Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Скворцов, A -интегрируемые мартингальные последовательности и ряды Уолша, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 193–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:44:02

УДК 517.518.36+519.214.8

В. А. Скворцов

***A*-интегрируемые мартингальные последовательности и ряды Уолша**

В терминах равномерной *A*-интегрируемости мартингальной подпоследовательности частичных сумм ряда Уолша, сходящегося почти всюду к *A*-интегрируемой функции f , формулируется условие, достаточное для того, чтобы этот ряд был рядом *A*-Фурье функции f . Кроме того, доказывается существование ряда Уолша, всюду сходящегося к *A*-интегрируемой функции и не являющегося рядом *A*-Фурье своей суммы.

Библиография: 15 наименований.

Известная теорема из теории мартингалов утверждает, что мартингальная последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$ замкнута справа последним элементом $X_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ тогда и только тогда, когда $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ является равномерно интегрируемой последовательностью (см. [1, с. 300], [2, с. 239] или [3, с. 60]). Условное математическое ожидание в этой теории определяется с помощью интеграла Лебега. Между тем математическое ожидание можно определять и путем применения более общих интегралов. Одно из таких обобщений интеграла Лебега было предложено Колмогоровым в [4], который определил обобщенное математическое ожидание как неабсолютный интеграл, получивший позднее название *A*-интеграла и нашедший применение во многих разделах анализа (см. [5]–[8]). В [9] *A*-интеграл был применен для определения условного математического ожидания и для изучения *A*-интегрируемых мартингалов.

Напомним ряд определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Случайная величина X , определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, называется *A*-интегрируемой на множестве $B \in \mathcal{B}$, если

$$P(\{\omega \in B: |X(\omega)| > C\}) = o(1/C) \quad \text{при } C \rightarrow \infty \quad (1)$$

и если существует конечный предел

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \int_{\{\omega \in B: |X(\omega)| \leq C\}} X dP = I.$$

В этом случае I называется *A*-интегралом величины X на B и обозначается

$$(A) \int_B X dP.$$

Заметим, что если случайная величина X является *A*-интегрируемой на некотором множестве $B \in \mathcal{B}$ и $X(\omega) \geq 0$ п.в. на B , то X также *L*-интегрируема

Работа поддержана РФФИ (гранты № 99-01-00355, 00-15-96143) и грантом Института математики г. Быдгощ, Польша (Institute of Mathematics, WSP, Bydgoszcz, Poland).

и $(A) \int_B X dP = (L) \int_B X dP$. Отсюда следует, что если $\mathcal{F}$ -измеримая случайная величина X (здесь $\mathcal{F}$ является некоторой под- σ -алгеброй алгебры $\mathcal{B}$) A -интегрируема на любом $\mathcal{F}$ -измеримом подмножестве $\mathcal{F}$ -измеримого множества B , то X L -интегрируема на B . В самом деле, пусть $B_+ = \{\omega \in B: X(\omega) \geq 0\}$ и $B_- = \{\omega \in B: X(\omega) < 0\}$. Тогда, поскольку случайная величина X A -интегрируема на B_+ и на B_- , она L -интегрируема на каждом из этих множеств и, тем самым, на B . Мы используем это наблюдение в следующем определении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть случайная величина X A -интегрируема на любом множестве $B \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – под- σ -алгебра алгебры $\mathcal{B}$. *Условным A -математическим ожиданием величины X относительно $\mathcal{F}$* назовем $\mathcal{F}$ -измеримую случайную величину $AE(X|\mathcal{F})$ такую, что для каждого $B \in \mathcal{F}$ выполняется соотношение

$$\int_B AE(X|\mathcal{F}) dP = (A) \int_B X dP. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. A -интегрируемая случайная величина X_∞ называется *последним элементом* мартингальной последовательности $\{X_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$, если $X_n = AE(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Будем также говорить в этом случае, что X_∞ *замыкает мартингальную последовательность справа*.

Мы опустили букву A перед левой частью в (2) в связи с упомянутым выше наблюдением, имея в виду, что здесь интеграл можно понимать в смысле Лебега.

Из того же наблюдения следует, что использование A -интеграла в определении мартингальной последовательности приводит к существенному обобщению только для последнего элемента и только в том случае, когда каждая σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ является собственным подмножеством σ -алгебры $\mathcal{F}_\infty$, порожденной объединением $\bigcup_n \mathcal{F}_n$. Достаточное условие для того, чтобы мартингальная последовательность была замкнута справа A -интегрируемым последним элементом, получено в [9]. Это условие формулируется в терминах равномерной A -интегрируемости, представляющей собой обобщение на неабсолютный случай понятия равномерной интегрируемости по Лебегу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Семейство случайных величин $\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, определенных на $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ (Γ – некоторое множество индексов), называется *равномерно A -интегрируемым на $B \in \mathcal{B}$* , если множества $D_\gamma(C) = \{\omega \in B: |X_\gamma(\omega)| > C\}$ удовлетворяют условиям: $P(D_\gamma(C)) = o(1/C)$ равномерно относительно γ при $C \rightarrow \infty$ и

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \left| (A) \int_{D_\gamma(C)} X_\gamma dP \right| \longrightarrow 0 \text{ при } C \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА А [9]. Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$ – мартингальная последовательность, почти всюду сходящаяся к случайной величине X_∞ , и пусть последовательность $\{X_n\}$ равномерно A -интегрируема в смысле определения 4 на любом $B \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$. Тогда X_∞ является A -интегрируемой на каждом $B \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ и замыкает справа мартингальную последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$, т.е. $\{X_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots, \infty\}$ – A -интегрируемый мартингал с последним элементом X_∞ , так что $X_n = AE(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Известно (см., например, [10], [11]), что для некоторых ортогональных систем частичные суммы рядов по этим системам или по крайней мере некоторые подпоследовательности частичных сумм образуют мартингальные последовательности. В частности, это верно для системы Уолша.

Напомним, что функции системы Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ на $[0, 1)$ определяются следующим образом (см. [12]). Для точки $x \in [0, 1)$ и чисел $n = 0, 1, 2$ запишем их двоичное разложение: $x = \sum_{j=0}^\infty x_j 2^{-(j+1)}$, $x_j = 0, 1$, $n = \sum_{j=0}^\infty \varepsilon_j 2^j$, $\varepsilon_j = 0, 1$, причем для двоично-рациональных точек будем использовать лишь их конечные разложения. Тогда функции Уолша определяются равенством

$$w_n(x) = (-1)^{\sum_{j=0}^\infty \varepsilon_j x_j}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В соответствии с этим определением $w_0(x) = 1$ при всех $x \in [0, 1)$, а при $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, функции w_n принимают постоянные значения, равные 1 или -1 на полуоткрытых двоичных интервалах вида

$$\Delta_i^k = \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k} \right), \quad 0 \leq i \leq 2^k - 1.$$

Эти интервалы при фиксированных k и при всех $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ будем называть *интервалами ранга k* . Через Δ^k будем обозначать произвольный из интервалов ранга k .

Заметим, что

$$\int_{\Delta^k} w_n(x) dx = 0 \quad \text{при } n \geq 2^k. \quad (3)$$

Подпоследовательность S_{2^n} частных сумм любого ряда Уолша является мартингальной последовательностью $\{S_n, \mathcal{F}_n\}$, где σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена двоичными интервалами, на которых функции S_{2^n} постоянны.

Связь между теорией мартингалов и теорией рядов Уолша устанавливается следующей теоремой (см. [11]).

ТЕОРЕМА В. *Ряд Уолша является рядом Фурье некоторой функции f тогда и только тогда, когда образованная его частичными суммами мартингальная последовательность $\{S_{2^n}, \mathcal{F}_n\}$ замкнута справа последним элементом f .*

Это утверждение справедливо не только для интеграла Лебега, но также и для многих его обобщений, в частности для А-интеграла.

Объединяя теорему В, сформулированную для А-интеграла, с теоремой А, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть подпоследовательность $\{S_{2^n}\}$ частных сумм ряда Уолша сходится почти всюду к функции f и равномерно А-интегрируема на каждом двоичном интервале Δ . Тогда f А-интегрируема и данный ряд является рядом А-Фурье функции f .*

Таким образом, при указанных условиях коэффициенты ряда Уолша однозначно определяются по своей сумме f как коэффициенты А-Фурье этой функции.

Другим условием, гарантирующим однозначность восстановления коэффициентов ряда Уолша по его сумме, является поточечная сходимость ряда всюду. В этом случае коэффициенты могут быть однозначно восстановлены по сумме ряда при помощи формул Фурье, в которых интеграл понимается в смысле двоичного интеграла Перрона (см. [13]) или в смысле двоичного интеграла Хенстока (см. [14]).

Известно (см. [15]), что для определенного класса рядов Уолша, в частности для рядов с монотонными коэффициентами, из сходимости ряда всюду к A -интегрируемой функции следует, что данный ряд является рядом A -Фурье этой функции. Другими словами, на множестве сумм рядов этого класса указанные выше двоичные интегралы согласуются с A -интегралом.

В связи с этим возникает вопрос: сохраняется ли эта согласованность на классе сумм всех всюду сходящихся рядов Уолша?

Мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос, построив пример ряда Уолша, всюду сходящегося к A -интегрируемой функции и вместе с тем не являющегося рядом A -Фурье этой функции.

Начнем с определения на двоичном интервале $\Delta_0^{2^k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, при каждом $m = 1, \dots, 2^{k-1}$ следующей функции:

$$P_{k,m}(x) = \begin{cases} 2^{2^k+2m}, & x \in \Delta_0^{2^k+2m+k}, \\ 2^{2^k+2m-1}, & x \in \Delta_1^{2^k+2m+k-1}, \\ -2^{2^{k-1}+m}, & x \in \Delta_{2^{2^{k-1}+m-k-1}}^{2^{k-1}+m+k-1}, \\ 0 & \text{в остальных точках интервала } \Delta_0^{2^k-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что для $k = 1, 2, \dots$, $m = 1, \dots, 2^{k-1}$

$$\begin{aligned} \mu\{x \in \Delta_0^{2^k-1} : P_{k,m}(x) = 2^{2^k+2m}\} \\ = \mu\{x : P_{k+1,2m}(x) = -2^{2^k+2m}\} = 2^{-(2^k+2m+k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu\{x \in \Delta_0^{2^k-1} : P_{k,m}(x) = 2^{2^k+2m-1}\} \\ = \mu\{x : P_{k+1,2m-1}(x) = -2^{2^k+2m-1}\} = 2^{-(2^k+2m+k-1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\int_{\Delta_0^{2^k-1}} P_{k,m}(x) dx = 0, \quad (6)$$

$$\int_{\Delta_0^{2^k-1}} |P_{k,m}(x)| dx = \frac{1}{2^{k-2}}. \quad (7)$$

Продолжим функцию $P_{k,m}$ периодически с периодом $|\Delta_0^{2^k-1}|$ на всю действительную ось и положим при $l \geq 0$

$$T_{k,m,l}(x) = P_{k,m}(2^l x), \quad x \in [0, 1). \quad (8)$$

Заметим, что $(0, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_1^k$. В свою очередь, каждый из интервалов Δ_1^k представим в виде

$$\Delta_1^k = \bigcup_{m=1}^{2^{k-1}} \Delta_{2^k-m}^{2^k-1} = \bigcup_{m=1}^{2^{k-1}} \bigcup_{q=1}^{2^{k-1}} \Delta_{2^{2^{k-1}-2^{k-1}(m-1)-q}}^{3^k-2}.$$

Далее обозначим $\Delta(1) = \Delta_1^1$, а для $s \geq 2$ найдем k, m, q из представления

$$s = \sum_{i=1}^{k-1} 2^{2^i-2} + 2^{k-1}(m-1) + q, \quad k \geq 2, \quad 1 \leq q, m \leq 2^{k-1}, \quad (9)$$

и обозначим

$$\triangle(s) = \triangle_{2^{k-1}-2^{k-1}(m-1)-q}^{3k-2}. \quad (10)$$

Таким образом, интервалы $\triangle(s)$ попарно не пересекаются и $\bigcup_{s=1}^{\infty} \triangle(s) = (0, 1)$.

Определим далее функции Q_s для $s = 1, 2, \dots$. Положим

$$Q_1(x) = \begin{cases} T_{1,1,0}(x), & x \in \triangle_1^1, \\ 0, & x \in \triangle_1^0, \end{cases} \quad (11)$$

а для $s \geq 2$, представленного в виде (9), положим

$$Q_s(x) = \begin{cases} T_{k,m,l(s)}(x), & x \in \triangle(s), \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \triangle(s), \end{cases} \quad (12)$$

где $l(s)$ при $s \geq 2$ выбрано так, чтобы период функции $T_{k,m,l(s)}$, равный $2^{-(2k-1+l(s))}$, не превосходил длин интервалов постоянства функции Q_{s-1} .

Из (4), (6), (8) и (11) следует, что

$$\int_0^1 Q_1 dx = 0. \quad (13)$$

Используя (7), (8), (10) и (12), легко получить

$$\int_{\triangle(s)} |Q_s(x)| dx = \frac{1}{2^{k-2}} \cdot \frac{|\triangle^{3k-2}|}{|\triangle^{2k-1}|} = \frac{1}{2^{2k-3}}. \quad (14)$$

Заметим, что в соответствии с определением (11), (12) функции Q_s имеют непесекающиеся носители $\triangle(s)$, причем $[0, 1] = \{0\} \cup \bigcup_{s=1}^{\infty} \triangle(s)$, так что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} Q_s \quad (15)$$

сходится на $[0, 1]$ к функции $f(x) = \begin{cases} Q_s, & x \in \triangle(s), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Докажем теперь, что функция f A -интегрируема и вычислим ее A -интеграл. Из определений (4), (8), (9), (11) и (12) видно, что все ненулевые значения f составляют последовательность

$$\{-2^2, 2^{2^k+p}, -2^{2^k+p}; k = 1, 2, \dots, p = 1, 2, \dots, 2^k\}.$$

При этом, с учетом (5), (8), (11) и (12), имеем

$$\mu(\{x: f(x) = 2^{2^k+p}\}) = \mu(\{x: f(x) = -2^{2^k+p}\}) = 2^{-(2^k+p+k)} \quad (16)$$

при $k = 1, 2, \dots, p = 1, 2, \dots, 2^k$ и

$$\mu(\{x: f(x) = -2^2\}) = 2^{-2}. \quad (17)$$

Возьмем любое $C > 4$ и выберем такие k и p , что

$$2^{2^k+p-1} \leq C < 2^{2^k+p}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 1, 2, \dots, 2^k.$$

Тогда в соответствии с (16)

$$\begin{aligned} \mu(\{x: |f(x)| > C\}) &\leq \mu(\{x: |f(x)| > 2^{2^k+p-1}\}) = \sum_{i=2^k+p}^{\infty} \mu(\{x: |f(x)| = 2^i\}) \\ &\leq 2 \sum_{i=2^k+p}^{\infty} 2^{-(i+k)} = 2^{-(2^k+p+k-2)} \\ &< C^{-1} 2^{2-k} = o(1/C) \quad \text{при } C \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, для f выполняется соотношение (1). Кроме того, согласно (16) и (17) для любого $C > 4$ имеем

$$\int_{\{x: |f(x)| \leq C\}} f = -4\mu(\{x: f(x) = -4\}) = -1.$$

Тем самым доказано, что

$$(A) \int_0^1 f = -1. \quad (18)$$

Пусть r_s – наименьшее из натуральных чисел r таких, что функция Q_s постоянна на всех двоичных интервалах ранга r . Тогда в силу (3) (см. также [12, п. 1.3.2]) Q_s является полиномом по системе Уолша вида

$$Q_s = \sum_{n=p_s}^{2^{r_s}-1} c_n w_n, \quad p_s \geq 0. \quad (19)$$

В силу (6), (8), (12) для каждого интервала ранга $2k - 1 + l(s)$, являющегося периодом функции $T_{k,m,l(s)}$, имеем

$$\int_{\Delta^{2k-1+l(s)}} Q_s dx = 0.$$

Тогда в силу выбора $l(s)$ имеем

$$\int_{\Delta^{r_s-1}} Q_s dx = 0.$$

Поскольку, как отмечалось выше, на интервалах Δ^{r_s-1} принимают постоянное значение функции w_n при $n \leq 2^{r_s-1} - 1$, то при этих n

$$c_n = \int_0^1 Q_s(x) w_n(x) dx = 0.$$

Значит, p_s в (19) удовлетворяет неравенству $p_s > 2^{r_s-1} - 1$. Таким образом, полиномы Q_s при различных s не имеют подобных членов. В силу этого сумма (15) может быть записана в виде ряда по системе Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n, \quad (20)$$

где коэффициенты c_n определяются из (19) при соответствующих значениях s .

Из (13) следует, что у полинома Q_1 , а тем самым у ряда (20)

$$c_0 = 0. \quad (21)$$

Кроме того, для ненулевых коэффициентов полиномов Q_s с учетом (12) и (14) имеем оценку

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \int_0^1 Q_s(x) w_n(x) dx \right| = \left| \int_{\Delta(s)} Q_s(x) w_n(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Delta(s)} |Q_s(x)| dx = \frac{1}{2^{2k-3}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Частичные суммы $S_i = \sum_{n=0}^{i-1} c_n w_n$ ряда (20) обладают свойством: при $x \in \Delta(s)$

$$S_{2^{r_i}}(x) = f(x) = Q_s(x) \quad \text{для всех } i \geq s,$$

где r_i определяются из (19). Таким образом, на $\Delta(s)$ подпоследовательность частичных сумм вида $S_{2^{r_i}}$ сходится к функции $Q_s(x)$. Известно (см. [12, теорема 3.3.3]), что если у ряда Уолша с коэффициентами, стремящимися к нулю, частичные суммы вида $S_{2^{r_i}}$ сходятся к нулю на некотором двоичном интервале, то данный ряд сходится к нулю на этом интервале. Применим это утверждение к двоичному интервалу $\Delta(s)$ и к ряду Уолша, полученному как разность ряда (20) и полинома Q_s . У этого ряда коэффициенты стремятся к нулю вместе с коэффициентами ряда (20) в силу оценки (22), а частичные суммы с номерами $S_{2^{r_i}}$ равны нулю на $\Delta(s)$ при всех $i \geq 3$. Отсюда получаем сходимость ряда (20) к функции $Q_s(x)$ на интервале $\Delta(s)$ при всех $s = 1, 2, \dots$ и тем самым сходимость этого ряда к функции $f(x)$ для всех $x \in (0, 1) = \bigcup_{s=1}^{\infty} \Delta(s)$.

Проверим сходимость ряда (20) в точке $x = 0$. Ясно, что $S_{2^{r_s}}(0) = 0$. Для произвольного n найдем s такое, что $2^{r_s-1} \leq n \leq 2^{r_s} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |S_n(0)| &= |S_n(0) - S_{2^{r_s-1}}(0)| = \left| \int_0^1 Q_s(t) D_n(t) dt \right| = \int_{\Delta(s)} |Q_s(t) D_n(t)| dt \\ &\leq \max_{t \in \Delta(s)} |D_n(t)| \int_{\Delta(s)} |Q_s(t)| dt, \end{aligned} \quad (23)$$

где $D_n(t)$ – ядро Дирихле для системы Уолша.

Для ядра Дирихле имеет место оценка (1.4.14) из [12]:

$$|D_n(t)| \leq 2^{k-1} \quad \text{при } t \in \Delta_1^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку $\Delta(s) \in \Delta_1^k$, то при $t \in \Delta(s)$

$$|D_n(t)| \leq 2^{k-1}.$$

Отсюда, продолжая оценку (23), с учетом (14) получаем

$$S_n(0) \leq \frac{1}{2^{2k-3}} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2^{k-2}},$$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = 0 = f(0)$.

Таким образом, ряд (20) всюду сходится к функции f . Как уже упоминалось выше, каждый всюду сходящийся ряд Уолша является рядом Фурье своей суммы,

если в качестве интеграла в формулах Фурье для коэффициентов ряда использовать двоичный интеграл Хенстока (H_d -интеграл). Поэтому в силу (21) получаем

$$c_0 = (H_d) \int_0^1 f = 0. \quad (24)$$

Сравнивая это равенство с (18), приходим к заключению:

$$(A) \int_0^1 f \neq c_0 = (H_d) \int_0^1 f.$$

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Существует ряд по системе Уолша, который всюду сходится к A -интегрируемой функции и при этом не является рядом A -Фурье этой функции.*

В частности, отсюда вытекает в качестве следствия

ТЕОРЕМА 3. *A -интеграл противоречит H_d -интегралу на классе сумм всюду сходящихся рядов Уолша.*

Конечно, ввиду теоремы 1 такое противоречие может реализоваться лишь на рядах, частичные суммы которых не являются равномерно A -интегрируемыми.

Отметим в заключение, что вопрос о справедливости аналога теоремы 2 для тригонометрической системы остается открытым.

Список литературы

1. *Ash R. B.* Real Analysis and Probability. N. Y.: Academic Press, 1972.
2. *Chow Y. S., Teicher H.* Probability Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 1988.
3. *Loeve M.* Probability Theory. II. N. Y.: Springer-Verlag, 1978.
4. *Колмогоров А. Н.* Основания теории вероятности. М.: Наука, 1998.
5. *Ульянов П. Л.* Применение A -интегрирования к одному классу тригонометрических рядов // Матем. сб. 1954. Т. 35 (71). С. 469–490.
6. *Ульянов П. Л.* A -интеграл и сопряженные функции // Ученые зап. МГУ. Математика. 1956. Т. 181. С. 139–157.
7. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Lee L. P.* Lanzhou Lectures on Henstock Integration. Singapore–New Jersey–London: World Scientific, 1989.
9. *Skvortsov V. A.* Martingale closure theorem for A -integrable martingale sequences // Real Analysis Exchange. 1998–99. V. 24. № 2. P. 815–820.
10. *Gundy R. F.* Martingale theory and positive convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. № 2. P. 228–248.
11. *Скворцов В. А., Костин В. В.* Мартингальные последовательности в теории ортогональных рядов // Вестн. МГУ. Сер. I. 1999. № 6. С. 50–53.
12. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
13. *Скворцов В. А.* О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм // ДАН СССР. 1968. Т. 183. № 6. С. 784–786.
14. *Skvortsov V. A.* Some properties of dyadic derivatives // Lecture notes in Math. 1989. № 1419. P. 167–179.
15. *Рубинштейн А. И.* A -интеграл и ряды по системе Уолша // УМН. 1963. Т. 18. С. 191–197.

Поступило в редакцию
25.V.2000