Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошапка, Полиномиальные модели вещественных многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 06:13:28

УДК 517

В. К. Белошапка

Полиномиальные модели вещественных многообразий

Строятся полиномиальные модели ростков вещественных подмногообразий комплексного пространства. Ранее было показано, что модели третьей степени, в своем диапазоне коразмерностей, обладают свойствами, аналогичными хорошо известным свойствам касательных квадрик. В данной работе строятся модели произвольно высоких степеней. Для построенных моделей получен весь спектр свойств за некоторым исключением: начиная с пятой степени они не обладают полной универсальностью.

Библиография: 9 наименований.

Данная работа является продолжением исследования полиномиальных моделей вещественных подмногообразий комплексного пространства и их автоморфизмов, предпринятого в работе [3].

В работах [1], [2] было показано, что невырожденная квадратичная модель (квадрика) является хорошей моделью невырожденного порождающего ростка вещественной поверхности в $\mathbb{C}^{n+k}$. Если (n, k) – тип ростка (k – коразмерность, n – размерность комплексной касательной), то квадрика – это поверхность вида

$$\{(z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^k): \operatorname{Im} w = \langle z, \bar{z} \rangle\}, \quad (1)$$

где $\langle z, \bar{z} \rangle = (\langle z, \bar{z} \rangle_1, \dots, \langle z, \bar{z} \rangle_k)$ – эрмитова форма со значениями в $\mathbb{R}^k$. Невырожденность квадрики и формы понимается так:

- 1) координатные скалярные формы $\langle z, \bar{z} \rangle_1, \dots, \langle z, \bar{z} \rangle_k$ линейно независимы;
- 2) не существует ненулевого вектора e , ортогонального всем векторам относительно всех координатных форм, т.е. из $\langle e, \bar{z} \rangle = 0$ для всех z следует, что $e = 0$.

Пусть росток поверхности задан уравнением

$$\operatorname{Im} w = \langle z, \bar{z} \rangle + \text{члены веса не меньше трех} \quad (2)$$

(вес считаем так: $[z] = [\bar{z}] = 1$, $[\operatorname{Re} w] = 2$); тогда форма $\langle z, \bar{z} \rangle$ – это форма Леви ростка в нуле и невырожденность ростка и его касательной квадрики понимаются как невырожденность формы Леви.

То, что квадратичная модель является *хорошей моделью*, означает буквально следующее [1]:

- 1) любой росток порождающей поверхности эквивалентен ростку вида (2) (универсальность);

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00969) и частичной поддержке грантом Шведской академии наук. Работа была начата в Гетеборгском университете, куда автор был любезно приглашен профессором Н. Шербиной.

2) квадрика – это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени $d = 2$, любая поверхность, заданная уравнениями меньшей степени, имеет бесконечномерную группу;

3) голоморфная эквивалентность квадрик совпадает с их линейной эквивалентностью;

4) размерность группы роста не превосходит размерности группы касательной квадрики (экстремальность);

5) квадрика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно; на самом деле, однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами (однородность);

6) имеется простой критерий конечномерности группы квадрики (условие невырожденности эрмитовой формы – формы Леви), причем условие невырожденности является условием общего положения (конечномерность);

7) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной квадрике – это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени; степени коэффициентов не превосходят двух (полиномиальность алгебры);

8) группа автоморфизмов невырожденной квадрики – это некая подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+k}$, чьи степени (числителей и знаменателей в несократимом представлении) не превосходят $4(n+k)$; см. [5], [2, замечание после предложения 7] (рациональность группы).

При этом отметим, что требования универсальности и однородности, с одной стороны, и требование конечномерности, с другой стороны, являются в определенном смысле антагонистами. Первая пара требований стремится понизить степень d , тогда как требование конечномерности ведет к ее повышению. Поэтому существование объекта, для которого конечномерность уже есть, а универсальность и однородность еще не исчезли, следует рассматривать как большую удачу.

Однако размерность пространства эрмитовых матриц размера n конечна и равна n^2 . И если коразмерность больше, чем n^2 , то первая часть условия конечномерности становится невыполнимой. Это приводит к тому, что все квадрики такого типа оказываются вырожденными, а их группы бесконечномерными. Таким образом, при $K > n^2$ квадрика перестает быть хорошей модельной поверхностью, так как невозможно сформулировать критерий конечномерности роста типа (n, K) в терминах 2-струи. В работе [2] для ситуации $n^2 + 1 \leq K \leq n^2(n+2)$ была предложена модельная поверхность, определяемая уравнениями второй и третьей степени, являющаяся хорошей в смысле выполнения тех же требований 1)–8).

Эта поверхность Q типа $(n, K = n^2 + k)$ задана в пространстве $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n^2} \oplus \mathbb{C}^k$ с координатами (z, w_2, w_3) , где $z \in \mathbb{C}^n$, $w_2 \in \mathbb{C}^{n^2}$, $w_3 \in \mathbb{C}^k$, $n > 0$, $k > 0$, соотношениями

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z} \rangle, \quad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}), \quad (3)$$

где кубическая форма с векторными значениями Φ линейна по всем трем переменным, а по первым двум – симметрична. Любой невырожденный по Леви росток типа (n, K) может быть записан в виде

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z} \rangle + F_3 + \dots, \quad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}) + G_4 + \dots \quad (4)$$

(при подсчете весов пользуемся следующими соглашениями: $[z] = [\bar{z}] = 1$, $[w_2] = [x] = 2$, $[w_3] = [y] = 3$).

Вещественно-алгебраическую поверхность Q будем называть *касательной кубикой* ростка (4). Поверхность и росток называем *невыврожденными*, если форма Леви $\langle z, \bar{z} \rangle$ невырождена и координатные кубические формы $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ линейно независимы.

В [2] было показано, что при $1 \leq k \leq n^2(n+1)$ кубическая модель является хорошей моделью в смысле выполнения следующего списка требований:

1) всякий порождающий росток с невырожденной формой Леви эквивалентен ростку вида (4) (универсальность);

2) кубика – это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени $d \leq 3$, любая поверхность этого типа, заданная уравнениями меньшей степени, имеет бесконечномерную группу;

3) голоморфная эквивалентность кубик совпадает с их линейной эквивалентностью;

4) размерность группы ростка не превосходит размерности группы касательной кубики (экстремальность);

5) кубика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно, на самом деле транзитивность обеспечивают квадратично-треугольные преобразования (однородность);

6) группа касательной кубики конечномерна тогда и только тогда, когда кубика невырождена, причем условие невырожденности, т.е. условие линейной независимости координатных форм, является условием общего положения (конечномерность);

7) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной кубике – это некоторая подалгебра алгебры полиномиальных векторных полей ограниченной степени, степени коэффициентов не превосходят пяти (полиномиальность алгебры);

8) группа автоморфизмов невырожденной кубики – это некая подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$, чьи степени (числителей и знаменателей в несократимом представлении) не превосходят $15(n+K)$ (рациональность группы).

В данной работе строится модельная поверхность произвольной степени и доказывается, что для нее выполняются все требования списка, кроме первых двух. Первое требование перестает выполняться при $d \geq 5$. При $n = 1$ это было показано в [7]. Таким образом, данный тип моделей обладает универсальностью лишь при $d = 2$ [2], при $d = 3$ [3], при $d = 4$ (рассуждение, вполне аналогичное проведенному в [3]). Второе условие можно формулировать с некоторыми оговорками, но мы не будем этого делать. При всем этом проблема построения универсальной хорошей модели остается.

Начнем с подсчета размерностей.

ЛЕММА 1. Если $D_{d,r}$ – размерность пространства однородных многочленов от r переменных степени d , то

$$D_{d,r} = C_{r+d-1}^d = \frac{(r+d-1) \dots (r+1)r}{d!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим степенной ряд

$$(1 + t_1 + t_1^2 + \dots) \dots (1 + t_r + t_r^2 + \dots).$$

Его разложение содержит каждый моном с коэффициентом единица, поэтому разложение $(1 + t + t^2 + \dots) \dots (1 + t + t^2 + \dots)$ имеет вид $\sum_d D_{d,r} t^d$. Поэтому

$$D_{d,r} = \frac{1}{d!} \frac{d^d}{dx^d} [(1 - t)^{-r}]_{t=0}.$$

Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{F}_{m,n}$ – пространство вещественных многочленов от $(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ степени m , чье разложение по бистепеням не содержит компонент $(m, 0)$ и $(0, m)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. а) Если $k_{m,n} = \dim \mathcal{F}_{m,n}$, то $k_{m,n} = C_{2n+m-1}^m - 2C_{n+m-1}^m$.
 б) Если $K_{m,n} = k_{2,n} + k_{3,n} + \dots + k_{m,n}$, то $K_{m,n} = C_{2n+m}^m - 2C_{n+m}^m + 1$.
 В частности,

$$\begin{aligned} k_{2,n} &= n^2, \\ k_{3,n} &= n^2(n+1), \\ k_{4,n} &= n^2(n+1)(7n+1)/12, \\ k_{5,n} &= n^2(n+1)(n+2)(3n+5)/12, \\ k_{6,n} &= n^2(n+1)(n+2)(31n^2+132n+137)/360, \\ k_{7,n} &= n^2(n+1)(n+2)^2(n+3)(3n+7)/120. \end{aligned}$$

Перейдем к построению серии модельных поверхностей. Процесс порождения модельных поверхностей при фиксированной размерности комплексной касательной n все более высоких коразмерностей напоминает процесс заполнения электронами разрешенных энергетических уровней в атоме [8]. При этом вся серия напоминает периодическую систему элементов Д.И. Менделеева. Первый период образуют квадратики. Они являются хорошими модельными поверхностями для коразмерностей от 1 до n^2 . Последняя в периоде поверхность соответствует инертному газу. Далее идет скачок степени (новый энергетический уровень) и т.д.

Модельная поверхность Q типа (n, K) степени d , где $K_{d-1,n} < K \leq K_{d,n}$, – это поверхность, заданная в пространстве

$$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{k_{2,n}} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{k_{d-1,n}} \oplus \mathbb{C}^k,$$

$k = K - K_{d-1,n}$, с координатами $(z, w_2, \dots, w_d)$ соотношениями

$$\operatorname{Im} w_m = \Phi_m(z, \bar{z}), \quad m = 2, \dots, d,$$

причем Φ_m при $m = 2, \dots, d-1$ – это вектор, составленный из базисных элементов пространства $\mathcal{F}_m$, а Φ_d – вектор из линейно независимых элементов $\mathcal{F}_d$. При

$d = 2$ мы получаем квадрику, однако следует отметить, что условие невырожденности квадрики включает кроме линейной независимости координатных эрмитовых форм условие отсутствия общего нетривиального ядра. При $d = 3$ мы получаем невырожденную кубу. Подчеркнем, что степень d не является независимым параметром в отличие от n и K , а определяется условием попадания в определенный интервал значений.

Поверхность Q будет играть роль модельной поверхности для поверхностей вида

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \Phi_2 + \text{члены веса три и более,} \\ &\dots\dots\dots \\ \operatorname{Im} w_d &= \Phi_d + \text{члены веса } (d+1) \text{ и более.} \end{aligned} \tag{5}$$

Градуированная алгебра Леви–Танаки индуктивно определяется соотношениями

$$D^1 = T^c(Q), \quad D^{j+1} = [D^j, D^1] + D^j.$$

Из вычислений, аналогичных тем, что проведены в [2], следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Градуированная алгебра Леви–Танаки Q имеет вид*

$$D^1 \subset D^2 \subset \dots \subset D^d.$$

В статье [6] речь идет о формах Леви высших порядков, при этом невырожденная модельная поверхность Q , как и невырожденный росток вида (4), характеризуется как поверхность, имеющая тип d в начале координат. Пользуясь терминологией, предложенной в [9], можно сказать, что эти поверхности являются $(d-1)$ -невырожденными, тогда как невырожденность формы Леви – это тип 2 или 1-невырожденность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Любая модельная поверхность голоморфно однородна. При этом подгруппа группы голоморфных преобразований Q , действующая на Q транзитивно, состоит из треугольных преобразований вида*

$$z \rightarrow p + z, \quad w \rightarrow q + \rho w + P(z),$$

где $P(z)$ – полином степени $(d-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершим замену $z \rightarrow z + p$ с произвольным $p \in \mathbb{C}^n$ в уравнениях, задающих Q . Заметим, что

$$\begin{aligned} \Phi_d(z + p, \bar{z} + \bar{p}) &= \Phi_d(z, \bar{z}) + (\text{сумма многочленов из } \mathcal{F}_m \text{ при } m < d) \\ &\quad + \text{члены бистепеней } (m, 0) \text{ и } (0, m), \end{aligned}$$

поэтому последнее уравнение поверхности Q можно вернуть к исходному виду следующим образом. Те дополнительные члены последнего соотношения, которые есть сумма многочленов из $\mathcal{F}_m$ при $m < d$, уничтожаются вычитанием соответствующей линейной комбинации предыдущих соотношений. Это соответствует линейной замене переменных группы $w_2, \dots, w_{d-1}$, тогда как члены бистепеней $(m, 0)$

и $(0, m)$ убираются введением дополнительного полиномиального слагаемого от z в переменную w_d . После этого аналогично поступаем со всеми остальными соотношениями от $(d-1)$ -го до первого. Для завершения доказательства осталось заметить, что на Q действует группа “вертикальных” сдвигов $z \rightarrow z, w \rightarrow q + w$ для любого $q \in \mathbb{R}^K$. Предложение доказано.

Введем в пространстве рядов от (z, w) и от $(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w)$ градуировку условиями

$$[z] = 1, \quad [\bar{z}] = 1, \quad [w_m] = m, \quad [\operatorname{Re} w_m] = m.$$

Рассмотрим росток поверхности M в начале координат, заданный в $\mathbb{C}^{n+K}$ уравнениями вида

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \Phi_2(z, \bar{z}) + F_{2,3}(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w) + F_{2,4} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots \\ \operatorname{Im} w_d &= \Phi_d(z, \bar{z}) + F_{d,d+1}(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w) + F_{d,d+2} + \cdots, \end{aligned} \tag{6}$$

где $F_{m,l}$ — полином веса l . И пусть имеется отображение вида

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \Lambda z + f_2 + \cdots, \\ w_2 &\rightarrow g_{2,1} + \rho_2 w_2 + g_{2,3} + g_{2,4} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots \\ w_d &\rightarrow g_{d,1} + \cdots + g_{d,d-1} + \rho_d w_d + g_{d,d+1} + g_{d,d+2} + \cdots, \end{aligned} \tag{7}$$

где $g_{m,l}$ имеет вес l , ростка M на росток того же вида $\widetilde{M}$, заданного соотношениями

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \tilde{\Phi}_2(z, \bar{z}) + \tilde{F}_{2,3}(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w) + \tilde{F}_{2,4} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots \\ \operatorname{Im} w_d &= \tilde{\Phi}_d(z, \bar{z}) + \tilde{F}_{d,d+1}(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w) + \tilde{F}_{d,d+2} + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

Отделяя младшие компоненты имеющегося в этой ситуации соотношения, получаем, что, во-первых, $g_{m,l} = 0$ при $l < m$, а во-вторых,

$$\begin{aligned} \rho_2 \Phi_2(z, \bar{z}) &= \tilde{\Phi}_2(\Lambda z, \overline{\Lambda z}), \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_d \Phi_d(z, \bar{z}) &= \tilde{\Phi}_d(\Lambda z, \overline{\Lambda z}), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\Lambda \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$, $\rho_m \in \operatorname{GL}(k_{m,n}, \mathbb{R})$ при $m = 2, \dots, (d-1)$ и $\rho_d \in \operatorname{GL}(k, \mathbb{R})$.

Это позволяет сформулировать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1) Если $(f, g_2, \dots, g_d)$ – отображение ростка M в росток $\widetilde{M}$, то $f = \Lambda z + f_2 + \dots$, $g_m = \rho_m \zeta + g_{m,m+1} + \dots$, $m = 2, \dots, d$, причем $\tilde{\Phi}_m(\Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \rho_m \Phi_m(z, z, \bar{z})$.

2) Линейная часть отображения имеет следующий блочно-треугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & * & * & * \\ 0 & \rho_2 & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \rho_d \end{pmatrix}.$$

3) Линейное отображение $z \rightarrow \Lambda z$, $w_j \rightarrow \rho_j w_j$, $j = 2, \dots, d$, является отображением между касательными модельными поверхностями.

4) Если две модельные поверхности голоморфно эквивалентны, то они эквивалентны линейно.

5) Действие голоморфного отображения на росток поверхности порождает следующее действие группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$:

$$\Phi_d(z, z, \bar{z}) \rightarrow \rho_d \Phi(\Lambda^{-1} z, \overline{\Lambda^{-1} z}).$$

6) Линейная подгруппа группы голоморфных автоморфизмов модельной поверхности – это группа вида $z \rightarrow \Lambda z$, $w_m \rightarrow \rho_m w_m$, где $\Phi_m(\Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \rho_m \Phi(z, z, \bar{z})$, $m = 2, \dots, d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть Q – модельная поверхность степени $d \geq 4$.

а) Линейная независимость координат формы Φ_d является необходимым и достаточным условием конечномерности группы автоморфизмов модельной поверхности.

б) Если линейная независимость имеется, то алгебра ее инфинитезимальных автоморфизмов состоит из векторных полей, чьи степени не превосходят двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наличие линейной зависимости координат позволяет линейной заменой по w сделать одну из координат Φ , например первую, равной нулю. Тогда любые вещественно-аналитические замены соответствующей координаты (при сохранении остальных неподвижными) являются автоморфизмами поверхности. Это доказывает необходимость в п. а).

Для того чтобы доказать достаточность, будем доказывать конечномерность алгебры голоморфных векторных полей, т.е. полей, порождающих локальные однопараметрические группы голоморфных автоморфизмов Q . Это вещественные поля вида

$$X = 2 \operatorname{Re} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + g_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + \dots + g_d \frac{\partial}{\partial w_d} \right),$$

где коэффициенты голоморфны в окрестности нуля, а на M они удовлетворяют

условию касания:

$$\begin{aligned}
2) \quad & \frac{1}{2i}(g_2 - \bar{g}_2) = \Phi_{(1,1)}(z\bar{f}) + \Phi_{(1,1)}(f\bar{z}), \\
3) \quad & \frac{1}{2i}(g_3 - \bar{g}_3) = \Phi_{(2,1)}(z^2\bar{f}) + 2\Phi_{(2,1)}(fz\bar{z}) + 2\Phi_{(1,2)}(z\bar{z}\bar{f}) + \Phi_{(1,2)}(f\bar{z}^2), \\
& \dots\dots\dots (10) \\
d) \quad & -\frac{1}{2i}(g_d - \bar{g}_d) = \Phi_{(d-1,1)}(z^{d-1}\bar{f}) + (d-1)\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-2)}f\bar{z}) \\
& \quad + 2\Phi_{(d-2,2)}(z^{(d-2)}\bar{z}\bar{f}) + \dots + 2\Phi_{(2,d-2)}(zf\bar{z}^{(d-2)}) \\
& \quad + (d-1)\Phi_{(1,d-1)}(z, \bar{z}^{(d-2)}\bar{f}) + \Phi_{(1,d-1)}(fz^{(d-1)}).
\end{aligned}$$

Здесь запись вида $\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\bar{f})$ означает результат подстановки в полилинейную форму $\Phi_{(d-1,1)}$ от z и $\bar{z}$ вместо первого аргумента z векторной формулы f , т.е. $\Phi_{(d-1,1)}(f, z, \dots, z, \bar{z})$. Аналогично, запись $\Phi_{(d-2,1)}(z^{(d-2)}f\bar{z})$ означает результат подстановки в ту же форму $\bar{f}$ вместо $\bar{z}$. В этих соотношениях будем отделять компоненты фиксированных бистепеней. При этом будем использовать обозначения $x_j = \text{Re}(w_j)$, $\Delta_{(p,q)}f = \partial_{x_{p+q}}f(\Phi_{(p,q)})$ (значение частного дифференциала на форме). Выражения такого вида естественно возникают в тейлоровских разложениях $f(z, x + i\Phi)$ в точке (z, x) , а также разложения вида $f(z, w) = \sum f_m(z, w)$ и $g_j(z, w) = \sum g_{(j,m)}(z, w)$, где m – номер однородной по z компоненты. Мы можем предполагать, что $d > 3$, так как случай $d = 2$ разобран в [1], а $d = 3$ – в [2].

Итак, отделяя в соотношении (8) однородные компоненты и записывая полученные соотношения по координатно, получаем:

– компонента $(0, 0)$	– компонента $(1, 0)$
2) $\text{Im } g_{(2,0)} = 0,$	2) $g_{(2,1)} = 2i\Phi_{(1,1)}(z, \bar{f}_0),$
.....	3) $g_{(3,1)} = 0,$
d) $\text{Im } g_{(d,0)} = 0;$	
	d) $g_{(d,1)} = 0;$
– компонента $(m, 0)$ при $1 \leq m \leq d-1$	– компонента $(m, 0)$ при $m \geq d$
2) $g_{(2,m)} = 0,$	2) $g_{(2,m)} = 0,$
.....	
$m+1$) $g_{(m+1,m)} = 2i\Phi_{(m,1)}(z^m, \bar{f}_0),$	d) $g_{(d,m)} = 0;$
.....	
d) $g_{(d,m)} = 0;$	
– компонента $(1, 1)$	
2) $\Delta_{(1,1)}g_{(2,0)} = 2\text{Re } \Phi_{(1,1)}(f_1\bar{z}),$	
3) $\Delta_{(1,1)}g_{(3,0)} = 2\text{Re } 2\Phi_{(2,1)}(f_0z\bar{z}),$	
4) $\Delta_{(1,1)}g_{(4,0)} = 0,$	
.....	
d) $\Delta_{(1,1)}g_{(d,0)} = 0;$	

– компонента $(2, 1)$

$$2) \triangle_{(2,1)}g_{(2,0)} = 2\Phi_{(1,1)}(f_2\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\triangle_{(1,1)}\bar{f}_0),$$

$$3) \triangle_{(2,1)}g_{(3,0)} = 4\Phi_{(2,1)}(f_1z\bar{z}) + 2\Phi_{(2,1)}(z^2\bar{f}_1),$$

$$4) \triangle_{(2,1)}g_{(4,0)} = 6\Phi_{(3,1)}(f_0z^2\bar{z}) + 4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{f}_0),$$

$$5) \triangle_{(2,1)}g_{(5,0)} = 0,$$

.....

$$d) \triangle_{(2,1)}g_{(d,0)} = 0;$$

– компонента $(m, 1)$ при $2 \leq m \leq d-2$

$$2) \triangle_{(m,1)}g_{(2,0)} = 2\Phi_{(1,1)}(f_m\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\triangle_{(m-1,1)}\bar{f}_0),$$

$$3) \triangle_{(m,1)}g_{(3,0)} = 4\Phi_{(2,1)}(f_{(m-1)}z\bar{z}) - 4i\Phi_{(2,1)}(z^2\triangle_{(m-2,1)}\bar{f}_0),$$

.....

$$m) \triangle_{(m,1)}g_{(m,0)} = 2(m-1)\Phi_{(m-1,1)}(f_2z^{(m-2)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z^{(m-1)}\triangle_{(1,1)}\bar{f}_0),$$

$$m+1) \triangle_{(m,1)}g_{(m+1,0)} = 2m\Phi_{(m,1)}(f_1z^{(m-1)}\bar{z}) + 2\Phi_{(m,1)}(z^m\bar{f}_1),$$

$$m+2) \triangle_{(m,1)}g_{(m+2,0)} = 2(m+1)\Phi_{(m+1,1)}(f_0z^m\bar{z}) + 4\Phi_{(m,2)}(z^m\bar{z}\bar{f}_0),$$

$$m+3) \triangle_{(m,1)}g_{(m+3,0)} = 0,$$

.....

$$d) \triangle_{(m,1)}g_{(d,0)} = 0;$$

– компонента $(d-1, 1)$

$$2) \triangle_{(d-1,1)}g_{(2,0)} = 2\Phi_{(1,1)}(f_{(d-1)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\triangle_{(d-2,1)}\bar{f}_0),$$

.....

$$d-1) \triangle_{(d-1,1)}g_{(d-1,0)} = 2(d-2)\Phi_{(d-2,1)}(f_2z^{(d-3)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(d-2,1)}(z^{(d-2)}\triangle_{(1,1)}\bar{f}_0),$$

$$d) \triangle_{(d-1,1)}g_{(d,0)} = 2(d-1)\Phi_{(d-1,1)}(f_1z^{(d-2)}\bar{z}) + 2\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\bar{f}_1);$$

– компонента $(d, 1)$

$$2) \Phi_{(1,1)}(f_d\bar{z}) = 2i\Phi_{(1,1)}(z\triangle_{(d-1,1)}\bar{f}_0),$$

$$3) 2\Phi_{(2,1)}(f_{(d-1)}z\bar{z}) = 2i\Phi_{(2,1)}(z^2\triangle_{(d-2,1)}\bar{f}_0),$$

.....

$$d) (d-1)\Phi_{(d-1,1)}(f_2z^{(d-2)}\bar{z}) = 2\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\bar{f}_1);$$

– компонента $(d+1, 1)$

$$2) \Phi_{(1,1)}(f_{(d+1)}\bar{z}) = 0,$$

$$3) 2\Phi_{(2,1)}(f_dz\bar{z}) = 2i\Phi_{(2,1)}(z^2\triangle_{(d-1,1)}\bar{f}_0),$$

.....

$$d) (d-1)\Phi_{(d-1,1)}(f_3z^{(d-2)}\bar{z}) = 2\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\triangle_{(2,1)}\bar{f}_0);$$

– компонента $(d+2, 1)$

$$2) \Phi_{(1,1)}(f_{(d+2)}\bar{z}) = 0,$$

$$3) \Phi_{(2,1)}(f_{(d+1)}z\bar{z}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& 4) \quad 3\Phi_{(3,1)}(f_d z^2 \bar{z}) = 2i\Phi_{(3,1)}(z^3 \Delta_{(d-1,1)} \bar{f}_0), \\
& \dots\dots\dots \\
& d) \quad (d-1)\Phi_{(d-1,1)}(f_d z^{(d-2)} \bar{z}) = 2\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)} \Delta_{(3,1)} \bar{f}_0); \\
& - \dots\dots\dots \\
& - \text{компонента } (2d-2, 1) \\
& 2) \quad \Phi_{(1,1)}(f_{(2d-2)} \bar{z}) = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& d-1) \quad \Phi_{(d-2,1)}(f_{(d+1)} z^{(2d-3)} \bar{z}) = 0, \\
& d) \quad (d-1)\Phi_{(d-1,1)}(f_d z^{(d-2)} \bar{z}) = 2i\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)} \Delta_{(d-1,1)} \bar{f}_0); \\
& - \text{компонента } (m, 1) \text{ при } m \geq 2d-1 \\
& 2) \quad \Phi_{(1,1)}(f_m \bar{z}) = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& d) \quad \Phi_{(d-1,1)}(f_{(m+2-d)} z^{(d-2)} \bar{z}) = 0.
\end{aligned}$$

При нумерации полученных соотношений будем использовать тройную индексацию; в записи (p, q, r) пара (p, q) – это бистепень, а r – номер координаты.

В соответствии с построением координатные формы Φ_m при $m < d$ образуют базис соответствующего пространства, поэтому при $p + q < d$ координаты $\Phi_{(p,q)}$ также образуют базис в пространстве многочленов бистепени (p, q) . Применяя это соображение к $\Phi_{(1,1)}$, из соотношения $(m, 1, 2)$ при $m \geq d+1$ получаем $f_{(d+1)} = f_{(d+2)} = \dots = 0$.

Рассмотрим, далее, соотношение $(d, 1, 2)$. Это соотношение должно выполняться с любой формой бистепени $(1, 1)$. Это равносильно тому, что соотношение выполняется для формы $z_j \bar{z}_l$ при любых j и l , т.е.

$$f_{(j,d)}(z^d) \bar{z}_l = 2iz_j(\Delta_{(d-1,1)} \bar{f}_0)_l,$$

откуда следует, что f_d и $\Delta_{(d-1,1)} \bar{f}_0$ имеют следующий вид:

$$f_d(z^d) = 2i\psi_d(z^{(d-1)} z), \quad \Delta_{(d-1,1)} \bar{f}_0 = \psi_d(z^{(d-1)} \bar{z}),$$

где $\psi_d(z^{(d-1)})$ – скалярный множитель, являющийся однородным многочленом степени $(d-1)$ от z . Теперь подставим полученные выражения в соотношение $(d+1, 1, 3)$. Получаем, что $\psi_d = 0$, т.е. $f_d(z^d) = 0$, $\Delta_{(d-1,1)} \bar{f}_0 = 0$. Таким же образом из пары соотношений $(d, 1, j)$ и $(d+1, 1, j+1)$ получаем, что $f_{(d-j+2)} = 0$ и $\Delta_{(d-j+1,1)} \bar{f}_0 = 0$. Итак, $f_3 = \dots = f_d = 0$ и $\Delta_{(2,1)} \bar{f}_0 = \dots = \Delta_{(d-1,1)} \bar{f}_0 = 0$. Из последнего соотношения получаем, что f_0 зависит лишь от переменных группы x_2 .

В наших соотношениях фигурируют операторы $\Delta_{(p,q)}$ лишь при $q = 1$. Чтобы упростить обозначения, будем вместо $\Delta_{(j-1,1)}$ писать Δ_j . Вместо f_0, f_1 и f_2 будем писать A, Bz и Cz^2 соответственно, а вместо $g_0 = (g_{(2,0)}, \dots, g_{(d,0)})$ будем писать $G = (G_2, \dots, G_d)$. В результате соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned}
& - \text{бистепень } (1, 1) \\
& 2) \quad \Delta_2 G_2 = 2 \operatorname{Re} \Phi_{(1,1)}(Bz \bar{z}),
\end{aligned}$$

$$3) \triangle_2 G_3 = 2 \operatorname{Re} 2\Phi_{(2,1)}(Az\bar{z}),$$

$$4) \triangle_2 G_4 = 0,$$

.....

$$d) \triangle_2 G_d = 0;$$

– бистепень $(2, 1)$

$$2) \triangle_3 G_2 = 2\Phi_{(1,1)}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\triangle_2\bar{A}),$$

$$3) \triangle_3 G_3 = 4\Phi_{(2,1)}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{(2,1)}(z^2\overline{Bz}),$$

$$4) \triangle_3 G_4 = 6\Phi_{(3,1)}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{A}),$$

$$5) \triangle_3 G_5 = 0,$$

.....

$$d) \triangle_3 G_d = 0;$$

– бистепень $(m-1, 1)$ при $3 \leq m \leq d-1$

$$2) \triangle_m G_2 = 0,$$

.....

$$m-2) \triangle_m G_{(m-2)} = 0,$$

$$m-1) \triangle_m G_{(m-1)} = 2(m-2)\Phi_{(m-2,1)}(Cz^2z^{(m-2)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(m-2,1)}(z^{(m-2)}\triangle_2\bar{A}),$$

$$m) \triangle_m G_m = 2(m-1)\Phi_{(m-1,1)}(Bzz^{(m-2)}\bar{z}) + 2\Phi_{(m-1,1)}(z^{(m-1)}\overline{Bz}),$$

$$m+1) \triangle_m G_{(m+1)} = 2m\Phi_{(m,1)}(Az^{(m-1)}\bar{z}) + 4\Phi_{(m-1,2)}(z^{(m-1)}\bar{z}\bar{A}),$$

$$m+2) \triangle_m G_{(m+2)} = 0,$$

.....

$$d) \triangle_m G_d = 0;$$

– бистепень $(d-1, 1)$

$$2) \triangle_d G_2 = 0,$$

.....

$$d-2) \triangle_d G_{(d-2)} = 0,$$

$$d-1) \triangle_d G_{(d-1)} = 2(d-2)\Phi_{(d-2,1)}(Cz^2z^{(d-3)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(d-2,1)}(z^{(d-2)}\triangle_2\bar{A}),$$

$$d) \triangle_d G_d = 2(d-1)\Phi_{(d-1,1)}(Bzz^{(d-2)}\bar{z}) + 2\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\overline{Bz});$$

– бистепень $(d, 1)$

$$2) 0 = 0,$$

.....

$$d-1) 0 = 0,$$

$$d) 0 = 2(d-1)\Phi_{(d-1,1)}(Cz^2z^{(d-2)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\triangle_2\bar{A}).$$

Воспользуемся тем, что операторы $\triangle_j$ коммутируют между собой, чтобы исключить из полученных соотношений G_p . Соотношения, полученные из коммутирования $\triangle_p$ и $\triangle_q$, будем обозначать через $(p \leftrightarrow q)$; если мы хотим уточнить координату, то пишем $(p \leftrightarrow q, r)$. Получаем

(3 $\leftrightarrow$ 2)

$$2) \triangle_3[2 \operatorname{Re} \Phi_{(1,1)}(Bz\bar{z})] = \triangle_2[2\Phi_{(1,1)}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\triangle_2\bar{A})],$$

$$3) \triangle_3[2 \operatorname{Re} 2\Phi_{(2,1)}(Az\bar{z})] = \triangle_2[4\Phi_{(2,1)}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{(2,1)}(z^2\overline{Bz})],$$

$$4) 0 = \triangle_2[6\Phi_{(3,1)}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{A})];$$

(4 $\leftrightarrow$ 2)

$$2) \triangle_4[2 \operatorname{Re} \Phi_{(1,1)}(Bz\bar{z})] = 0,$$

$$3) \triangle_4[2 \operatorname{Re} 2\Phi_{(2,1)}(Az\bar{z})] = \triangle_2[2\Phi_{(2,1)}(Cz^2z\bar{z}) - 4i\Phi_{(2,1)}(z^2\triangle_2\bar{A})],$$

$$4) 0 = \triangle_2[6\Phi_{(3,1)}(Bzz^2\bar{z}) + 2\Phi_{(3,1)}(z^3\overline{Bz})],$$

$$5) 0 = \triangle_2[8\Phi_{(4,1)}(Az^3\bar{z}) + 4\Phi_{(3,2)}(z^3\bar{z}\bar{A})];$$

(5 $\leftrightarrow$ 2)

$$2) \triangle_5[2 \operatorname{Re} \Phi_{(1,1)}(Bz\bar{z})] = 0,$$

$$3) \triangle_5[2 \operatorname{Re} 2\Phi_{(2,1)}(Az\bar{z})] = 0,$$

$$4) 0 = \triangle_2[6\Phi_{(3,1)}(Cz^2z^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(3,1)}(z^3\triangle_2\bar{A})],$$

$$5) 0 = \triangle_2[8\Phi_{(4,1)}(Bzz^3\bar{z}) + 2\Phi_{(4,1)}(z^4\overline{Bz})],$$

$$6) 0 = \triangle_2[10\Phi_{(5,1)}(Az^4\bar{z}) + 4\Phi_{(4,2)}(z^4\bar{z}\bar{A})];$$

.....

(m $\leftrightarrow$ 2)

$$2) \triangle_m[2 \operatorname{Re} \Phi_{(1,1)}(Bz\bar{z})] = 0,$$

$$3) \triangle_m[2 \operatorname{Re} 2\Phi_{(2,1)}(Az\bar{z})] = 0,$$

.....

$$m-1) 0 = \triangle_2[2(m-2)\Phi_{(m-2,1)}(Cz^2z^{(m-3)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(m-2,1)}(z^{(m-2)}\triangle_2\bar{A})],$$

$$m) 0 = \triangle_2[2(m-1)\Phi_{(m-1,1)}(Bzz^{(m-2)}\bar{z}) + 2\Phi_{(m-1,1)}(z^{(m-1)}\overline{Bz})],$$

$$m+1) 0 = \triangle_2[2m\Phi_{(m,1)}(Az^{(m-1)}\bar{z}) + 4\Phi_{(m-1,2)}(z^{(m-1)}\bar{z}\bar{A})];$$

.....

(d $\leftrightarrow$ 2)

$$2) \triangle_d[2 \operatorname{Re} \Phi_{(1,1)}(Bz\bar{z})] = 0,$$

$$3) \triangle_d[2 \operatorname{Re} 2\Phi_{(2,1)}(Az\bar{z})] = 0,$$

.....

$$d-1) 0 = \triangle_2[2(d-2)\Phi_{(d-2,1)}(Cz^2z^{(d-3)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(d-2,1)}(z^{(d-2)}\triangle_2\bar{A})],$$

$$d) 0 = \triangle_2[2(d-1)\Phi_{(d-1,1)}(Bzz^{(d-2)}\bar{z}) + 2\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\overline{Bz})];$$

(4 $\leftrightarrow$ 3)

$$2) \triangle_4[2\Phi_{(1,1)}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\triangle_2\bar{A})] = 0,$$

$$3) \triangle_4[4\Phi_{(2,1)}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{(2,1)}(z^2\overline{Bz})] \\ = \triangle_3[2\Phi_{(2,1)}(Cz^2z\bar{z}) - 4i\Phi_{(2,1)}(z^2\triangle_2\bar{A})] = 0,$$

$$4) \triangle_4[6\Phi_{(3,1)}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{A})] = \triangle_3[6\Phi_{(3,1)}(Bzz^2\bar{z}) + 2\Phi_{(3,1)}(z^3\overline{Bz})],$$

$$5) 0 = \triangle_3[8\Phi_{(4,1)}(Az^3\bar{z}) + 4\Phi_{(3,2)}(z^3\bar{z}\bar{A})];$$

(5 $\leftrightarrow$ 3)

- 2) $\Delta_5[2\Phi_{(1,1)}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\Delta_2\bar{A})] = 0,$
- 3) $\Delta_5[4\Phi_{(2,1)}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{(2,1)}(z^2\overline{Bz})] = 0,$
- 4) $\Delta_5[6\Phi_{(3,1)}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{A})]$
 $= \Delta_3[6\Phi_{(3,1)}(Cz^2z^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(3,1)}(z^3\Delta_2\bar{A})] = 0,$
- 5) $0 = \Delta_3[8\Phi_{(4,1)}(Bzz^3\bar{z}) + 2\Phi_{(4,1)}(z^4\overline{Bz})],$
- 6) $0 = \Delta_3[10\Phi_{(5,1)}(Az^4\bar{z}) + 4\Phi_{(4,2)}(z^4\bar{z}\bar{A})];$

(m $\leftrightarrow$ 3)

- 2) $\Delta_m[2\Phi_{(1,1)}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\Delta_2\bar{A})] = 0,$
- 3) $\Delta_m[4\Phi_{(2,1)}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{(2,1)}(z^2\overline{Bz})] = 0,$
- 4) $\Delta_m[6\Phi_{(3,1)}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{A})] = 0,$
-
- m - 1) $0 = \Delta_3[2(m-2)\Phi_{(m-2,1)}(Cz^2z^{(m-3)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(m-2,1)}(z^{(m-2)}\Delta_2\bar{A})],$
- m) $0 = \Delta_3[2(m-1)\Phi_{(m-1,1)}(Bzz^{(m-2)}\bar{z}) + 2\Phi_{(m-1,1)}(z^{(m-1)}\overline{Bz})],$
- m + 1) $0 = \Delta_3[2m\Phi_{(m,1)}(Az^{(m-1)}\bar{z}) + 4\Phi_{(m-1,2)}(z^{(m-1)}\bar{z}\bar{A})];$

(d $\leftrightarrow$ 3)

- 2) $\Delta_d[2\Phi_{(1,1)}(Cz^2\bar{z}) - 4i\Phi_{(1,1)}(z\Delta_2\bar{A})] = 0,$
- 3) $\Delta_d[4\Phi_{(2,1)}(Bzz\bar{z}) + 2\Phi_{(2,1)}(z^2\overline{Bz})] = 0,$
- 4) $\Delta_d[6\Phi_{(3,1)}(Az^2\bar{z}) + 4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{A})] = 0,$
-
- d - 1) $0 = \Delta_3[2(d-2)\Phi_{(d-2,1)}(Cz^2z^{(d-3)}\bar{z}) - 4i\Phi_{(d-2,1)}(z^{(d-2)}\Delta_2\bar{A})],$
- d) $0 = \Delta_3[2(d-1)\Phi_{(d-1,1)}(Bzz^{(d-2)}\bar{z}) + 2\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}\overline{Bz})].$

Пусть $d = 4$; тогда из соотношения $(4 \leftrightarrow 2, 3)$ следует, что $A''_{(x_2, x_2)} = 0$ и $C'_{x_2} = 0$. Из соотношения $(3 \leftrightarrow 2, 3)$ следует, что $B'_{x_2} = 0$. Из соотношения $(3 \leftrightarrow 2, 2)$ и соотношения $(4 \leftrightarrow 3, 4)$ следует, что $B'_{x_3} = 0$. Из соотношения $(4 \leftrightarrow 3, 3)$ следует, что $C'_{x_3} = 0$ и $B'_{x_4} = 0$. И, наконец, из соотношения $(4 \leftrightarrow 3, 2)$ следует, что $C'_{x_4} = 0$.

Итак, мы получили, что A линейно зависит от x_2 , т.е. $A = A_0 + A_1x_2$, а B и C от x не зависят. Возвращаясь к соотношениям, включающим G , получаем, что G зависит от x не более чем квадратичным образом.

Теперь пусть $d \geq 5$. Рассмотрим соотношение $(3 \leftrightarrow 2, 4)$. Можно считать, что базис в пространстве $\mathcal{F}_4$ выбран согласованно с разложением этого пространства по бистепеням, поэтому данное соотношение означает, что $\Delta_2[6\Phi_{(3,1)}(Az^2\bar{z})] = 0$ и $\Delta_2[4\Phi_{(2,2)}(z^2\bar{z}\bar{A})] = 0$, откуда следует, что $A'_{x_2} = 0$, т.е. A является константой.

Теперь из $(3 \leftrightarrow 2, 3)$ получаем, что $B'_{x_2} = 0$; из $(4 \leftrightarrow 2, 3)$ получаем, что $C'_{x_2} = 0$; из $(4 \leftrightarrow 3, 3)$ получаем, что $C'_{x_4} = 0$; из $(4 \leftrightarrow 3, 3)$ получаем, что $C'_{x_3} = 0$ и $B'_{x_4} = 0$. Далее, для $m = 5, \dots, d$ из $(m \leftrightarrow 3, 2)$ получаем, что $C'_{x_m} = 0$; из $(m \leftrightarrow 3, 3)$ получаем, что $B'_{x_3} = 0$. Таким образом, как B , так и C от x не

зависят. Возвращаясь к соотношениям, включающим G , получаем, что G зависит от x линейно, точнее,

$$G_m = q_m + r_m x_{(m-1)} + s_m x_m + t_m x_{(m+1)}.$$

Этим завершается доказательство а). Собирая информацию о коэффициентах полей, получаем б). Предложение доказано.

Распространим нашу градуировку на алгебру векторных полей, полагая

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \right] = -1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_m} \right] = -m, \quad [z] = 1, \quad [w_m] = m.$$

СЛЕДСТВИЕ 7. а) Если $d \geq 4$, то алгебра $\text{aut } Q$ инфинитезимальных автоморфизмов модельной поверхности степени d является градуированной алгеброй Ли вида

$$\text{aut } Q = g_{-d} + \dots + g_{-1} + g_0 + g_1.$$

б) При этом алгебра $\text{aut } Q$ распадается в прямую сумму трех подалгебр: $g_{-} \oplus g_0 \oplus g_1$. Подалгебра $g_{-} = g_{-d} + \dots + g_{-1}$ соответствует подгруппе треугольных преобразований, действующей на Q транзитивно и описанной в предложении 3; g_0 соответствует подгруппе линейных автоморфизмов, описанных в предложении 4; g_1 – группе нелинейных автоморфизмов, сохраняющих начало координат неподвижным. При этом g_{-} нильпотентна, а g_1 коммутативна.

с) Если $d \geq 5$, то компоненты алгебры имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{-d} &= \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[q_d \frac{\partial}{\partial w_d} \right] \right\}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_{-2} &= \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[q_2 \frac{\partial}{\partial w_2} \right] \right\}, \\ g_{-1} &= \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[p \frac{\partial}{\partial z} + 2i\Phi_{(1,1)}(z, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial w_2} + \left(r_3 w_2 + 2i\Phi_{(2,1)}(z^2, \bar{p}) \frac{\partial}{\partial w_3} \right) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots + (r_d w_{(d-1)} + 2i\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-1)}, \bar{p})) \frac{\partial}{\partial w_d} \right] \right\}, \\ g_0 &= \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[Bz \frac{\partial}{\partial z} + s_2 w_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + \dots + s_d w_d \frac{\partial}{\partial w_d} \right] \right\}, \\ g_1 &= \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[C(z, z) \frac{\partial}{\partial z} + t_2 w_3 \frac{\partial}{\partial w_2} + \dots + t_{(d-1)} w_d \frac{\partial}{\partial w_{(d-1)}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

При $d = 4$ компоненты g_{-4} , g_{-3} , g_{-2} , g_{-1} , g_0 имеют такой же вид, тогда как

$$\begin{aligned} g_1 &= \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[(C(z, z) + a w_2) \frac{\partial}{\partial z} + (t_2 w_3 + 2i\Phi_{(1,1)}(z, \bar{a} w_2)) \frac{\partial}{\partial w_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (t_3 w_4 + 2i\Phi_{(2,1)}(z^2, \bar{a} w_2) + T(z, z)) \frac{\partial}{\partial w_3} + 2i\Phi_{(3,1)}(z^3, \bar{a} w_2) \frac{\partial}{\partial w_4} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $p \in \mathbb{C}^n$, $q_m \in \mathbb{R}^{k_m}$, причем эти параметры не связаны какими-либо ограничениями. На остальные параметры наложены те ограничения, которые обеспечивают условие касания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть M_0 – росток вида (5); тогда $\dim \text{Aut } M_0 \leq \dim \text{Aut } Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное доказательство вполне аналогично доказательствам соответствующих оценок для квадрики и кубики [1]. Оно представляет собой некую версию теоремы о неявной функции для формальных рядов с оценкой числа параметров.

Если Q вырождена, то неравенство становится верным и бессодержательным. Поэтому будем предполагать невырожденность. Мы докажем несколько более общее утверждение, а именно что отображение вида (7) ростка (6) на росток (8) определится не бóльшим числом параметров, чем автоморфизм соответствующей модельной поверхности. Записывая в виде соотношения в формальных рядах то, что (7) переводит (6) в (8), и отделяя в m -й координате соотношения компоненты веса $(l + m - 1)$, получаем

$$\begin{aligned} 2) \quad & -\frac{1}{2i}(g_{(2,l+1)} - \bar{g}_{(2,l+1)}) + \Phi_{(1,1)}(z\bar{f}_l) + \Phi_{(1,1)}(f_l\bar{z}) = F_{2,l+1} - \tilde{F}_{2,l+1} + \dots, \\ 3) \quad & -\frac{1}{2i}(g_{(3,l+2)} - \bar{g}_{(3,l+2)}) + \Phi_{(2,1)}(z^2\bar{f}_l) + 2\Phi_{(2,1)}(f_lz\bar{z}) + 2\Phi_{(1,2)}(z,\bar{z},\bar{f}_l) \\ & + \Phi_{(1,2)}(f_l,\bar{z}^2) = F_{3,l+2} - \tilde{F}_{3,l+2} + \dots, \\ & \dots\dots\dots \\ d) \quad & -\frac{1}{2i}(g_{(d,l+d-1)} - \bar{g}_{(d,l+d-1)}) + \Phi_{(d-1,1)}(z^{d-1}\bar{f}_l) + (d-1)\Phi_{(d-1,1)}(z^{(d-2)}f_l\bar{z}) \\ & + 2\Phi_{(d-2,2)}(z^{(d-2)}\bar{z}\bar{f}_l) + \dots + 2\Phi_{(2,d-2)}(zf_l\bar{z}^{(d-2)}) \\ & + (d-1)\Phi_{(1,d-1)}(z,\bar{z}^{(d-2)}\bar{f}_l) + \Phi_{(1,d-1)}(f_lz^{(d-1)}) \\ & = F_{(d,l+d-1)} - \tilde{F}_{(d,l+d-1)} + \dots, \end{aligned}$$

где в левых частях $w_m = x_m + i\Phi_m$, а многоточие в правых частях – это члены, зависящие от $f_j, g_{(m,j+m-1)}, F_{(m,j+m-1)}, \tilde{F}_{(m,j+m-1)}$ при $j < l$.

Эти соотношения позволяют последовательно вычислять компоненты отображения $(f_l, g_{(m,l+m-1)})$, решая алгебраическую систему линейных уравнений, правая часть которой зависит от компонент, вычисленных ранее. Размерность множества решений неоднородной системы не превышает размерности пространства решений однородной. Но однородные уравнения – это уравнения (10), определяющие алгебру автоморфизмов Q . Поэтому число свободных параметров, задающих отображение в классе формальных степенных рядов указанного вида, не превосходит размерности подалгебры $\text{aut}_+ Q$ и соответствующей ей группы. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Группа голоморфных преобразований $\text{Aut } Q$ – это подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$, чьи степени не превосходят $2d(n + K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводимое ниже рассуждение представляет собой модификацию доказательства Туманова [5] бирациональности автоморфизмов квадратичной модели. В [3] оно использовалось для доказательства рациональности автоморфизмов кубической модели.

Рассмотрим произвольный автоморфизм поверхности Q

$$\phi(z, w_2, \dots, w_d) = (Z(z, w_2, \dots, w_d), W_2(z, w_2, \dots, w_d), \dots, W_d(z, w_2, \dots, w_d)),$$

сохраняющий на месте начало координат. Пусть $X = (F, G_2, \dots, G_d)$ – инфинитезимальный автоморфизм. Рассмотрим присоединенное действие группы на алгебре $X(p) \rightarrow Y(p) = \phi_*^{-1} X(\phi(p)) = (f, g_2, \dots, g_d)$ или

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial Z}{\partial w_d} \\ \frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_2}{\partial w_d} \\ \frac{\partial W_3}{\partial z} & \frac{\partial W_3}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_3}{\partial w_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial W_d}{\partial z} & \frac{\partial W_d}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_d}{\partial w_d} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F(Z, W_2, \dots, W_d) \\ G_2(Z, W_2, \dots, W_d) \\ \dots \\ G_d(Z, W_2, \dots, W_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z, w_2, \dots, w_d) \\ g_2(z, w_2, \dots, w_d) \\ \dots \\ g_d(z, w_2, \dots, w_d) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $f, g_2, \dots, g_d$ – полиномы степени не выше второй. Подставляя в полученное соотношение вместо X векторные поля из $\text{aut}_- Q$, соответствующие векторам стандартного базиса $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}^{k_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{k_d}$, получаем

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial Z}{\partial w_d} \\ \frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_2}{\partial w_d} \\ \frac{\partial W_3}{\partial z} & \frac{\partial W_3}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_3}{\partial w_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial W_d}{\partial z} & \frac{\partial W_d}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_d}{\partial w_d} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2i\Phi_{(1,1)}(Z^2, E_n) & E_{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ r_3(E_n)W_2 + 2i\Phi_{(2,1)}(Z^2, E_n) & 0 & E_{k_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_d(E_n)W_{(d-1)} + 2i\Phi_{(d-1,1)}(Z^2, E_n) & 0 & 0 & \dots & E_{k_d} \end{pmatrix},$$

где E_m – единичная матрица размера $m \times m$, а P представляет собой матрицу, чьи элементы – это полиномы степени не выше двух. Выразим якобиеву матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial Z}{\partial w_d} \\ \frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_2}{\partial w_d} \\ \frac{\partial W_3}{\partial z} & \frac{\partial W_3}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_3}{\partial w_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial W_d}{\partial z} & \frac{\partial W_d}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial W_d}{\partial w_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2i\Phi_{(1,1)}(Z^2, E_n) & E_{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ r_3(E_n)W_2 + 2i\Phi_{(2,1)}(Z^2, E_n) & 0 & E_{k_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_d(E_n)W_{(d-1)} + 2i\Phi_{(d-1,1)}(Z^2, E_n) & 0 & 0 & \dots & E_{k_d} \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (12)$$

Матрицу P^{-1} , как и остальные матрицы, будем представлять в блочном виде, и пусть R_{ij} – ее (i, j) -й блок. Отметим, что ее элементы являются рациональными функциями.

Группа $\text{Aut } Q$ содержит однопараметрическую подгруппу

$$\{z \rightarrow tz, w_2 \rightarrow t^2 w_2, \dots, w_d \rightarrow t^d w_d\},$$

которой соответствует поле ($F = z$, $G_2 = 2w_2$, ..., $G_d = dw_d$). Подставляя его в (11), получаем

$$\begin{pmatrix} Z \\ 2W_2 \\ \dots \\ dW_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial Z}{\partial w_d} \\ \frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial W_2}{\partial w_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial W_d}{\partial z} & \frac{\partial W_d}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial W_d}{\partial w_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_d \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $\alpha, \beta_2, \dots, \beta_d$ – полиномы не выше второй степени.

Выписывая 1-ю блок-координату (12), получаем рациональность производных Z . Теперь из 1-й координаты (13) получаем рациональность Z . Возвращаясь ко 2-й координате (12), получаем рациональность производных W_2 , а из 2-й координаты (13) – рациональность W_2 . Продолжая это вычисление, получаем рациональность всех координат автоморфизма ϕ . Если при этом следить за степенями, то получаем требуемую оценку на степени $(Z, W_2, \dots, W_d)$. Предложение доказано.

Оценку степени можно уточнить:

$$\deg Z \leq 2(n + K), \quad \deg W_m \leq 2m(n + K), \quad m = 2, \dots, d.$$

Полученные результаты можно резюмировать в виде следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для модельной поверхности Q типа (n, K) степени d , где $K_{d-1, n} < K \leq K_{d, n}$, выполняется следующий список утверждений:

3) голоморфная эквивалентность модельных поверхностей совпадает с их линейной эквивалентностью (предложение 5);

4) размерность группы роста вида (5) не превосходит размерности группы касательной модельной поверхности (экстремальность, предложение 8);

5) Q однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно; на самом деле транзитивность обеспечивают полиномиально-треугольные преобразования степени $(d - 1)$ (однородность, предложение 4);

6) группа голоморфных автоморфизмов Q конечномерна тогда и только тогда, когда поверхность невырождена, т.е. линейно независимы координатные формы (конечномерность, предложение 6);

7) алгебра Ли голоморфных векторных полей на Q – это некоторая под-алгебра алгебры полиномиальных векторных полей ограниченной степени,

при $d > 3$ степени коэффициентов не превосходят двух (полиномиальность алгебры, предложение 6);

8) группа голоморфных автоморфизмов Q – это подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$, чьи степени (числителей и знаменателей в несократимом представлении) не превосходят $2d(n + K)$ (рациональность группы, предложение 9).

Список литературы

1. Белошапка В. К. Конечномерность группы автоморфизмов вещественной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 2. С. 437–442.
2. Белошапка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. № 2. С. 203–219.
3. Белошапка В. К. Кубическая модель вещественного многообразия // Матем. заметки. 2001 (в печати).
4. Beloshapka V. K. CR-Varieties of the Type (1,2) as Varieties of “Super-High” Codimension // Russian Journal of Mathematical Physics. 1998. V. 5. № 2. P. 399–404.
5. Туманов А. Е. Конечномерность группы CR -автоморфизмов стандартного CR -многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 3. С. 651–659.
6. Чирка Е. М. Введение в геометрию CR -многообразий // УМН. 1991. Т. 46. № 1(277). С. 81–164.
7. Шананина Е. Н. Модели CR -многообразий типа $(1, k)$ при $3 \leq k \leq 7$ и их автоморфизмы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 3. С. 452–459.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Краткий теоретический курс. Т. 2. М.: Наука, 1972.
9. Baouendi M. S., Ebenfelt P., Rothschild L. P. Local geometric properties of real submanifolds in complex space. Preprint / Trita-Mat-1999-20 (Nov. 1999). Royal institute of technology, Stockholm, Sweden.

119899 Москва, Воробьевы горы,
Московский государственный университет,
механико-математический факультет
E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило в редакцию
13.II.2001