Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Родионов, Аналогии теорем Хаусдорфа–Юнга и Харди–Литтлвуда, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 175–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:37:01

УДК 517.518

Т. В. Родионов

Аналоги теорем Хаусдорфа–Юнга и Харди–Литтлвуда

Изучаются разложения функций из пространств L^p по системам, подобным ортогональным. Получены оценки коэффициентов разложений L^p -функций и условия на коэффициенты, достаточные, чтобы соответствующее разложение сходилось в L^p к некоторой функции. Эти результаты являются аналогами известных в теории тригонометрических и ортогональных рядов теорем Хаусдорфа–Юнга–Рисса и Харди–Литтлвуда–Пэли. Показано, что даже в случае ортогональных систем получаются оценки, являющиеся точнее классических.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Хорошо известно характеристическое свойство полных ортонормированных систем (ПОНС) $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве – равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2,$$

связывающее норму f и коэффициенты Фурье $\hat{f}_k = (f, \varphi_k)$. Известны оценки – аналоги этого равенства, связывающие L^p -норму функции f и суммы некоторых степеней коэффициентов.

Для тригонометрической системы такие оценки получил Ф. Хаусдорф в 1923 г. (см. [1], [2, с. 153], [3, с. 172]), а ранее (1912–1913 гг.), для некоторых специальных значений p , У. Юнг [4], [5]. Ф. Рисс обобщил их на равномерно ограниченные ортонормированные системы (ОНС) [6], [7, с. 237], [2, с. 154].

ТЕОРЕМА А (Ф. Рисс, 1923 г.). Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такая ОНС на отрезке $[a, b]$, что $|\varphi_k(x)| \leq M$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in [a, b]$. Тогда:

1) если $1 \leq p \leq 2$ и $f \in L^p[a, b]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^q \right)^{1/q} \leq M^{\frac{q-2}{q}} \|f\|_p,$$

где $1/p + 1/q = 1$;

2) если $2 \leq p \leq \infty$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$I_q(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} < \infty,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 99-01-00354, № 00-15-96143).

где $1/p + 1/q = 1$, то существует такая функция $f \in L^p[a, b]$, что $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ в $L^p[a, b]$, $\hat{f}_k = a_k$ при $k \in \mathbb{N}$ и

$$\|f\|_p \leq M^{\frac{2-q}{q}} I_q(a).$$

Оценки, где не участвует число q , но появляется множитель k^{p-2} , получены для тригонометрической системы в 1926 г. Г. Харди и Дж. Литтлвудом [8], [2, с. 165], [3, с. 215] и перенесены на равномерно ограниченные ОНС Р. Пэли [9], [7, с. 245], [2, с. 182].

ТЕОРЕМА В (Р. Пэли, 1931 г.). Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — такая ОНС на отрезке $[a, b]$, что $|\varphi_k(x)| \leq M$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in [a, b]$. Тогда:

1) если $1 < p \leq 2$ и $f \in L^p[a, b]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^p k^{p-2} \right)^{1/p} \leq A_1(p) M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_p;$$

2) если $2 \leq p < \infty$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$J_p(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p k^{p-2} \right)^{1/p} < \infty,$$

то существует такая функция $f \in L^p[a, b]$, что $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ в $L^p[a, b]$, $\hat{f}_k = a_k$ при $k \in \mathbb{N}$ и

$$\|f\|_p \leq A_2(p) M^{\frac{p-2}{p}} J_p(a).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Множитель k^{p-2} можно заменить на u_k^{p-2} , если взять такую последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел, что

$$\sum_{u_k > z} u_k^{-2} \leq B/z$$

для любых $z > 0$ [3, с. 217].

В теоремах А и В требовалось, чтобы составляющие ОНС функции лежали в пространстве $L^\infty[a, b]$ и удовлетворяли условию $\|\varphi_k\|_\infty \leq M$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Два следующих результата принадлежат Марцинкевичу и Зигмунду [10] и дают интересные оценки в случае ОНС $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset L^r[a, b]$, $2 < r \leq \infty$.

ТЕОРЕМА С. Пусть $\|\varphi_k\|_r \leq M_k$ для некоторого $r \in (2, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, и пусть p и q связаны равенством $s/p + (2-s)/q = 1$, где $1/r + 1/s = 1$. Тогда:

1) если $s \leq p \leq 2$ и $f \in L^p[a, b]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^q M_k^{2-q} \right)^{1/q} \leq \|f\|_p,$$

или $\sup_{k \in \mathbb{N}} |\hat{f}_k| \leq \|f\|_p$ в случае $q = \infty$;

2) если $2 \leq p \leq r$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$I_q(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q M_k^{2-q} \right)^{1/q} < \infty,$$

то существует такая функция $f \in L^p[a, b]$, что $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ в $L^p[a, b]$ и $\|f\|_p \leq I_q(a)$.

ТЕОРЕМА D. Пусть $\|\varphi_k\|_r \leq M_k$ для некоторого $r \in (2, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, причем $M_1 \leq M_2 \leq \dots$. Тогда:

1) если $s < p \leq 2$, где $1/r + 1/s = 1$, а $f \in L^p[a, b]$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^p k^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}} M_k^{(p-2)\frac{r}{r-2}} \right)^{1/p} \leq A_1(r, p) \|f\|_p;$$

2) если $2 \leq p < r$ и для последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет место оценка

$$J_{r,p}(a) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p k^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}} M_k^{(p-2)\frac{r}{r-2}} \right)^{1/p} < \infty,$$

то существует такая функция $f \in L^p[a, b]$, что $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ в $L^p[a, b]$ и $\|f\|_p \leq A_2(r, p) J_{r,p}(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ (П. Буллен, 1961 г.). Условие монотонности последовательности $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно заменить на более слабое условие:

$$\max_{a^i+1 \leq k \leq a^{i+1}} M_k \leq D \min_{a^j+1 \leq k \leq a^{j+1}} M_k$$

при любых $i < j$ и некоторых фиксированных $a > 1$ и $D > 0$ [11].

Теоремы типа Хаусдорфа–Юнга–Рисса формулировались и для некоторых конкретных неортогональных систем функций. В работе [12] рассмотрена неортогональная в $L^2[0, 2\pi]$ система экспонент

$$\{\exp(i\kappa_n x)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (1)$$

где $\kappa_{-n} = -\kappa_n$ при $n \in \mathbb{N}$, $0 = \kappa_0 < \kappa_1 < \dots$ – неотрицательные корни уравнения $x + h \operatorname{tg} \pi x = 0$, $h > 0$ – фиксированное число. Для нее указан следующий аналог теоремы A.

ТЕОРЕМА E (С. Верблюнский, 1954 г.). Пусть $\lambda_n = \frac{1}{2} \frac{h^2 + \kappa_n^2}{h + \pi(h^2 + \kappa_n^2)}$ при $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-i\kappa_n x) dx$ для $n \in \mathbb{Z}$. Тогда:

1) если $1 < p \leq 2$ и $f \in L^p[a, b]$, то

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n |c_n(f)|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|_p,$$

где $1/p + 1/q = 1$;

2) если $2 \leq p < \infty$ и последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, такая что $a_{-n} = \overline{a_n}$, удовлетворяет условию

$$I'_q(a) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n |a_n|^q \right)^{1/q} < \infty,$$

где $1/p + 1/q = 1$, то существует такая функция $f \in L^p[a, b]$, что $c_n(f) = a_n$ и $\|f\|_p \leq I'_q(a)$.

Целью настоящей работы является получение аналогов теорем C и D для систем разложения, подобных ортогональным (ортоподобным системам), изучение которых было начато в [13].

Необходимые определения и обозначения вводятся в § 1. Основные результаты приводятся в § 2. В § 3 мы переформулируем их для счетных ортоподобных систем, в частности полных ОНС (ПОНС), и увидим, что в этом случае наши результаты не только охватывают все теоремы и замечания, приведенные выше, но обобщают и уточняют их. Вспомогательные утверждения и большая часть доказательств вынесены в § 4.

§ 1. Определения и обозначения

В работе [13] дано следующее определение системы разложения, подобной ортогональной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Ω – пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой μ , H – действительное или комплексное гильбертово пространство. Система $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ элементов H называется *системой разложения, подобной ортогональной, с неотрицательной мерой (ортоподобной неотрицательной системой разложения)*, если

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega)$$

для любого y из H , где $\hat{y}_\omega = (y, e^\omega)$, а интеграл – собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , причем в последнем случае есть такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k = \Omega$), быть может, зависящее от y и называемое *подходящим* для y , что функция $\hat{y}_\omega e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} \hat{y}_\omega e^\omega d\mu(\omega).$$

Система называется *измеримой*, если для любого $y \in H$ функция $\hat{y}_\omega$ измерима на Ω (подробнее об этом см. [14]). Ортоподобными являются, в частности, все ПОНС и их ортогональные проекции, системы всплесков Габора и Морле (см. [14]). Системы, подобные ортогональным, обладают многими замечательными свойствами, аналогичными свойствам ОНС. Например, имеет место

АНАЛОГ РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ. Для любого $y \in H$

$$\|y\|_H^2 = \int_{\Omega} |\hat{y}_\omega|^2 d\mu(\omega),$$

для любых $y, z \in H$

$$(y, z) = \int_{\Omega} \hat{y}_\omega \overline{\hat{z}_\omega} d\mu(\omega),$$

причем оба интеграла собственные [13], [14].

Формулировки других свойств ортоподобных систем, используемых в доказательствах § 4, приведены там же. Здесь отметим еще, что неортогональная ортоподобная система не может быть и биортогональной, а именно справедлива следующая

ЛЕММА 1. Если ортоподобная система $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega} \in H$ является биортонормальной, т.е. существует такая система ненулевых элементов $\{f_\omega\}_{\omega \in \Omega} \subset H$, что $(f_\rho, e^\omega) = 0$ при $\rho \neq \omega$, то $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ ортогональна.

Доказательство дано в § 4.

Везде далее Ω – счетно-конечное измеримое пространство с неотрицательной мерой μ , $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, где E_j – попарно не пересекающиеся μ -измеримые множества, $\Lambda_k = \bigcup_{j=1}^k E_j$; X – счетно-конечное измеримое пространство с неотрицательной мерой ν ; $c(\omega)$ – комплекснозначная измеримая функция на Ω , $u(\omega)$ – положительная измеримая функция на Ω .

Пусть $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – измеримая система разложения, подобная ортогональной, построенная в гильбертовом пространстве $H = L^2(X, \nu)$ комплекснозначных функций и обладающая следующими свойствами:

1) существуют $r \in (2, \infty]$ и измеримая конечная функция $M(\omega) > 0$ такие, что для почти всех (п.в.) $\omega \in \Omega$

$$\|e^\omega\|_{r, \nu} \leq M(\omega);$$

2) для любого $j \in \mathbb{N}$ из условия $c \in L^2(E_j, \mu)$ следует интегрируемость на E_j функции $c(\omega)e^\omega$, как функции со значениями в H ;

3) функция $b(\omega)e^\omega$ измерима, как функция со значениями в $L^r(X, \nu)$, для любой комплекснозначной функции b , удовлетворяющей условию $b(\omega)M(\omega) \in L^1(\Omega, \mu)$.

Введем аналог частичной суммы ортогонального ряда

$$S_k \equiv \sum_{j=1}^k \int_{E_j} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega).$$

Число s определим равенством¹ $1/r + 1/s = 1$. Положим

$$\begin{aligned} I_p(c) &= \left(\int_{\Omega} |c(\omega)|^p M^{2-p}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ I_\infty(c) &= \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \frac{|c(\omega)|}{M(\omega)}, \\ J_{r,p}(c) &= \left(\int_{\Omega} |c(\omega)|^p u^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{(p-2)\frac{r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/p}, \\ \tilde{J}_{r,p}(c) &= \left(\int_{\Omega} |c(\omega)|^p u^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty. \end{aligned}$$

Определим числа $K(s, p) = 2\left(\frac{2}{2-p} + \frac{s}{p-s}\right)^{1/p}$, $A_1(r, p, B) = K(s, p)B^{\frac{r-1}{r-2} \frac{2-p}{p}}$ для $B > 0$ и $A_2(r, p, B) = A_1\left(r, \frac{p}{p-1}, B\right)$. Для $a > 1$ и $j \in \mathbb{N}$ обозначим

$$F_j^{(a)} = \{\omega \in E_n : a^j + 1 \leq n \leq \max\{a^{j+1}, a^j + 1\}\}.$$

¹Здесь и далее при $r = \infty$ и любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, полагаем $\frac{ar+b}{cr+d} = \frac{a}{c}$.

§ 2. Основные результаты

В начале изучения разложений функций из пространств L^p , $p \neq 2$, по ортоподобной системе $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$, построенной в пространстве L^2 , возникает вопрос о существовании коэффициентов разложения $\hat{f}_\omega$. В нашем случае, когда $e^\omega \in L^r$ для п.в. $\omega \in \Omega$, ответ дает следующая

ЛЕММА 2. *Для любой функции $f \in L^p(X, \nu)$, $s \leq p \leq 2$, п.в. конечна и измерима на Ω функция*

$$\hat{f}_\omega \equiv \int_X f(x) \overline{e^\omega(x)} d\nu(x).$$

Доказательство см. в § 4.

Теперь приведем формулировки двух основных теорем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть p и q связаны равенством $s/p + (2-s)/q = 1$. Тогда:*

- 1) *если $s \leq p \leq 2$ и $f \in L^p(X, \nu)$, то $I_q(\hat{f}) \leq \|f\|_{p, \nu}$;*
- 2) *если $2 \leq p \leq r$ и функция $c(\omega)$ удовлетворяет условию*

$$I_q(c) < \infty, \quad (2)$$

то существует такая функция $f \in L^p(X, \nu)$, что $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$ и

$$\|f\|_{p, \nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p, \nu} \leq I_q(c).$$

Неулучшаемость (в некоторых смыслах) этой теоремы для общих ортоподобных систем следует из неулучшаемости соответствующей теоремы для тригонометрической и ортогональных систем (по этому поводу см. [15, с. 154], [2, с. 156], [3, с. 174, 249, 284]).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $u(\omega)$ удовлетворяет оценке*

$$\int_{\{\omega \in \Omega: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)} \leq \frac{B}{z} \quad \text{для всех } z > 0. \quad (3)$$

Тогда:

- 1) *если $s < p \leq 2$, а $f \in L^p(X, \nu)$, то $J_{r, p}(\hat{f}) \leq A_1(r, p, B)\|f\|_{p, \nu}$;*
- 2) *если $2 \leq p < r$ и для функции $c(\omega)$ имеет место оценка*

$$J_{r, p}(c) < \infty, \quad (4)$$

а функция $u(\omega)$, кроме того, удовлетворяет условию

$$\int_{\Lambda_k} \frac{d\mu(\omega)}{u(\omega)} < \infty \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

то существует такая функция $f \in L^p(X, \nu)$, что $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$ и

$$\|f\|_{p, \nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p, \nu} \leq A_2(r, p, B)J_{r, p}(c).$$

Ранее эти теоремы анонсировались в [16] и [17]. Обе теоремы доказаны в § 4.

Рассмотрим, какие условия, налагаемые отдельно на функцию u и на функцию M , обеспечивают выполнение оценки (3).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $M(\omega) \equiv M$ на Ω и функция $u(\omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{\{\omega \in \Omega: u(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)} \leq \frac{\tilde{B}}{z}, \quad z > 0. \quad (6)$$

Тогда:

1) если $s < p \leq 2$, а $f \in L^p(X, \nu)$, то

$$\tilde{J}_{r,p}(\hat{f}) \leq A_1(r, p, \tilde{B}) M^{\frac{2-p}{p} \frac{r}{r-2}} \|f\|_{p,\nu};$$

2) если же $2 \leq p < r$ и для функции $c(\omega)$ имеет место оценка

$$\tilde{J}_{r,p}(c) < \infty,$$

а функция $u(\omega)$, кроме того, удовлетворяет условию (5), то существует такая функция $f \in L^p(X, \nu)$, что $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$ и

$$\|f\|_{p,\nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p,\nu} \leq A_2(r, p, \tilde{B}) M^{\frac{p-2}{p} \frac{r}{r-2}} \tilde{J}_{r,p}(c).$$

В такой форме результат сообщался в [16].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы видим, что условие (3) выполнено с $B = \tilde{B}$, так как

$$\int_{\{\omega \in \Omega: u(\omega) > z/M^2\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2} \leq \frac{1}{M^2} \frac{B}{z/M^2} = \frac{B}{z}.$$

Теперь, применив теорему 2, получим доказываемое.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция $u(\omega)$ удовлетворяет условию (6) и существуют такие числа $a > 1$, $D_M > 0$, $D_u > 0$, что для всех $i, j \in \mathbb{N}$ из $i < j$ следует

$$\sup_{\omega \in F_i^{(a)}} M(\omega) \leq D_M \inf_{\omega \in F_j^{(a)}} M(\omega) \quad \text{и} \quad \sup_{\omega \in F_i^{(a)}} u(\omega) \leq D_u \inf_{\omega \in F_j^{(a)}} u(\omega),$$

и, кроме того, существует такое $H > 0$, что для любого $j \in \mathbb{N}$ либо

$$\int_{F_j^{(a)}} \frac{d\mu(\omega)}{u(\omega)} \leq H \tilde{B},$$

либо

$$\sup_{\omega \in F_j^{(a)}} M(\omega) \leq \sqrt{H} \inf_{\omega \in F_j^{(a)}} M(\omega).$$

Тогда справедливы оба утверждения теоремы 2 с $B = \tilde{B}(D_u D_M^2 + H)$.

В связи с тем, что мы накладываем на функцию $u(\omega)$ условие (5), может возникнуть вопрос: остается ли верной оценка (3) с большей, быть может, константой B

при переходе от функции $u(\omega)$ к п.в. большей функции $u^*(\omega)$. Ответ утвердительный. Действительно, если $u(\omega) \leq u^*(\omega)$ при п.в. $\omega \in \Omega$, то

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega : 2^k u(\omega) \leq u^*(\omega) < 2^{k+1} u(\omega)\}$$

с точностью до множества меры нуль, и поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\{\omega \in \Omega : u^*(\omega) M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{(u^*)^2(\omega) M^2(\omega)} \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \int_{\{\omega \in \Omega : 2^{k+1} u(\omega) M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega) M^2(\omega)} \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B 2^{k+1}}{z} 2^{-2k} = \frac{B}{z} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k+1} = \frac{4B}{z}. \end{aligned}$$

§ 3. Случай счетной системы

Возьмем счетную ортоподобную, в частности полную ортонормированную, систему $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, для чего положим $\Omega = \mathbb{N}$ и $E_j = \{j\}$, $\mu(E_j) \equiv 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$. При этом требования 2), 3) из § 1 (и условие (5) из § 2) выполняются автоматически, а основное требование 1) принимает следующий вид: существуют $r \in (2, \infty]$ и последовательность $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел такие, что $\|\varphi_k\|_{r,\nu} \leq M_k$. Пусть в этом параграфе $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $S_k = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j$ — частичная сумма;

$$\begin{aligned} I_p(\mathbf{c}) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p M_k^{2-p} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad I_{\infty}(\mathbf{c}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|c_k|}{M_k}; \\ J_{r,p}(\mathbf{c}) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p u_k^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}} M_k^{(p-2)\frac{r}{r-2}} \right)^{1/p}, \\ \tilde{J}_{r,p}(\mathbf{c}) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p u_k^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}} \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty. \end{aligned}$$

Числа s , $A_1(r, p, B)$, $A_2(r, p, B)$ определяются так же, как в § 1. Для $a > 1$ и $j \in \mathbb{N}$ обозначим $G_j^{(a)} = \mathbb{N} \cap [a^j + 1, \max\{a^{j+1}, a^j + 1\}]$.

Далее приведем переформулировки результатов § 2 для $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

ЛЕММА 2'. Для любой функции $f \in L^p(X, \nu)$, $s \leq p \leq 2$, существует $\hat{f}_k \equiv \int_X f(x) \overline{\varphi_k(x)} d\nu(x)$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть p и q связаны равенством $s/p + (2-s)/q = 1$. Тогда:

- 1) если $s \leq p \leq 2$ и $f \in L^p(X, \nu)$, то $I_q(\hat{\mathbf{f}}) \leq \|f\|_{p,\nu}$;
- 2) если $2 \leq p \leq r$ и $I_q(\mathbf{c}) < \infty$, то существует такая функция $f \in L^p(X, \nu)$, что $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$ и

$$\|f\|_{p,\nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p,\nu} \leq I_q(\mathbf{c}).$$

Этот результат практически совпадает с теоремой С, где лишь $X = [a, b]$ и $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – ОНС.

В статье [12] для системы (1) приведен аналог равенства Парсеваля $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n |\hat{f}_n|^2$, из которого в силу результатов работы [14] следует ортоподобность системы (1). Поэтому теорема Е, взятая из [12], будет непосредственным следствием нашей теоремы 1 при $\Omega = \mathbb{Z}$, $E_j = \{-j\} \cup \{j\}$, $j \in \mathbb{N}$, $\mu(\{k\}) = \lambda_k$, $M_k \equiv 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $r = \infty$. Кстати, система (1), будучи ортоподобной, не только не ортогональна, но и не биортогональна, что следует из леммы 1.

ТЕОРЕМА 2'. Пусть последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел удовлетворяет оценке

$$\sum_{u_k M_k^2 > z} \frac{1}{u_k^2 M_k^2} \leq \frac{B}{z} \quad \text{для всех } z > 0. \quad (7)$$

Тогда:

1) если $s < p \leq 2$, а $f \in L^p(X, \nu)$, то

$$J_{r,p}(\hat{\mathbf{f}}) \leq A_1(r, p, B) \|f\|_{p,\nu};$$

2) если $2 \leq p < r$ и $J_{r,p}(\mathbf{c}) < \infty$, то существует такая функция $f \in L^p(X, \nu)$, что $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$ и

$$\|f\|_{p,\nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p,\nu} \leq A_2(r, p, B) J_{r,p}(\mathbf{c}).$$

СЛЕДСТВИЕ 1'. Пусть $M_1 = M_2 = \dots = M$ и последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ положительных чисел удовлетворяет оценке

$$\sum_{u_k > z} \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{\tilde{B}}{z}, \quad z > 0. \quad (8)$$

Тогда:

1) если $s < p \leq 2$, а $f \in L^p(X, \nu)$, то

$$\tilde{J}_{r,p}(\hat{\mathbf{f}}) \leq A_1(r, p, \tilde{B}) M^{\frac{2-p}{p} \frac{r}{r-2}} \|f\|_{p,\nu};$$

2) если $2 \leq p < r$ и $\tilde{J}_{r,p}(\mathbf{c}) < \infty$, то существует такая функция $f \in L^p(X, \nu)$, что $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$ и

$$\|f\|_{p,\nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p,\nu} \leq A_2(r, p, \tilde{B}) M^{\frac{p-2}{p} \frac{r}{r-2}} \tilde{J}_{r,p}(\mathbf{c}).$$

Положив $r = \infty$, мы получим теорему В и замечание к ней.

СЛЕДСТВИЕ 2'. Пусть выполнено (8) и существуют такие числа $a > 1$, $D_M > 0$, $D_u > 0$, что для всех $i, j \in \mathbb{N}$ из $i < j$ следует

$$\max_{k \in G_i^{(a)}} M_k \leq D_M \min_{k \in G_j^{(a)}} M_k \quad \text{и} \quad \max_{k \in G_i^{(a)}} u_k \leq D_u \min_{k \in G_j^{(a)}} u_k,$$

и, кроме того, существует такое $H > 0$, что для любого $j \in \mathbb{N}$ либо

$$\sum_{k \in G_j^{(a)}} \frac{1}{u_k} \leq H \tilde{B},$$

либо

$$\max_{k \in G_j^{(a)}} M_k \leq \sqrt{H} \min_{k \in G_j^{(a)}} M_k.$$

Тогда справедливы оба утверждения теоремы 2' с $B = \tilde{B}(D_u D_M^2 + H)$.

Если в этом утверждении мы положим $u_k = k$ и $X = [a, b]$, то придем к теореме D и замечанию Буллена.

В отличие от теоремы D, теорема 2' позволяет получить более точные оценки при $p < 2$ и менее ограничительные условия при $p > 2$. Например, для $M_k = 2^k$ условие (7) выполнено при $u_k \equiv 1$ вместо обычного $u_k = k$ и с $B = 4/3$ вместо $B = 2$.

Но более интересным является случай немонотонной последовательности $\{M_k\}_{k=1}^\infty$. В работе [18] С.А. Кириллов показал существенность условия монотонности $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ в теореме D, а именно он построил такую ОНС $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset L^\infty[0, 1]$, что для любого $p > 2$ найдется числовая последовательность $\mathbf{c} = \{c_k\}_{k=1}^\infty$, для которой

$$J_p(\mathbf{c}) = \left(\sum_{k=1}^\infty |c_k|^p k^{p-2} M_k^{p-2} \right)^{1/p} < \infty,$$

но L^2 -сумма ряда

$$\sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k \tag{9}$$

не принадлежит $L^p[0, 1]$. Здесь $M_k \asymp 2^{2^{n-1}} k^{-1/2}$ (т.е. существуют такие абсолютные константы C_1 и C_2 , что $C_1 \leq \frac{M_k}{2^{2^{n-1}} k^{-1/2}} \leq C_2$) для $k \in [2^{2^{n-1}}, 2^{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, условие

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} |c_k|^p (2^{2^{n-1}} k^{1/2})^{p-2} < \infty \tag{10}$$

не достаточно для сходимости (9) в L^p . Сама последовательность $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ не монотонна, но можно перейти к монотонной последовательности $M_k^* = \max_{1 \leq j \leq k} M_j = 2^{2^{n-2}}$, $k \in [2^{2^{n-1}}, 2^{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$, и тогда по теореме D достаточным будет условие

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} |c_k|^p (2^{2^{n-2}} k)^{p-2} < \infty, \tag{11}$$

более жесткое, чем (10). С помощью теоремы 2' мы можем установить, что достаточным для сходимости в L^p ряда (9) будет условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} |c_k|^p \left(2^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)2^{n-1}} k^{1-\varepsilon} \right)^{p-2} < \infty, \quad 0 < \varepsilon < 1/2. \quad (12)$$

Для этого следует взять исходную последовательность $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$u_k = C_2^{-2} 2^{(\varepsilon-\frac{1}{2})2^{n-1}} k^{\frac{3}{2}-\varepsilon}, \quad k \in [2^{2^{n-1}}, 2^{2^n}), \quad n \in \mathbb{N},$$

и проверить, что выполнено условие (7). Обозначив $C' = (C_2/C_1)^2$ и $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}: 2^{2^{n+1}} > z\}$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^{2^{n-1}} \leq k < 2^{2^n} \\ u_k M_k^2 > z}} \frac{1}{u_k^2 M_k^2} &\leq C' \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{2^{2^{n-1}} \leq k < 2^{2^n} \\ 2^{(\frac{3}{2}+\varepsilon)2^{n-1}} k^{\frac{1}{2}-\varepsilon} > z}} 2^{-(1+2\varepsilon)2^{n-1}} k^{2\varepsilon-2} \\ &\leq C' \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{k=2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} + \sum_{\substack{2^{2^{n_0-1}} \leq k < 2^{2^{n_0}} \\ 2^{(\frac{3}{2}+\varepsilon)2^{n_0-1}} k^{\frac{1}{2}-\varepsilon} > z}} \right) 2^{-(1+2\varepsilon)2^{n_0-1}} k^{2\varepsilon-2} \equiv C'(S_1 + S_2). \end{aligned}$$

Оценим отдельно S_1 и S_2 :

$$S_1 \leq \frac{1}{1-2\varepsilon} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-2^n} \leq \frac{2}{1-2\varepsilon} 2^{-2^{n_0+1}} < \frac{2(1-2\varepsilon)^{-1}}{z};$$

если $2^{(\frac{5}{2}-\varepsilon)2^{n_0-1}} \leq z$, то $S_2 = 0$, в противном случае

$$S_2 \leq \frac{1}{1-2\varepsilon} 2^{-(1+2\varepsilon)2^{n_0-1}} \left(\frac{2^{(\frac{3}{2}+\varepsilon)2^{n_0-1}}}{z} \right)^2 \leq \frac{(1-2\varepsilon)^{-1}}{z}.$$

Таким образом, условие (7) выполнено с константой $B = 3C'(1-2\varepsilon)^{-1}$. Условие (12) является, естественно, более жестким, чем (10), и приближается к нему при $\varepsilon \rightarrow 1/2 - 0$. Условие (12) является также менее ограничительным, чем (11), к которому стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, $2^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)2^{n-1}} k^{1-\varepsilon} > 2^{2^{n-2}} k$ тогда и только тогда, когда $k < 2^{2^{n-1}}$.

§ 4. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. По определению ортоподобной системы $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ для любого элемента $y \in H$ имеет место равенство

$$y = \int_{\Omega} (y, e^\omega) e^\omega d\mu(\omega).$$

Возьмем произвольное $\rho \in \Omega$; тогда для любого $y \in H$

$$(f_\rho, y) = \int_{\Omega} \overline{(y, e^\omega)} (f_\rho, e^\omega) d\mu(\omega) = (e^\rho, y) (f_\rho, e^\rho) \mu(\{\rho\}).$$

Если $\mu(\{\rho\}) = 0$, то $(f_\rho, y) = 0$ для всех $y \in H$, т.е. $f_\rho = 0$, и приходим к противоречию с условием леммы. Далее поэтому будем считать $\mu(\{\rho\}) \neq 0$ для всех $\rho \in \Omega$. Тогда

$$(f_\rho - (f_\rho, e^\rho) \mu(\{\rho\}) e^\rho, y) = 0$$

для всех $y \in H$, в частности $\|f_\rho - (f_\rho, e^\rho) \mu(\{\rho\}) e^\rho\|^2 = 0$, следовательно, $f_\rho = (f_\rho, e^\rho) \mu(\{\rho\}) e^\rho$ и $(e^\rho, e^\omega) = ((f_\rho, e^\rho) \mu(\{\rho\}))^{-1} (f_\rho, e^\omega) = 0$ для любого $\omega \neq \rho$, что и требовалось доказать.

Перед доказательством леммы 2 сделаем замечание, используемое и в доказательствах основных теорем.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $1 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq \infty$. Представим $f \in L^r$ в виде $f = f_1 + f_2$, где

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| < 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$f_1(x) = f(x) - f_2(x)$. Легко видеть, что $f_1 \in L^{r_1}$, $f_2 \in L^{r_2}$, и поэтому $L^r \subseteq L^{r_1} \oplus L^{r_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для любой функции $f(x) \in L^p(X, \nu)$ имеем $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1 \in L^s(X, \nu)$, $f_2 \in L^2(X, \nu)$. Для п.в. $\omega \in \Omega$

$$|(\hat{f}_1)_\omega| \leq \|f_1\|_{s, \nu} \|e^\omega\|_{r, \nu} < \infty, \quad |(\hat{f}_2)_\omega| \leq \|f_2\|_{2, \nu} \|e^\omega\|_{2, \nu} < \infty,$$

поэтому п.в. конечна функция $\hat{f}_\omega = (\hat{f}_1)_\omega + (\hat{f}_2)_\omega$. Далее, существует последовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ простых функций, сходящихся к f_1 в $L^s(X, \nu)$. Функции f_2 и g_k , $k \in \mathbb{N}$, лежат в $L^2(X, \nu)$, следовательно, $\hat{f}_2$ и $\hat{g}_k$, $k \in \mathbb{N}$, измеримы по определению измеримости ортоподобной системы; $(\hat{g}_k)_\omega \rightarrow (\hat{f}_1)_\omega$, $k \rightarrow \infty$, при п.в. $\omega \in \Omega$ в силу непрерывности скалярного произведения по первому аргументу из $L^s(X, \nu)$ при фиксированном втором из $L^r(X, \nu)$, поэтому $\hat{f}_1$, а следовательно, и $\hat{f}$ измеримы.

ЛЕММА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Если функция f принадлежит $L^p(X, \nu)$, то

$$\|f\|_{p, \nu} = \sup_{\substack{g \in L^q(X, \nu) \\ \|g\|_{q, \nu} \leq 1}} \left| \int_X f(x) \overline{g(x)} d\nu(x) \right|. \quad (13)$$

Элементарное доказательство последней леммы можно найти в [19, с. 223].

В доказательствах используется аналог равенства Парсеваля, приведенный в § 1, а также следующее утверждение из [14].

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ. Пусть

$$y = \int_{\Omega} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega),$$

где интеграл понимается так же, как в определении § 1. Тогда

$$\|y\|^2 \leq \int_{\Omega} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega), \quad (14)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \hat{y}_{\omega}$ п.в. на Ω .

Заметим также, что идея доказательства результатов типа теорем 1 и 2 с помощью интерполяционных теорем принадлежит М. Риссу [20].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Определим на Ω меру α , положив для всякого μ -измеримого множества A

$$\alpha(A) = \int_A M^2(\omega) d\mu(\omega).$$

При этом пространство Ω с мерой α будет σ -конечным.

Для $f \in L^2(X, \nu)$ имеем

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\hat{f}_{\omega}}{M(\omega)} \right|^2 d\alpha(\omega) = \int_{\Omega} |\hat{f}_{\omega}|^2 d\mu(\omega) = \|f\|_{2,\nu}^2$$

в силу аналога равенства Парсеваля для ортоподобных систем. Для $f \in L^s(X, \nu)$ при п.в. $\omega \in \Omega$

$$\left| \frac{\hat{f}_{\omega}}{M(\omega)} \right| = \frac{1}{M(\omega)} \left| \int_X f(x) \overline{e^{\omega}(x)} d\nu(x) \right| \leq \frac{1}{M(\omega)} \|f\|_{s,\nu} \|e^{\omega}\|_{r,\nu} \leq \|f\|_{s,\nu}.$$

Таким образом, можно утверждать, что оператор $T: f \mapsto \hat{f}_{\omega}/M(\omega)$ является линейным отображением $D = L^s(X, \nu) \oplus L^2(X, \nu)$ в $L^0(\Omega, \alpha)$ – в пространство измеримых п.в. конечных функций на Ω , и имеет одновременно тип $(2, 2)$ и тип (s, ∞) с нормами $\|T\|_{(2,2)} = 1$ и $\|T\|_{(s,\infty)} \leq 1$ соответственно. Из этого по теореме М. Рисса о выпуклости (теореме Рисса–Торина [21, с. 202]), учитывая выполнение при $t = 1 - 2/q$ равенств $1/p = (1-t)/2 + t/s$ и $1/q = (1-t)/2$, получаем, что оператор T имеет тип (p, q) и $\|T\|_{(p,q)} \leq 1$. Итак,

$$I_q(\hat{f}) = \|Tf\|_{q,\alpha} \leq \|f\|_{p,\nu},$$

и доказательство п. 1) завершено.

Для $a(\omega) \in L^2(\Lambda_k, \alpha)$ в силу неравенства (14) получаем

$$\left\| \int_{\Lambda_k} M(\omega) a(\omega) e^{\omega} d\mu(\omega) \right\|_{2,\nu}^2 \leq \int_{\Lambda_k} |a(\omega) M(\omega)|^2 d\mu(\omega) = \int_{\Lambda_k} |a(\omega)|^2 d\alpha(\omega) < \infty.$$

Для $a(\omega) \in L^1(\Lambda_k, \alpha)$ имеем

$$\int_{\Lambda_k} \|M(\omega) a(\omega) e^{\omega}\|_{r,\nu} d\mu(\omega) \leq \int_{\Lambda_k} |a(\omega)| \frac{\|e^{\omega}\|_{r,\nu}}{M(\omega)} d\alpha(\omega) \leq \int_{\Lambda_k} |a(\omega)| d\alpha(\omega) < \infty,$$

а отсюда, с учетом свойства 3) системы $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$, получаем интегрируемость функции $M(\omega)a(\omega)e^\omega$ как функции со значениями в $L^r(X, \nu)$ и оценку

$$\left\| \int_{\Lambda_k} M(\omega)a(\omega)e^\omega d\mu(\omega) \right\|_{r, \nu} \leq \|a\|_{L^1(\Lambda_k, \alpha)}.$$

Поэтому оператор $T_k: a(\omega) \mapsto \int_{\Lambda_k} M(\omega)a(\omega)e^\omega d\mu(\omega)$ является линейным отображением $D_k = L^1(\Lambda_k, \alpha) \oplus L^2(\Lambda_k, \alpha)$ в $L^0(X, \nu)$ и имеет одновременно типы $(2, 2)$ и $(1, r)$ с нормами $\|T_k\|_{(2, 2)} \leq 1$ и $\|T_k\|_{(1, r)} \leq 1$ соответственно. Отсюда по теореме М. Рисса о выпуклости, учитывая выполнение при $t = 2/q - 1$ равенств $1/q = (1-t)/2 + t/1$ и $1/p = (1-t)/2 + t/r$, заключаем, что T_k имеет тип (q, p) и $\|T_k\|_{(q, p)} \leq 1$. Поэтому при функции $c(\omega)$, удовлетворяющей условию (2), мы имеем, что $a(\omega) = c(\omega)/M(\omega) \in L^q(\Lambda_k, \alpha)$ и для всех $k \in \mathbb{N}$

$$S_k = \int_{\Lambda_k} c(\omega)e^\omega d\mu(\omega) \in L^p(X, \nu)$$

и $\|S_k\|_{p, \nu} \leq I_q(c)$, а для $m > l$

$$\|S_m - S_l\|_{p, \nu} \leq \left(\sum_{j=l+1}^m \int_{E_j} |c(\omega)|^q M^{2-q}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/q},$$

из чего следует фундаментальность $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ в $L^p(X, \nu)$. Поэтому существует функция $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$, а $\|f\|_{p, \nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p, \nu} \leq I_q(c)$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Определим на Ω меру β , положив для всякого μ -измеримого множества A

$$\beta(A) = \int_A u^{-2\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{-2\frac{r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega).$$

При этом пространство Ω с мерой β будет σ -конечным.

Для $f \in L^2(X, \nu)$

$$\int_{\Omega} |\hat{f}_\omega|^2 u^{2\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{2\frac{r}{r-2}}(\omega) d\beta(\omega) = \int_{\Omega} |\hat{f}_\omega|^2 d\mu(\omega) = \|f\|_{2, \nu}^2$$

в силу аналога равенства Парсеваля для ортоподобных систем. Для $f \in L^s(X, \nu)$ с помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega) |\hat{f}_\omega| &\leq u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega) \|f\|_{s, \nu} \|e^\omega\|_{r, \nu} \\ &\leq u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{2\frac{r-1}{r-2}}(\omega) \|f\|_{s, \nu} \end{aligned}$$

при почти всех $\omega \in \Omega$, откуда с учетом (3) следует, что

$$\beta\left\{\omega \in \Omega: u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega) |\hat{f}_\omega| > y\right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\left\{ \omega \in \Omega : u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega) |\hat{f}_\omega| > y \right\}} u^{2\frac{1-r}{r-2}}(\omega) M^{2\frac{-r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \\
&\leq \int_{\left\{ \omega \in \Omega : u(\omega) M^2(\omega) > (y/\|f\|_{s,\nu})^{\frac{r-2}{r-1}} \right\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^{\frac{2}{r-2}}(\omega) u^2(\omega) M^2(\omega) M^{\frac{4}{r-2}}(\omega)} \\
&\leq \left(\frac{\|f\|_{s,\nu}}{y} \right)^{\frac{2}{r-1}} \int_{\left\{ \omega \in \Omega : u(\omega) M^2(\omega) > (y/\|f\|_{s,\nu})^{\frac{r-2}{r-1}} \right\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega) M^2(\omega)} \\
&\leq \left(\frac{\|f\|_{s,\nu}}{y} \right)^{\frac{2}{r-1}} \left(\frac{\|f\|_{s,\nu}}{y} \right)^{\frac{r-2}{r-1}} B = B \left(\frac{\|f\|_{s,\nu}}{y} \right)^s.
\end{aligned}$$

Таким образом, можно утверждать, что оператор

$$T: f \mapsto u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega) \hat{f}_\omega$$

является линейным отображением $D = L^s(X, \nu) \oplus L^2(X, \nu)$ в $L^0(\Omega, \beta)$ и имеет одновременно слабые типы (s, s) и $(2, 2)$ со слабыми нормами $\|T\|_{(s,s)} \leq B^{1/s}$ и $\|T\|_{(2,2)} = 1$ соответственно. Из этого по интерполяционной теореме Марцинкевича [2, с. 168] получаем, что оператор T имеет тип (p, p) и $\|T\|_{(p,p)} \leq K(s, p) B^{t/s}$, где $t = \frac{r}{r-2} \frac{2-p}{p}$ найдено из равенства $1/p = (1-t)/2 + t/s$. Таким образом,

$$J_{r,p}(\hat{f}) = \|Tf\|_{p,\beta} \leq A_1(r, p, B) \|f\|_{p,\nu},$$

и доказательство п. 1) завершено.

Для $a \in L^2(\Lambda_k, \beta)$ в силу неравенства (14)

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Lambda_k} \frac{a(\omega)}{u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega)} e^\omega d\mu(\omega) \right\|_{2,\nu}^2 &\leq \int_{\Lambda_k} \left| \frac{a(\omega)}{u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega)} \right|^2 d\mu(\omega) = \\
&= \int_{\Lambda_k} |a(\omega)|^2 d\beta(\omega) < \infty.
\end{aligned}$$

Если $a \in L^r(\Lambda_k, \beta)$, то

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_k} \left\| \frac{a(\omega)}{u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega)} e^\omega \right\|_{r,\nu} d\mu(\omega) &\leq \int_{\Lambda_k} \frac{|a(\omega)| M(\omega)}{u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega)} d\mu(\omega) = \\
&= \int_{\Lambda_k} |a(\omega)| u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}+1}(\omega) d\beta(\omega) \leq \\
&\leq \|a\|_{L^r(\Lambda_k, \beta)} \left(\int_{\Lambda_k} u^{s\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{2\frac{r}{r-2}}(\omega) d\beta(\omega) \right)^{1/s} = \\
&= \|a\|_{L^r(\Lambda_k, \beta)} \left(\int_{\Lambda_k} u^{-1}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/s} < \infty
\end{aligned}$$

в силу условия (5). Отсюда, с учетом свойства 3) системы $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$, получаем интегрируемость функции $a(\omega) u^{-\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{-\frac{r}{r-2}}(\omega) e^\omega$ как функции со значениями в $L^r(X, \nu)$ и оценку

$$\left\| \int_{\Lambda_k} \frac{a(\omega)}{u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega)} e^\omega d\mu(\omega) \right\|_{r,\nu} \leq \|a\|_{L^r(\Lambda_k, \beta)} \left(\int_{\Lambda_k} u^{-1}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/s}.$$

Таким образом, можно утверждать, что оператор

$$T_k : a \mapsto \int_{\Lambda_k} \frac{a(\omega)}{u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega)} e^\omega d\mu(\omega)$$

является линейным отображением $D_k = L^2(\Lambda_k, \beta) \oplus L^r(\Lambda_k, \beta)$ в $L^0(X, \nu)$ и имеет одновременно тип $(2, 2)$ с $\|T_k\|_{(2,2)} = 1$ и тип (r, r) с

$$\|T_k\|_{(r,r)} \leq \left(\int_{\Lambda_k} u^{-1}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/s} < \infty.$$

Отсюда по теореме М. Рисса о выпуклости заключаем, что T_k имеет тип (p, p) . Из условия (4) видим, что

$$\int_{\Lambda_k} |c(\omega)|^p u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega) d\beta(\omega) < \infty,$$

и, следовательно, $S_k = T_k(c(\omega) u^{\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2}}(\omega)) \in L^p(X, \nu)$.

Пусть $g \in L^q(X, \nu)$, $\|g\|_{q,\nu} \leq 1$, где $q = \frac{p}{p-1} \in (s, 2]$. Пользуясь линейностью и непрерывностью скалярного произведения по первому аргументу из $L^p(X, \nu)$ при фиксированном втором из $L^q(X, \nu)$, соотношением $(p-2)/p + (q-2)/q = 0$, неравенством Гёльдера и результатами доказанного выше п. 1), примененными к функции g , получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_X S_k(x) \overline{g(x)} d\nu(x) \right| &= \left| \left(\sum_{j=1}^k \int_{E_j} c(\omega) e^\omega d\mu(\omega), g \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^k \int_{E_j} c(\omega) \hat{g}_\omega d\mu(\omega) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^k \int_{E_j} c(\omega) u^{\frac{r-1}{r-2} \frac{p-2}{p}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2} \frac{p-2}{p}}(\omega) \overline{\hat{g}_\omega} u^{\frac{r-1}{r-2} \frac{q-2}{q}}(\omega) M^{\frac{r}{r-2} \frac{q-2}{q}}(\omega) d\mu(\omega) \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^k \int_{E_j} |c(\omega)|^p u^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{(p-2)\frac{r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\sum_{j=1}^k \int_{E_j} |\hat{g}_\omega|^q u^{(q-2)\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{(q-2)\frac{r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/q} \\ &\leq A_1(r, q, B) \left(\sum_{j=1}^k \int_{E_j} |c(\omega)|^p u^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{(p-2)\frac{r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/p} \|g\|_{q,\nu}. \end{aligned}$$

Перейдя в первом и последнем выражениях данной цепочки к верхней грани по всем допустимым g и используя лемму 3, получим

$$\|S_k\|_{p,\nu} \leq A_2(r, p, B) \left(\sum_{j=1}^k \int_{E_j} |c(\omega)|^p u^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{(p-2)\frac{r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/p},$$

а при $m > l$

$$\begin{aligned} \|S_m - S_l\|_{p,\nu} &\leq \\ &\leq A_2(r, p, B) \left(\sum_{j=l+1}^m \int_{E_j} |c(\omega)|^p u^{(p-2)\frac{r-1}{r-2}}(\omega) M^{(p-2)\frac{r}{r-2}}(\omega) d\mu(\omega) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

из чего следует фундаментальность в $L^p(X, \nu)$ последовательности $\{S_k\}_{k=1}^\infty$. Поэтому существует функция $f = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ в $L^p(X, \nu)$ и

$$\|f\|_{p,\nu} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{p,\nu} \leq A_2(r, p, B) J_{r,p}(c),$$

что и требовалось доказать.

Наконец, докажем следствие 2 из теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Возьмем произвольное $z > 0$. Если множество $\{\omega \in \Omega: u(\omega)M^2(\omega) > z\}$ пусто, то интеграл

$$\int_{\{\omega \in \Omega: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)} \quad (15)$$

равен нулю, в противном случае определено число

$$i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \exists \omega_{0,i} \in F_i^{(a)}: u(\omega_{0,i})M^2(\omega_{0,i}) > z\}.$$

Тогда для любого $i > i_0$ и всех $\omega \in F_i^{(a)}$ выполнены неравенства $M(\omega) \geq M(\omega_{0,i_0})D_M^{-1}$ и $u(\omega) \geq u(\omega_{0,i_0})D_u^{-1} > zD_u^{-1}M^{-2}(\omega_{0,i_0})$, поэтому интеграл (15) можно представить в виде

$$\sum_{i=i_0+1}^\infty \int_{\{\omega \in F_i^{(a)}: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)} + \int_{\{\omega \in F_{i_0}^{(a)}: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)}.$$

Оценим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_0+1}^\infty \int_{\{\omega \in F_i^{(a)}: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)} &\leq \frac{D_M^2}{M^2(\omega_{0,i_0})} \sum_{i=i_0+1}^\infty \int_{F_i^{(a)}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)} \\ &\leq \frac{D_M^2}{M^2(\omega_{0,i_0})} \int_{\{\omega \in \Omega: u(\omega) > zD_u^{-1}M^{-2}(\omega_{0,i_0})\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)} \leq \frac{\tilde{B}D_u D_M^2}{z}, \end{aligned}$$

а теперь второе: либо

$$\int_{\{\omega \in F_{i_0}^{(a)}: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)} \leq \frac{1}{z} \int_{F_{i_0}^{(a)}} \frac{d\mu(\omega)}{u(\omega)} \leq \frac{H\tilde{B}}{z},$$

либо

$$\begin{aligned} \int_{\{\omega \in F_{i_0}^{(a)}: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)} &\leq (\inf M(\omega))^{-2} \\ &\times \int_{\{\omega \in F_{i_0}^{(a)}: u(\omega) > z(\sup M(\omega))^{-2}\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)} \leq \left(\frac{\sup M(\omega)}{\inf M(\omega)} \right)^2 \frac{\tilde{B}}{z} \leq \frac{H\tilde{B}}{z}, \end{aligned}$$

где все верхние и нижние грани берутся по множеству $F_{i_0}^{(a)}$. В итоге имеем

$$\int_{\{\omega \in \Omega: u(\omega)M^2(\omega) > z\}} \frac{d\mu(\omega)}{u^2(\omega)M^2(\omega)} \leq \frac{\tilde{B}(D_u D_M^2 + H)}{z},$$

что позволяет применить теорему 2 и получить доказываемое.

Список литературы

1. Hausdorff F. Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen // Math. Zeit. 1923. В. 16. S. 163–169.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
3. Эдвардс Э. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
4. Young W. H. On the multiplication of successions of Fourier constants // Proc. Royal Soc. Acad. 1912. V. 87. P. 331–339.
5. Young W. H. On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 12. P. 71–88.
6. Riesz F. Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel // Math. Zeit. 1923. В. 18. S. 117–124.
7. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.
8. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some new properties of Fourier constants // Math. Ann. 1926. В. 97. S. 159–209.
9. Paley R. E. A. C. Some theorems on orthogonal functions // Studia Math. 1931. V. 3. P. 226–238.
10. Marcinkiewicz J., Zygmund A. Some theorems on orthogonal systems // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 309–335.
11. Bullen P. S. Properties of the coefficients of orthonormal sequences // Canadian J. Math. 1961. V. 13. № 2. P. 305–315.
12. Verblinsky S. Some theorems on F.A.-series // Rend. Circolo mat. Palermo. 1954. V. 3. № 1. P. 89–105.
13. Лукашенко Т. П. Ортоподобные неотрицательные системы разложения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 1997. № 5. С. 27–31.
14. Лукашенко Т. П. О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 57–72.
15. Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
16. Родионов Т. В. Коэффициенты разложений функций из пространств L^p по ортоподобным системам // Тез. докл. Воронежской зимней матем. школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Воронеж: ВГУ, 1999. С. 170.
17. Родионов Т. В. Аналоги оценок Харди–Литтлвуда–Пэли // Материалы Всероссийской школы-конфер., посв. 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. Казань: Казанск. матем. об-во, 1999. С. 189–190.
18. Кириллов С. А. О теореме Марцинкевича–Зигмунда // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 3. С. 386–390.
19. Hewitt E., Stromberg K. Real and Abstract Analysis. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1975.
20. Riesz M. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires // Acta Math. 1926. V. 49. P. 465–497.
21. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.