \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, s, \tau, y) dy.$$

Исходя из задачи (2.4), приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_2 &= -\frac{\partial u_1}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial s} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} u_1 \Big|_{x=1} + \gamma u_0 \Big|_{x=1} - u_0^3 \Big|_{x=1} \right], \end{aligned}$$

решение u_2 которой определяется в виде ряда:

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \exp(i\omega_{2n+1}t) + \bar{B}_n(x) \exp(-i\omega_{2n+1}t) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \exp(i\omega_{2n+2}t) + \bar{C}_n(x) \exp(-i\omega_{2n+2}t). \quad (2.7)$$

Здесь $B_n(x)$, $C_n(x)$ – решения краевых задач

$$B_n'' + \omega_{2n+1}^2 B_n = i\omega_{2n+1} z_n A_n(x) + 2i\omega_{2n+1} \frac{dz_n}{ds} \cos \omega_{2n+1}x, \quad B_n' \Big|_{x=0} = -i\omega_{2n+1} f_n; \quad (2.8)$$

$$C_n'' + \omega_{2n+2}^2 C_n = i\omega_{2n+2} \left(2 \frac{dw_n}{d\tau} + w_n \right) \cos \omega_{2n+2}x, \quad C_n' \Big|_{x=0} = \frac{i\omega_{2n+2}}{4} w_n, \quad (2.9)$$

а f_n – коэффициент при $\exp(i\omega_{2n+1}y)$ ряда Фурье функции $\gamma\theta - \theta^3$, где

$$\theta(s, y) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(s) \exp(i\omega_{2n+1}y) + \bar{z}_n(s) \exp(-i\omega_{2n+1}y). \quad (2.10)$$

Условия разрешимости задач (2.8) и (2.9) приводят к равенствам

$$\frac{dz_n}{ds} = \frac{iz_n}{8\omega_{2n+1}} + 2f_n, \quad \frac{dw_n}{d\tau} = -\frac{w_n}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

Учитывая их в правых частях уравнений (2.8), (2.9) и решая получившиеся в итоге краевые задачи, убеждаемся в том, что

$$B_n = \frac{z_n}{8} \left(x - \frac{1}{4}\right) \cos \omega_{2n+1}x - \left(\frac{z_n}{4\omega_{2n+1}} - 2if_n\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin \omega_{2n+1}x, \quad C_n = (iw_n/4) \sin \omega_{2n+2}x. \quad (2.12)$$

И наконец, из первого уравнения (2.4) определяем

$$v_2 = \int_0^x \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, s, \tau, y) dy + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{iz_n}{8\omega_{2n+1}} + \frac{2f_n}{\omega_{2n+1}} \right) \exp(i\omega_{2n+1}t) + \left(-\frac{i\bar{z}_n}{8\omega_{2n+1}} + \frac{2\bar{f}_n}{\omega_{2n+1}} \right) \exp(-i\omega_{2n+1}t) \right] \sin \omega_{2n+1}x + (\gamma u_0 - u_0^3) \Big|_{x=1} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [w_n \exp(i\omega_{2n+2}t) + \bar{w}_n \exp(-i\omega_{2n+2}t)] \frac{1}{\omega_{2n+2}} \sin \omega_{2n+2}x.$$

Введем в рассмотрение векторы

$$z = \text{colon}(z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1, \dots), \quad w = \text{colon}(w_0, \bar{w}_0, w_1, \bar{w}_1, \dots), \quad (2.13)$$

принадлежащие пространству l_2^1 ; оно представляет собой дискретный аналог пространства W_2^1 и состоит из векторов вида (2.13), для которых конечна норма

$$\|z\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n+1}^2 |z_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Определим, далее, ограниченный нелинейный оператор $F: l_2^1 \rightarrow l_2^1$ равенством

$$F(z) = \text{colon} \left(\frac{iz_0}{8\omega_1} + 2f_0, -\frac{i\bar{z}_0}{8\omega_1} + 2\bar{f}_0, \dots, \frac{iz_n}{8\omega_{2n+1}} + 2f_n, \dots \right). \quad (2.14)$$

Наконец, переходя в уравнениях (2.11) к единому времени s , получим систему дифференциальных уравнений в $l_2^1 \times l_2^1$:

$$\frac{dz}{ds} = F(z), \quad \varepsilon \frac{dw}{ds} = -\frac{w}{2}. \quad (2.15)$$

Система (2.15) как раз и является интересующей нас “укороченной” нормальной формой краевой задачи (1.20). Отметим также, что она имеет, очевидно, экспоненциально орбитально устойчивое бесконечномерное инвариантное многообразие $w = 0$, движения на котором описываются уравнением

$$\frac{dz}{ds} = F(z). \quad (2.16)$$

Для анализа последнего нам потребуется гильбертово пространство E антипериодических с периодом 1 функций $\theta(y)$ класса W_2^1 .

Из способа определения фигурирующих в равенстве (2.14) коэффициентов $f_n = f_n(z)$ вытекает, что счетная система (2.16) “сворачивается” в краевую задачу

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{8} L\theta + 2\gamma\theta - 2\theta^3, \quad \theta(s, y+1) \equiv -\theta(s, y) \quad (2.17)$$

для функции (2.10). Здесь L – ограниченный линейный оператор в E , задающийся формулой

$$L\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{\omega_{2n+1}} z_n \exp(i\omega_{2n+1}y) - \frac{i}{\omega_{2n+1}} \bar{z}_n \exp(-i\omega_{2n+1}y).$$

Дифференцируя уравнение (2.17) по y и учитывая, что $\frac{d}{dy}(L\theta) = -\theta$, приходим к гиперболической краевой задаче

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial y} = -\frac{1}{8} \theta + [2\gamma - 6\theta^2] \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \theta(s, y+1) \equiv -\theta(s, y). \quad (2.18)$$

Сформулируем теперь стандартное утверждение о соответствии между грубыми периодическими решениями краевой задачи (1.20) и ее нормальной формы (2.18).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть краевая задача (2.18) имеет периодическое решение $\theta = \theta_0(\xi)$, $\xi = \sigma_0 s + y$, $\sigma_0 \neq 0$, экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное (в метрике фазового пространства E). Тогда в краевой задаче (1.20) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ему отвечает цикл той же устойчивости с асимптотическим представлением (2.1), где при определении коэффициентов следует считать

$$z_n(s) = \theta_n^0 \exp(i\omega_{2n+1}\sigma_0 s), \quad w_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (2.19)$$

здесь $\theta_n^0, \bar{\theta}_n^0$ – коэффициенты Фурье функции $\theta_0(\xi)$ по системе $\exp(\pm i\omega_{2n+1}\xi)$, $n = 0, 1, \dots$

2.2. Обоснование метода. Из отрезков рядов (2.1) сконструируем замену переменных, действующую из $l_2^1 \times l_2^1$ в Σ и приводящую задачу (1.20) к нормальной форме. Проведем также анализ полученной нормальной формы и обоснуем, в частности, утверждение теоремы 2.1.

При нахождении интересующей нас замены переменных будем считать, что в построенных выше отрезках рядов (2.1) векторы (2.13) произвольно фиксированны и не зависят от s и τ соответственно. Тогда получим функции

$$u = \varepsilon u_0(t, x) + \varepsilon^2 u_1(t, x) + \varepsilon^3 u_2(t, x), \quad v = \varepsilon v_0(t, x) + \varepsilon^2 v_1(t, x) + \varepsilon^3 v_2(t, x), \quad (2.20)$$

которые удовлетворяют граничным условиям задачи (1.20) с точностью до ε^4 по невязке. Поэтому для того, чтобы удовлетворить этим граничным условиям точно, перейдем от (2.20) к равенствам

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u_0(t, x) + \varepsilon^2 u_1(t, x) + \varepsilon^3 u_2(t, x) + \Delta_1(t + (x - 1), \varepsilon) \\ &\quad + \Delta_1(t - (x - 1), \varepsilon) + \Delta_2(t + (x - 1), \varepsilon) - \Delta_2(t - (x - 1), \varepsilon), \\ v &= \varepsilon v_0(t, x) + \varepsilon^2 v_1(t, x) + \varepsilon^3 v_2(t, x) + \Delta_1(t + (x - 1), \varepsilon) \\ &\quad - \Delta_1(t - (x - 1), \varepsilon) + \Delta_2(t + (x - 1), \varepsilon) + \Delta_2(t - (x - 1), \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где подлежат определению функции

$$\Delta_1(t, \varepsilon), \Delta_2(t, \varepsilon) : \quad \Delta_1(t + 1, \varepsilon) \equiv -\Delta_1(t, \varepsilon), \quad \Delta_2(t + 1, \varepsilon) \equiv \Delta_2(t, \varepsilon). \quad (2.22)$$

Подставляя формулы (2.21) в граничные условия задачи (1.20) и учитывая, что (см. (2.2), (2.5)–(2.7), (2.12))

$$u|_{x=1} = -\varepsilon a(t) + \varepsilon^2 b(t) + 2\Delta_1(t, \varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n \exp(i\omega_{2n+1}t) + \bar{z}_n \exp(-i\omega_{2n+1}t), \\ b(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \exp(i\omega_{2n+2}t) + \bar{w}_n \exp(-i\omega_{2n+2}t), \end{aligned} \quad (2.23)$$

для нахождения функций (2.22) приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} (\varepsilon + 4\gamma\varepsilon^2)\Delta_1 + 6\varepsilon^5ab^2 - 12(\varepsilon^2a^2 + \varepsilon^4b^2)\Delta_1 + 24\varepsilon a\Delta_1^2 - 16\Delta_1^3 &= 0, \\ 2\Delta_2 - \varepsilon^4\gamma b + 3\varepsilon^4a^2b + \varepsilon^6b^3 - 12\varepsilon^3ab\Delta_1 + 12\varepsilon^2b\Delta_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Несложный их анализ приводит к выводу, что функции (2.22) определяются однозначно, причем в метрике пространства $W_2^1(0, 1)$ для них справедливы асимптотические представления

$$\Delta_1(t, \varepsilon) = -\varepsilon^4 6a(t)b^2(t) + O(\varepsilon^5), \quad \Delta_2(t, \varepsilon) = \varepsilon^4 \left(\frac{\gamma b(t)}{2} - \frac{3}{2}a^2(t)b(t) \right) + O(\varepsilon^5).$$

Нам потребуется следующий факт относительно функций (2.22) и фигурирующих в (2.8) коэффициентов $f_n = f_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$: при заменах

$$z_n \rightarrow z_n \exp(i\omega_{2n+1}t_0), \quad w_n \rightarrow w_n \exp(i\omega_{2n+2}t_0), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.24)$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$ произвольно фиксировано, они переходят соответственно в

$$\Delta_1(t + t_0, \varepsilon), \quad \Delta_2(t + t_0, \varepsilon), \quad f_n(z) \exp(i\omega_{2n+1}t_0). \quad (2.25)$$

Для доказательства достаточно заметить, что при заменах (2.24) функции $a(t)$, $b(t)$ (см. (2.23)) переходят в $a(t + t_0)$, $b(t + t_0)$.

На заключительном этапе построения нормализующего преобразования выполним в равенствах (2.21) замены

$$z_n \exp(i\omega_{2n+1}t) \rightarrow z_n, \quad w_n \exp(i\omega_{2n+2}t) \rightarrow w_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.26)$$

Из установленного только что факта и приведенных выше явных формул для u_j , v_j , $j = 0, 1, 2$, вытекает, что результат замен (2.26) есть вектор-функция $h = \text{colon}(u, v)$, задающаяся равенством

$$h = \varepsilon h_0(z, x) + \varepsilon^2 h_1(z, w, x) + \varepsilon^3 h_2(z, w, x) + \Omega(z, w, x, \varepsilon), \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} h_j &= \text{colon}(u_j|_{t=0}, v_j|_{t=0}), \quad j = 0, 1, 2, \\ \Omega &= \text{colon}(\Delta_1(x - 1, \varepsilon) + \Delta_1(1 - x, \varepsilon) + \Delta_2(x - 1, \varepsilon) - \Delta_2(1 - x, \varepsilon), \\ &\quad \Delta_1(x - 1, \varepsilon) - \Delta_1(1 - x, \varepsilon) + \Delta_2(x - 1, \varepsilon) + \Delta_2(1 - x, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Равенство (2.27) доставляет нам искомое нормализующее преобразование. Действительно, оно индуцирует нелинейный оператор, действующий из $l_2^1 \times l_2^1$ в Σ . Кроме того, из способа построения всех входящих в равенства (2.21) функций следует (см., например, аналогичное место в работе [20]), что результатом выполнения замены (2.27) в исходной задаче (1.20) является система в $l_2^1 \times l_2^1$:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \Lambda_0 z + \varepsilon^2 F(z) + \varepsilon^3 \Phi(z, w, \varepsilon), \\ \dot{w} &= \Lambda_1 w - \varepsilon w/2 + \varepsilon^2 \Psi(z, w, \varepsilon), \quad \cdot = d/dt, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где оператор F задается равенством (2.14),

$$\begin{aligned}\Lambda_0 z &= \text{colon}(i\omega_1 z_0, -i\omega_1 \bar{z}_0, \dots, i\omega_{2n+1} z_n, -i\omega_{2n+1} \bar{z}_n, \dots), \\ \Lambda_1 w &= \text{colon}(i\omega_2 w_0, -i\omega_2 \bar{w}_0, \dots, i\omega_{2n+2} w_n, -i\omega_{2n+2} \bar{w}_n, \dots),\end{aligned}$$

а операторы $\Phi(*, *, \varepsilon)$, $\Psi(*, *, \varepsilon): l_2^1 \times l_2^1 \rightarrow l_2^1$, и их производные по Фреше любого фиксированного порядка ограничены равномерно по ε на любом ограниченном множестве из $l_2^1 \times l_2^1$.

В заключение проведем некоторый анализ нормальной формы (2.28). С этой целью рассмотрим отвечающую ей “укороченную” нормальную форму

$$\dot{z} = \Lambda_0 z + \varepsilon^2 F(z), \quad \dot{w} = \Lambda_1 w - \varepsilon w/2$$

и выполним в ней замены, обратные к (2.26). В результате (см. (2.24), (2.25)) приходим к аналогичной (2.15) системе

$$\dot{z} = \varepsilon^2 F(z), \quad \dot{w} = -\varepsilon w/2,$$

которая в силу условий теоремы 2.1 имеет периодическое решение (2.19) (при $s = \varepsilon^2 t$), экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Поэтому периодическое решение с теми же свойствами устойчивости, близкое к

$$z_n = \theta_n^0 \exp i\omega_{2n+1}(1 + \sigma_0 \varepsilon^2)t, \quad w_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

будет иметь (в силу более высокого порядка малости соответствующих остатков $\varepsilon^3 \Phi, \varepsilon^2 \Psi$) и система (2.28). Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Динамические свойства нормальной формы

3.1. Гармоническая буферность. Выполняя в краевой задаче (2.18) подходящие нормировки переменных s, y, θ и заменяя s на t , а y на x , приведем ее к виду

$$\theta_{tx} = \theta + \lambda(1 - \theta^2)\theta_x, \quad \theta(t, x+1) \equiv -\theta(t, x), \quad (3.1)$$

где $\lambda = 16\gamma > 0$. Напомним, что краевая задача (3.1) была получена в работе [7] как модель другого RCLG-автогенератора. Там же были исследованы вопросы существования и устойчивости ее периодических решений. Поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким обзором теоретических результатов из работы [7].

В силу теоремы 2.1 особый интерес представляют периодические решения краевой задачи (3.1) типа бегущих волн:

$$\theta = g(y), \quad y = \sigma t - x, \quad \sigma > 0. \quad (3.2)$$

Будем изучать их динамику при увеличении параметра λ .

Подставляя в задачу (3.1) формулу (3.2), для определения функции $g = g(y)$, $g(y+1) \equiv -g(y)$, приходим к уравнению

$$\sigma g'' + \lambda(g^2 - 1)g' + g = 0, \quad ' = d/dy, \quad (3.3)$$

которое после замены $y/\sqrt{\sigma} \rightarrow y$ преобразуется к виду

$$g'' + r(g^2 - 1)g' + g = 0, \quad (3.4)$$

где $r = \lambda/\sqrt{\sigma}$. Заметим, что (3.4) – это классическое уравнение Ван дер Поля, которое при всех $r > 0$ имеет (см., например, [21]) единственное периодическое решение $g = g(y, r)$ периода $T = T(r)$ (антипериодическое решение периода $T/2$), причем достаточно гладкие по совокупности переменных функции $g(y, r)$, $T(r)$ таковы, что (см. [15])

$$\begin{aligned} g(y, 0) &= \exp(iy) + \exp(-iy), \\ T(0) &= 2\pi, \quad T'(0) = 0, \\ T(r) &= rT_0 + r^{-1/3}T_1 + O(r^{-1} \ln r), \\ T'(r) &= T_0 - \frac{1}{3}r^{-4/3}T_1 + O(r^{-2} \ln r), \quad r \rightarrow \infty, \\ T_0 &= 3 - 2 \ln 2, \quad T_1 = 7,01 \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нас интересует периодическое решение уравнения (3.4) периода $2/\sqrt{\sigma}$. Поэтому для определения неизвестного параметра r получим уравнение

$$\varphi(r) = \frac{2}{\lambda}, \quad \varphi(r) \equiv \frac{T(r)}{r}. \quad (3.6)$$

При $\lambda \ll 1$, умножая левую и правую части этого уравнения на λr и применяя к получившемуся уравнению в точке $\lambda = 0$, $r = 0$ теорему о неявной функции, однозначно определим его решение

$$r = r_0(\lambda) : r_0(0) = 0, \quad r'_0(0) = \pi, \quad r''_0(0) = 0. \quad (3.7)$$

Вспоминая, далее, о связи уравнения (3.4) с исходной задачей (3.1), заключаем, что последняя имеет периодическое решение

$$\begin{aligned} \theta &= g_0(y, \lambda), \quad y = \sigma_0(\lambda)t - x, \\ \sigma_0(\lambda) &= [\lambda/r_0(\lambda)]^2, \quad g_0(y, \lambda) = g(y/\sqrt{\sigma_0(\lambda)}, r_0(\lambda)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим также, что наряду с периодическим решением (3.8) у задачи (3.1) при $\lambda \ll 1$ существуют и другие периодические решения, получающиеся из решения (3.8) с помощью принципа подобия:

$$\begin{aligned} \theta &= g_n(y, \lambda), \quad y = \sigma_n(\lambda)t - x, \quad n = 0, 1, \dots, \\ g_n &= g_0((2n+1)y, (2n+1)\lambda), \quad \sigma_n(\lambda) = \sigma_0((2n+1)\lambda)/(2n+1)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *По любому натуральному N можно указать такое достаточно малое $\bar{\lambda}_N > 0$, что при всех $0 < \lambda \leq \bar{\lambda}_N$ краевая задача (3.1) имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения (3.9) с номерами $n = 0, 1, \dots, N$.*

Существование решения уже доказано. На доказательстве же его устойчивости не останавливаемся, отсылая к работе [7].

Подчеркнем, что согласно определению теорема 3.1 описывает явление буферности, реализующееся в краевой задаче (3.1) при $\lambda \ll 1$. А так как в этом случае любое периодическое решение (3.9) с фиксированным номером n по форме близко к гармоническому, то уместно говорить о гармонической буферности.

3.2. Градиентные катастрофы. Для того чтобы проследить за эволюцией периодического решения (3.8) при увеличении параметра λ , отметим некоторые свойства функции $\varphi(r)$ (см. (3.6)). Во-первых, из равенств (3.5) вытекает, что

$$\varphi(r) \sim 2\pi/r, \quad r \rightarrow +0; \quad \varphi(r) \rightarrow T_0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Во-вторых, справедливо неравенство

$$\varphi'(r) = [rT'(r) - T(r)]/r^2 < 0, \quad r > 0$$

(при $r \ll 1$ и $r \gg 1$ оно также вытекает из равенств (3.5), а при “средних” значениях r подтверждается численной проверкой).

Из указанных свойств функции $\varphi(r)$ следует, что корень (3.7) уравнения (3.6), а значит, и периодическое решение (3.8) непрерывно продолжаются по параметру λ на интервал (см. (3.5)) $0 < \lambda < \lambda_0$, $\lambda_0 = 2/(3 - 2 \ln 2)$. Рассмотрим, далее, циклы (3.9), получающиеся из (3.8) с помощью принципа подобия (3.10). Из способа их построения вытекает, что каждый из них существует в “ячейке” $0 < \lambda < \lambda_n$, $\lambda_n = \lambda_0/(2n + 1)$, $n = 0, 1, \dots$

Итак, при увеличении параметра λ краевая задача (3.1) имеет следующую динамику. При малых λ наблюдается явление буферности: существует асимптотически много циклов (3.9) с номерами $0 \leq n < (\lambda_0/\lambda - 1)/2$, причем можно гарантировать устойчивость любого фиксированного их числа. Далее, каждый цикл (3.9) с фиксированным номером n , близкий к гармоническому при $\lambda \ll 1$, с увеличением λ усложняется по форме, при $0 < \lambda_n - \lambda \ll 1$ становится релаксационным (в этом случае является малым множитель σ перед старшей производной в уравнении (3.3)), при $\lambda = \lambda_n$ — разрывным, а при $\lambda > \lambda_n$ — исчезает. И наконец, при $\lambda > \lambda_0$ вымирают все циклы (3.9).

Отметим, что способ исчезновения цикла (3.9) при прохождении λ через значение λ_n уместно назвать *градиентной катастрофой* в силу того, что при $\lambda \rightarrow \lambda_n - 0$ C^1 -норма этого цикла стремится к бесконечности, в то время как его C -норма остается ограниченной. (Ранее этот феномен для периодических решений типа бегущих волн изучался в статье [22].)

Вопрос об аттракторах краевой задачи (3.1) при $\lambda > \lambda_0$ остается открытым. Наиболее вероятным здесь представляется следующее: все ее решения $\theta(t, x) \not\equiv 0$ при $t \rightarrow \infty$, оставаясь ограниченными в C -норме, стремятся к разрывным функциям.

Рис. 3.

В заключение укажем, что в силу установленного в §2 соответствия между периодическими решениями нормальной формы (3.1) и исходной краевой задачи (1.20) последняя имеет по параметру γ аналогичную динамику.

3.3. Результаты эксперимента. Для экспериментальной проверки полученных теоретических результатов В. Ф. Камбуловым был собран автогенератор, блок-схема которого показана на рис. 2. Основная цепь была выполнена в виде прямого соленоида с индуктивностью $L = 55.2$ мГн. Распределенная емкость C между обмоткой катушки и алюминиевой основой составляла 87.7 пФ, а активное сопротивление R линии равнялось 540 Ом. Следовательно, малый параметр ε принимал значение 0.022. Укажем, что диаметр d соленоида равнялся 0.048 м, его длина l_0 составляла 0.429 м, толщина Δ использованного провода равнялась 0.00016 м, а общая длина l всего проводника была 404.32 м.

Вспомогательная цепь была выполнена в виде прямого соленоида, намотанного на основную цепь. Ее геометрические параметры соответствовали значениям $d = 0.054$ м, $l_0 = 0.417$ м, $\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$ м, $l = 176.86$ м; активное сопротивление R_0 равнялось 17 Ом. Поскольку $R_0/R = 0.031 \ll 1$, то падением напряжения на R_0 можно было пренебречь. Таким образом, имела место ситуация, описываемая краевой задачей (1.6), (1.7).

Широкополосный усилитель с входным и выходным активными сопротивлениями, равными соответственно 50 МОм и 75 Ом, обладал равномерным коэффициентом усиления в диапазоне частот от 100 кГц до 120 МГц, т.е. по своим характеристикам был близок к идеальному (его принципиальная схема приведена в [8]). Коэффициент усиления изменялся от 1 до 30, начальные условия для напряжения и тока задавались различным образом, в том числе и с использованием источни-

ка синусоидальных колебаний. Периодические режимы, реализующиеся в сконструированном автогенераторе, снимались с выхода усилителя и наблюдались на экране осциллографа.

В результате поставленных экспериментов в некотором диапазоне изменения коэффициента усиления обнаружено шесть различных сосуществующих циклов, показанных на рис. 3. Особо подчеркнем, что каждый из них удавалось “вызвать” на экран осциллографа только за счет задания подходящих начальных условий (при фиксированных прочих параметрах), т.е. согласно определению наблюдалось явление буферности. Можно предположить, что запас потенциально реализующихся в рассматриваемом автогенераторе периодических режимов значительно шире. Трудность же их обнаружения связана в первую очередь с узостью области притяжения каждого отдельно взятого режима и с узостью области параметров, в которой имеет место само явление буферности.

Подводя итог проведенному теоретическому и экспериментальному анализу, сформулируем ряд выводов. Во-первых, отличие рассмотренного “распределенного” автогенератора от классического “сосредоточенного” генератора Ван дер Поля весьма условно, так как реально в любом генераторе параметры всегда распределены. Следовательно, можно считать, что в классической задаче установлен новый феномен – явление буферности. Во-вторых, применительно к рассматриваемой ситуации получил дальнейшее развитие метод квазинормальных форм Ю.С. Колесова (см. [12], [13]). Точнее говоря, удалось показать, что при определенных условиях квазинормальная форма является обычной нормальной формой, т.е. исходная краевая задача приводится к ней с помощью некоторой корректной замены переменных. В-третьих, придан дополнительный смысл модельной краевой задаче (3.1), ранее появившейся в работе [7] при анализе RCLG-автогенератора с отрезком длинной линии в цепи обратной связи.

Считаем своим долгом выразить искреннюю благодарность В.Ф. Камбулову за информацию о физической постановке задачи и ее математической модели (1.6), (1.7), а также за предоставленные нам результаты физических экспериментов со сконструированным им автогенератором.

Список литературы

1. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 12. С. 281–283.
2. Колесов А. Ю. Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифургирующих из состояния равновесия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 59–65.
3. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Построение периодических решений уравнения типа Буссинеска с помощью метода квазинормальных форм // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 207–220.
4. Колесов А. Ю. Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 3. С. 141–158.
5. Уткин Г. М. Метод медленно меняющихся стоячих волн в теории распределенных автогенераторов // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 2. С. 267–276.
6. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. О явлении буферности в одной резонансной гиперболической краевой задаче из радиофизики // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 7. С. 77–96.
7. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике // Матем. моделирование. 1996. Т. 8. № 1. С. 93–102.

8. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. О специфике генерируемых колебаний в RCLG-автогенераторе с малым затуханием в цепи обратной связи // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 8. С. 1019–1024.
9. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. О явлении буферности в длинной линии с туннельным диодом // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 8. С. 744–746.
10. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Теоретический и экспериментальный анализ феномена буферности в длинной линии с туннельным диодом // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 638–645.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
12. Колесов Ю. С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
13. Колесов А. Ю. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
14. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
15. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1995.
16. Колесов Ю. С. Математическая теория РС-генераторов с распределенными параметрами в цепи обратной связи // Дифференц. уравн. и их применение. № 2. Вильнюс: Ин-т физики и математики АН Лит. ССР, 1971. С. 3–68.
17. Камбулов В. Ф. Резонансность как источник релаксационных колебаний в системах телеграфных уравнений // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 569–570.
18. Камбулов В. Ф. Модель распределенного автогенератора Ван-дер-Поля // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 9. С. 1121–1124.
19. Кошлянов Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
20. Колесов А. Ю. Параметрические колебания решений телеграфного уравнения с умеренно малой диффузией // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 6. С. 79–86.
21. Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974.
22. Колесов А. Ю. Релаксационные циклы нелинейного волнового уравнения, гладко зависящего от параметров // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 2. С. 158–160.

Поступило в редакцию
26.IV.2000