Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Пионтковский, О градуированных алгебрах глобальной размерности 3, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 139–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 09:55:24

УДК 512.552

Д. И. Пионтковский

О градуированных алгебрах глобальной размерности 3

Пусть градуированная ассоциативная алгебра A над полем k минимальным образом представлена как факторалгебра свободной алгебры F по идеалу I , порожденному множеством однородных элементов f . В работе изучаются свойства двух расширений алгебры A : алгебры $\bar{F} = F/I \oplus I/I^2 \oplus \dots$, ассоциированной с F относительно I -адической фильтрации, и алгебры H гомологий некоммутативного варианта комплекса Козюля – комплекса Шафаревича $\text{Sh}(f, F)$. При этом получено несколько характеристик для алгебр глобальной размерности три: в частности, A -алгебра H в этом случае свободна, а алгебра $\bar{F}$ изоморфна фактору свободной A -алгебры по идеалу, порожденному так называемым *сильно свободным* (или *инертным*) множеством.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение

В этой статье устанавливается связь между некоторыми гомологическими инвариантами градуированных ассоциативных алгебр. Это дает новые критерии для алгебр глобальной размерности 3, аналогичные критериям алгебр глобальной размерности 2, рассмотренных в [1].

Мы будем называть векторное пространство над основным полем k , ассоциативную k -алгебру или модуль над ней *градуированными*, если они $\mathbf{Z}_+$ -градуированы и конечномерны в каждой компоненте. Градуированная алгебра $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ называется *связной*, если ее нулевая компонента A_0 одномерна: по умолчанию мы рассматриваем только связные алгебры. Через $H_i(A)$ обозначим i -ю гомологию A , т.е. градуированное пространство

$$\text{Tor}_i^A(k, k) \approx \text{Ext}_A^i(k, k).$$

Если a – однородный элемент, то через $\tilde{a}$ обозначается свободная переменная той же степени, что и a ; для множества однородных элементов $\alpha = \{\alpha_i\}$ положим $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_i\}$. Для двух алгебр A, B через $A * B$ обозначается их свободное произведение. Через $A\langle x \rangle$ обозначается свободная ассоциативная A -алгебра от множества

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01144).

переменных x , так что $A\langle x \rangle = k\langle x \rangle * A$; если V – векторное пространство, порожденное x , то ту же алгебру мы будем обозначать и как $A\langle V \rangle$.

Зафиксируем также следующие обозначения: A – связная алгебра, x – некоторое минимальное множество ее порождающих, так что A изоморфна факторалгебре свободной алгебры $F = k\langle \tilde{x} \rangle$ по идеалу I , минимально порожденному некоторым множеством однородных элементов f . На алгебре $F\langle \tilde{f} \rangle$ можно ввести структуру дифференциально градуированной алгебры, задав гомологическую градуировку как $|F| = 0$, $|\tilde{f}_i| = 1$, и дифференцирование, удовлетворяющее формуле Лейбница и соотношениям

$$dF = 0, \quad d\tilde{f}_i = f_i.$$

Получившийся комплекс называется *комплексом Шафаревича* [2], [3]; он обозначается как $\text{Sh}(f, F)$, а его алгебра гомологий – как $H(f, F)$; например, A -бимодуль $H_1(f, F)$ – это бимодуль соотношений множества f по модулю тривиальных соотношений. Ацикличность комплекса $\text{Sh}(f, F)$ в положительных степенях равносильна тому, что $\text{gl. dim } A = 2$ [1].

Ключевым элементом нашей конструкции является некоторое множество ϕ однородных элементов свободного F -бимодуля $F \otimes k\tilde{f} \otimes F$, обладающее следующими свойствами:

- 1) ϕ состоит из циклов комплекса $\text{Sh}(f, F)$, причем его образ в гомологиях минимальным образом порождает A -алгебру $H(f, F)$;
- 2) образ $\bar{\phi}$ множества ϕ в бимодуле $A \otimes k\tilde{f} \otimes A \subset A\langle \tilde{f} \rangle$ минимальным образом порождает ядро отображения $A\langle \tilde{f} \rangle \rightarrow \bar{F}$, где

$$\bar{F} = F/I \oplus I/I^2 \oplus \dots;$$

- 3) существует изоморфизм градуированных пространств $k\phi \approx H_3(A)$; более того, образ $\bar{\phi}$ при естественном отображении

$$A \otimes k\tilde{f} \otimes A \rightarrow k\tilde{f} \otimes A \simeq H_2(A) \otimes A$$

минимальным образом порождает соответствующий модуль сизигий $\Omega^3(k_A)$ в минимальной резольвенте тривиального A -модуля k .

Эти связи дают описания алгебр $H(f, F)$ (предложение 3.1) и $\bar{F}$ (теорема 3.2). Структура этих алгебр особенно проста в случае, когда $\text{gl. dim } A = 3$: тогда $H(f, F)$ – свободная A -алгебра, а $\bar{F}$ – факторалгебра свободной A -алгебры по идеалу, порожденному так называемым *сильно свободным* [1] множеством, т.е. ее свойства также очень близки к свойствам свободной A -алгебры. Например, естественное вложение $A \hookrightarrow \bar{F}$ индуцирует изоморфизм в третьих и высших гомологиях этих алгебр. Эти и другие критерии алгебр глобальной размерности 3 содержатся в теореме 3.3.

Автор хотел бы поблагодарить Е. С. Голода за ценные замечания и внимание к этой работе.

§ 2. Предварительные сведения: алгебры глобальной размерности 2

2.1. Обозначения. Для градуированного пространства V (в частности, алгебры или модуля) через $V(z)$ обозначим его ряд Гильберта

$$\sum_{i \geq 0} \dim V_i z^i.$$

Для множества однородных элементов $\alpha \in V$ через $\alpha(z)$ обозначим производящую функцию множества α : если α содержит d_i элементов степени i , то $\alpha(z) = \sum_{i \geq 0} d_i z^i$. Неравенства между степенными рядами понимаются покомпонентно, т.е. запись $\sum_i a_i z^i \geq \sum_i b_i z^i$ означает, что $a_i \geq b_i$ для всех $i \geq 0$.

Через $H_i(A)$ обозначается i -я гомология алгебры A , т.е. градуированное пространство $\text{Tor}_i^A(k, k) \approx \text{Ext}_A^i(k, k)$. Как показано в [4], справедливы изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_{2n}(A) &\approx F_+ I^{n-1} F_+ \cap I^n / F_+ I^n + I^n F_+, \\ H_{2n+1}(A) &\approx F_+ I^n \cap I^n F_+ / F_+ I^n F_+ + I^{n+1}, \end{aligned}$$

где $F_+ = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots$ – пополняющий идеал алгебры F . В частности,

$$H_0(A) = k, \quad H_1(A) \approx kx, \quad H_2(A) \approx kf, \quad H_3(A) \approx F_+ I \cap I F_+ / F_+ I F_+ + I^2.$$

2.2. Сильно свободные множества (подробности см. в [1]). Пусть R – связная k -алгебра, $J \triangleleft R$ – однородный собственный двусторонний идеал, минимальным образом порожденный некоторым множеством однородных элементов $\alpha \subset R$, и $A = R/J$. Пусть $C = A\langle \tilde{\alpha} \rangle$. Очевидно, имеет место неравенство рядов Гильберта

$$C(z) \geq R(z). \quad (*)$$

Те множества α , для которых выполняется равенство, называются *сильно свободными* [1], или *инертными* [5], [6]: они являются некоммутативными аналогами хорошо известных в коммутативной алгебре *регулярных последовательностей*. Обозначив ассоциированную с J -адической фильтрацией на R алгебру как $\bar{R} = R/J \oplus J/J^2 \oplus \dots$, получаем, что α сильно свободно тогда и только тогда, когда естественный эпиморфизм

$$\pi: C \rightarrow \bar{R}$$

является изоморфизмом. Еще одно эквивалентное условие состоит в том, что $H_i(A) \approx H_i(R)$ при $i \geq 3$: если $\alpha \subset \mathbb{R}_+^2$, то это означает, что $H_i(A) \approx H_i(R)$ при $i \neq 2$, а $H_2(A) \approx H_2(R) \oplus k\alpha$.

В частности, если в прежних обозначениях $A = F/I$, то $\text{gl. dim } A = 2$ в том и только том случае, когда f сильно свободно в F . Это равносильно тому, что неравенство Голода–Шафаревича [2]

$$A(z)(1 - x(z) + f(z)) \geq 1$$

обращается в равенство. Легко проверяемое достаточное условие состоит в том, что сильно свободным в свободной алгебре является всякое *комбинаторно свободное* множество, т.е. такое, что старшие члены его элементов не имеют попарных зацеплений и включений (старшие члены можно при этом определять относительно любого нётероваго порядка на мономах, согласованного с умножением и такого, что пустой моном минимален).

2.3. Комплекс Шафаревича (подробности см. в [2], [7], [8]). Пусть $\alpha = \{\alpha_i\} \subset R$ – однородное подмножество в связной алгебре. Введем на алгебре $R\langle\tilde{\alpha}\rangle$ дополнительную градуировку, положив $|\tilde{\alpha}_i| = 1$, $|R| = 0$. Задав на $R\langle\tilde{\alpha}\rangle$ дифференцирование

$$d: d\tilde{\alpha}_i = \alpha_i, \quad dR = 0, \quad d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b),$$

мы превратим эту алгебру в дифференциально градуированную: она называется *комплексом Шафаревича* и обозначается как $\text{Sh}(\alpha, R)$. Его гомологии вычисляются относительно градуировки $|\cdot|$ и обозначаются как $H_i(\alpha, R)$.

Простейший комплекс Шафаревича $\text{Sh}(1, R)$ – это (неаугментированная) бар-конструкция алгебры R , или, в терминологии [9], стандартная резольвента $B(A)$. В общем случае комплекс Шафаревича можно рассматривать как некоммутативный комплекс Козюля [1], [7], [3], [10].

Комплекс $\text{Sh}(\alpha, R)$ ацикличен в положительных степенях (равносильно в первой степени) тогда и только тогда, когда множество α сильно свободно [1].

В частности, условие $\text{gl. dim } A = 2$ эквивалентно тому, что алгебра $H_*(f, F)$ изоморфна A . В общем случае можно утверждать лишь, что алгебра гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры $H_*(f, F)$ порождается элементами нулевого и первого модуля гомологий [8].

Если S – дифференциально-градуированная алгебра, β – множество однородных циклов в ней, то дифференцирование на комплексе Шафаревича можно считать продолжением дифференцирования на R : для этого надо положить в определении $|\tilde{\alpha}_i| = |\alpha_i| + 1$. В терминах такого комплекса имеется еще одна характеристика алгебр глобальной размерности два [7]: $\text{gl. dim } A = 2$ тогда и только тогда, когда $H_i(\beta, \text{Sh}(x, A)) = 0$ при $i > 0$, где образ множества β в гомологиях составляет базис линейного пространства $H_1(x, A)$. Это условие эквивалентно тому, что

$$H_*(x, A) \simeq T(H_1(x, A)).$$

§ 3. Основные результаты

Выпишем начало минимальной резольвенты тривиального A -модуля k_A :

$$0 \leftarrow k \xleftarrow{d_0} A \xleftarrow{d_1} \tilde{x}k \otimes A \xleftarrow{d_2} \tilde{f}k \otimes A \xleftarrow{d_3} \Omega^3(k_A) \leftarrow 0,$$

где $\Omega^3(k_A)$ – соответствующий модуль сизигий. Пространство порождающих модуля $\Omega^3(k_A)$ изоморфно $H_3(A) \approx F_+I \cap IF_+/F_+IF_+ + I^2$, причем действие

дифференциала $d_3: \Omega^3(k_A) \rightarrow f k \otimes A$ на порождающих индуцировано отображением

$$IF_+/(F_+IF_+ + I^2) \rightarrow \tilde{f}k \otimes A: f \mapsto \tilde{f}.$$

Выберем в этом пространстве какой-нибудь однородный базис $\gamma = \{\gamma_j\}$. Каждый элемент такого базиса представим в виде

$$\gamma_j = \sum_i \tilde{f}_i a_j^i \in \tilde{f}k \otimes A, \quad \deg a_j^i \geq 1.$$

Обозначая через $\hat{a}$ какой-нибудь прообраз той же степени однородного элемента $a \in A$ в F , получаем, что элемент $\hat{\gamma}_j := \sum_i \tilde{f}_i \hat{a}_j^i \in F$ представим в виде

$$\sum_i b_j^i \tilde{f}_i + \sum_k u_j^k \tilde{f}_{i_k} v_j^k,$$

причем $k\{\hat{\gamma}_j\} \cap (F_+IF_+ + I^2) = 0$. Пусть черта сверху обозначает образ данного элемента из F в A . Положим

$$\gamma'_j := \sum_i \overline{b_j^i} \tilde{f}_i \in A \otimes \tilde{f}k.$$

Легко видеть, что множество $\gamma' := \{\gamma'_j\}$ составляет базис левого модуля сизигий $\Omega^3({}_A k)$.

Положим $\bar{\phi}_j := \gamma_j - \gamma'_j - \sum_k \bar{u}_j^k \tilde{f}_{i_k} \bar{v}_j^k \in A \otimes \tilde{f}k \otimes A$ и $\bar{\phi} = \{\bar{\phi}_j\}$. Через ϕ обозначим прообраз этого множества в $F \otimes \tilde{f}k \otimes F$:

$$\phi = \{\phi_j\}, \quad \phi_j = \sum_i \tilde{f}_i \hat{a}_j^i - \sum_i b_j^i \tilde{f}_i - \sum_k u_j^k \tilde{f}_{i_k} v_j^k.$$

Очевидно, $\phi(z) = \bar{\phi}(z) = H_3(A)(z)$, и при естественном отображении $A \otimes \tilde{f}k \otimes A \rightarrow \tilde{f}k \otimes A$ подмодуль, порожденный $\bar{\phi}$, переходит в модуль $\Omega^3(k_A)$. В частности, если $\text{gl. dim } A \leq 2$, то $\bar{\phi} = 0$. Отметим, что выбор множеств ϕ и $\bar{\phi}$, вообще говоря, неоднозначен.

Поскольку дифференцирование $d_1: F\tilde{f}F \rightarrow F$ в комплексе Шафаревича $\text{Sh}(f, F)$ переводит элемент ϕ_j в $\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}'_j - \sum_k u_j^k \tilde{f}_{i_k} v_j^k = 0$, то $\phi \subset F\langle \tilde{f} \rangle \simeq \text{Sh}(f, F)$, и можно рассмотреть его образ $h\phi$ в алгебре гомологий $H_*(f, F)$. При этом справедливо следующее утверждение, которое уточняет свойства гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры, описанные в [1], [8] (см. выше п. 2.3).

Предложение 3.1. а) $H_1(f, F)/A_+H_1(f, F) \simeq \Omega_3(k_A)$.

б) A -алгебра $H_*(f, F)$ порождается множеством $h\phi$.

в) Существует сюръективное отображение из алгебры $H_*(f, F)$ на A -подалгебру в $A\langle \tilde{f} \rangle$, порожденную множеством $\bar{\phi}$.

При этом следующие условия эквивалентны:

- (i) $H_i(f, F) = 0$ для некоторого $i > 0$;
- (ii) $H_i(f, F) = 0$ для всех $i > 0$, т.е. $f \subset F$ – сильно свободное множество.

Обозначим ассоциированную с I -адической фильтрацией на F алгебру через $\bar{F} = F/I \oplus I/I^2 \oplus \dots$, а через Δ – ядро естественного отображения $A\langle \tilde{f} \rangle \rightarrow \bar{F}$. Вторая (I -адическая) градуировка на $\bar{F}$ задается как $\bar{F}_{(i)} = I^i/I^{i+1}$. Если $\text{gl. dim } A \leq 2$, то $\bar{F} \simeq A\langle \tilde{f} \rangle$. В общем же случае имеет место

ТЕОРЕМА 3.2. а) Идеал Δ порождается множеством $\bar{\phi}$, т.е. $\bar{F} \simeq A\langle \tilde{f} \rangle / \text{id}(\bar{\phi})$.

б) Умножение в $\bar{F}$ задает изоморфизм A -бимодулей $\bar{F}_{(i)} \otimes_A \bar{F}_{(j)} \rightarrow \bar{F}_{(i+j)}$ для любых $i, j \geq 0$.

в) Справедливы изоморфизмы градуированных пространств

$$H_0(\bar{F}) = k, \quad H_i(\bar{F}) \approx H_i(A) \oplus H_{i+1}(A) \quad \text{при } i \geq 1.$$

В частности, $\text{gl. dim } \bar{F} = \text{gl. dim } A$.

Теперь сформулируем условия, характеризующие алгебры глобальной размерности 3. Здесь идеалы $\tilde{I}, \tilde{J}$ в свободной алгебре $F\langle \tilde{f} \rangle$ порождены соответственно множествами f и ϕ .

ТЕОРЕМА 3.3. Предположим, что $\text{gl. dim } A \geq 3$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\text{gl. dim } A = 3$;
- (ii) $\text{gl. dim } \bar{F} = 3$;
- (iii) множество $\bar{\phi} \subset A\langle \tilde{f} \rangle$ сильно свободно;
- (iv) $\tilde{I} \cap \tilde{J} = \tilde{I}\tilde{J} + \tilde{J}\tilde{I}$;
- (v) $H_*(f, F) \simeq A\langle H_3(A) \rangle$;
- (vi) A -алгебра $H_*(f, F)$ свободна;
- (vii) правый A -модуль $H_1(f, F)/A_+H_1(f, F)$ свободен.

Отметим, что условие (iii) здесь эквивалентно тому, что естественное вложение $A \hookrightarrow \bar{F}$ индуцирует изоморфизм в третьих и высших (равносильно в третьих) гомологиях этих алгебр, а условие (vi) – тому, что естественное вложение $A \hookrightarrow H_*(f, F)$ индуцирует изоморфизм во вторых и высших (равносильно во вторых) гомологиях.

§ 4. Алгебра $H_*(f, F)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Рассмотрим следующую точную последовательность комплексов правых A -модулей, описанную в [2]:

$$0 \rightarrow \tilde{x} \text{ Sh}(f, F) \xrightarrow{\lambda} \overline{\text{Sh}(f, F)} \xrightarrow{\nu} \tilde{f} \text{ Sh}(f, F) \rightarrow 0.$$

Здесь черта обозначает пополняющий идеал, отображение λ переводит $\tilde{x}$ в x .

Из точной последовательности гомологий получаем

$$\tilde{x}H_1(f, F) \xrightarrow{\lambda_*} H_1(f, F) \xrightarrow{d_*} \tilde{f}H_0(f, F) \rightarrow \tilde{x}H_0(f, F) \rightarrow H_0(f, F) \rightarrow k \rightarrow 0.$$

Здесь $H_0(f, F) = A$ и последние четыре члена представляют собой начало минимальной резольвенты k_A . Таким образом, имеем точную последовательность

$$\tilde{x}H_1(f, F) \xrightarrow{\lambda_*} H_1(f, F) \xrightarrow{d_*} \Omega_3(k_A) \rightarrow 0,$$

откуда $H_1(f, F)/xH_1(f, F) \simeq \Omega_3(k_A)$, что доказывает а).

Так как модуль $\Omega_3(k_A)$ порожден множеством γ , в качестве прообраза которого при отображении d_* можно выбрать $h\phi$, то $H_1(f, F) = xH_1(f, F) + h\phi H_1(f, F)$. Следовательно, бимодуль $H_1(f, F)$ порожден множеством $h\phi$.

Поскольку $H_0(f, F) = A$, а алгебра $H_*(f, F)$ порождается образами циклов нулевой и первой степени [7], то она порождается $h\phi$. Утверждение б) доказано.

Докажем в). Пусть идеал $\tilde{I}$ порожден множеством $\tilde{f}$ в алгебре $F\langle\tilde{f}\rangle$. Можно рассматривать его как подкомплекс в $\text{Sh}(f, F)$, так что получаем точную последовательность дифференциально градуированных алгебр

$$0 \rightarrow \tilde{I} \xrightarrow{i} \text{Sh}(f, F) \xrightarrow{\mu} A\langle\tilde{f}\rangle \rightarrow 0, \quad (**)$$

где дифференциал на $A\langle\tilde{f}\rangle$ нулевой. Ее точный гомологический треугольник имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & H_*\tilde{I} & \\ & \uparrow d_* & \downarrow i_* \\ A\langle\tilde{f}\rangle & \xleftarrow{\mu_*} & H_*(f, F) \end{array}$$

Здесь отображение μ_* индуцировано естественным гомоморфизмом $\mu: F\langle\tilde{f}\rangle \rightarrow A\langle\tilde{f}\rangle$, так что μ_0 – изоморфизм $A \rightarrow A$. Так как A -алгебра $H_*(f, F)$ порождается множеством $h\phi$, то образ отображения μ_* – в точности A -подалгебра E в $A\langle\tilde{f}\rangle$, порожденная $\bar{\phi}$.

Импликация (ii) $\implies$ (i) очевидна. Из утверждения в) следует, что для импликации (i) $\implies$ (ii) достаточно доказать, что если $\text{gl. dim } A \geq 3$, то $E_{(i)} \neq 0$ при любом $i > 0$.

Действительно, если $\text{gl. dim } A \geq 3$, то множества f и $\bar{\phi}$ содержат по крайней мере по одному ненулевому элементу f_1 и $\bar{\phi}_1$. При этом можно считать, что разложение элемента γ_1 содержит ненулевое слагаемое $\tilde{f}_1 a$, так что образ элемента $\bar{\phi}_1$ при факторизации $A\langle\tilde{f}\rangle \rightarrow A\langle\tilde{f}_1\rangle$ имеет вид $e = \tilde{f}_1 a - \sum_k \bar{u}_j^k \tilde{f}_1 \bar{v}_j^k$. Следовательно, образ подалгебры E в $A\langle\tilde{f}_1\rangle$ содержит все элементы $e^n = (\tilde{f}_1 a)^n + c$, где $c \in A_+ A\langle\tilde{f}_1\rangle$. Поскольку $a \neq 0$, все эти элементы ненулевые, и $E_{(n)} \neq \{0\}$ при любых $n > 0$.

§ 5. Описание алгебры $\overline{F}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Введем на алгебрах $A\langle\tilde{f}\rangle$ и $\overline{F}$ еще одну градуировку, положив $|A| = 0$, $|\tilde{f}_i| = |f_i| = 1$. Градуированные компоненты относительно новой градуировки будем обозначать как $A\langle\tilde{f}\rangle_{(i)}$ и $\overline{F}_{(i)}$. Отметим, что в точной последовательности

$$0 \rightarrow \Delta \rightarrow A\langle\tilde{f}\rangle \rightarrow \overline{F} \rightarrow 0$$

отображения однородны относительно обеих градуировок.

Теперь доказательство теоремы 3.2 разбивается на несколько лемм.

ЛЕММА 5.1. $\bar{\phi} \subset \Delta_{(1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\bar{\phi} \subset A\langle\tilde{f}\rangle_{(1)}$. При этом множество $\pi\bar{\phi}$ составляют образы элементов

$$\sum_i f_i \hat{a}_j^i - \sum_i b_j^i f_i - \sum_k \bar{u}_j^k f_{i_k} \bar{v}_j^k$$

в I/I^2 , т.е. оно нулевое.

ЛЕММА 5.2. A -бимодуль $\Delta_{(1)}$ порождается множеством $\bar{\phi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность $(**)$ из доказательства предложения 3.1. Начальный сегмент ее точной последовательности гомотий выглядит так:

$$H_1(f, F) \xleftarrow{\mu_1} A\langle\tilde{f}\rangle_{(1)} \xleftarrow{d_*} H_0\tilde{I} \xleftarrow{i_0} H_0(f, F) \xleftarrow{\mu_0} A \rightarrow 0.$$

Здесь $H_0(f, F) = A$, $H_0\tilde{I} = I/I^2$ и A -бимодуль $\text{im } \mu_1$ порождается образом множества $h\bar{\phi}$, т.е. множеством $\bar{\phi} \in A\tilde{f}A$. Получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow A\bar{\phi}A \rightarrow A\tilde{f}A \rightarrow I/I^2 \rightarrow 0.$$

Значит, $\Delta_{(1)} = \ker(A\tilde{f}A \rightarrow F_{(1)}) = A\bar{\phi}A$.

ЛЕММА 5.3. а) Пусть R – правый, L – левый идеалы в свободной алгебре F . Тогда естественное отображение

$$\xi: R \otimes_F L \rightarrow RL$$

является изоморфизмом векторных пространств.

б) Умножение в $\overline{F}$ задает изоморфизм A -бимодулей $\overline{F}_{(i)} \otimes_A \overline{F}_{(j)} \rightarrow \overline{F}_{(i+j)}$ для любых $i, j \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно [11], всякий односторонний идеал в свободной алгебре является свободным модулем.

а) Пусть $r = \{r_i\}$ – свободный базис R , $l = \{l_i\}$ – свободный базис L . Если элемент $e = \sum_{i,j} r_i \otimes_F l_j$ лежит в $\ker \xi$, то в алгебре F элемент $\sum_{i,j} r_i a_{ij} l_j$ нулевой. Поскольку r – свободный базис, то для всякого i имеем $\sum_j a_{ij} l_j = 0$. Поскольку базис l также свободный, то $a_{ij} = 0$ для всех i, j , откуда $e = 0$.

б) Из изоморфизма правых A -модулей

$$\overline{F}_{(i)} = I^i / I^{i+1} = I^i / I^i \cdot I \simeq I^i \otimes_F F / I = I^i \otimes_F A$$

следует, что $\overline{F}$ – свободный правый (аналогично левый) A -модуль, откуда следует утверждение б) при $ij = 0$.

Пусть $i, j > 0$. Из изоморфизма векторных пространств

$$\overline{F}_{(i)} \otimes_F \overline{F}_{(j)} \approx I^i \otimes_F A \otimes_F I^j$$

и точной последовательности

$$0 \rightarrow I^{i+j+1} \rightarrow I^i \otimes_F F \otimes_F I^j \rightarrow I^i \otimes_F A \otimes_F I^j \rightarrow 0,$$

где $I^i \otimes_F F \otimes_F I^j \approx I^{i+j}$ в силу а), получаем равенство рядов Гильберта:

$$(\overline{F}_{(i)} \otimes_F \overline{F}_{(j)})(z) = I^{i+j}(z) - I^{i+j+1}(z) = \overline{F}_{(i+j)}(z).$$

Следовательно, сюръективное отображение, описанное в условии леммы, биективно.

ЛЕММА 5.4. Идеал Δ порождается множеством $\Delta_{(1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность A -бимодулей

$$0 \rightarrow \Delta_{(i)} \rightarrow A\langle \tilde{f} \rangle_{(i)} \xrightarrow{\pi_i} \overline{F}_{(i)} \rightarrow 0,$$

где $i \geq 0$. Здесь $\overline{F}_{(i)} \simeq I^i \otimes_F A$ – свободный правый A -модуль. Следовательно, он выделяется как свободное слагаемое, т.е. имеется изоморфизм правых A -модулей

$$A\langle \tilde{f} \rangle_{(i)} \simeq \overline{F}_{(i)} \oplus \Delta_{(i)}.$$

Аналогично, для любого $j \geq 0$ существует изоморфизм левых A -модулей

$$A\langle \tilde{f} \rangle_{(j)} \simeq \overline{F}_{(j)} \oplus \Delta_{(j)}.$$

Пусть $i, j \geq 1$ и по предположению индукции $\Delta_{(i)}$ и $\Delta_{(j)}$ содержатся в $K = \text{id}(\Delta_{(1)})$. Имеем

$$A\langle \tilde{f} \rangle_{(i+j)} = A\langle \tilde{f} \rangle_{(i)} \cdot A\langle \tilde{f} \rangle_{(j)} \simeq \overline{F}_{(i)} \overline{F}_{(j)} + (\Delta_{(i)} A\langle \tilde{f} \rangle_{(j)} + A\langle \tilde{f} \rangle_{(i)} \Delta_{(j)}),$$

где второе слагаемое лежит в $K_{(i+j)}$, в первом слагаемом перемножаются подмногожества алгебры $A\langle \tilde{f} \rangle$.

Из леммы 5.3 получаем неравенство рядов Гильберта

$$(\overline{F}_{(i)} \overline{F}_{(j)})(z) \leq (\overline{F}_{(i)} \otimes_F \overline{F}_{(j)})(z) = \overline{F}_{(i+j)}(z).$$

Следовательно,

$$A\langle \tilde{f} \rangle_{(i+j)}(z) \leq (\overline{F}_{(i)} \overline{F}_{(j)})(z) + K_{(i+j)}(z) \leq \overline{F}_{(i+j)}(z) + \Delta_{(i+j)}(z) = A\langle \tilde{f} \rangle_{(i+j)}(z).$$

Значит, все неравенства обращаются в равенства; в частности, $K_{(i+j)}(z) = \Delta_{(i+j)}(z)$ и $K_{(i+j)} = \Delta_{(i+j)}$.

ЛЕММА 5.5. *Гомологии алгебры $\overline{F}$ вычисляются по формулам*

$$H_0(\overline{F}) = k, \quad H_i(\overline{F}) \approx H_i(A) \oplus H_{i+1}(A) \quad \text{при } i \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стандартную спектральную последовательность

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^A(\text{Tor}_q^{\overline{F}}(k, A), k) \implies \text{Tor}_{p+q}^{\overline{F}}(k, k).$$

По лемме 5.3 естественное отображение левых $\overline{F}$ -модулей

$$\overline{F} \otimes_A \overline{F}_{(1)} \rightarrow \overline{F}_{(1)} \oplus \overline{F}_{(2)} \oplus \dots$$

— изоморфизм, откуда получаем свободную $\overline{F}$ -резольвенту левого модуля A

$$0 \leftarrow A \leftarrow \overline{F} \leftarrow \overline{F} \otimes_A \overline{F}_{(1)} \leftarrow 0.$$

Она, очевидно, минимальна, так что

$$\text{Tor}_0^{\overline{F}}(k, A) = k, \quad \text{Tor}_1^{\overline{F}}(k, A) = k \otimes_A I/I^2, \quad \text{Tor}_i^{\overline{F}}(k, A) = 0 \quad \text{при } i > 1.$$

Обозначим $M = \text{Tor}_1^{\overline{F}}(k, A) \simeq I/F_+I$. В свободной резольвенте Говорова [4] правого A -модуля k_A

$$0 \leftarrow k \xleftarrow{d_0} F/I \xleftarrow{d_1} F_+/F_+I \xleftarrow{d_2} I/I^2 \xleftarrow{d_3} \dots \leftarrow F_+I^{n-1}/F_+I^n \leftarrow I^n/I^{n+1} \leftarrow \dots$$

имеем $\text{im } d_2 \simeq M$, следовательно,

$$\text{Tor}_i^A(M, k) \approx \text{Tor}_{i+2}^A(k, k) \quad \text{для всех } i \geq 0.$$

Таким образом,

$$E_{p,0}^2 \approx H_p(A), \quad E_{p,1}^2 \approx H_{p+2}(A), \quad E_{p,q}^2 = 0 \quad \text{при } q \geq 2.$$

Векторные пространства $H_i(\bar{F})$ и $E_{p,q}^2$, а также члены минимальной $\bar{F}$ -резольвенты модуля k наследуют обе градуировки алгебры $\bar{F}$. При этом пространства $E_{p,0}^2 \approx H_p(A)$ сосредоточены в нулевой компоненте относительно I -адической градуировки, а пространства $E_{p,1}^2$ – в компонентах положительных степеней (так как модуль M порождается в первой степени). Поскольку $\bar{F}_{(0)} = A$, то подкомплекс нулевой I -адической степени в минимальной $\bar{F}$ -резольвенте тривиального модуля $k_{\bar{F}}$ является ациклическим комплексом свободных A -модулей, изоморфным минимальной A -резольвенте модуля k_A . Следовательно, $H_p(\bar{F})_{(0)} \approx H_p(A) \approx E_{p,0}^2$, т.е. члены $E_{p,0}^2$ остаются неизменными в члене $E_{p,0}^\infty$ и дифференциал на E^2 нулевой. Таким образом,

$$H_i(\bar{F}) \approx E_{i,0}^2 \oplus E_{i-1,1}^2 \quad \text{при } i \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2 непосредственно следует теперь из лемм 5.1–5.5.

§ 6. Две леммы о сильно свободных множествах

ЛЕММА 6.1. Пусть $\alpha \subset H$ – сильно свободное подмножество в связной алгебре, $\bar{\alpha}$ – его образ в некоторой факторалгебре $R = H/I$ и $J \triangleleft H$ – порожденный им идеал. Тогда существует изоморфизм R -бимодулей

$$H_1(\bar{\alpha}, R) \simeq J \cap I / (IJ + JI).$$

В частности, множество $\bar{\alpha} \subset R$ сильно свободно тогда и только тогда, когда $J \cap I = IJ + JI$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность дифференциальных алгебр

$$0 \rightarrow C \rightarrow \text{Sh}(\alpha, H) \rightarrow \text{Sh}(\bar{\alpha}, R) \rightarrow 0,$$

где C – дифференциальный идеал, порожденный I . Пусть $\bar{J}$ – идеал в R , порожденный множеством $\bar{\alpha}$. Тогда

$$H_0(\bar{\alpha}, R) = R/\bar{J} \simeq H/(I + J), \quad H_0(\alpha, H) = H/J, \quad H_0 C = C_0/dC_1 = I/(IJ + JI).$$

При этом комплекс $\text{Sh}(\alpha, H)$ ацикличесок в положительных степенях и начало точной последовательности гомологий выглядит так:

$$0 \rightarrow H_1(\bar{\alpha}, R) \xrightarrow{d_1} I/(IJ + JI) \rightarrow H/J \xrightarrow{\pi_0} H/(I + J) \rightarrow 0.$$

Здесь $\ker \pi_0 = I/(I \cap J)$, откуда и получаем изоморфизм

$$H_1(\bar{\alpha}, R) \simeq J \cap I/(IJ + JI).$$

ЛЕММА 6.2. Пусть $\alpha \subset H$ – сильно свободное подмножество в связной алгебре, $E \subset H$ – однородная подалгебра и $\alpha \subset E$, и пусть $\text{id}_H \alpha \cap E = \text{id}_E \alpha$. Тогда α сильно свободно в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $I = \text{id}_H \alpha$, $I' = \text{id}_E \alpha$, $B = H/I$, $C = E/I'$. Пусть $\pi_H: H \rightarrow B$, $\pi_E: E \rightarrow C$ – естественные гомоморфизмы, $\rho_H: B \rightarrow H$, $\rho_E: C \rightarrow E$ – какие-нибудь обратные отображения градуированных пространств. Так как $I' = I \cap E$, то C – подалгебра B , так что можно считать $\rho_H|_C = \rho_E$.

Согласно [1] α сильно свободно в H тогда и только тогда, когда $\rho\langle\tilde{\alpha}\rangle: B\langle\tilde{\alpha}\rangle \rightarrow H$ – изоморфизм градуированных пространств, т.е. если элемент $\sum b_0\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n b_n$ из $B\langle\tilde{\alpha}\rangle$ ненулевой, то и элемент $\sum \rho_H(b_0)\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n \rho_H(b_n)$ в H ненулевой. Аналогично, α сильно свободно в E в том и только том случае, когда для любого ненулевого элемента $\sum b_0\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n b_n$ из $C\langle\tilde{\alpha}\rangle$ элемент $\sum \rho_E(b_0)\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n \rho_E(b_n)$ также ненулевой. Поскольку $\rho_H|_C = \rho_E$, это условие всегда выполняется.

§ 7. Доказательство теоремы 3.3

Импликация (i) $\iff$ (ii) есть частный случай теоремы 3.2, в).

Докажем импликацию (i) + (ii) $\iff$ (iii). Условие, что $\bar{\phi}$ сильно свободно, означает, что $H_i(\bar{F}) \approx H_i(A\langle\tilde{f}\rangle)$ при $i \geq 3$, где $H_i(A\langle\tilde{f}\rangle) \approx H_i(A)$.

Если $\text{gl. dim } A = 3$, то $H_i(A) = 0$ при $i > 3$, и в силу теоремы 3.2, в) это условие выполняется. Обратно, если $\bar{\phi}$ сильно свободно, то

$$H_3(A) \oplus H_4(A) \approx H_3(\bar{F}) \approx H_3(A),$$

откуда $H_4(A) = 0$ и $\text{gl. dim } A \leq 3$.

Докажем (iii) $\iff$ (iv). Чтобы применить лемму 6.1 к алгебрам $F\langle\tilde{f}\rangle$, $A\langle\tilde{f}\rangle$ и множеству ϕ , достаточно доказать, что ϕ сильно свободно в $F\langle\tilde{f}\rangle$. Отметим сначала, что ϕ – минимальное множество порождающих некоторого идеала в $F\langle\tilde{f}\rangle$, в противном случае имеется соотношение вида

$$\phi_i = \sum_{j \neq i, m, n} a_m \phi_j b_n,$$

которое при отображении $F\tilde{f}F \rightarrow A\tilde{f}A \rightarrow \tilde{f}A$ переходит в соотношение вида

$$\gamma_i = \sum_{j \neq i, n} \gamma_j c_n,$$

т.е. γ порождает подмодуль $\Omega^3(k_A)$ не минимальным образом.

Чтобы доказать, что данное минимальное множество порождающих некоторого идеала сильно свободно, достаточно доказать, что какое-нибудь множество порождающих этого идеала сильно свободно. Выберем на мономах от переменных $\tilde{x}, \tilde{f}$ какой-нибудь порядок, обладающий следующими свойствами: из двух мономов разных степеней больше тот, у которого больше степень, а из двух мономов одной степени больше тот, у которого среди составляющих его переменных первой встречается какая-нибудь $\tilde{f}_i$ (мы считаем $\deg \tilde{x}_j = \deg x_j$, $\deg \tilde{f}_i = \deg f_i$). Тогда старшие члены элементов множества ϕ имеют вид $\hat{\phi}_j = \tilde{f}_i m_j$, где m_j — одночлен из алгебры F .

Если эти старшие члены не имеют попарных зацеплений, то ϕ комбинаторно свободно и все доказано. В противном случае один из описанных старших членов должен делиться слева на другой, т.е. для некоторых j, k существует такой одночлен $s \in F$, что

$$\hat{\phi}_j = \hat{\phi}_k s.$$

Заменяя в множестве ϕ элемент ϕ_j на элемент той же степени $\phi'_j = \phi_j - \phi_k s$, получим новое множество ϕ' порождающих идеала $\tilde{J}$. Поскольку при композиции естественных отображений $F\tilde{f}F \rightarrow \tilde{f}F \rightarrow \tilde{f}A$ множество ϕ' переходит в некоторое множество порождающих модуля $\Omega^3(k_A)$, его старшие члены имеют тот же вид, что и у элементов ϕ . Применим аналогичную операцию к множеству ϕ' , затем к получившемуся множеству и т.д., выбирая всякий раз из всех возможных замен ту, которая заменяет элемент наименьшей возможной степени. Поскольку после каждой замены старший член одного из элементов уменьшается, для каждого положительного числа n через конечное число шагов замены элементов степени не выше n станут невозможны и при дальнейших заменах множество ϕ'_n таких элементов будет оставаться неизменным. Взяв объединение множеств ϕ'_n при всех положительных n , мы получим некоторое комбинаторно свободное множество порождающих идеала $\tilde{J}$ (а именно, *базис Грёбнера* правого идеала $\phi F \triangleleft F\tilde{f}F$; см. [12], [13]).

Докажем (iii) $\Rightarrow$ (v). Докажем сначала, что подалгебра E , порожденная подмножеством $A \cup \bar{\phi}$ в алгебре $A\langle \tilde{f} \rangle$, является свободной A -алгеброй. Обозначим

$$I = \text{id}_{A\langle \tilde{f} \rangle} \bar{\phi}, \quad I' = \text{id}_E \bar{\phi}.$$

Согласно лемме 6.2 достаточно доказать, что $I \cap E = I'$; тогда $\bar{\phi}$ сильно свободно в E и $E \simeq A\langle \tilde{\phi} \rangle$.

Действительно, поскольку $I \subset J = \text{id}_{A\langle \tilde{f} \rangle} \tilde{f}$, а $J \cap E = E\bar{\phi}E = I'$, то $I \cap E \subset I'$, что и требовалось доказать.

Для доказательства импликации осталось заметить, что по предложению 3.1, в) $H_*(f, F) \simeq E \simeq A\langle \tilde{\phi} \rangle \simeq A\langle H_3(A) \rangle$.

Импликации (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (vii) тривиальны, а импликация (i) $\Longleftrightarrow$ (vii) следует из предложения 3.1, а). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Anick D.* Non-commutative graded algebras and their Hilbert series // *J. Algebra.* 1982. V. 78. P. 120–140.
2. *Голод Е. С., Шафаревич И. Р.* О башне полей классов // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1964. Т. 28. № 2. С. 261–272.
3. *Golod E. S.* Standard bases and homology // *Lect. Notes Math.* 1988. V. 1352. P. 88–96.
4. *Говоров В. Е.* О градуированных алгебрах // *Матем. заметки.* 1972. Т. 12. № 2. С. 197–204.
5. *Halperin S., Lemaire J.-M.* Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées // *Math. Scand.* 1987. V. 61. № 1. P. 39–67.
6. *Anick D.* Inert sets and the Lie algebra associated to a group // *J. Algebra.* 1987. V. 111. P. 154–165.
7. *Голод Е. С.* Гомологии комплекса Шафаревича и некоммутативные полные пересечения // *Фундам. и прикл. математика.* 1999. Т. 5. № 1. С. 85–95.
8. *Голод Е. С.* Об алгебре гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры // *Фундам. и прикл. математика.* 1999. Т. 5. № 1. С. 97–100.
9. *Бурбаки Н.* Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
10. *Пионтковский Д. И.* О рядах Гильберта и гомологиях PI-алгебр // *Матем. сб.* 1998. Т. 189. № 11. С. 103–120.
11. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
12. *Латышев В. Н.* Компьютерная алгебра. Стандартные базисы. М.: Изд-во МГУ, 1988.
13. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // *Современная математика и ее приложения.* 1990. Т. 57. С. 5–177.

Центральный экономико-математический
институт РАН

Поступило в редакцию
4.V.2000