Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Попов, О полиномиальных автоморфизмах аффинных пространств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 153–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:52:25

УДК 512.745

В. Л. Попов

О полиномиальных автоморфизмах аффинных пространств

В первой части работы доказано несколько общих результатов о линеаризуемости действий алгебраических групп на $\mathbb{A}^n$. В качестве приложения получен метод построения (и приведен конкретный пример) нелинеаризуемых алгебраических действий бесконечных нередуктивных неразрешимых алгебраических групп на $\mathbb{A}^n$, обладающих неподвижной точкой. Во второй части эти общие результаты используются для доказательства того, что всякое эффективное алгебраическое действие связной редуктивной алгебраической группы G на n -мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики линеаризуемо в каждом из следующих случаев: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$ и G не является одно- или двумерным тором. В частности, это означает, что $\mathrm{GL}_3(k)$ – единственная с точностью до сопряженности максимальная связная редуктивная подгруппа в группе автоморфизмов алгебры полиномов от трех переменных над k .

Библиография: 32 наименования.

§ 1. Введение

1.1. В дальнейшем k обозначает алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Если не оговорено отдельно, все алгебраические многообразия и морфизмы считаются определенными над k , алгебраические многообразия отождествляются с пространствами их k -точек и все действия считаются алгебраическими.

1.2. Мы рассматриваем в этой работе алгебраические действия редуктивных алгебраических групп G на n -мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$. Известно, что если группа G связна и не является тором, а n достаточно велико, то существует нелинеаризуемое действие группы G на пространстве $\mathbb{A}^n$ (доказательство утверждений, приводимых далее без ссылок, см. в [18] и в цитированной там литературе). Однако если n мало, имеются результаты положительного характера, так что в этом случае ситуация является более тонкой.

А именно, согласно классическому результату действия редуктивных алгебраических групп на пространстве $\mathbb{A}^n$ при $n \leq 2$ линеаризуемы. В работе [19] было доказано, что при $n = 3$ действия связных полупростых алгебраических групп на пространстве $\mathbb{A}^n$ линеаризуемы. Затем в [24] было доказано, что последнее верно

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант RM1–206).

и при $n = 4$ (работа [24] основана на идеях и методах появившейся раньше препринтной версии работы [19]). Недавно, после почти пятнадцатилетних усилий, была доказана линеаризуемость действий одномерного тора на пространстве $\mathbb{A}^3$ (отдельные части этого доказательства являются результатами работ [12], [15], [14], [9], [16] и [17]; см. исторические подробности в [10]). Все сказанное свидетельствует о том, что, как и $n = 1, 2$, размерности $n = 3, 4$ являются исключительными в отношении линеаризуемости действий.

1.3. В настоящей работе получены две группы результатов.

В первой половине работы доказываются ряд общих утверждений, относящихся к линеаризуемости действий. Мы отсылаем читателя к § 2 за формулировками. В качестве одного из приложений мы получаем метод построения и конкретный пример нелинеаризуемого действия бесконечной нередуктивной неразрешимой алгебраической группы на пространстве $\mathbb{A}^n$, обладающего неподвижной точкой (см. п. 2.10).

Вторая половина работы содержит приложения результатов из первой части к анализу структуры связных алгебраических подгрупп в $\text{Aut } \mathbb{A}^3$ и $\text{Aut } \mathbb{A}^4$. Мы получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое алгебраическое действие связной редуктивной алгебраической группы на $\mathbb{A}^3$ линеаризуемо.*

ТЕОРЕМА 2. *Всякое эффективное алгебраическое действие на $\mathbb{A}^4$ связной редуктивной алгебраической группы, отличной от одно- или двумерного тора, линеаризуемо.*

1.4. В доказательстве теоремы 1 существенно используется линеаризуемость действий одномерного тора на $\mathbb{A}^3$. Результаты из первой части быстро приводят к этому результату и линеаризуемости действий связных полупростых групп на $\mathbb{A}^3$. Напротив, в доказательстве теоремы 2 линеаризуемость действий одномерного тора на $\mathbb{A}^3$ не используется.

1.5. Теоремы 1 и 2, очевидно, могут быть переформулированы следующим образом.

ТЕОРЕМА 1'. *Любая связная редуктивная алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } \mathbb{A}^3$ (или, эквивалентно, в группе автоморфизмов алгебры полиномов от трех переменных над полем k) сопряжена подгруппе группы $\text{GL}_3(k)$.*

ТЕОРЕМА 2'. *Любая связная редуктивная алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } \mathbb{A}^4$ (или, эквивалентно, в группе автоморфизмов алгебры полиномов от четырех переменных над полем k), отличная от одно- или двумерного тора, сопряжена подгруппе группы $\text{GL}_4(k)$.*

1.6. Можно показать (см. ниже следствие из теоремы 4), что группа $\text{GL}_n(k)$ является максимальной редуктивной подгруппой бесконечномерной (при $n \geq 2$) алгебраической (см. [32], [11]) группы $\text{Aut } \mathbb{A}^n$. В конечномерной алгебраической группе H любая максимальная редуктивная подгруппа R является ее подгруппой

Леви (т.е. H – полупрямое произведение группы R и унитарного радикала группы H). Теоремы 1 и 1', очевидно, эквивалентны следующему утверждению, показывающему, что бесконечномерная алгебраическая группа $\text{Aut } \mathbb{A}^3$ (как и группа $\text{Aut } \mathbb{A}^2$) обладает одним из фундаментальных свойств конечномерных алгебраических групп – сопряженностью подгрупп Леви.

ТЕОРЕМА 3. *В группе $\text{Aut } \mathbb{A}^3$ имеется ровно одна, с точностью до сопряженности, максимальная связная редуктивная алгебраическая подгруппа, а именно $\text{GL}_3(k)$.*

1.7. Сложность доказательства линейаризуемости действий одномерных тором на $\mathbb{A}^3$ свидетельствует в пользу того, что если утверждения теорем 2 и 2' справедливы без предположения, что G не одно- или двумерный тор (и, значит, если имеет место аналог теоремы 3 для группы $\text{Aut } \mathbb{A}^4$), то доказать это будет нелегко. Отметим, что имеется семейство неэквивалентных нелинеаризуемых алгебраических действий ортогональной группы $O_2(k)$ (т.е. некоммутативного расширения одномерного тора с помощью группы второго порядка) на пространстве $\mathbb{A}^4$ (см. [22]). В этом смысле случай действий одномерного тора на пространстве $\mathbb{A}^4$ расположен “на краю” той области, где линейаризуемость действий имеет место. Случай действий двумерного тора на пространстве $\mathbb{A}^4$ кажется более доступным.

1.8. Ввиду существования нелинеаризуемых действий несвязных редуктивных алгебраических групп на пространстве $\mathbb{A}^4$ предположение о связности в теоремах 2 и 2' не может быть снято. Насколько я знаю, остается открытым вопрос: существуют ли такие примеры (в частности, нелинеаризуемые действия конечных групп) при $n = 3$? Другой открытый вопрос: исчерпывают ли случаи $n \leq 4$ все исключительные размерности в отношении линейаризуемости действий связных редуктивных алгебраических групп, отличных от тором? Наименьшая известная мне размерность, в которой не любое действие таких групп линейаризуемо, – это $n = 7$.

1.9. В качестве основной ссылки относительно стандартных обозначений и базисных фактов теории алгебраических действий используется работа [29]. Единственное исключение: категорный фактор для действия редуктивной алгебраической группы G на аффинном алгебраическом многообразии X обозначается через $\pi_{X,G}: X \rightarrow X//G$, как теперь общепринято.

$\text{Aut}_H Y$ – группа H -эквивариантных автоморфизмов алгебраического многообразия Y , на котором действует алгебраическая группа H .

V_d – простой алгебраический $(d+1)$ -мерный $\text{SL}_2(k)$ -модуль, $d \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ (с точностью до изоморфизма такой имеется ровно один).

1.10. Я благодарен П. Расселлу, чей вопрос о справедливости теоремы 1 был для меня отправной точкой и привел к появлению препринтов [27] и [28], и Х. Бассу за полезную переписку. Я признателен за гостеприимство сотрудникам института математики Иннсбургского университета, где была завершена настоящая работа.

§ 2. Некоторые общие результаты о действиях алгебраических групп

2.1. В этом параграфе получено несколько общих результатов об алгебраических действиях. Во второй половине работы они будут использованы в доказательствах теорем 1 и 2.

2.2. Следующие три утверждения, теоремы 4–6, хорошо известны.

ТЕОРЕМА 4 [19]. *Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует на пространстве $\mathbb{A}^n$. Если категорный фактор $\mathbb{A}^n // G$ является точкой (т.е. $k[\mathbb{A}^n]^G = k$), то действие линейризуемо.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Группа $GL_n(k)$ является максимальной редуктивной подгруппой в $\text{Aut } \mathbb{A}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группа $GL_n(k)$ имеет в пространстве $\mathbb{A}^n$ открытую орбиту, это же верно для любой редуктивной подгруппы G в $\text{Aut } \mathbb{A}^n$, содержащей группу $GL_n(k)$. Поэтому $k[\mathbb{A}^n]^G = k$. Значит, по теореме 4 действие группы G на пространстве $\mathbb{A}^n$ линейризуемо, т.е. группа G сопряжена в $\text{Aut } \mathbb{A}^n$ подгруппе группы $GL_n(k)$. Поскольку $GL_n(k) \subseteq G$, это дает $G = GL_n(k)$.

2.3. Напомним [2], что действие редуктивной алгебраической группы на аффинном алгебраическом многообразии называется *fixed pointed*, если лишь неподвижные точки являются замкнутыми орбитами.

ТЕОРЕМА 5 [2]. *Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует на пространстве $\mathbb{A}^n$. Если это – fixed pointed-действие, то оно линейризуемо тогда и только тогда, когда многообразие $(\mathbb{A}^n)^G$ неподвижных точек изоморфно пространству $\mathbb{A}^s$ для некоторого s ; при $s \leq 2$ это условие выполнено автоматически.*

2.4. Следующее утверждение является стандартным фактом теории однородных пространств (см., например, [8, теорема 1.2]). Его доказательство является легким упражнением.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть H – алгебраическая группа и Q – ее замкнутая подгруппа. Рассмотрим действие группы H на однородном пространстве H/Q , определенное левыми сдвигами. Тогда группа $\text{Aut}_H H/Q$ совпадает с образом группы $N_H(Q)/Q$, действующей на пространстве H/Q с помощью правых сдвигов. Это действие эффективно, так что группа $\text{Aut}_H H/Q$ изоморфна группе $N_H(Q)/Q$.*

2.5. Результаты, содержащиеся в пп. 2.5, 2.6, касаются связи между линейностью эквивариантного автоморфизма и некоторыми свойствами разложений на изотипные компоненты.

А именно, пусть G – редуктивная алгебраическая группа и V – конечномерный алгебраический G -модуль. Поскольку всякая изотипная компонента G -модуля $k[V]$ является конечно порожденным $k[V]^G$ -модулем, некоторая (эквивалентно,

любая) ненулевая изотипная компонента конечномерна тогда и только тогда, когда $k[V]^G = k$. Поскольку группа G действует на пространстве V линейно, V^* является G -инвариантным подпространством в алгебре $k[V]$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа, V – конечномерный алгебраический G -модуль, для которого $k[V]^G = k$, и $\sigma \in \text{Aut}_G V$. Тогда $\sigma \in \text{GL}(V)$, если

(i) V^* есть сумма некоторых изотипных компонент G -модуля $k[V]$.

Если группа G полупроста, $L_1, \dots, L_s$ – все попарно неизоморфные слагаемые, встречающиеся в разложении G -модуля V в сумму простых G -модулей, m_i – кратность G -модуля L_i в V и H – стабилизатор точки общего положения в V , то условие (i) эквивалентно условию

(ii) $m_i = \dim L_i^H$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку σ^* является автоморфизмом G -модуля $k[V]$, каждая изотипная компонента G -модуля $k[V]$ инвариантна относительно σ^* . Значит, из (i) следует, что $\sigma^*(V^*) = V^*$, т.е. $\sigma \in \text{GL}(V)$.

Пусть теперь группа G полупроста. Тогда ввиду $k[V]^G = k$ многообразие V содержит открытую плотную G -орбиту $\mathcal{O}$ и $V \setminus \mathcal{O}$ имеет в V коразмерность, не меньшую 2 (см. [29, теорема 3.3, следствие из теоремы 2.3 и теорема 3.1]). Следовательно, вложение $\iota: \mathcal{O} \hookrightarrow V$ индуцирует G -изоморфизм алгебр $\iota^*: k[V] \rightarrow k[\mathcal{O}]$. Теперь второе утверждение теоремы 7 вытекает из двойственности Фробениуса, согласно которой кратность G -модуля L_i^* в $k[\mathcal{O}]$ равна $\dim L_i^H$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в обозначениях теоремы 7 группа G полупроста, а модуль V прост. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- (i) любой G -эквивариантный автоморфизм алгебраического многообразия V является умножением на скаляр;
- (ii) $\text{Aut}_G V \subset \text{GL}(V)$;
- (iii) $\dim V^H = 1$;
- (iv) $\dim N_G(H)/H = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $v \in \mathcal{O}^H$. Так как орбита $\mathcal{O}$ открыта в V , то $\dim V^H = \dim \mathcal{O}^H$. Из $G_v = H$ следует, что $N_G(H) \cdot v = \mathcal{O}^H$ и многообразия $N_G(H) \cdot v$ и $N_G(H)/H$ эквивариантно изоморфны. Это дает (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) вытекает из леммы Шура.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из теоремы 7.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Поскольку ι^* – изоморфизм, ограничение на орбиту $\mathcal{O}$ определяет изоморфизм между группами $\text{Aut}_G V$ и $\text{Aut}_G \mathcal{O}$. Следовательно, по теореме 6 орбита $N_G(H) \cdot v$ совпадает с одномерной орбитой точки v относительно группы умножений на скаляры.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В общем случае, когда группа G полупроста и $k[V]^G = k$, но G -модуль V не обязательно прост, эти рассуждения и теорема 6 показывают, что:

- (а) ограничение на орбиту $\mathcal{O}$ определяет изоморфизм между группой $\text{Aut}_G V$ и группой $\text{Aut}_G \mathcal{O}$, а потому и группой $N_G(H)/H$;

(b) $\dim N_G(H)/H = \dim V^H$.

Утверждения (a) и (b) аналогичным методом были доказаны в работе [20], появившейся одновременно с препринтом настоящей работы [28].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для связных полупростых групп G имеется явная классификация всех таких конечномерных алгебраических G -модулей V , что $k[V]^G = k$, и либо группа G проста, либо модуль V прост. В этих случаях найден G -стабилизатор H точки общего положения в V (см. [31], [13], [6], [7]). Подробнее: поскольку действие группы G на пространстве V не стабильно, группа H бесконечна [25]. В [6], [7] классифицированы все такие пары (G, V) , что G -стабилизатор G_* точки общего положения в V бесконечен и либо группа G проста, либо модуль V прост, и в этих случаях описана алгебра Ли $\text{Lie}(G_*)$ (а в некоторых из них – также алгебра Ли $\text{Lie}(N_G(G_*)/G_*)$ и подпространство V^{G_*}). Случаи, когда $k[V]^G = k$, выделяются из этой классификации условием $\dim V = \dim G - \dim \text{Lie}(G_*)$. Вместе со следствием из теоремы 7 сказанное сводит вопрос о нахождении примеров простых G -модулей V , обладающих нелинейными G -эквивариантными автоморфизмами, к задаче вычислительного характера. В статье [20] в классе простых модулей найден пример, в котором модуль имеет минимальную размерность.

2.6. Напомним, что конечномерный алгебраический модуль V редуктивной алгебраической группы G называется *сферическим*, если пространство V содержит открытую плотную орбиту борелевской подгруппы группы G . Это эквивалентно тому, что G -модуль $k[V]$ не имеет кратностей, т.е. его ненулевые изотипные компоненты являются простыми G -модулями.

ТЕОРЕМА 8. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа и V – сферический G -модуль. Тогда $\text{Aut}_G V \subset \text{GL}(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку каждая ненулевая изотипная компонента G -модуля $k[V]$ является простым G -модулем, выполнено условие (i) теоремы 7. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Из леммы Шура вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Сохраним обозначения и предположения теоремы 8. Если G -модуль V прост, то группа $\text{Aut}_G V$ состоит из умножений на скаляры.

2.7. Ниже через $A^\times$ обозначается группа обратимых элементов кольца A .

ТЕОРЕМА 9. Пусть G – алгебраическая группа, V – конечномерный алгебраический G -модуль и X – неприводимое алгебраическое многообразие. Рассмотрим действие группы G на многообразии $Y := V \times X$ через первый сомножитель. Пусть H – алгебраическая подгруппа группы $\text{Aut}_G Y$. Предположим, что:

- (i) каждая G -орбита в пространстве V содержит в своем замыкании нулевой вектор 0;
- (ii) $\text{Aut}_G V$ совпадает с группой умножений на скаляры;
- (iii) $k[Y]^\times \subset k[Y]^H$.

Тогда существуют такой алгебраический характер $\chi: H \longrightarrow k^\times$ и такое действие группы H на многообразии X , что естественное действие группы $G \times H$ на многообразии Y задается формулой

$$(g, h) \cdot (v, x) = (\chi(h)g \cdot v, h \cdot x), \quad (g, h) \in G \times H, \quad (v, x) \in Y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (i) следует, что $V^G = \{0\}$, откуда вытекает, что $Y^G = \{0\} \times X$. Поэтому $\{0\} \times X$ является H -инвариантным подмногообразием в Y . Пусть

$$\pi_V: Y \longrightarrow V, \quad \pi_X: Y \longrightarrow X$$

– естественные проекции. Ограничение морфизма π_X на подмногообразии $\{0\} \times X$ является изоморфизмом многообразий $\{0\} \times X$ и X . Значит, существует такое однозначно определенное действие группы H на многообразии X , что этот изоморфизм является H -эквивариантным.

Рассмотрим точку $x \in X$. Из (i) следует, что точка $y \in Y$ лежит в слое $\pi_X^{-1}(x)$ тогда и только тогда, когда точка $(0, x)$ лежит в замыкании орбиты $G \cdot y$. Поскольку действие группы H на многообразии Y коммутирует с действием группы G , это показывает, что π_X является H -эквивариантным морфизмом.

Отсюда вытекают два свойства. Во-первых, поскольку π_X^* является H -эквивариантным вложением алгебры $k[X]$ в алгебру $k[Y]$, условие (iii) показывает, что

$$k[X]^\times \subset k[X]^H. \quad (1)$$

Во-вторых, для любого элемента $h \in H$ и любой точки $x \in X$ отображение $V \longrightarrow V$, $v \mapsto \pi_V(h \cdot (v, x))$, является G -эквивариантным автоморфизмом многообразия V . Следовательно, ввиду (ii) существует такой элемент $\mu_{h,x} \in k^\times$ (зависящий от h и x), что действие группы H на многообразии Y задается формулой

$$h \cdot (v, x) = (\mu_{h,x} v, h \cdot x), \quad h \in H, \quad v \in V, \quad x \in X. \quad (2)$$

Из определения действия следует, что

$$\mu_{h_1 h_2, x} = \mu_{h_1, h_2 \cdot x} \mu_{h_2, x}, \quad \mu_{e, x} = 1, \quad h_1, h_2 \in H, \quad x \in X. \quad (3)$$

Для любого фиксированного элемента $h \in H$ функция $X \longrightarrow k^\times$, $x \mapsto \mu_{h,x}$, является элементом группы $k[X]^\times$. Поэтому из (1) вытекает, что

$$\mu_{h_1, h_2 \cdot x} = \mu_{h_1, x}, \quad h_1, h_2 \in H, \quad x \in X. \quad (4)$$

Из (3) и (4) теперь получаем, что

$$\mu_{h_1 h_2, x} = \mu_{h_1, x} \mu_{h_2, x}, \quad h_1, h_2 \in H, \quad x \in X. \quad (5)$$

Таким образом, (5) показывает, что для каждой фиксированной точки $x \in X$ отображение

$$\chi_x: H \longrightarrow k^\times, \quad h \mapsto \mu_{h,x}, \quad (6)$$

является алгебраическим характером группы H . Поэтому ввиду (2) дело сводится к тому, чтобы установить, что все эти характеры совпадают, т.е. $\chi_{x_1} = \chi_{x_2}$ для любых $x_1, x_2 \in X$.

Чтобы доказать это, рассмотрим морфизм

$$\tau: H \times X \longrightarrow k^\times, \quad \tau((h, x)) = \mu_{h,x}, \quad h \in H, \quad x \in X. \quad (7)$$

Пусть H^0 – связная компонента единицы группы H . Поскольку многообразие $H^0 \times X$ неприводимо, а ограничение морфизма τ на многообразие $H^0 \times X$ является элементом группы $k[H^0 \times X]^\times$, из [30] следует, что существуют такой алгебраический характер $\varepsilon: H^0 \longrightarrow k^\times$ и такая функция $\vartheta \in k[X]^\times$, что

$$\tau((h, x)) = \varepsilon(h)\vartheta(x), \quad h \in H^0, \quad x \in X. \quad (8)$$

Подставляя $h = e$ в (8) и учитывая (7), (3) и соотношение $\varepsilon(e) = 1$, мы получаем, что $\vartheta \equiv 1$. Это означает, что ограничения всех характеров χ_x на группу H^0 равны ε и, значит, равны друг другу. Поэтому если $x_0 \in X$ – фиксированная точка, то для любой точки $x \in X$ образ характера $\chi_x \chi_{x_0}^{-1}: H \longrightarrow k^\times$ лежит в группе

$$F := \{a \in k^\times \mid a^{\text{ord}(H/H^0)} = 1\}.$$

Значит, образ отображения

$$\tau': H \times X \longrightarrow k^\times, \quad \tau'((h, x)) = \tau((h, x))\chi_{x_0}(h)^{-1}, \quad h \in H, \quad x \in X, \quad (9)$$

тоже лежит в группе F . Поскольку многообразие X неприводимо, а группа F конечна, отсюда следует, что

$$\tau'((h, x_1)) = \tau'((h, x_2)) \quad \text{для любых } h \in H, \quad x_1, x_2 \in X. \quad (10)$$

Теперь ввиду (9), (7) и (6) мы получаем, что $\tau'((h, x_0)) = 1$ для любого $h \in H$. Вместе с (10) это показывает, что $\tau' \equiv 1$. Следовательно, ввиду (9), (7) и (6) мы имеем $\chi_x = \chi_{x_0}$ для любой точки $x \in X$, как и утверждалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку для любого неприводимого алгебраического многообразия Z группа $k[Z]^\times/k^\times$ является свободной абелевой конечного ранга, условие (iii) теоремы 9 автоматически выполнено, если группа H связна и не имеет нетривиальных характеров.

СЛЕДСТВИЕ 4. Сохраним обозначения и условия теоремы 9. Пусть $X = \mathbb{A}^n$. Если действие группы H на многообразии X линеаризуемо, то и естественное действие группы $G \times H$ на многообразии Y линеаризуемо.

СЛЕДСТВИЕ 5. Сохраним обозначения и условия теоремы 9. Пусть $X = \mathbb{A}^n$. Предположим, что группа H редуктивна. Тогда естественное действие группы $G \times H$ на многообразии Y линеаризуемо в каждом из следующих случаев:

- (i) $n \leq 2$;
- (ii) $n = 3$ и группа H связна;
- (iii) $n = 4$ и группа H связна и не является одно- или двумерным тором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае (i) утверждение вытекает из следствия 4 и из п. 1.2, а в случаях (ii) и (iii) – соответственно из доказанных ниже теорем 1 и 2 (в их доказательствах используется только случай (i)).

2.8. В отношении автоморфизмов простых модулей имеет место

ТЕОРЕМА 10. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа и V – простой алгебраический G -модуль. Пусть H – бесконечная редуктивная алгебраическая подгруппа в группе $\text{Aut}_G V$. Тогда естественное действие группы $G \times H$ на многообразии V линеаризуемо и группа H является одномерным тором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\dim V > 1$. Тогда $V^G = \{0\}$ и, значит, $0 \in V^H$. Слайс-модулем G -многообразия V в неподвижной точке 0 является сам G -модуль V , а если мы рассмотрим V как H -многообразие, то этим слайс-модулем является векторное пространство V , снабженное некоторым линейным действием группы H , коммутирующим с действием группы G . Поскольку V является простым G -модулем, из леммы Шура следует, что группа H действует на этом последнем слайс-модуле умножениями на скаляры. Поскольку группа H бесконечна и действует на многообразии V эффективно, отсюда и из теоремы Луны об этальном слайсе [21] вытекает, что группа H является одномерным тором и категорный фактор для рассматриваемого в теореме действия группы H на многообразии V является точкой. Следовательно, категорный фактор для естественного действия группы $G \times H$ на многообразии V также является точкой. Доказываемое утверждение вытекает теперь из теоремы 4.

2.9. Если редуктивная алгебраическая группа G действует на аффинном алгебраическом многообразии X и $k[X]^G = k$, то $\text{Aut}_G(X)$ – конечномерная алгебраическая группа, поскольку алгебра $k[X]$ порождена суммой конечного числа своих изотипных компонент и эта сумма ввиду $k[X]^G = k$ конечномерна. В качестве приложения получаем следующий критерий линеаризуемости действия группы $G \times \text{Aut}_G(V)$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа и V – такой простой алгебраический G -модуль, что $k[V]^G = k$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

(i) действие группы $G \times \text{Aut}_G(V)$ на пространстве V линеаризуемо;

(ii) группа $\text{Aut}_G(V)$ является одномерным тором.

Если группа G полупроста и действует на пространстве V эффективно, а H является G -стабилизатором точки общего положения в пространстве V , то эти свойства эквивалентны любому из следующих:

(iii) действие группы $G \times \text{Aut}_G(V)$ на пространстве V линейно;

(iv) $\dim V^H = 1$;

(v) $\dim N_G(H)/H = 1$;

(vi) группа $N_G(H)/H$ является одномерным тором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Поскольку в группе $\text{GL}(V)$ централизатор любой редуктивной подгруппы редуктивен (см., например, [23, предложение 3.6]), из (i) следует, что $\text{Aut}_G(V)$ – редуктивная группа. Она бесконечна, так как содержит все умножения на скаляры. Теперь (ii) следует из теоремы 10.

(ii) $\Rightarrow$ (i) вытекает из теоремы 10.

(ii) $\Leftrightarrow$ (vi) следует из замечания 1, (a).

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) вытекает из следствия 2.

Импликации (vi) $\Rightarrow$ (v) и (iii) $\Rightarrow$ (i) очевидны.

2.10. Теорема 11 (см. также замечание 2) доставляет способ построения примеров нелинеаризуемых действий бесконечных нередуктивных неразрешимых алгебраических групп с непустым множеством неподвижных точек. А именно, если V – такой простой модуль связной полупростой алгебраической группы G , что $k[V]^G = k$ и $\dim N_G(H)/H > 1$, где H – стабилизатор точки общего положения в V , то действие группы $G \times N_G(H)/H$ на V нелинеаризуемо (по теореме 10 в этом случае группа $G \times N_G(H)/H$ нередуктивна). Например, рассмотренное в [20, § 3] действие группы $G = \text{SL}_3 \times \text{SL}_5 \times \text{SL}_{13} \times (k^* \ltimes k_+)$ на $\mathbb{A}^{195}$ является таким примером.

§ 3. Доказательство теоремы 1

3.1. Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа, действующая на пространстве $\mathbb{A}^3$.

Если группа G полупроста, утверждение теоремы 1 доказано в [19]. Если группа G – тор, то можно считать, что $\dim G = 1, 2, 3$, и в этих случаях утверждение доказано соответственно в [12], [4] и [3].

3.2. Таким образом, дело сводится к тому, чтобы доказать, что если Z – неединичный алгебраический тор, S – односвязная полупростая алгебраическая группа и группа $G := Z \times S$ действует на пространстве $\mathbb{A}^3$ с конечным ядром неэффективности, то действие линеаризуемо.

3.3. Всякое действие связной полупростой алгебраической группы ранга ≥ 2 на пространстве $\mathbb{A}^3$ имеет открытую плотную орбиту (см. [26], а также [19, замечание 5.2]). Поэтому если $S \neq \text{SL}_2(k)$, то группа G имеет открытую плотную

орбиту в пространстве $\mathbb{A}^3$. В этом случае действие группы G на пространстве $\mathbb{A}^3$ линеаризуемо по теореме 4.

3.4. Таким образом, можно считать, что $S = \mathrm{SL}_2(k)$.

Поскольку любое действие группы S на пространстве $\mathbb{A}^3$ линеаризуемо, S -многообразие $\mathbb{A}^3$ совпадает с точностью до изоморфизма либо с V_2 , либо с $V_1 \oplus V_0$ (см. п. 1.9). Если $\mathbb{A}^3$ – это V_2 , то утверждение теоремы 1 вытекает из теоремы 10. Если же $\mathbb{A}^3$ – это $V_1 \oplus V_0$, то оно вытекает из теоремы 8 и следствия 5 (случай (i)), поскольку V_1 является сферическим $\mathrm{SL}_2(k)$ -модулем.

§ 4. Доказательство теоремы 2: первый шаг

4.1. Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа, действующая на пространстве $\mathbb{A}^4$ и отличная от одно- или двумерного тора.

Если группа G полупроста, то утверждение теоремы 2 доказано в [24]. Если группа G – тор, то можно считать, что $\dim G \leq 4$ и, значит, $\dim G = 3, 4$. В этих случаях утверждение теоремы 2 доказано соответственно в [4] и [3].

4.2. Таким образом, все сводится к тому, чтобы показать, что если Z – неединичный алгебраический тор, S – односвязная полупростая алгебраическая группа и группа $G := Z \times S$ действует на пространстве $\mathbb{A}^4$ с конечным ядром неэффективности, то действие линеаризуемо. Мы можем (и будем) считать, что тор Z действует на пространстве $\mathbb{A}^4$ эффективно.

4.3. Поскольку ограничение действия на группу S линеаризуемо, мы можем зафиксировать подходящую линейную структуру на пространстве $\mathbb{A}^4$ и считать $\mathbb{A}^4$ некоторым S -модулем V . Поскольку группа S действует на V с конечным ядром неэффективности, из [26] следует, что с точностью до перехода к двойственному модулю пара (S, V) содержится в следующем списке (ниже мы сохраняем обозначения § 3 и обозначаем через $R(\lambda)$ и ω_i соответственно простой S -модуль со старшим весом λ и i -й фундаментальный вес в нумерации Бурбаки):

$$\begin{aligned} &(\mathrm{SL}_2(k), V_3), \quad (\mathrm{SL}_2(k), V_2 \oplus V_0), \quad (\mathrm{SL}_2(k), V_1 \oplus V_1), \quad (\mathrm{SL}_2(k), V_1 \oplus V_0 \oplus V_0), \\ &(\mathrm{SL}_3(k), R(\omega_1) \oplus R(0)), \quad (\mathrm{SL}_4(k), R(\omega_1)), \quad (\mathrm{Sp}_4(k), R(\omega_1)), \\ &(\mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k), V_1 \otimes V_1), \quad (\mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k), (V_1 \otimes V_0) \oplus (V_0 \otimes V_1)). \end{aligned}$$

Мы рассмотрим отдельно все эти возможности.

4.4. Если (S, V) – одна из пар $(\mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k), (V_1 \otimes V_0) \oplus (V_0 \otimes V_1))$, $(\mathrm{SL}_4(k), R(\omega_1))$ и $(\mathrm{Sp}_4(k), R(\omega_1))$, то в V имеется открытая плотная S -орбита, и потому доказываемое утверждение вытекает из теоремы 4.

4.5. Если $(S, V) = (\mathrm{SL}_2(k), V_1 \oplus V_0 \oplus V_0)$ или $(S, V) = (\mathrm{SL}_3(k), R(\omega_1) \oplus R(0))$, то, поскольку V_1 является сферическим $\mathrm{SL}_2(k)$ -модулем, а $R(\omega_1)$ – сферическим $\mathrm{SL}_3(k)$ -модулем, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 8 и следствия 5, (i).

4.6. Если $(S, V) = (\mathrm{SL}_2(k), V_3)$ или $(S, V) = (\mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k), V_1 \otimes V_1)$, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 10.

4.7. Оставшиеся случаи $(S, V) = (\mathrm{SL}_2(k), V_2 \oplus V_0)$, $(\mathrm{SL}_2(k), V_1 \oplus V_1)$ рассмотрены в двух следующих параграфах.

§ 5. Доказательство теоремы 2: второй шаг

5.1. Рассмотрим первый из оставшихся случаев:

$$(S, V) = (\mathrm{SL}_2(k), V_2 \oplus V_0).$$

5.2. Поскольку $V_2 // S = \mathbb{A}^1$, мы имеем

$$V // S = (V_2 // S) \times V_0 = \mathbb{A}^2. \quad (11)$$

Ввиду (11) многообразие $V // G = (V // S) // Z$ максимум двумерно.

5.3. Если оно нульмерно (и потому является точкой), утверждение теоремы 2 следует из теоремы 4.

5.4. Если оно двумерно, общий слой морфизма $\pi_{V // S, Z}$ нульмерен. Поэтому ввиду связности тор Z тривиально действует на этом слое. Значит, он тривиально действует на многообразии $V // S$. В частности, тор Z тривиально действует на прямой $\pi_{V // S, Z}(\{0\} \times V_0)$. Эта прямая является изоморфным образом прямой $\{0\} \times V_0$ относительно Z -эквивариантного морфизма $\pi_{V // S, Z}$. Поскольку $\{0\} \times V_0 = V^G$, прямая $\{0\} \times V_0$ инвариантна относительно Z . Поэтому каждая ее точка неподвижна относительно Z . Значит, в этом случае $\{0\} \times V_0 = V^G$.

Пусть T_x — слайс-модуль G -многообразия V в точке $x \in \{0\} \times V_0$. Тогда, как S -модуль, $T_x = V_2 \oplus V_0$. Поскольку S -подмодули $T_{x,2} = V_2 \times \{0\}$ и $T_{x,0} = \{0\} \times V_0$ в T_x просты и неизоморфны, они Z -инвариантны, и по лемме Шура тор Z действует на каждом из них умножениями на скаляры. Поскольку $T_{x,0}$ является касательным пространством к многообразию V^G в точке x , действие тора Z на $T_{x,0}$ тривиально. С другой стороны, действие тора Z на $T_{x,2}$ нетривиально: иначе бы действие тора Z на T_x было тривиальным, а тогда по теореме Луны об этальном слайсе [21] было бы тривиальным и действие тора Z на V , что не так (см. п. 4.2).

Из сказанного следует, что действие группы G на T_x — это fixed pointed-действие. Из теоремы Луны об этальном слайсе [21] вытекает, что тогда и действие группы G на V тоже fixed pointed. Поэтому в рассматриваемом случае утверждение теоремы 2 вытекает из теоремы 5.

5.5. Таким образом, следует рассмотреть оставшийся случай, когда многообразие $V // G$ одномерно. Поскольку морфизм $\pi_{V, G}$ сюръективен, а всякая неприводимая унирациональная нормальная аффинная кривая, на которой нет непостоянных регулярных функций, есть $\mathbb{A}^1$, мы имеем

$$(V // S) // Z = \mathbb{A}^1. \quad (12)$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 2 в этом случае, мы найдем в алгебре $k[V]$ четырехмерное G -инвариантное линейное подпространство, порождающее $k[V]$ как k -алгебру. Поскольку $\dim V = 4$, его существование эквивалентно линейаризуемости действия группы G на пространстве V .

5.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В алгебре $k[V]^S$ существуют такие два непостоянных Z -полуинварианта f_1 и f_2 , что:

- (i) $k[V]^S = k[f_1, f_2]$;
- (ii) $k[V]^G = k[f]$, где $f = f_1^{a_1} f_2^{a_2}$ для некоторых чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$;
- (iii) каждая ненулевая изотипная компонента Z -модуля $k[V]^S$ имеет вид $f_1^{b_1} f_2^{b_2} k[V]^G$ для некоторых чисел $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование Z -полуинвариантов f_1 и f_2 , для которых выполнено (i), вытекает из (11) и линейаризуемости действий алгебраического тора на плоскости $\mathbb{A}^2$.

Пусть $\chi_i \in \text{Hom}(Z, k^\times)$ – вес Z -полуинварианта f_i . Рассмотрим в группе $\mathbb{Z}^2$ подгруппу

$$D_0 := \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \chi_1^{d_1} \chi_2^{d_2} = \text{id}\}.$$

Линейной оболочкой множества $\{f_1^{d_1} f_2^{d_2} \mid (d_1, d_2) \in D_0 \cap \mathbb{N}^2\}$ является алгебра $(k[V]^S)^Z = k[V]^G$. Поскольку группа Z связна, D_0 является насыщенной подгруппой в $\mathbb{Z}^2$. Ввиду (12) $\text{rk } D_0 = 1$ и

$$D_0 \cap \mathbb{N}^2 \neq \{(0, 0)\}. \quad (13)$$

Следовательно, подгруппа D_0 порождена некоторым элементом $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$. Это доказывает (ii).

Пусть I – ненулевая изотипная компонента Z -модуля $k[V]^S$, весом которой является $\chi \in \text{Hom}(Z, k^\times)$. Ввиду (i) компонента I является линейной оболочкой множества $\{f_1^{d_1} f_2^{d_2} \mid (d_1, d_2) \in D_\chi \cap \mathbb{N}^2\}$, где

$$D_\chi := \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \chi_1^{d_1} \chi_2^{d_2} = \chi\}.$$

Поскольку D_χ является смежным классом группы $\mathbb{Z}^2$ по подгруппе D_0 , из (13) и (ii) следует, что I имеет указанный в (iii) вид, где (b_1, b_2) – элемент из $D_\chi \cap (\mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ с минимальной суммой координат.

5.7. Рассмотрим в пространстве V^* линейные подпространства

$$L := \pi_2^*(V_2^*), \quad M := \pi_0^*(V_0^*), \quad (14)$$

где $\pi_2: V = V_2 \oplus V_0 \rightarrow V_2$, $\pi_0: V = V_2 \oplus V_0 \rightarrow V_0$ – естественные проекции. Подпространства L и M являются S -подмодулями S -модуля V^* и

$$V^* = L \oplus M, \quad (15)$$

$$M \subset k[V]^S. \quad (16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Подпространство L является G -инвариантным, и тор Z действует на нем умножениями на скаляры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем в S борелевскую подгруппу B . Пусть U – ее унитарный радикал и ε – старший вес S -модуля V_1 относительно B . Тогда ε^d – старший вес модуля V_d относительно B . Для любого алгебраического S -модуля M и любого числа $d \in \mathbb{N}$ обозначим через M_d изотипную компоненту типа V_d модуля M .

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда $k[V_2]_d^U$ является конечно порожденным $k[V_2]^S$ -модулем без кручения. Поскольку $V_2//S = \mathbb{A}^1$, этот модуль является свободным конечного ранга m_d , а морфизм $\pi_{V_2,S}$ – плоским. Из последнего свойства следует, что для каждого схемного слоя $\pi_{V_2,S}^{-1}(x)$, $x \in V_2//S$, имеет место равенство

$$m_d = \frac{\dim k[\pi_{V_2,S}^{-1}(x)]_d}{\dim V_d} \quad (17)$$

(см. [29]). Пусть $\pi_{V_2,S}^{-1}(x)$ в (17) является слоем общего положения. Этот слой приведен и изоморфен многообразию S/T , где T – максимальный тор группы S (в действительности в рассматриваемом случае каждый слой приведен; см. первый абзац п. 5.9). Значит, по двойственности Фробениуса правая часть в (17) равна $\dim V_d^T$ (см. [29]). Это дает

$$m_d = \begin{cases} 1, & \text{если } d \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } d \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (18)$$

Ввиду (14) и (15) подалгебра алгебры $k[V]$, порожденная подпространством L , инвариантна относительно S и S -изоморфна алгебре $k[V_2]$. Ввиду (16) это показывает, что пространство $k[V]_d^U$ является свободным $k[V]^S$ -модулем ранга m_d , заданного формулой (18). Таким образом, для любого четного натурального числа d существует такой ненулевой элемент h_d , что

$$k[V]_d^U = h_d k[V]^S. \quad (19)$$

С точностью до скалярного множителя элемент h_d определен однозначно как элемент из алгебры $k[V]_d^U$, не имеющий непостоянных S -инвариантных делителей. В самом деле, $k[V]_d^U$ – это подпространство всех B -полуинвариантов веса ε^d в алгебре $k[V]$. Поэтому из равенства $h_d = pq$, $p \in k[V]^S$, следует, что $q \in k[V]_d^U$. В силу (19) это дает $q = h_d r$, где $r \in k[V]^S$. Значит, $rp = 1$, и потому p является константой. Утверждение теперь вытекает из (19).

Поскольку тор Z действует S -эквивариантными автоморфизмами алгебры $k[V]$, эта характеристика элементов h_d показывает, что каждый элемент h_d является Z -весовым вектором.

Далее, пусть $d = 2$. Из (15) следует, что каждый ненулевой элемент пространства L является простым элементом факториального кольца $k[V]$. В частности, он не имеет непостоянных S -инвариантных делителей. Поскольку S -модули L и

V_2 изоморфны и $L^U \neq 0$, данная выше характеристика элементов h_d показывает, что $h_2 \in L$. Для завершения доказательства остается заметить, что элемент h_2 является Z -весовым вектором, а линейной оболочкой его S -орбиты является пространство L .

5.8. Зафиксируем в пространстве L базис t_1, t_2, t_3 . Тогда из (15) и (16) следует, что $k[V] = k[V]^S[t_1, t_2, t_3]$ и, значит, по предложению 1

$$k[V] = k[t_1, t_2, t_3, f_1, f_2]. \quad (20)$$

Покажем, что в правой части равенства (20) можно убрать либо f_1 , либо f_2 , сохраняя это равенство. Поскольку линейная оболочка множества t_1, t_2, t_3, f_i четырехмерна и по предложениям 1 и 2 G -инварианта, это завершит доказательство теоремы 2 в рассматриваемом случае (см. п. 5.5).

5.9. Пусть h – однородная образующая (степени 2) алгебры $k[V_2]^S$. Поскольку группа S связна и полупроста, простые множители любого элемента из $k[V_2]^S$ в факториальном кольце $k[V_2]$ содержатся в $k[V_2]^S$. Отсюда следует, что для любой константы $\alpha \in k$ полином $h + \alpha$ является простым элементом кольца $k[V_2]$.

Ввиду (14), (15) можно отождествить алгебру $k[V_2]$ с подалгеброй алгебры $k[V]$, порожденной подпространством L , и при этом отождествлении для любой константы $\alpha \in k$ полином $h + \alpha$ также является простым элементом факториального кольца $k[V]$.

Из определения элементов t_1, t_2, t_3 вытекает, что

$$h \in k[t_1, t_2, t_3]. \quad (21)$$

Поскольку элемент h однороден, предложение 2 показывает, что элемент h содержится в некоторой изотипной компоненте Z -модуля $k[V]^S$. Значит, по предложению 1

$$h = f_1^{b_1} f_2^{b_2} (\alpha_n (f_1^{a_1} f_2^{a_2})^n + \alpha_{n-1} (f_1^{a_1} f_2^{a_2})^{n-1} + \dots + \alpha_0) \quad (22)$$

для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $(b_1, b_2), (a_1, a_2) \in \mathbb{N}^2$, $\alpha_i \in k$, $\alpha_n \neq 0$.

Поскольку элемент $h + \alpha$ прост для любой константы $\alpha \in k$, а f_1, f_2 – непостоянные элементы алгебры $k[V]$, из (22) следует, что имеет место один из следующих случаев:

- (i) $b_1 = 1, b_2 = 0, n = 0$;
- (ii) $b_1 = 0, b_2 = 1, n = 0$;
- (iii) $b_1 = 0, b_2 = 0, n = 1, a_1 = 1, a_2 = 0$;
- (iv) $b_1 = 0, b_2 = 0, n = 1, a_1 = 0, a_2 = 1$.

Ввиду (21) и (22) в случаях (i) и (iii) мы имеем включение $f_1 \in k[t_1, t_2, t_3]$, а в случаях (ii) и (iv) – включение $f_2 \in k[t_1, t_2, t_3]$. Это завершает доказательство теоремы 2 в случае $(S, V) = (\mathrm{SL}_2(k), V_2 \oplus V_0)$.

§ 6. Доказательство теоремы 3: последний шаг

6.1. Рассмотрим последний оставшийся случай

$$(S, V) = (\mathrm{SL}_2(k), V_1 \oplus V_1). \quad (23)$$

6.2. Из (23) следует, что $V//S = \mathbb{A}^1$. Значит, есть лишь две возможности: либо в многообразии $V//S$ имеется открытая плотная Z -орбита, либо тор Z действует на многообразии $V//S$ тривиально.

Если имеет место первая возможность, то фактор $V//G = (V//S)//Z$ является точкой, и утверждение теоремы 2 следует из теоремы 4. Остается рассмотреть вторую возможность.

6.3. Итак, предположим, что тор Z действует тривиально на факторе $V//S$. Тогда каждый слой морфизма $\pi_{V,S}$ инвариантен относительно Z и

$$V//G = (V//S)//Z = (V//Z)//S = \mathbb{A}^1. \quad (24)$$

6.4. S -стабилизатор точки общего положения в пространстве V тривиален и тор S действует транзитивно на слое общего положения F морфизма $\pi_{V,S}$. Поэтому существует изоморфизм S -многообразий

$$F \simeq \mathrm{SL}_2(k) \quad (25)$$

(группа $S = \mathrm{SL}_2(k)$ действует на многообразии из правой части формулы (25) с помощью левых сдвигов).

Поскольку группа S транзитивно действует на многообразии F и это действие коммутирует с действием группы Z , все Z -орбиты в F имеют одинаковую размерность, равную, скажем, d . В частности, все они замкнуты в V . Ввиду п. 4.2 мы имеем $d \geq 1$.

Таким образом, Z -орбита общего положения в пространстве V замкнута и имеет размерность d . Поэтому

$$\dim V//Z = 4 - d. \quad (26)$$

6.5. Пусть D – слой общего положения морфизма $\pi_{V//Z,S}$. Из (24) и (26) следует, что

$$\dim D = 3 - d. \quad (27)$$

Согласно общим свойствам категорных факторов многообразие D содержит единственную замкнутую S -орбиту. Она аффинна и ввиду (27) имеет размерность, не превосходящую 2. Поскольку не существует одномерных аффинных однородных пространств группы SL_2 , это показывает, что D является либо точкой, либо поверхностью.

6.6. Если имеет место первый случай, то $d = 3$. Поскольку $\dim F = 3$, это означает, что группа Z действует на слое F транзитивно. Из того, что Z – тор, следует, что алгебраическое многообразие F изоморфно $\mathbb{A}_*^3 := \mathbb{A}_* \times \mathbb{A}_* \times \mathbb{A}_*$, где $\mathbb{A}_* = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Но это противоречит (25), поскольку $k[\mathbb{A}_*^3]^\times \neq k^\times$, а $k[\mathrm{SL}_2(k)]^\times = k^\times$ (см. [30]). Значит, этот случай невозможен.

6.7. Итак,

$$d = 1. \quad (28)$$

Поскольку для любого действия редуктивной алгебраической группы на гладком неприводимом аффинном алгебраическом многообразии стабилизаторы точек общего положения сопряжены, из эффективности действия тора Z на пространстве V (см п. 4.2) следует, что Z -стабилизатор точки общего положения в пространстве V тривиален. Отсюда и из (28) вытекает, что

$$\dim Z = 1. \quad (29)$$

6.8. Мы можем (и будем) отождествлять S -многообразие V с пространством $\mathrm{Mat}_{2 \times 2}(k)$ всех матриц размера 2×2 с коэффициентами из поля k , на котором группа $S = \mathrm{SL}_2(k)$ действует левыми умножениями.

Пусть x_{pq} , $1 \leq p, q \leq 2$, – стандартная pq -я координатная функция на пространстве V , т.е.

$$x_{pq}(v) = a_{pq}, \quad v = [a_{ij}] := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Тогда

$$k[V]^S = k[\det], \quad \det = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}. \quad (31)$$

Слоями морфизма $\pi_{V,S}$ являются гиперповерхности $F_c := \{v \in V \mid \det(v) = c\}$, $c \in k$. Они G -инвариантны. Если $c \neq 0$, то действие группы S на слое F_c транзитивно, а S -стабилизатор точки из этого слоя тривиален.

Рассмотрим также действие группы $S = \mathrm{SL}_2(k)$ на пространстве $V = \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(k)$ с помощью правых умножений. Оно коммутирует с исходным действием. Поскольку $\det(ab) = \det(a)\det(b)$ для любых матриц $a, b \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(k)$, каждый слой F_c инвариантен также и относительно этого действия группы S .

6.9. Отсюда и из теоремы 6 вытекает, что для любого элемента $c \in k$, $c \neq 0$, существует такой гомоморфизм

$$\lambda_c: Z \longrightarrow \mathrm{SL}_2(k),$$

что действие группы Z на слое F_c пропускается через λ_c , т.е.

$$z \cdot v = v\lambda_c(z), \quad z \in Z, \quad v \in F_c \quad (32)$$

(в правой части (32) рассматривается обычное матричное умножение).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Гомоморфизмы λ_c и их зависимость от параметра c являются алгебраическими, т.е. отображение*

$$\lambda: Z \times \mathbb{A}_* \longrightarrow \mathrm{SL}_2(k), \quad (z, c) \mapsto \lambda_c(z), \quad (33)$$

является морфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Открытое множество $\Omega := V \setminus F_0$ инвариантно относительно группы G . Ввиду (32) отображение

$$\alpha: Z \times \Omega \longrightarrow \Omega, \quad (z, v) \mapsto v\lambda_{\det(v)}(z), \quad (34)$$

является морфизмом, определяющим действие тора Z на множестве Ω . Так как в (34) мы имеем $\det(v) \neq 0$, то $\lambda_{\det(v)}(z) = v^{-1}\alpha((z, v))$, откуда следует, что отображение

$$\beta: Z \times \Omega \longrightarrow \mathrm{SL}_2(k), \quad (z, v) \mapsto \lambda_{\det(v)}(z), \quad (35)$$

является морфизмом.

Теперь рассмотрим действие группы S на многообразии $Z \times \Omega$ через второй сомножитель. Мы имеем

$$\pi_{Z \times \Omega, S}: Z \times \Omega \longrightarrow Z \times \mathbb{A}_*, \quad (z, v) \mapsto (z, \det(v)). \quad (36)$$

Из (35) и (36) следует, что морфизм β постоянен на каждом слое морфизма $\pi_{Z \times \Omega, S}$. Поэтому ввиду определяющего свойства категорного фактора существует такой морфизм $\gamma: Z \times \mathbb{A}_* \longrightarrow \mathrm{SL}_2(k)$, что $\beta = \gamma \circ \pi_{Z \times \Omega, S}$. С другой стороны, ясно, что $\beta = \lambda \circ \pi_{Z \times \Omega, S}$. Это показывает, что $\lambda = \gamma$. Следовательно, λ – морфизм.

6.10. Пусть s – стандартная координатная функция на прямой $\mathbb{A}^1$, т.е. $s(c) = c$, $c \in \mathbb{A}^1$. Зафиксируем образующую t группы характеров тора Z . Тогда

$$k[\mathbb{A}^1] = k[s], \quad k[\mathbb{A}_*] = k[s, s^{-1}], \quad k[Z] = k[t, t^{-1}]. \quad (37)$$

Пусть y_1 и y_2 – переменные. Из (37) и предложения 3 следует, что существуют такие рациональные функции

$$f_{ij} = f_{ij}(y_1, y_2) \in k[y_1, y_1^{-1}, y_2, y_2^{-1}], \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad (38)$$

что в обозначениях (30) морфизм λ определен формулой

$$\lambda((z, c)) = [f_{ij}(t(z), c)], \quad (z, c) \in Z \times \mathbb{A}_*. \quad (39)$$

Теперь из (33), (34) и (39) следует, что морфизм α определен формулой

$$\alpha((z, v)) = [x_{ij}(v)][f_{ij}(t(z), \det(v))], \quad (z, v) \in Z \times \Omega. \quad (40)$$

6.11. Поскольку морфизм α является ограничением на множество $Z \times \Omega$ морфизма $Z \times V \longrightarrow V$, определяющего действие тора Z на пространстве V , а множество $Z \times \Omega$ открыто в многообразии $Z \times V$, из (40) следует, что все элементы матрицы $[x_{ij}][f_{ij}(t, \det)] \in \mathrm{SL}_2(k[Z \times \Omega])$ являются не просто рациональными, а регулярными функциями на многообразии $Z \times V$, т.е.

$$\begin{aligned} x_{i1}f_{1j}(t, \det) + x_{i2}f_{2j}(t, \det) &\in k[t, t^{-1}, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}] = k[Z \times V], \\ 1 \leq i, j \leq 2. \end{aligned} \quad (41)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $f_{ij} \in k[y_1, y_1^{-1}, y_2]$, $1 \leq i, j \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать от противного. Пусть, например, $f_{1j} \notin k[y_1, y_1^{-1}, y_2]$. Тогда ввиду (38)

$$f_{1j}(t, \det) = \det^n(p_0 + p_1 \det + p_2 \det^2 + \dots), \quad p_i \in k[t, t^{-1}], \quad p_0 \neq 0, \quad (42)$$

$$f_{2j}(t, \det) = \det^l(q_0 + q_1 \det + q_2 \det^2 + \dots), \quad q_i \in k[t, t^{-1}], \quad q_0 \neq 0, \quad (43)$$

для некоторых целых чисел n и l . Пусть $m = \min\{n, l\}$. Из (42) и (43) следует, что существует такой элемент $h \in k[Z \times V]$, что левая часть включения (41) равна

$$f := \det^m(r + h \det), \quad r = x_{i1}p_0 \det^{n-m} + x_{i2}q_0 \det^{l-m}. \quad (44)$$

Поскольку числа $n - m$ и $l - m$ неотрицательны, то $r \in k[Z \times V]$. Так как хоть одно из них равно нулю, из (31) и (44) следует, что ограничение функции r на множество $Z \times F_0$ отлично от нуля. Отсюда и из (44) вытекает, что функция f имеет на множестве $Z \times F_0$ полюс. Это противоречит (41).

6.12. Итак, поскольку множество $Z \times \Omega$ открыто в многообразии $Z \times V$, мы установили, что действие тора Z на пространстве V задается формулой

$$z \cdot v = v[f_{ij}(t(z), \det(v))], \quad z \in Z, \quad v \in V \quad (45)$$

(по предложению 4 правая часть равенства (45) определена в *любой* точке $(z, v) \in Z \times V$).

6.13. Мы можем рассматривать отображение (33) как гомоморфизм групповых схем $\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{SL}_2$, определенный над кольцом $k[\mathbb{A}_*] = k[s, s^{-1}]$ (см. (37)). Поскольку тор Z действует на пространстве V с тривиальным ядром, этот гомоморфизм инъективен. Из (39) и предложения 4 следует, что в действительности он определен над кольцом $k[\mathbb{A}^1] = k[s]$. Воспользуемся теперь следующим утверждением.

ЛЕММА 1. Пусть A – факториальное кольцо и $\varphi: \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{SL}_2$ – инъективный гомоморфизм групповых схем, определенный над кольцом A . Тогда образ T гомоморфизма φ сопряжен с помощью элемента из группы $\mathrm{SL}_2(A)$ диагональному тору.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – образующая группы характеров тора $\mathbb{G}_m$. Тогда гомоморфизм φ задается матрицей $r = r(x) \in \mathrm{SL}_2(A[x, x^{-1}])$, т.е. $\varphi(a) = r(x(a))$ для $a \in \mathbb{G}_m$.

Пусть K – поле частных кольца A . Тогда T является максимальным K -расщепимым тором в SL_2 . Следовательно [5], тор T сопряжен с помощью элемента из $\mathrm{SL}_2(K)$ диагональному тору, т.е.

$$r(t) = u \operatorname{diag}(t, t^{-1}) u^{-1}, \quad u = [u_{ij}] \in \mathrm{SL}_2(K). \quad (46)$$

Если b – диагональная матрица из группы $\mathrm{SL}_2(K)$, то равенство (46) по-прежнему будет иметь место, если в его правой части заменить u на ub . Отсюда вытекает, что можно считать, что

$$u_{11} \text{ и } u_{21} \text{ — взаимно простые элементы кольца } A. \quad (47)$$

Поскольку правая часть равенства (46) равна

$$\begin{bmatrix} u_{11}u_{22}t - u_{12}u_{21}t^{-1} & u_{11}u_{12}t^{-1} - u_{11}u_{12}t \\ u_{21}u_{22}t - u_{21}u_{22}t^{-1} & u_{11}u_{22}t^{-1} - u_{12}u_{21}t \end{bmatrix},$$

условие $r \in \mathrm{SL}_2(A[t, t^{-1}])$ показывает, что

$$u_{11}u_{22}, \quad u_{12}u_{21}, \quad u_{11}u_{12}, \quad u_{21}u_{22} \in A. \quad (48)$$

Теперь из (47) и (48) легко вытекает, что $u \in \mathrm{SL}_2(A)$, откуда и следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Групповую схему SL_2 в формулировке леммы 1 нельзя заменить на групповую схему SL_n , $n \geq 3$ [1].

6.14. Из леммы 1 следует, что существуют такие полиномы $u_{ij} = u_{ij}(y) \in k[y]$, $1 \leq i, j \leq 2$, где y – переменная, что $[u_{ij}(s)] \in \mathrm{SL}_2(k[s])$ и

$$[u_{ij}(s)][f_{ij}(t, s)][u_{ij}(s)]^{-1} = \operatorname{diag}(t, t^{-1}). \quad (49)$$

Пусть σ – автоморфизм многообразия V , определенный формулой

$$\sigma: V \longrightarrow V, \quad v \mapsto v[u_{ij}(\det(v))]. \quad (50)$$

Мы имеем $\sigma^{-1}(v) = v[u_{ij}(\det(v))]^{-1}$. Поэтому из (45) и (50) следует, что для любого элемента $z \in Z$, рассмотренного как автоморфизм многообразия V , имеем

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \circ z \circ \sigma: V &\longrightarrow V, \\ v &\mapsto v[u_{ij}(\det(v))][f_{ij}(t(z), \det(v'))][u_{ij}(\det(v''))^{-1}, \end{aligned} \quad (51)$$

где $v' = v[u_{ij}(\det(v))]$, $v'' = v'[u_{ij}(\det(v'))]$.

Поскольку матрица $[u_{ij}(s)]$ унимодулярна, $\det(v'') = \det(v') = \det(v)$. Следовательно, согласно (51) и (49) для любого элемента $z \in Z$ мы имеем

$$\sigma^{-1} \circ z \circ \sigma: V \longrightarrow V, \quad v \mapsto v \operatorname{diag}(t(z), t^{-1}(z)). \quad (52)$$

Формула (52) показывает, что $\sigma^{-1} \circ z \circ \sigma$ — линейный автоморфизм пространства V . Поскольку автоморфизм σ является S -эквивариантным, мы заключаем отсюда, что $\sigma^{-1} \circ g \circ \sigma$ является линейным автоморфизмом пространства V для любого элемента $g \in G$.

Этим завершается доказательство линеаризуемости в рассматриваемом случае, а вместе с ним — и доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. Bass H. Письмо к автору (апрель 11, 1997).
2. Bass H., Haboush W. Linearizing certain reductive group actions // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 292. № 2. P. 463–482.
3. Białynicki-Birula A. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n . I // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astr., Phys. 1967. V. XIV. P. 177–188.
4. Białynicki-Birula A. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n . II // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astr., Phys. 1967. V. XV. P. 123–125.
5. Борель А. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
6. Элашвили А. Г. Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. С. 51–62.
7. Элашвили А. Г. Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. С. 65–78.
8. Горбачев В. В., Онищук А. Л. Группы Ли преобразований // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 20. М.: ВИНТИ, 1988. С. 103–240.
9. Kaliman S., Makar-Limanov L. On the Russell–Koras contactible 3-folds // J. Alg. Geom. 1997. V. 6. P. 247–268.
10. Kaliman S., Makar-Limanov L., Koras M., Russell P. $\mathbb{C}^*$ -actions on $\mathbb{C}^3$ are linearizable // E. Res. Announc. 1997. V. 3. P. 63–71.
11. Kambayashi T. Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space // J. of Algebra. 1979. V. 60. P. 439–451.
12. Kambayashi T., Russell P. On linearizing algebraic torus actions // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23. P. 243–250.
13. Kimura T. A classification of prehomogeneous vector spaces of simple algebraic groups with scalar multiplications // J. Algebra. 1983. V. 83. № 1. P. 72–100.
14. Koras M. A characterization of $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_a$ // Comp. Math. 1993. V. 87. P. 241–267.
15. Koras M., Russell P. $\mathbb{G}_m$ -actions on $\mathbb{A}^3$ // Can. Math. Soc. Conf. Proc. 1989. V. 10. P. 269–276.
16. Koras M., Russell P. $\mathbb{C}^*$ -actions on $\mathbb{C}^3$: the smooth locus is not of hyperbolic type // CICMA reports. 1996. V. 06.
17. Koras M., Russell P. Contractible 3-folds and $\mathbb{C}^*$ -actions on $\mathbb{C}^3$ // J. Alg. Geom. 1997. V. 6. P. 671–695.
18. Kraft H. Challenging problems on affine n -space // Séminaire Bourbaki, 47ème année. 1994–95. V. 802. P. 1–19.
19. Kraft H., Popov V. L. Semisimple group actions on the three-dimensional affine space are linear // Comment. Math. Helvetici. 1985. V. 60. P. 466–479.

20. *Kurth A.* Nonlinear equivariant automorphisms // *Manuscr. Math.* 1997. V. 94. P. 327–335.
21. *Luna D.* Slices étales // *Bull. Soc. Math. France.* 1973. V. 33. P. 81–105.
22. *Masuda M., Petrie T.* Algebraic families of $O(2)$ -actions on affine space $\mathbb{C}^4$ // *Proc. Symp. Pure Math.* 1994. V. 54. № 1. P. 347–354.
23. *Винберг Э. Б., Горбачев В. В., Онищук А. Л.* Строение групп и алгебр Ли // *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* Т. 41. М.: ВИНТИ, 1990.
24. *Панюшев Д. И.* Полупростые группы автоморфизмов четырехмерного аффинного пространства // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1983. Т. 47. № 4. С. 881–894.
25. *Попов В. Л.* Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1970. Т. 34. № 3. С. 523–531.
26. *Попов В. Л.* Классификация трехмерных аффинных алгебраических многообразий, квазиоднородных относительно алгебраической группы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39. № 3. С. 566–609.
27. *Popov V. L.* Algebraic actions of connected reductive algebraic groups on $\mathbb{A}^3$ are linearizable // *Preprint.* June 20, 1996.
28. *Popov V. L.* Polynomial automorphisms of affine spaces: connected reductive subgroups of $\text{Aut } \mathbb{A}^3$ and $\text{Aut } \mathbb{A}^4$ // *Preprint.* December 25, 1997.
29. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–314.
30. *Rosenlicht M.* Toroidal algebraic groups // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1961. V. 12. P. 984–988.
31. *Sato M., Kimura T.* A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants // *Nagoya Math. J.* 1977. V. 65. P. 1–155.
32. *Shafarevich I. R.* On some infinite dimensional algebraic groups // *Rend. Math. e Appl.* 1966. V. 25. № 2. P. 208–212.

Московский государственный институт
электроники и математики,
Большой Трехсвятительский пер., 3/12,
Москва, 109028, Россия
E-mail: popov@ppc.msk.ru

Поступило в редакцию
6.III.2000