Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Свойства множества допустимых пар “траектория–управление” эволюционных управляемых систем первого порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 3, 201–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:48:37

УДК 517.988

А. А. Толстоногов

Свойства множества допустимых пар “траектория–управление” эволюционных управляемых систем первого порядка

Рассматривается управляемая система, описываемая эволюционным уравнением первого порядка, определенным на эволюционной тройке банаховых пространств (“тройка Гельфанда”) со смешанным многозначным ограничением на управление, значениями которого являются невыпуклые, замкнутые множества в пространстве управлений. Наряду с исходной системой рассматривается система со следующими ограничениями на управление: ограничение, значениями которого являются замкнутая выпуклая оболочка значений исходного ограничения; ограничение, значениями которого являются экстремальные точки выпукленного ограничения, принадлежащие исходному ограничению. Изучаются топологические свойства множеств допустимых пар “траектория–управление” системы с различными ограничениями и устанавливаются взаимосвязи между ними. Подробно рассмотрен пример нелинейной управляемой параболической системы.

Библиография: 31 наименование.

Введение

В последние двадцать лет интенсивно изучаются топологические свойства множества решений различных классов дифференциальных и эволюционных включений с невыпуклой замкнутой правой частью $F(t, x)$. Подавляющее большинство исследований относится к доказательству плотности множества решений включения с невыпуклой правой частью во множестве решений включения с овыпукленной правой частью $\overline{\text{co}} F(t, x)$, где $\overline{\text{co}} F(t, x)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $F(t, x)$. Обычно это свойство называют *релаксацией*. В последнее время внимание исследователей сосредоточилось на изучении вопросов существования решений включения с правой частью $\text{ext } \overline{\text{co}} F(t, x)$, где $\text{ext } \overline{\text{co}} F(t, x)$ – совокупность всех экстремальных (крайних) точек множества $\overline{\text{co}} F(t, x)$, и плотности множества решений включения с правой частью $\text{ext } \overline{\text{co}} F(t, x)$ во множестве решений включения с овыпукленной правой частью (см. [1]–[7] и др.). Это свойство обычно называют “бэнг–бэнг”-принципом для траекторий. При изучении этих вопросов используются два подхода, один из которых связан с применением теоремы Бэра о категориях [1]–[3], [5], [6], а в основу другого положены теоремы существования и релаксации непрерывных экстремальных селекторов многозначных отображений с разложимыми значениями (см. [4], [7]–[10] и др.). Техника непрерывных экстремальных селекторов является достаточно универсальной и позволяет доказывать “бэнг–бэнг”-принцип не только для обыкновенных дифференциальных включений, но и для многих классов эволюционных включений (см. [4], [10]–[12]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00216).

и др.). Следует заметить, что в общем случае $\text{ext } \overline{\text{co}} F(t, x) \not\subset F(t, x)$ и при доказательстве “бэнг-бэнг”-принципа включение с правой частью $F(t, x)$ по существу остается невостребованным, так как множество $\text{ext } \overline{\text{co}} F(t, x)$ однозначно определяется множеством $\overline{\text{co}} F(t, x)$.

Поэтому более естественным называть “бэнг-бэнг”-принципом плотность множества решений включения с правой частью $\text{ext } \overline{\text{co}} F(t, x) \cap F(t, x)$ во множестве решений включения с овыпукленной правой частью. Эта задача изучалась в [12].

Что же касается управляемых систем, то топологические свойства множества допустимых пар “траектория–управление” не изучались, поскольку существует мнение, что управляемую систему можно свести к включению. Поскольку свойства включений хорошо изучены, то, используя лемму А.Ф. Филиппова [13] о неявной функции и ее различные обобщения (см. [14] и др.), можно снова вернуться к управляемой системе. Однако при таком подходе можно получить только свойства множества допустимых траекторий, а не множества допустимых пар “траектория–управление”. Во многих приложениях, особенно в задачах оптимального управления, принципиальную роль играют свойства множества допустимых пар “траектория–управление”. Более того, управляемые системы являются объектом, более сложным для изучения, чем включения.

В данной работе мы изучаем топологические свойства множества допустимых пар “траектория–управление” следующей управляемой системы.

Пусть $T = [0, 1]$, H – сепарабельное гильбертово пространство, V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в H . Отождествляя H с его топологически сопряженным, мы имеем $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, где V^* – пространство, топологически сопряженное к V . При этом все вложения являются непрерывными, плотными и компактными. Такая тройка пространств обычно называется *эволюционной* или *тройкой Гельфанда*. Пусть Y – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, моделирующее пространство управлений. Мы рассмотрим следующую управляемую систему, описываемую нелинейным эволюционным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= f(t, x(t))u(t) \quad \text{п.в.}, \\ x(0) &= x_0 \in H, \end{aligned} \quad (0.1)$$

со смешанными ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t, x(t)) \quad \text{п.в.}, \quad (0.2)$$

где $A: T \times V \rightarrow V^*$ – нелинейный оператор, $U: T \times H \rightarrow Y$ – многозначное отображение с невыпуклыми замкнутыми значениями, $f: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ – нелинейное отображение, $\mathcal{L}(Y, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов из Y в H .

Наряду с ограничениями (0.2) мы рассмотрим следующие ограничения:

$$u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \quad \text{п.в.}, \quad (0.3)$$

$$u(t) \in U(t, x(t)) \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \quad (0.4)$$

Под решением управляемой системы мы понимаем допустимую пару (x, u) – “траектория–управление”.

В работе изучаются следующие вопросы:

а) существование решений;

- б) компактность множества решений управляемой системы (0.1), (0.3);
- в) плотность множества решений системы (0.1), (0.4) во множестве решений системы (0.1), (0.3);
- г) граничность множества решений систем (0.1), (0.2) и (0.1), (0.4) во множестве решений системы (0.1), (0.3);
- д) необходимые и достаточные условия замкнутости множества решений системы (0.1), (0.2).

Все доказательства базируются на последних результатах в теории непрерывных экстремальных селекторов многозначных отображений с разложимыми значениями [7]–[10].

Подробно рассмотрен пример нелинейной управляемой параболической системы, и для этого примера дана конкретизация абстрактных результатов.

В качестве приложения рассмотрена задача минимизации интегрального функционала на решениях управляемой системы (0.1), (0.3).

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – сепарабельное банахово пространство, $T = [0, 1]$ – отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и σ -алгеброй Σ - μ -измеримых подмножеств из T .

Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения: $c(X)$ – семейство всех непустых замкнутых подмножеств из X , $cb(X)$ – семейство всех непустых замкнутых, ограниченных подмножеств из X , $ccb(X)$ – семейство всех непустых замкнутых, ограниченных, выпуклых подмножеств из X . Для множества $A \subset X$ через $\text{co } A$ обозначается выпуклая оболочка A , а через $\overline{\text{co}} A$ – замкнутая выпуклая оболочка и через $\text{ext } \overline{\text{co}} A$ – множество экстремальных (крайних) точек $\overline{\text{co}} A$.

Пусть $B \subset X$ – замкнутое множество и $A \subset B$.

Множество A называется *граничным множеством множества B* , если $B = \overline{B \setminus A}$, где черта сверху означает замыкание в X .

На множестве $cb(X)$ определим метрику Хаусдорфа

$$D(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}.$$

Многозначное отображение $F: X \rightarrow cb(X)$ называется *D-непрерывным*, если оно является непрерывным из X в $(cb(X), D)$.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow c(X)$ называется *полунепрерывным снизу* по Вьеторису, если для любого открытого множества $E \subset X$ множество $F^{-1}(E) = \{x \in X; F(x) \cap E \neq \emptyset\}$ открыто.

Многозначное отображение $F: T \rightarrow c(X)$ называется *измеримым*, если $F^{-1}(E) = \{t \in T; F(t) \cap E \neq \emptyset\} \in \Sigma$ для любого замкнутого множества $E \subset X$. Если $F: T \times X \rightarrow c(X)$, то измеримость F означает, что $F^{-1}(E) \in \Sigma \times \mathcal{B}_X$, где $\Sigma \times \mathcal{B}_X$ – σ -алгебра подмножеств из $T \times X$, порожденная множествами $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}_X$, и $\mathcal{B}_X$ – σ -алгебра борелевских множеств из X . Эти же определения измеримости мы используем и для однозначных отображений.

Если $F: T \rightarrow c(X)$, то через S_F^p , $1 \leq p < \infty$, мы обозначаем множество всех элементов пространства $L^p(T, X)$, являющихся селекторами отображения $t \rightarrow F(t)$.

Множество $K \subset L^p(T, X)$ называется *равномерно p -интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_E \|f(t)\|^p d\mu < \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$ с $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ и всех $f \in K$.

Пусть $E \in \Sigma$, $\mu(E) > 0$, $t \in T$, $s > 0$. Если

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\mu(E \cap [t-s, t+s])}{2s} = 1 \quad \left(\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\mu(E \cap [t+s])}{s} = 1 \right),$$

то точка t называется *точкой плотности* (*правой плотности*) множества E . Известно, что почти каждая точка $t \in E$ является точкой плотности (правой плотности) E [15].

Пусть (V, H, V^*) – эволюционная тройка пространств. Через $\|\cdot\|$ (соответственно $|\cdot|$, $\|\cdot\|_*$) мы обозначаем норму пространства V (соответственно H, V^*). Под $\langle x, x' \rangle$, $x \in V$, $x' \in V^*$, мы понимаем каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^* , а $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в H . Мы считаем, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ согласованы, т.е. сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $V \times H$ совпадает с $(\cdot, \cdot)$.

Для p , $2 \leq p < \infty$, мы введем следующие пространства:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= L^p(T, V), & \mathcal{H} &= L^p(T, H), & \mathcal{H}^* &= L^q(T, H), \\ \mathcal{V}^* &= L^q(T, V^*), & 1/p + 1/q &= 1, \end{aligned}$$

и пространство $W = \{\nu \in \mathcal{V}; \dot{\nu} \in \mathcal{V}^*\}$, где производная понимается в смысле векторных распределений. Пространство W с нормой $\|\nu\| = (\|\nu\|_V^2 + \|\dot{\nu}\|_{V^*}^2)^{1/2}$ является сепарабельным, рефлексивным, банаховым пространством и $W \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$. Хорошо известно, что пространство W вкладывается в $C(T, H)$ непрерывно. Поэтому любой элемент из W имеет единственное представление в $C(T, H)$. Более того, вложение $W \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно [16]. Билинейную форму, устанавливающую двойственность между $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^*$ и между $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$, мы обозначаем одинаково как

$$\int_T \langle f(t), v(t) \rangle dt, \quad f \in \mathcal{V}, \quad v \in \mathcal{V}^*.$$

Для любого банахового пространства X символ w - X означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ -топологией. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X . Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Решением управляемой системы (0.1), (0.2) мы называем пару (x, u) , состоящую из траектории $x \in W \hookrightarrow C(T, H)$ и управления $u \in L^q(T, Y)$, удовлетворяющих почти всюду уравнению (0.1) и ограничению (0.2). Аналогично определяются решения управляемых систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4). Так как пространство W вкладывается в $C(T, H)$ непрерывно, то начальное условие $x_0 \in H$ имеет смысл.

Через $\mathcal{R}_U(x_0) \subset W \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ мы обозначаем множество всех решений управляемой системы (0.1), (0.2). Под $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ и $\mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0)$ мы понимаем множества решений управляемых систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) соответственно.

§ 2. Вспомогательные результаты

Всюду в дальнейшем сокращение п.в. означает почти всюду. Введем следующие *предположения*:

- $\Gamma(A)$, $A: T \times V \rightarrow V^*$ является оператором таким, что:
 - 1) отображение $t \rightarrow A(t, x)$ измеримо для каждого x ;
 - 2) отображение $x \rightarrow A(t, x)$ монотонно и хеминепрерывно, т.е. $\langle x - y, A(t, x) - A(t, y) \rangle \geq 0$ для любых $x, y \in V$ (монотонность) и для любых $x, y, z \in V$ отображение $\lambda \rightarrow \langle z, A(t, x + \lambda y) \rangle$ является непрерывным на отрезке $[0, 1]$ (хеминепрерывность);
 - 3) $\langle x, A(t, x) \rangle \geq c_1 \|x\|^p$, $c_1 > 0$;
 - 4) $\|A(t, x)\|_* \leq c_2(1 + \|x\|^{p-1})$, $c_2 > 0$;
- $\Gamma(f)$, $f: T \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ является отображением таким, что:
 - 1) отображение $t \rightarrow f(t, x)u$ измеримо для любых $(x, u) \in H \times Y$;
 - 2) отображение $x \rightarrow f(t, x)^*h$ непрерывно п.в. для любых $h \in H$, где $f(t, x)^*$ – оператор, сопряженный к $f(t, x)$;
 - 3) $\|f(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m$, $m > 0$ п.в.;
- $\Gamma(U)$, $U: T \times H \rightarrow cb(Y)$ – многозначное отображение такое, что:
 - 1) отображение $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримо;
 - 2) отображение $x \rightarrow \overline{\text{co}} U(t, x)$ D -непрерывно п.в.;
 - 3) $\|U(t, x)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y; u \in U(t, x)\} \leq a_1(t) + b_1|x|^{2/q}$ п.в., $a_1 \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$, $b_1 > 0$.

Из предположений $\Gamma(U)$ следует, что для каждого $x \in H$ множество $\overline{\text{co}} U(t, x)$ является выпуклым и слабо компактным. Поэтому из теоремы Крейна–Мильмана следует, что $\text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x) \neq \emptyset$. Однако $\text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x) \not\subset U(t, x)$, так как множество $U(t, x)$ не является слабо замкнутым. Тем не менее, $\text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x) \cap U(t, x) \neq \emptyset$. Например, строго выставленные точки множества $\overline{\text{co}} U(t, x)$, которые являются экстремальными, принадлежат $U(t, x) \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x)$ [9]. Следовательно, система (0.1), (0.4) определена корректно.

Всюду в дальнейшем, не оговаривая особо, мы считаем, что гипотезы $\Gamma(A)$ имеют место.

Пусть $\lambda(\cdot) \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$ и

$$S_\lambda = \{\varphi \in \mathcal{H}^*; |\varphi(t)| \leq \lambda(t) \text{ п.в.}\}.$$

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\dot{x}(t) + A(t, x(t)) = \varphi(t), \quad x(0) = x_0 \in H, \quad \varphi(\cdot) \in \mathcal{H}^*. \quad (2.1)$$

Под решением уравнения (2.1) мы понимаем функцию $x \in W \hookrightarrow C(T, H)$, почти всюду удовлетворяющую (2.1).

Хорошо известно [17], что для каждого $\varphi \in \mathcal{H}^*$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $x = P\varphi$.

Приведен ряд утверждений из [11], которые нам понадобятся в дальнейшем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Отображение $P: S_\lambda \rightarrow W$ является непрерывным из w - S_λ в w - W и в $C(T, H)$.*

Из гипотез $\Gamma(f)$ следует, что для каждого $h \in H$ функция

$$(h, f(t, x)u) = (f(t, x)^*h, u)$$

измерима по t и непрерывна по (x, u) . Следовательно, для любых $x \in C(T, H)$, $u \in L^q(T, Y)$ функция $t \rightarrow f(t, x(t))u(t)$ скалярно измерима. Так как пространство H сепарабельно, то функция $t \rightarrow f(t, x(t))u(t)$ измерима. Аналогично, для любых $x \in C(T, H)$, $h \in \mathcal{H}$ функция $t \rightarrow f(t, x(t))^*h(t)$ измерима. Воспользовавшись гипотезой $\Gamma(f)$, 3), мы можем рассмотреть оператор $F: C(T, H) \rightarrow \mathcal{L}(L^q(T, Y), \mathcal{H}^*)$, определенный по правилу

$$(F(x)u)(t) = f(t, x(t))u(t), \quad (2.2)$$

где $\mathcal{L}(L^q(T, Y), \mathcal{H}^*)$ – пространство непрерывных линейных операторов из $L^q(T, Y)$ в $\mathcal{H}^*$.

ЛЕММА 2.1. *Оператор $(x, u) \rightarrow F(x)u$ является секвенциально непрерывным из $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ в $w\text{-}\mathcal{H}^*$.*

ЛЕММА 2.2. *Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$, $\Gamma(f)$. Тогда существуют $M_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, такие, что для любого решения (x, u) системы (0.1), (0.3) u , следовательно, систем (0.1), (0.2) и (0.1), (0.4) справедливы оценки*

$$|x(t)| \leq M_1, \quad t \in T, \quad \|x\|_{\mathcal{V}} \leq M_2, \quad \|\dot{x}\|_{\mathcal{V}^*} \leq M_3, \quad \|x\|_W \leq M_4 \quad (2.3)$$

и x является единственным решением уравнения (2.1) с $\varphi(t) = f(t, x(t))u(t)$.

Пусть Z – сепарабельное рефлексивное банахово пространство. На пространстве $L^q(T, Z)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \geq 2$, мы кроме стандартной нормы рассмотрим другую норму [4]

$$\|u\|_w = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} u(s) ds \right\|_Z, \quad (2.4)$$

которую обычно называют *слабой нормой*.

Пространство $L^q(T, Z)$ с нормой (2.4) мы будем обозначать $L_w^q(T, Z)$. В дальнейшем нам понадобится простой факт, касающийся этой нормы.

ЛЕММА 2.3. *Если последовательность $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset L^q(T, Z)$ ограничена и сходится к u в $L_w^q(T, Z)$, то u_n сходится к u в $w\text{-}L^q(T, Z)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отображение $U(t, x)$ будет $\Sigma \otimes \mathcal{B}_H$ -измеримым, если, например, отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо, а отображение $x \rightarrow U(t, x)$ D -непрерывно п.в.

§3. Существование решений

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос существования решений системы (0.1), (0.4).

Пусть $B = \{h \in H; |h| \leq M_1\}$ (см. (2.3)) и $p_r: H \rightarrow B$ – оператор проектирования, который каждой точке $h \in H$ ставит в соответствие единственную точку $p_r h \in B$ такую, что $|p_r h - h| = \min\{|y - h|; y \in B\}$. Хорошо известно, что

$$|p_r u - p_r v| \leq |u - v|, \quad u, v \in H. \quad (3.1)$$

Рассмотрим многозначное отображение $\tilde{U}: T \times H \rightarrow cb(Y)$, определенное по правилу $\tilde{U}(t, x) = U(t, p_r x)$. Из (3.1) следует, что отображение $\tilde{U}(t, x)$ наследует все свойства отображения U , перечисленные в гипотезах $\Gamma(U)$. В частности,

$$\|\tilde{U}(t, x)\|_Y \leq a_1(t) + b_1|x|^{2/q} \quad \text{п.в.}, \quad (3.2)$$

$$\|\tilde{U}(t, x)\|_Y \leq a_1(t) + b_1|M_1|^{2/q} \quad \text{п.в.} \quad (3.3)$$

Если мы рассмотрим систему (0.1), (0.3) с $U(t, x)$, замененным на $\tilde{U}(t, x)$, то из (3.2) следует, что оценки (2.3) останутся теми же самыми и для решений системы (0.1), (0.3) с $U(t, x)$, замененным на $\tilde{U}(t, x)$. Поэтому (x, u) будет решением системы (0.1), (0.3) тогда и только тогда, когда (x, u) является решением системы (0.1), (0.3) с $U(t, x)$, замененным на $\tilde{U}(t, x)$. То же самое справедливо и для решений систем (0.1), (0.2) и (0.1), (0.4). Следовательно, всюду в дальнейшем, не нарушая общности и не оговаривая этого специально, мы можем считать, что для отображения $U(t, x)$ при любом $x \in H$ имеет место неравенство (3.3).

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что гипотезы $\Gamma(U)$, $\Gamma(f)$ имеют место.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует пара $(x, u) \in W \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, H) \times L^q(T, Y)$ такая, что*

$$(x, u) \in \mathcal{R}_{U \text{ next } \overline{\text{co}} U}(x_0) \subset \mathcal{R}_U(x_0) \subset \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0).$$

Более того, $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ является компактным подмножеством пространств $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$, $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и замкнутым подмножеством пространств $w\text{-}W \times L_w^q(T, Y)$ и $C(T, H) \times L_w^q(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$S_\lambda = \{\varphi \in \mathcal{H}^*; |\varphi(t)| \leq \lambda(t) \text{ п.в.}\}, \quad (3.4)$$

где $\lambda(t) = m(a_1(t) + b_1 M_1^{2/q})$, и отображение $P: S_\lambda \rightarrow W \hookrightarrow C(T, H)$, определенное по правилу $x = P\varphi$, где x – единственное решение уравнения (2.1) с $\varphi \in S_\lambda$.

Пусть $\mathcal{R}(x_0) = \{P\varphi; \varphi \in S_\lambda\}$. Так как S_λ является выпуклым компактным подмножеством пространства $w\text{-}\mathcal{H}^*$, то согласно утверждению 2.1 $\mathcal{R}(x_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H)$. Из гипотезы $\Gamma(U)$, 1), теоремы 3.5 и утверждения 2.2 из [14] следует, что отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо для каждого x . Тогда из гипотезы $\Gamma(U)$, 2) мы получаем, что отображение $\overline{\text{co}} U(t, x)$ является отображением типа Каратеодори. Воспользовавшись [9, утверждение 8.2] (см. также [18]), мы получаем, что существует непрерывная функция $g: \mathcal{R}(x_0) \hookrightarrow C(T, H) \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что

$$g(x)(t) \in U(t, x(t)) \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \text{ п.в.} \quad (3.5)$$

Пусть $\mathcal{A}: S_\lambda \rightarrow \mathcal{H}^*$ – оператор, определенный по правилу

$$\mathcal{A}(\varphi) = F(P\varphi)g(P\varphi),$$

где F – оператор (2.2).

Из утверждения 2.1 и леммы 2.1 следует, что оператор $\mathcal{A}$ является непрерывным из $w\text{-}S_\lambda$ в $w\text{-}\mathcal{H}^*$. Воспользовавшись $\Gamma(f)$, 3) и (3.3), получаем, что $\mathcal{A}(\varphi) \in S_\lambda$, $\varphi \in S_\lambda$. Тогда из теоремы Шаудера о неподвижной точке следует, что существует элемент $\varphi_* \in S_\lambda$ такой, что

$$\varphi_* = \mathcal{A}(\varphi_*) = F(P\varphi_*)g(P\varphi_*).$$

Следовательно, для $x_* = P\varphi_*$ согласно (3.5) мы имеем

$$u_*(t) = g(x_*)(t) \in U(t, x_*(t)) \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x_*(t)) \text{ п.в.} \quad (3.6)$$

и x_* является решением уравнения (2.1) с $\varphi_*(t) = f(t, x_*(t))u_*(t)$. Принимая во внимание (3.6), мы получаем, что $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0)$. Тем самым существование решений управляемых систем (0.1), (0.2), (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) доказано.

Покажем теперь, что $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ является компактным подмножеством пространств $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$.

Пусть

$$S_\mu^U = \{\varphi \in L^q(T, Y); \|\varphi(t)\|_Y \leq \mu(t) \text{ п.в.}\}, \quad (3.7)$$

где $\mu(t) = a_1(t) + b_1(t)M_1^{2/q}$. Из (3.7), (2.3) следует, что $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \subset \mathcal{R}(x_0) \times S_\mu^U$. Следовательно, $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ является относительно компактным подмножеством пространств $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ соответственно. Пусть $(x_n, u_n) \rightarrow (x, u)$ в $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Тогда x_n сходится к x в $C(T, H)$. Из леммы 2.1 следует, что φ_n , $\varphi_n(t) = f(t, x_n(t))u_n(t)$, сходится к φ_0 , $\varphi_0(t) = f(t, x(t))u(t)$, в пространстве $w\text{-}\mathcal{H}^*$. Так как x_n является решением уравнения (2.1) с $\varphi = \varphi_n$, то согласно утверждению 2.1 $x = x(\varphi_0)$ является решением уравнения (2.1) с $\varphi = \varphi_0$.

Теперь, чтобы завершить доказательство, нам достаточно показать, что $u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t))$. Так как $u_n \rightarrow u$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$, то из теоремы Мазура [19] следует, что

$$u(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k(t) \right). \quad (3.8)$$

С другой стороны, воспользовавшись непрерывностью отображения $x \rightarrow \overline{\text{co}} U(t, x(t))$, мы получаем хорошо известное включение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{\text{co}} U(t, x_k(t)) \right) \subset \overline{\text{co}} U(t, x(t)). \quad (3.9)$$

Теперь включения (3.8), (3.9) дают нам, что $u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t))$. Следовательно, множество $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ является компактом в $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$.

Замкнутость же множества $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ в $w\text{-}W \times L_w^q(T, Y)$ и в $C(T, H) \times L_w^q(T, Y)$ теперь следует из леммы 2.3. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В теореме 3.1 не предполагается, что отображение $x \rightarrow U(t, x)$ является непрерывным. Существует пример [20, с. 116] многозначного отображения $U: T \times \mathbb{R}^2 \rightarrow cb(\mathbb{R}^2)$, которое в каждой точке $x \in \mathbb{R}^2$ с рациональными координатами полунепрерывно снизу, а в остальных точках – полунепрерывно сверху, а отображение $x \rightarrow \text{co } U(t, x)$ является D -непрерывным. Используя известные подходы, не представляется возможным непосредственно доказать существование решения системы (0.1), (0.2) с ограничением $U(t, x)$, обладающим указанными выше свойствами. Тем не менее управляемая система (0.1), (0.2) и в этом случае имеет решение.

§ 4. Плотность

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос аппроксимации элементов из $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ элементами множества $\mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0)$ (“бэнг-бэнг”-принцип для управляемых систем). Для этой цели нам понадобятся следующие гипотезы:

$$-\Gamma_1(U), \quad D(\overline{\text{co}} U(t, x), \overline{\text{co}} U(t, y)) \leq k(t)|x - y| \text{ п.в., } k \in L^1(T, \mathbb{R}^+);$$

– $\Gamma_2(f)$, для любых $x, y \in C(T, H)$ и $u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t))$ существует $k_1(u) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такое, что

$$|(f(t, x(t)) - f(t, y(t)))u(t)| \leq k_1(u)(t)|x(t) - y(t)|.$$

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что гипотезы $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$ и $\Gamma(U, 1)$, 3), $\Gamma_1(U)$ имеют место.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для каждого $(x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ существует последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0)$, сходящаяся к (x, u) в пространствах w - $W \times L_w^q(T, Y)$ и в $C(T, H) \times L_w^q(T, Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ фиксирована. Тогда $x_* = P\varphi_*$,

$$\varphi_*(t) = f(t, x_*(t))u_*(t), \quad (4.1)$$

где $u_* \in S_{\overline{\text{co}} U}^q(x_*)$, и

$$S_{\overline{\text{co}} U}^q(x) = \{\varphi \in L^q(T, Y); \varphi(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \text{ п.в.}\}.$$

Из [9, утверждение 4.2] следует, что многозначное отображение $S_{\overline{\text{co}} U}^q: \mathcal{R}(x_0) \hookrightarrow C(T, H) \rightarrow cb(L^q(T, Y))$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа на пространстве $cb(L^q(T, Y))$. Возьмем $n \geq 1$. Для каждого $x \in \mathcal{R}(x_0) \hookrightarrow C(T, H)$ существует $u \in S_{\overline{\text{co}} U}^q(x)$ такое, что

$$\|u_*(t) - u(t)\|_Y < \frac{1}{2n} + d(u_*(t), \overline{\text{co}} U(t, x(t))) \leq \frac{1}{2n} + k(t)|x_*(t) - x(t)|.$$

Воспользовавшись утверждением 2.3 и теоремой 3.1 из [21], находим непрерывную функцию $v_n: \mathcal{R}(x_0) \hookrightarrow C(T, H) \rightarrow L^1(T, Y)$ такую, что для каждого $x \in \mathcal{R}(x_0)$

$$\begin{aligned} v_n(x)(t) &\in \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \quad \text{п.в.}, \\ \|u_*(t) - v_n(x)(t)\|_Y &\leq 1/n + k(t)|x_*(t) - x(t)| \quad \text{п.в.} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как $v_n(x) \in S_\mu^U$ (см. (3.7)), то $\|v_n(x)(t)\|_Y \leq \mu(t)$ п.в., $\mu \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$. Поэтому множество $\{v_n(x); x \in \mathcal{R}(x_0), n \geq 1\}$ равномерно q -интегрируемо. Воспользовавшись [9, утверждение 2.4], получаем, что функция $v_n(x)$ является непрерывной из $\mathcal{R}(x_0) \hookrightarrow C(T, H)$ в $L^q(T, Y)$. Согласно [10, теорема 0.2] существует непрерывная функция $g_n: \mathcal{R}(x_0) \hookrightarrow C(T, H) \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что

$$g_n(x)(t) \in U(t, x(t)) \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \quad (4.3)$$

и

$$\|g_n(x) - v_n(x)\|_w < 1/n. \quad (4.4)$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_n(\varphi) = F(P\varphi)g_n(P\varphi)$, который, как было показано при доказательстве теоремы 3.1, является непрерывным из w - S_λ в w - S_λ . Пусть φ_n – неподвижная точка оператора $\mathcal{A}_n$. Согласно (4.3)

$$(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0), \quad (4.5)$$

где

$$u_n(t) = g_n(x_n)(t), \quad x_n = P\varphi_n, \quad (4.6)$$

$$\varphi_n(t) = f(x_n(t))u_n(t). \quad (4.7)$$

Воспользовавшись уравнением (2.1) и равенствами (4.1), (4.7), мы получим

$$\begin{aligned} & \langle x_n(t) - x_*(t), \dot{x}_n(t) - \dot{x}_*(t) \rangle + \langle x_n(t) - x_*(t), A(t, x_n(t)) - A(t, x_*(t)) \rangle \\ &= (x_n(t) - x_*(t), \varphi_n(t) - \varphi_*(t)). \end{aligned}$$

Из этого равенства, монотонности оператора A и формулы интегрирования по частям [17] в пространстве W вытекает

$$\frac{1}{2} |x_n(t) - x_*(t)|^2 \leq \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), \varphi_n(s) - \varphi_*(s)) ds. \quad (4.8)$$

Оценим правую часть неравенства (4.8) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), \varphi_n(s) - \varphi_*(s)) ds \\ & \leq \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(g_n(x_n)(s) - v_n(x_n)(s))) ds \\ & \quad + \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(v_n(x_n)(s) - u_*(s))) ds \\ & \quad + \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), (f(s, x_n(s)) - f(s, x_*(s)))u_*(s)) ds. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Поскольку множество $\mathcal{R}(x_0) \times w\text{-}2S_\mu^U$ является компактом в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$, то согласно лемме 2.1 функция $F(x)u$ является равномерно непрерывной на $\mathcal{R}(x_0) \times w\text{-}2S_\mu^U$. Из леммы 2.3 и (4.4) вытекает, что последовательность $g_n(x_n) - v_n(x_n)$ сходится в $w\text{-}L^q(T, Y)$ к нулевому элементу пространства $L^q(T, Y)$. Поскольку $x_n \in \mathcal{R}(x_0)$ и $g_n(x_n) - v_n(x_n) \in 2S_\mu^U$, то последовательность $F(x_n)(g_n(x_n) - v_n(x_n))$ сходится в $w\text{-}\mathcal{H}^*$ к нулевому элементу. Так как множество $\{x_n - x_*\}_{n \geq 1}$ является относительно компактным в $\mathcal{H}$, то

$$\int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(g_n(x_n)(s) - v_n(x_n)(s))) ds \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Воспользовавшись (4.2) и гипотезами $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(f, 3)$, мы получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(v_n(x_n)(s) - u_*(s))) ds \\ & \leq \frac{1}{n} \cdot m \int_0^t |x_n(s) - x_*(s)| + m \int_0^t k(s) |x_n(s) - x_*(s)|^2 ds, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), (f(s, x_n(s)) - f(s, x_*(s)))u_*(s)) ds \\ & \leq \int_0^t k_1(u_*)(s) |x_n(s) - x_*(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Так как множество $\mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0)$ является компактом в $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0)$, то, переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем предположить, что $(x_n, u_n) \rightarrow (x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0)$

в $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Переходя к пределу в (4.8) и учитывая (4.9)–(4.12), мы получим

$$\frac{1}{2}|x(t) - x_*(t)|^2 \leq \int_0^t M(s)|x(s) - x_*(s)|^2 ds, \quad t \in T, \quad (4.13)$$

где $M(s) = mk(s) + k_1(u_*)(s)$.

Из (4.13) и неравенства Беллмана–Гронуолла следует, что $x(t) = x_*(t)$, $t \in T$. Воспользовавшись (4.2), (4.4), (4.6), получим, что $u_n \rightarrow u_*$ в $L_w^q(T, Y)$, и в соответствии с леммой 2.3 $u_n \rightarrow u_* = u$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$. Теперь включение (4.5) завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *В рамках предположений теоремы 4.1 справедливы равенства*

$$\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_{U \cap \text{ext co } U}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_U(x_0)},$$

где черта означает замыкание в топологии любого из пространств

$$\begin{aligned} w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y), & \quad C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y), \\ w\text{-}W \times L_w^q(T, Y), & \quad C(T, H) \times w\text{-}L_w^q(T, Y). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Следствие вытекает из теорем 3.1, 4.1 и леммы 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Вместо гипотезы $\Gamma_1(f)$ более естественным кажется неравенство

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq k_1(t)|x - y|, \quad k_1 \in L^p(T, \mathbb{R}^+).$$

Однако, как показывают примеры, для параболических управляемых систем это неравенство в общем случае не имеет места.

§5. Граничность

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы аппроксимации элементов множества $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ элементами множества $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \setminus \mathcal{R}_U(x_0)$ и, следовательно, элементами множества $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \setminus \mathcal{R}_{U \cap \text{ext co } U}(x_0)$.

Для этой цели нам понадобится предположение $\Gamma_2(U)$:

$$D(U(t, y), U(t, x)) \leq k(t)|x - y| \text{ п.в.}, \quad k \in L^1(T, \mathbb{R}^+).$$

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что гипотезы $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(U)$, 1), 3) и $\Gamma_2(U)$ имеют место.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Если*

$$\mu\{t \in T; D(U(t, x_*(t)), \overline{\text{co}} U(t, x_*(t))) > 0\} > 0, \quad (5.1)$$

то существует последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \setminus \mathcal{R}_U(x_0)$, сходящаяся к (x_, u_*) в пространствах $w\text{-}W \times L^q(T, Y)$ и $C(T, H) \times L^q(T, Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.1) и из [9, утверждение 4.2] вытекает, что существует элемент $v \in L^q(T, Y)$ такой, что

$$v(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x_*(t)) \quad \text{п.в.}, \quad (5.2)$$

$$\int_T d(v(s), U(s, x_*(s))) ds > 0. \quad (5.3)$$

Воспользовавшись (5.3), мы заключаем, что существуют компакт $\mathcal{T} \subset T$, $\mu(\mathcal{T}) > 0$, и $r > 0$ такие, что сужения $k(t)$, $d(v(t), U(t, x_*(t)))$ и $v(t)$ на $\mathcal{T}$ непрерывны и

$$d(v(t), U(t, x_*(t))) > 3r, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (5.4)$$

Следовательно, для любых u , $\|u - v(t)\|_Y < r$, $t \in \mathcal{T}$, имеет место неравенство

$$d(u, U(t, x_*(t))) > 2r. \quad (5.5)$$

Из гипотезы $\Gamma_2(U)$ следует, что существует $\gamma > 0$ такое, что

$$D(U(t, x_*(t)), U(t, y)) < r \quad (5.6)$$

почти всюду на $\mathcal{T}$ для любых $y \in H$, $|y - x_*(t)| < \gamma$.

Объединяя (5.5), (5.6), мы получим

$$d(u, U(t, y)) > r \quad (5.7)$$

почти всюду на $\mathcal{T}$ для любых $u \in Y$, $\|u - v(t)\|_Y < r$, $|y - x_*(t)| < \gamma$.

Пусть $t_* \in \mathcal{T}$ — точка плотности множества $\mathcal{T}$. Положим $T_n = [t_* - 1/n, t_* + 1/n] \cap \mathcal{T}$. Рассмотрим последовательность $v_n: T \rightarrow Y$, определенную следующим образом:

$$v_n(t) = v(t), \quad t \in T_n, \quad v_n(t) = u_*(t), \quad t \in T \setminus T_n.$$

Тогда

$$v_n(t) \rightarrow u_*(t) \quad \text{в } Y \text{ п.в.} \quad (5.8)$$

Как и при доказательстве теоремы 4.1, мы получаем, что существует непрерывная функция $g_n: \mathcal{R}(x_0) \hookrightarrow C(T, H) \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что

$$g_n(x)(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \quad (5.9)$$

и

$$\|v_n(t) - g_n(x)(t)\|_Y \leq 1/n + k(t)|x_*(t) - x(t)| \quad \text{п.в.} \quad (5.10)$$

Так как $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_U(x_0)$, то

$$\begin{aligned} x_* &= P\varphi_*, \quad \varphi_* = F(x_*)u_*, \quad u_* \in L^q(T, Y), \\ u_*(t) &\in U(t, x_*(t)) \quad \text{п.в.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Пусть φ_n — неподвижная точка оператора $\mathcal{A}_n: S_\lambda \rightarrow S_\lambda$, $\mathcal{A}_n(\varphi) = F(P\varphi) \times g_n(P\varphi)$. Тогда согласно (5.9), (5.10)

$$(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0), \quad (5.12)$$

где

$$x_n = P\varphi_n, \quad \varphi_n = F(x_n)u_n, \quad u_n = g_n(x_n) \quad (5.13)$$

и

$$\|v_n(t) - u_n(t)\|_Y \leq 1/n + k(t)|x_n(t) - x_*(t)|. \quad (5.14)$$

Аналогично неравенству (4.9) мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|x_n(t) - x_*(t)|^2 &\leq \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(u_n(s) - v_n(s))) ds \\ &+ \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), f(s, x_n(s))(v_n(s) - u_*(s))) ds \\ &+ \int_0^t (x_n(s) - x_*(s), (f(s, x_n(s)) - f(s, x_*(s)))u_*(s)) ds. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Учитывая (5.8), (5.14), (5.15), как и при доказательстве теоремы 4.1, легко показать, что последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ сходится к некоторому элементу $(x, u) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ в пространствах $w\text{-}W \times w\text{-}L^q(T, Y)$ и в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$, причем $x = x_*$. Воспользовавшись (5.8), (5.13), (5.14), мы получаем, что $u_n \rightarrow u_*$ в $L^q(T, Y)$. Следовательно, $u_* = u$. Поэтому

$$(x_n, u_n) \rightarrow (x_*, u_*) \text{ в } w\text{-}W \times L^q(T, Y) \text{ и в } C(T, H) \times L^q(T, Y). \quad (5.16)$$

Из (5.14), (5.16) и непрерывности $k(t)$ на $\mathcal{T}$ вытекает, что существует n_0 такое, что для $n \geq n_0$ почти всюду на $\mathcal{T}$

$$\|v_n(t) - u_n(t)\|_Y < r, \quad |x_n(t) - x_*(t)| < \gamma. \quad (5.17)$$

Так как $v_n(t) = v(t)$, $t \in T_n$, то из (5.7), (5.17) следует, что

$$d(u_n(t), U(t, x_n(t))) > r \text{ п.в. на } T_n. \quad (5.18)$$

Поскольку t_* является точкой плотности множества $\mathcal{T}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n)n/2 = 1$. Поэтому $\mu(T_n) > 0$ для всех достаточно больших $n \geq n_0$. Следовательно, согласно (5.18) $(x_n, u_n) \notin \mathcal{R}_U(x_0)$ при достаточно больших $n \geq n_0$. Таким образом, последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ сходится к $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ в $w\text{-}W \times L^q(T, Y)$ и в $C(T, H) \times L^q(T, Y)$ и $(x_n, u_n) \notin \mathcal{R}_U(x_0)$ при достаточно больших n . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если для любого $(x, u) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ выполняется неравенство

$$\mu\{t \in T; U(t, x(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x(t))\} > 0, \quad (5.19)$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) &= \overline{\mathcal{R}_U(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \setminus \mathcal{R}_U(x_0, u_0)} \\ &= \overline{\mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \setminus \mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0)}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где черта означает замыкание в топологии любого из пространств (4.14).

Следствие вытекает из следствия 4.1 и теоремы 5.1.

Из равенства (5.20) следует, что при выполнении неравенства (5.19) множества $\mathcal{R}_U(x_0)$, $\mathcal{R}_{U \cap \text{ext } \overline{\text{co}} U}(x_0)$ являются одновременно плотными и граничными подмножествами множества $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ в топологии любого из пространств (4.14).

§ 6. Необходимые и достаточные условия

замкнутости множества $\mathcal{R}_U(x_0)$

В этом параграфе мы предполагаем, что гипотезы $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(U)$, 1), 3) и $\Gamma_2(U)$ имеют место.

ТЕОРЕМА 6.1. *Множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ является замкнутым в любом из пространств (4.14) тогда и только тогда, когда для любого $(x, u) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ имеет место равенство*

$$\mu\{t \in T; U(t, x(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x(t))\} = 0. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ замкнуто в одном из пространств (4.14). Предположим, что существует пара $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ такая, что

$$\mu\{t \in T; U(t, x_*(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x_*(t))\} > 0.$$

Тогда согласно теореме 5.1 $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \setminus \mathcal{R}_U(x_0) \neq \emptyset$. Воспользовавшись следствием 4.1, мы получаем $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) = \mathcal{R}_U(x_0) = \mathcal{R}_U(x_0)$. Но это противоречит тому, что $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0) \setminus \mathcal{R}_U(x_0) \neq \emptyset$.

Достаточность. Пусть для каждого $(x, u) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ справедливо равенство (6.1) и $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_U(x_0) = \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$. Тогда существует последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{R}_U(x_0)$, сходящаяся к $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0)$ в топологии одного конкретно взятого пространства (4.14). Следовательно, почти всюду

$$u_n(t) \in U(t, x_n(t)) = \overline{\text{co}} U(t, x_n(t)), \quad (6.2)$$

$$u_*(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x_*(t)). \quad (6.3)$$

Так как пространство $ccb(Y)$, наделенное метрикой Хаусдорфа, является полным и

$$U(t, x_n(t)) \rightarrow U(t, x_*(t)) \quad \text{п.в.} \quad (6.4)$$

в метрике Хаусдорфа, то из (6.2), (6.4) следует, что почти всюду

$$U(t, x_*(t)) = \overline{\text{co}} U(t, x_*(t)). \quad (6.5)$$

Теперь из (6.3), (6.5) вытекает, что $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_U(x_0)$. Тем самым множество $\mathcal{R}_U(x_0)$ замкнуто в топологии любого из пространств (4.14). Теорема доказана.

В теореме 6.1 мы предполагаем, что неравенство (6.1) выполняется вдоль решений системы (0.1), (0.2), т.е. теорема носит локальный характер. Ниже мы докажем глобальную версию теоремы 6.1.

Пусть $0 \leq t_0 < 1$ и $T_0 = [t_0, 1]$. Тогда мы можем рассмотреть пространства $W(T_0)$, $C(T_0, H)$, $L^q(T_0, Y)$, состоящие из соответствующих функций, определенных на T_0 . Более того, для любого t_0 , $0 \leq t_0 < 1$, и любого $x_0 \in H$ мы можем рассмотреть множества $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$, $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0, t_0)$, $\mathcal{R}_{U \cap \text{ext } U}(x_0, t_0)$ решений систем (0.1), (0.2), (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) соответственно, являющиеся подмножествами пространств $W(T_0) \times L^q(T_0, Y) \hookrightarrow C(T_0, H) \times L^q(T_0, Y)$.

Очевидно, что если выполняются гипотезы $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(U)$, 1), 3) и $\Gamma_2(U)$, то все предыдущие результаты справедливы и для множеств $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$, $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0, t_0)$, $\mathcal{R}_{U \cap \text{ext } U}(x_0, t_0)$.

Рассмотрим пространства

$$\begin{aligned} w\text{-}W(T_0) \times w\text{-}L^q(T_0, Y), & \quad C(T_0, H) \times w\text{-}L^q(T_0, Y), \\ w\text{-}W \times L_w^q(T, Y), & \quad C(T_0, H) \times L_w^q(T_0, Y). \end{aligned} \quad (6.6)$$

ТЕОРЕМА 6.2. *Для того чтобы для любого t_0 , $0 \leq t_0 < 1$, и любого $x_0 \in H$ множество $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$ было замкнутым в топологии любого из пространств (6.6), необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in H$ имело место равенство*

$$\mu\{t \in T; U(t, x) \neq \overline{\text{co}} U(t, x)\} = 0. \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть для любого $x \in H$ справедливо равенство (6.7). Тогда очевидно, что

$$\mu\{t \in T; U(t, x(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x(t))\} = 0$$

для любой ступенчатой функции $x : T \rightarrow H$. Поэтому для любого t_0 и для любой функции $x \in C(T_0, H)$ имеет место равенство

$$\mu\{t \in T_0; U(t, x(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x(t))\} = 0. \quad (6.8)$$

Воспользовавшись теоремой 6.1, примененной к множеству $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$, и равенством (6.8), получим, что множество $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$ замкнуто в топологии любого из пространств (6.6).

Необходимость. Пусть для любого t_0 и $x_0 \in H$ множество $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$ замкнуто в топологии любого из пространств (6.6), а равенство (6.7) не имеет места. Тогда существуют $x_0 \in H$ и множество $\mathcal{T}(x_0)$, $\mu(\mathcal{T}(x_0)) > 0$, такие, что $U(t, x_0) \neq \overline{\text{co}} U(t, x_0)$ для любого $t \in \mathcal{T}(x_0)$. Так как почти каждая точка $t \in \mathcal{T}(x_0)$ является его точкой правой плотности, то существует $t \in \mathcal{T}(x_0)$ такое, что мера множества $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(x_0) \cap [t, 1]$ больше нуля. Воспользовавшись следствием 2.1 из [22], получаем, что существует компактное множество $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$, $\mu(\mathcal{T}) > 0$, такое, что сужение функции $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ на $\mathcal{T} \times H$ полунепрерывно снизу по Вьеторису и имеет замкнутый график в $T \times H \times Y$.

Пусть $t_0 \in \mathcal{T}$ – точка правой плотности множества $\mathcal{T}$ и $(x_*, u_*) \in \mathcal{R}_U(x_0, t_0) \hookrightarrow C(T_0, H) \times L^q(T_0, Y)$. Тогда

$$U(t_0, x_0) = U(t_0, x_*(t_0)) \neq \overline{\text{co}} U(t_0, x_0), \quad (6.9)$$

а сужение функции $t \rightarrow U(t, x_*(t))$ на $\mathcal{T} \cap [t_0, 1]$ полунепрерывно снизу по Вьеторису и имеет замкнутый график в $T \times Y$.

Покажем, что существует $h > t_0$ такое, что

$$U(t, x_*(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x_*(t)), \quad t \in [t_0, h] \cap \mathcal{T}.$$

Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $t_n \in \mathcal{T} \cap [t_0, 1]$, $t_n \rightarrow t_0$, такая, что $U(t_n, x_*(t_n)) = \overline{\text{co}} U(t_n, x_*(t_n))$. Пусть $u, v \in U(t_0, x_0)$ и $\lambda \in [0, 1]$ произвольны. Из полунепрерывности снизу по Вьеторису функции $U(t, x_*(t))$ на $\mathcal{T} \cap [t_0, 1]$ следует, что существуют $u_n, v_n \in U(t_n, x_*(t_n))$ такие, что $u_n \rightarrow u$, $v_n \rightarrow v$. Тогда $\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n \in U(t_n, x_*(t_n)) = \overline{\text{co}} U(t_n, x_*(t_n))$ и $\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n \rightarrow \lambda u + (1 - \lambda)v$. Теперь из замкнутости графика сужения функции $U(t, x_*(t))$ на $\mathcal{T} \cap [t_0, 1]$ следует, что $\lambda u + (1 - \lambda)v \in U(t_0, x_0)$. Но это противоречит (6.9). Следовательно, существует $h > t_0$ такое, что для любого $t \in [t_0, h] \cap \mathcal{T}$ множество $U(t, x_*(t))$ не выпукло. Так как t_0 является точкой правой плотности множества $\mathcal{T}$, то $\mu([t_0, h] \cap \mathcal{T}) > 0$. Из этого неравенства следует, что

$$\mu\{t \in T_0; U(t, x_*(t)) \neq \overline{\text{co}} U(t, x_*(t))\} > 0. \quad (6.10)$$

Воспользовавшись (6.10) и теоремой 6.1, примененной к множеству $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$, мы получаем, что множество $\mathcal{R}_U(x_0, t_0)$ не является замкнутым в любом из пространств (6.6). Но это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из теоремы 6.1 вытекает, что в общем случае без предположения выпуклозначности отображения $U(t, x)$ задача минимизации функционала на решениях системы (0.1), (0.2) не имеет решения.

§ 7. Пример

В этом параграфе мы рассмотрим пример управляемой параболической системы и дадим интерпретацию полученных выше абстрактных результатов.

Пусть $T = [0, 1]$ и Z – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей Γ . Рассмотрим управляемую систему, описываемую параболическим уравнением

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \Delta x - \sum_{i,j=1}^N D_i(k_{ij}(t, \|Dx\|^2)D_j x) = \tilde{f}(t, z, x(t, z))u(t, z),$$

$$x|_{T \times \Gamma} = 0, \quad x(0, z) = x_0(z), \quad (7.1)$$

$$u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \quad \text{п.в. в } T \times Z. \quad (7.2)$$

Здесь $D_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$, $i = 1, \dots, N$, $Dx = (D_1 x, \dots, D_N x)$ – градиент x ,

$$Dx Dy = \sum_{i,j} D_i x D_j y, \quad \|Dx\|^2 = \sum_{i=1}^N |D_i x|^2.$$

Наряду с ограничениями (7.2) мы рассмотрим ограничения

$$u(t, z) \in \text{co } \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \quad \text{п.в. в } T \times Z, \quad (7.3)$$

$$u(t, z) \in \text{ext co } \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \quad \text{п.в. в } T \times Z. \quad (7.4)$$

Введем следующие *предположения*, которые всюду в дальнейшем считаем выполненными:

- $\Gamma(k)$, k является отображением из $T \times \mathbb{R}^+$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ таким, что:
 - 1) отображение $t \rightarrow k(t, \alpha)$ измеримо;
 - 2) отображение $\alpha \rightarrow k(t, \alpha)$ непрерывно;
 - 3) $\|k(t, \xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \leq \beta$ для всех $(t, \xi) \in T \times \mathbb{R}^+$, $\beta > 0$;
 - 4) $\langle k(t, \|\xi\|^2)\xi - k(t, \|\eta\|^2)\eta, \xi - \eta \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0$ для всех $(t, \xi, \eta) \in T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$;
- $\Gamma(\tilde{f})$, $\tilde{f}: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция такая, что:
 - 1) функция $(t, z) \rightarrow \tilde{f}(t, z, x)$ измерима;
 - 2) $|\tilde{f}(t, z, x) - \tilde{f}(t, z, y)| \leq k_1(t)|x - y|$ п.в. в $T \times Z$, $k_1 \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$;
 - 3) $|\tilde{f}(t, z, x)| \leq m$ п.в. в $T \times Z$, $m > 0$;
- $\Gamma(\tilde{U})$, $\tilde{U}: T \times Z \times \mathbb{R} \rightarrow cb(\mathbb{R})$ – многозначное отображение такое, что:
 - 1) отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x)$ измеримо;
 - 2) $D(\tilde{U}(t, z, x), \tilde{U}(t, z, y)) \leq k_2(t)|x - y|$ п.в. в $T \times Z$, $k_2 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$;
 - 3) $|\tilde{U}(t, z, x)| \leq M(t)$ п.в. в $T \times Z$, $M \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$;
- $\Gamma(x_0)$, $x_0 \in L^2(Z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Так как значениями отображения $\tilde{U}(t, z, x)$ являются компактные подмножества пространства $\mathbb{R}$, то $\overline{\text{co}} \tilde{U}(t, z, x) = \text{co } \tilde{U}(t, z, x)$ и $\text{ext co } \tilde{U}(t, z, x) \subset \tilde{U}(t, z, x)$. Поэтому вместо ограничений (0.3), (0.4) мы рассматриваем ограничения (7.3), (7.4).

В нашем примере мы берем $p = 2$.

Пусть $H_0^1(Z)$ – соболевское пространство. Тогда его сопряженным является пространство $H^{-1}(Z)$. Положим $V = H_0^1(Z)$, $H = L^2(Z)$, $V^* = H^{-1}(Z)$.

Из теорем вложения для соболевских пространств хорошо известно, что вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ непрерывны, плотны и компактны.

Сведем управляемую систему (7.1), (7.2) к управляемой системе (0.1), (0.2).

Рассмотрим следующую форму Дирихле $a_1: T \times H_0^1(Z) \times H_0^1(Z) \rightarrow \mathbb{R}$, определенную по формуле

$$\begin{aligned} a_1(t, x, y) &= \int_Z \sum_{i,j=1}^N k_{ij}(t, \|Dx\|^2) D_i x D_j y \, dz \\ &= \int_Z \langle k(t, \|Dx\|^2) DxDy \rangle_{\mathbb{R}^N} \, dz. \end{aligned}$$

Из $\Gamma(k)$, 3) и неравенства Фридрихса следует, что

$$|a_1(t, x, y)| \leq \beta_1 \|x\|_{H_0^1(Z)} \|y\|_{H_0^1(Z)}, \quad \beta_1 > 0.$$

Поэтому существует оператор $A_1: T \times H_0^1(Z) \rightarrow W^{-1}(Z)$ такой, что

$$\langle y, A_1(t, x) \rangle = a(t, x, y),$$

и для любых $x \in H_0^1(Z)$

$$\|A_1(t, x)\|_{H^{-1}(Z)} \leq \beta_1 \|x\|_{H_0^1(Z)}, \quad (7.5)$$

$$\langle x, A_1(t, x) \rangle \geq 0. \quad (7.6)$$

Рассмотрим другую форму Дирихле, определенную по правилу

$$a_2(x, y) = \int_Z \sum_{i,j=1}^N D_i x D_j y \, dz = \int_Z \langle Dx, Dy \rangle_{\mathbb{R}^N} \, dz.$$

Аналогично мы имеем

$$a_2(x, y) \leq c \|x\|_{H_0^1(Z)} \cdot \|y\|_{H_0^1(Z)}, \quad c > 0, \quad (7.7)$$

и

$$c_1 \|x\|_{H_0^1(Z)}^2 \leq a_2(x, x), \quad c_1 > 0. \quad (7.8)$$

Поэтому существует оператор $A_2 \in \mathcal{L}(H_0^1(Z), H^{-1}(Z))$ такой, что $\langle y, A_2 x \rangle = a_2(x, y)$ для всех $x, y \in H_0^1(Z)$.

Рассмотрим оператор $A(t, x) = A_1(t, x) + A_2 x$. Воспользовавшись неравенствами (7.5)–(7.8) по аналогии с рассуждениями, приведенными в [11, с. 154], мы получаем, что для оператора A выполняются все гипотезы $\Gamma(A)$.

В качестве пространства управлений мы берем пространство $Y = L^2(Z)$. Согласно гипотезам $\Gamma(\tilde{U})$, 1), 2) для любого $x \in H = L^2(Z)$ многозначное отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ измеримо. Воспользовавшись гипотезой $\Gamma(\tilde{U})$, 3) и теоремой 5.6 из [14], мы получим, что существует последовательность $\varphi_n \in L^2(T \times Z)$, $n \geq 1$, такая, что

$$\tilde{U}(t, z, x(z)) = \left\{ \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t, z)} \right\} \quad \text{для всех } (t, z) \in T \times Z.$$

Из теоремы Фубини следует, что при почти всех $t \in T$ каждая функция $z \rightarrow \varphi_n(t, z)$ измерима. Следовательно, согласно [14, теорема 5.6] при почти каждом $t \in T$ многозначное отображение $z \rightarrow \tilde{U}(t, z, x(z))$ измеримо. Поэтому мы можем рассмотреть многозначное отображение $(t, x) \rightarrow U(t, x)$, $x \in H$, определенное по правилу

$$U(t, x) = \{u \in Y; u(z) \in \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п.в.}\}. \quad (7.9)$$

Согласно [23, теорема 1.5] имеет место равенство

$$\overline{\text{co}} U(t, x) = \{u \in Y; u(z) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п.в.}\} = \text{co } U(t, x). \quad (7.10)$$

Воспользовавшись [9, следствие 5.2], мы получаем

$$\begin{aligned} \text{ext } \overline{\text{co}} U(t, x) &= \{u \in Y; u(z) \in \text{ext } \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, z, x(z)) \text{ п.в.}\} \\ &= \text{ext } \text{co } U(t, x) \subset U(t, x). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Из $\Gamma(\tilde{U}), 3)$ вытекает, что U является отображением из $T \times H$ в $cb(Y)$ и

$$\|U(t, x)\|_Y \leq M_1(t) \text{ п.в.}, \quad M_1 \in L^q(T, \mathbb{R}^+).$$

Покажем, что многозначное отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо. Пусть $d_Y(v, K)$ обозначает расстояние от точки $v \in Y$ до множества $K \subset Y$ и $D_Y(\cdot, \cdot)$ – метрика Хаусдорфа на пространстве $cb(Y)$. Возьмем фиксированное $v \in Y$. Тогда согласно [9, утверждение 4.1]

$$d_Y(v, U(t, x)) = \left(\int_Z d(v(z), \tilde{U}(t, z, x(z)))^2 dz \right)^{1/2}.$$

Так как функция $(t, z) \rightarrow d(v(z), \tilde{U}(t, z, x(z)))$ является элементом пространства $L^2(T \times Z)$, то из теоремы Фубини следует, что функция $t \rightarrow d_Y(v, U(t, x))$ измерима для любого $v \in Y$. Воспользовавшись теоремой 3.5 из [14], мы получаем, что многозначное отображение $t \rightarrow U(t, x)$ измеримо.

Из гипотез $\Gamma(\tilde{U}), 2)$ и из [9, утверждение 4.2] следует, что

$$D_Y(U(t, x), U(t, y)) \leq \left(\int_Z D(\tilde{U}(t, z, x(z)), \tilde{U}(t, z, y(z)))^2 dz \right)^{1/2} \leq k_2(t) \|x - y\|_H.$$

Следовательно, для многозначного отображения выполняются гипотезы $\Gamma(U), 1), 3)$ и $\Gamma_2(U)$.

Пусть $f(t, x)u$, $x \in H$, $u \in Y$, – функция, определенная по правилу

$$(f(t, x)u)(z) = \tilde{f}(t, z, x(z))u(z). \quad (7.12)$$

Из гипотез $\Gamma(\tilde{f})$ и теоремы Фубини вытекает, что при почти каждом $t \in T$ имеем $f(t, x) \in \mathcal{L}(Y, H)$ и $\|f(t, x)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m$ п.в.

По аналогии с рассуждениями, приведенными в [11, § 6], мы получим, что:

- отображение $t \rightarrow f(t, x)$ измеримо для любых $(x, u) \in H \times Y$;
- отображение $x \rightarrow f(t, x)^* h$ непрерывно п.в. для любых $h \in H$;
- для любых $x, y \in H$ и любого $u \in \text{co } U(t, x)$

$$\|(f(t, x) - f(t, y))u\|_H \leq M(t)k_1(t) \|x - y\|_H.$$

Так как $Mk_1 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, то гипотезы $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$ имеют место для отображения $f(t, x)$, определенного по формуле (7.12).

Как обычно, под решением уравнения (7.1) при фиксированном $u \in L^2(T \times Z) = L^2(T, L^2(Z))$ мы понимаем обобщенное решение x , т.е. решение уравнения (0.1), порожденного уравнением (7.1). Тогда решением управляемой системы (7.1), (7.2) считается пара (x, u) , $u \in L^2(T \times Z)$, такая, что x является решением уравнения (0.1) и почти всюду на $T \times Z$ имеет место включение (7.2).

Из [24, гл. 4, § 8, следствие 3] вытекает, что $u(t) \in U(t, x(t))$ почти всюду на T тогда и только тогда, когда $u(t)(z) = u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t)(z))$ почти всюду на $T \times Z$. Тогда из (7.9) вытекает, что множество решений управляемой системы (7.1), (7.2) совпадает с множеством решений управляемой системы (0.1), (0.2). Аналогично, из (7.10), (7.11) мы получаем, что множество решений управляемых систем (7.1), (7.3) и (7.1), (7.4) совпадает с множеством решений управляемых систем (0.1), (0.3) и (0.1), (0.4) соответственно.

Прежде чем сформулировать основные результаты этого параграфа, приведем вспомогательный результат.

Пусть $\mathcal{D}$ – совокупность всех множеств из $T \times \mathbb{R}^N$ вида $E = [t_1, t_2] \times [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, N$. На пространстве $L^2(T \times Z)$ рассмотрим норму [10]

$$\|u\|_\omega = \sup_{E \in \mathcal{D}} \left| \iint_{E \cap (T \times Z)} u(t, z) dz dt \right|. \quad (7.13)$$

Пространство $L^2(T \times Z)$ с нормой (7.13) будем обозначать $L_w^2(T \times Z)$.

Пусть $\varphi \in L^2(T \times Z, \mathbb{R}^+)$ и

$$S = \{u \in L^2(T \times Z) : |u(t, z)| \leq \varphi(t, z) \text{ п.в. в } T \times Z\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. *На множестве S топологии пространств w - $L^2(T \times Z)$ и $L_w^2(T \times Z)$ совпадают, и топология пространства $L_w^2(T \times Z)$ не сильнее топологии пространства $L_w^2(T, L^2(Z))$.*

Доказательство утверждения проводится по аналогии с доказательством утверждения 6.1 из [11].

Пусть $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$, $\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\text{ext co } \tilde{U}}(x_0)$ – множества решений управляемых систем (7.1), (7.2), (7.1), (7.3) и (7.1), (7.4) соответственно.

ТЕОРЕМА 7.1. *Существует пара $(x, u) \in C(T, L^2(Z)) \times L^2(T \times Z)$ такая, что*

$$(x, u) \in \mathcal{R}_{\text{ext co } \tilde{U}}(x_0) \subset \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0) \subset \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0).$$

Более того, $\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0)$ является компактным подмножеством пространств $C(T, L^2(Z)) \times w$ - $L^2(T \times Z)$, $C(T, L^2(Z)) \times L_w^2(T \times Z)$ и замкнутым подмножеством пространства $C(T, L^2(Z)) \times L_w^2(T, L^2(Z))$.

Теорема вытекает из теоремы 3.1, утверждения 7.1 и гипотезы $\Gamma(\tilde{U})$, 3).

ТЕОРЕМА 7.2. *Справедливы равенства*

$$\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_{\text{ext co } \tilde{U}}(x_0)},$$

где черта означает замыкание в топологии любого из пространств

$$\begin{aligned} C(T, L^2(Z)) \times w\text{-}L^2(T \times Z), \quad C(T, L^2(Z)) \times L_w^2(T \times Z), \\ C(T, L^2(Z)) \times L_w^2(T, L^2(Z)). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Теорема вытекает из следствия 4.1 и утверждения 7.1.

Пусть μ_0 – мера Лебега на пространстве $T \times Z$ и $D_{L^2(Z)}(\cdot, \cdot)$ – метрика Хаусдорфа на пространстве $cb(L^2(Z))$.

ТЕОРЕМА 7.3. Если для любого $(x, u) \in \mathcal{R}_U(x_0)$ выполняется неравенство

$$\mu_0\{(t, z) \in T \times Z; \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \neq \text{co } \tilde{U}(t, z, x(t, z))\} > 0, \quad (7.15)$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0) &= \overline{\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_{\text{ext co } \tilde{U}}(x_0)} \\ &= \overline{\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0) \setminus \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{U}}(x_0) \setminus \mathcal{R}_{\text{ext co } \tilde{U}}(x_0)}, \end{aligned}$$

где черта означает замыкание в топологии любого из пространств (7.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [9, утверждение 4.2] и из (7.9), (7.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\int_T D_{L^2(Z)}^2(U(t, x(t)), \text{co } U(t, x(t))) dt \\ &\leq \int_T \int_Z D^2(\tilde{U}(t, z, x(t, z)), \text{co } \tilde{U}(t, z, x(t, z))) dz dt \\ &\leq 2 \int_T D_{L^2(Z)}^2(U(t, x(t)), \text{co } U(t, x(t))) dt. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Согласно (7.16) неравенство (7.15) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mu\{t \in T; U(t, x(t)) \neq \text{co } U(t, x(t))\} > 0.$$

Теперь теорема вытекает из следствия 5.1 и утверждения 7.1.

ТЕОРЕМА 7.4. Множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ является замкнутым в любом из пространств (7.14) тогда и только тогда, когда для любого $(x, u) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0)$ имеет место равенство

$$\mu\{(t, z) \in T \times Z; \tilde{U}(t, z, x(t, z)) \neq \text{co } \tilde{U}(t, z, x(t, z))\} = 0. \quad (7.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись неравенством (7.16), мы получаем, что равенство (7.17) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mu\{t \in T; U(t, x(t)) \neq \text{co } U(t, x(t))\} = 0.$$

Теперь теорема вытекает из теоремы 6.1 и утверждения 7.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Нетрудно сформулировать и аналог теоремы 6.2 для управляемой системы (7.1), (7.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Гипотезы $\Gamma(\tilde{f})$, $\Gamma(\tilde{U})$ мы ввели, чтобы в рамках одних и тех же предположений сформулировать все результаты настоящего параграфа. Для конкретных же результатов некоторые гипотезы могут быть ослаблены. Это в первую очередь относится к гипотезам $\Gamma(\tilde{U})$, 1), 2), $\Gamma(\tilde{f})$, 2) для теоремы 7.1 и гипотезам $\Gamma(\tilde{U})$, 1), 2) для теоремы 7.2 (ср. с гипотезами в теоремах 3.1, 4.1).

§8. Приложение

Пусть $g: T \times H \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – функция такая, что выполняются гипотезы

– $\Gamma(g)$:

- 1) функция $g(t, x, u)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{H \times Y}$ -измеримой;
- 2) функция $(x, u) \rightarrow g(t, x, u)$ полунепрерывна снизу п.в.;
- 3) функция $u \rightarrow g(t, x, u)$ выпукла для каждого $x \in H$ п.в.;
- 4) $g(t, x, u) \geq \psi(t) - c(|x| + \|u\|_Y)$ для всех $(x, u) \in H \times Y$ п.в., где $\psi \in L^1(R)$, $c > 0$.

Из $\Gamma(g, 1)$ следует, что для любых $x \in L^1(T, H)$, $u \in L^1(T, Y)$ функция $t \rightarrow g(t, x(t), u(t))$ измерима. Поэтому согласно $\Gamma(g, 4)$ будет определен функционал $I: L^1(T, H) \times L^1(T, Y) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$I(x, u) = \int_T g(t, x(t), u(t)) dt. \quad (8.1)$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что гипотезы $\Gamma(g)$ имеют место и существуют $x \in L^1(T, H)$, $u \in L^1(T, Y)$ такие, что $I(x, u) \neq +\infty$.

Рассмотрим задачу (P) минимизации функционала $I(x, u)$ на решениях управляемой системы (0.1), (0.3).

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(f)$, $\Gamma_1(f)$, $\Gamma(U)$ 1), 3), $\Gamma_1(U)$. Тогда задача (P) имеет решение.

Согласно [25, теорема 2.1] функционал (8.1) секвенциально полунепрерывен снизу на пространстве $L^1(T, H) \times w\text{-}L^1(T, Y)$. В соответствии с теоремой 3.1 множество $\mathcal{R}_{\text{св}} U(x_0)$ является компактом в $C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Поскольку $1 < q \leq 2$, то задача (P) имеет решение.

Приведем теперь аналог теоремы 8.1 применительно к управляемой системе (7.1), (7.3).

Обозначим через Σ_o σ -алгебру измеримых по Лебегу подмножеств из $T \times Z$. Пусть $\tilde{g}: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – функция такая, что выполняются гипотезы

– $\Gamma(\tilde{g})$:

- 1) функция $\tilde{g}(t, z, x, u)$ $\Sigma_o \times \mathcal{B}_{R \times R}$ -измерима;
- 2) функция $(x, u) \rightarrow \tilde{g}(t, z, x, u)$ полунепрерывна снизу п.в. на $T \times Z$;
- 3) функция $u \rightarrow \tilde{g}(t, z, x, u)$ выпукла для любого x п.в. на $T \times Z$;
- 4) $\tilde{g}(t, z, x, u) \geq \psi(t, z) - c(|x| + |u|)$ для всех $(x, u) \in \mathbb{R}^2$ п.в. на $T \times Z$, где $\psi \in L^2(T \times Z, \mathbb{R}^+)$, $c > 0$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что гипотезы $\Gamma(\tilde{g})$ имеют место.

Из $\Gamma(\tilde{g}, 1)$ следует, что для любых $x \in L^2(Z)$, $u \in L^2(Z)$ функция $(t, z) \rightarrow \tilde{g}(t, z, x(z), u(z))$ измерима. Тогда в соответствии с $\Gamma(\tilde{g}, 4)$ будет определена функция $g: T \times L^2(Z) \times L^2(Z) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$g(t, x, u) = \int_Z \tilde{g}(t, z, x(z), u(z)) dz.$$

ЛЕММА 8.1. Функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет гипотезам $\Gamma(g)$ для пространств $H = Y = L^2(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что функция g удовлетворяет гипотезам $\Gamma(g)$, 3), $\Gamma(g)$, 4), очевидно. Покажем, что функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет гипотезам $\Gamma(g)$, 1), 2).

Рассмотрим функцию

$$\tilde{v}(t, z, x, u) = \tilde{g}(t, z, x, u) - \psi(t, z) + c(|x| + |u|).$$

Очевидно, что функция $\tilde{v}(t, z, x, u)$ является $\Sigma_0 \otimes \mathcal{B}_{R \times R}$ -измеримой, функция $(x, u) \rightarrow \tilde{v}(t, z, x, u)$ полунепрерывна снизу п.в. на $T \times Z$ и $\tilde{v}(t, z, x, u) \geq 0$ п.в. на $T \times Z$. Тогда согласно [26, теорема 1] существует монотонно возрастающая последовательность функций $\tilde{v}_n: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $n \geq 1$, такая, что каждая из функций $\tilde{v}_n$ обладает следующими свойствами:

- а) функция $(t, z) \rightarrow \tilde{v}_n(t, z, x, u)$ измерима для каждого $(x, u) \in \mathbb{R}^2$;
- б) функция $(x, u) \rightarrow \tilde{v}_n(t, z, x, u)$ непрерывна для каждого $(t, z) \in T \times Z$;
- в) функция $\tilde{v}_n(t, z, x, u)$ ограничена на $T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_n(t, z, x, u) = \tilde{v}(t, z, x, u)$ п.в. на $T \times Z$.

Из а)–в) следует, что будет определена функция $v_n: T \times L^2(Z) \times L^2(Z) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$v_n(t, x, u) = \int_Z \tilde{v}_n(t, z, x(z), u(z)) dz,$$

такая, что:

- а') функция $t \rightarrow v_n(t, x, u)$ измерима;
 - б') функция $(x, u) \rightarrow v_n(t, x, u)$ непрерывна для каждого $t \in T$.
- Из а'), б') мы получаем, что
- в') функция $(t, x, u) \rightarrow v_n(t, x, u)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{L^2(Z) \times L^2(Z)}$ -измеримой.

Пусть $v: T \times L^2(Z) \times L^2(Z) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – функция, определенная по формуле

$$v(t, x, u) = \int_Z \tilde{v}(t, z, x(z), u(z)) dz.$$

Тогда из г) и леммы Фату следует, что

$$v(t, x, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t, x, u) \text{ п.в. на } T. \quad (8.2)$$

Из (8.2), в'), б') вытекает, что функция $v(t, x, u)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{L^2(Z) \times L^2(Z)}$ -измеримой, а функция $(x, u) \rightarrow v(t, x, u)$ полунепрерывна снизу п.в. на T .

Так как

$$v(t, x, u) = g(t, x, u) + g_1(t, x, u),$$

$$g_1(t, x, u) = \int_Z (c(|x(z)| + |u(z)| - \psi(t, z))) dz$$

и функция $t \rightarrow g_1(t, x, u)$ измерима, а функция $(x, u) \rightarrow g_1(t, x, u)$ непрерывна п.в. на T , то функция $g(t, x, u)$ удовлетворяет гипотезам $\Gamma(g)$, 1), 2). Лемма доказана.

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{I}(x, u) &= \int_T \int_Z \tilde{g}(t, z, x(t, z), u(t, z)) dz dt, \\ x &\in C(T, L^2(Z)), \quad u \in L^2(T \times Z). \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу ($\tilde{P}$) минимизации функционала $\tilde{I}(x, u)$ на решениях управляемой системы (7.1), (7.3).

Предположим, что существуют $x \in C(T, L^2(Z))$, $u \in L^2(T, Z)$ такие, что $\tilde{I}(x, u) < +\infty$.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть гипотезы $\Gamma(\tilde{U})$, $\Gamma(\tilde{f})$ имеют место. Тогда задача $(\tilde{P})$ имеет решение.

Так как

$$\tilde{I}(x, u) = \int_T g(t, x(t), u(t)) dt = \int_T \int_Z \tilde{g}(t, z, x(t, z), u(t, z)) dz dt$$

для

$$x(t, z) = x(t)(z), \quad u(t, z) = u(t)(z), \quad x \in L^1(T, L^2(Z)), \quad u \in L^1(T, L^2(Z)),$$

то теорема вытекает из теоремы 8.1, леммы 8.1 и теоремы 7.1.

Комментарии

Вопросы, затронутые в настоящей работе и касающиеся свойств решений управляемых систем, ранее не рассматривались.

Связь (аналог следствия 4.1) между решениями обыкновенного дифференциального включения с выпуклозначной, компактнозначной правой частью $F(t, x)$ и с правой частью $\text{ext } F(t, x)$ изучалась в [1]–[3], [5]–[7] и др., а для эволюционных включений – в [4], [10], [12], [30] и др.

В частности, следствие 4.1 для эволюционного включения было доказано в [12].

Граничность множества решений обыкновенного дифференциального включения в банаховом пространстве с невыпуклой, компактнозначной правой частью во множестве решений дифференциального включения с овыпукленной правой частью впервые изучалась в [20], [27].

В [28] этот результат был доказан для обыкновенных дифференциальных включений в банаховом пространстве, определенных на замкнутом множестве.

Аналог теоремы 6.1 для обыкновенных дифференциальных включений в банаховом пространстве впервые был доказан в [20], [27]. Аналог же теоремы 6.2 для обыкновенных дифференциальных включений в конечномерном пространстве был доказан в [29], а для эволюционных включений – в [31] и др. Во всех этих работах предполагалось, что правая часть включения является липшицевой по x . Аналог теоремы 6.1 для обыкновенных дифференциальных включений в банаховом пространстве без предположения липшицевости был доказан в [2].

Список литературы

1. Bressan A. Differential inclusions with non-closed, non-convex right hand side // Diff. and Integral Equat. 1990. V. 3. P. 633–638.
2. De Blasi F. S., Pianigiani G. Non-Convex-Valued Differential Inclusions in Banach Spaces // J. Math. Anal. and Appl. 1991. V. 157. № 2. P. 469–493.
3. Суцлов С. И. Нелинейный “бэнг-бэнг” принцип в $\mathbb{R}^n$ // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 110–116.
4. Толстоногов А. А. Экстремальные селекторы многозначных отображений и принцип “бэнг-бэнг” для эволюционных включений // ДАН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 589–593.
5. De Blasi F. S., Pianigiani G. On the density of extremal solutions of differential inclusions // Annal. Polon. Math. 1992. V. 56. № 2. P. 133–142.
6. Bressan A., Piccoli B. A Baire category approach to the bang-bang property // J. Diff. Equat. 1995. V. 116. № 2. P. 318–337.
7. Tolstonogov A. A. Extreme continuous selectors of multivalued maps and their applications // J. Diff. Equat. 1995. V. 122. № 2. P. 161–180.

8. Толстоногов А. А. Непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпуклыми, незамкнутыми значениями // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 5. С. 121–142.
9. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunction with decomposable values: Existence Theorems // Set-valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
10. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous selectors of multifunction with decomposable values: Relaxation theorems // Set-valued Anal. 1996. V. 4. P. 237–269.
11. Толстоногов А. А. Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 135–160.
12. Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. On the “bang-bang” principle for nonlinear evolution inclusions // Nonlin. Diff. Equat. and Appl. 1999. V. 6. № 1. P. 101–118.
13. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механ. 1959. № 2. С. 25–32.
14. Himmelberg C. J. Measurable relations // Fundamenta Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
15. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
16. Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Application. II. N.-Y.: Springer, 1990.
17. Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. The Netherlands, Leyden: Noordhoff International Publishing, 1976.
18. Толстоногов А. А., Толстоногов Д. А. L_p -непрерывные экстремальные селекторы многозначных отображений с разложимыми значениями // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 4. С. 455–457.
19. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
20. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
21. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76. P. 163–174.
22. Толстоногов А. А. К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 110–120.
23. Hiai F., Umegaki H. Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7. P. 149–182.
24. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
25. Balder Eric J. Necessary and sufficient condition for L_1 -strong-weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal. Theory, Meth., Appl. 1987. V. 11. № 2. P. 1399–1404.
26. Pappas G. An approximation result for normal integrands and applications to relaxed controls theory // J. Math. Anal. and Appl. 1983. V. 93. P. 132–141.
27. Толстоногов А. А. О плотности и граничности множества решений дифференциального включения в банаховом пространстве // ДАН СССР. 1981. Т. 261. № 2. С. 293–296.
28. Goncharov V. V. Co-density and other properties of the solution set of differential inclusions with noncompact right-hand side // Discuss. Math. Diff. Inclusions. 1996. V. 16. № 2. P. 103–120.
29. Cellina A., Ornelas A. Convexity and the closure of the solution set to differential inclusions // Boll. Un. Mat. Ital. 1990. B. 4. S. 255–263.
30. Papageorgiou N. S. On the “bang-bang” principle for nonlinear evolution inclusions // Dyn. Syst. and Appl. 1993. V. 2. P. 61–74.
31. Shouchuan Hu, Lakshmikantham V., Papageorgiou N. S. On the solution set of nonlinear evolution inclusions // Dyn. Syst. and Appl. 1992. V. 1. P. 71–82.

Поступило в редакцию
11.VII.2000