Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Бертран, В. В. Зудилин, Производные зигелевых модулярных форм и показательные функции, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 21–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:22:30

УДК 511.3

Д. Бертран, В. В. Зудилин

Производные зигелевых модулярных форм и показательные функции

Доказывается, что дифференциальное поле, порожденное зигелевыми модулярными формами, и дифференциальное поле, порожденное экспонентами многочленов, линейно разделены над $\mathbb{C}$. Вместе с теоремой из нашей предыдущей работы [3] этот результат дает полное многомерное обобщение теоремы Малера о степени трансцендентности поля, порожденного показательной функцией и производными модулярной функции. Приводятся два доказательства нашего результата: чисто алгебраическое и аналитическое, но в основе обоих лежат аргументы дифференциальной алгебры, а также устойчивость дифференциального поля, порожденного рациональными и модулярными функциями, под действием симплектической группы.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Введение и формулировка результатов

В 1969 г. К. Малер [1] доказал, что для любой модулярной функции $f: \{\tau \in \mathbb{C}: \text{Im } \tau > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$, отличной от постоянной, и любого ненулевого комплексного числа c пять функций

$$\tau, q(\tau) = e^{c\tau}, f(\tau), f'(\tau) \text{ и } f''(\tau)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$; здесь штрих обозначает дифференцирование по τ . Поскольку $f'''(\tau)$ рациональна над $\mathbb{C}(f(\tau), f'(\tau), f''(\tau))$, каждое из полей

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}(f(\tau), f'(\tau), f''(\tau)), \quad \mathbb{C}(\tau, f(\tau), f'(\tau), f''(\tau)), \\ &\mathbb{C}(q(\tau), f(\tau), f'(\tau), f''(\tau)), \quad \mathbb{C}(\tau, q(\tau), f(\tau), f'(\tau), f''(\tau)) \end{aligned}$$

является дифференциально замкнутым, и соответствующие степени трансцендентности над $\mathbb{C}$ равны 3, 4, 4, 5. Результат Малера был распространен, с одной стороны, на случай общих автоморфных функций одной переменной К. Нишиокой в статье [2] и, с другой стороны, на случай зигелевых модулярных функций произвольной степени в нашей совместной статье [3], однако соответствующий набор функций в [3] не содержит экспоненты. Цель настоящей работы – завершить обобщение работы [3] путем добавления показательных функций.

Для формулировки результатов мы воспользуемся обозначениями из [3]. Пусть g – положительное целое (обозначающее *степень* или *род*) и k – алгебраически замкнутое подполе $\mathbb{C}$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

Положим:

$\mathfrak{H}_g$ – верхнее полупространство Зигеля степени g ; $\mathbb{Q}$ -векторная группа Z_g , порожденная симметрическими матрицами порядка g , имеет размерность

$$n := \frac{g(g+1)}{2},$$

при этом $\mathfrak{H}_g$ открыто в $Z_g(\mathbb{C})$;

$\tau = (\tau_{jl})_{1 \leq j \leq l \leq g}$ – общая точка в $\mathfrak{H}_g$, так что $k(2\pi i\tau)$ можно рассматривать как поле рациональных функций на Z_g/k ;

$\delta = \{\delta_{jl}, 1 \leq j \leq l \leq g\}$, где

$$\delta_{jl} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \tau_{jl}}, \quad 1 \leq j < l \leq g, \quad \delta_{jj} = \frac{1}{\pi i} \frac{\partial}{\partial \tau_{jj}}, \quad 1 \leq j \leq g;$$

эти n частных производных (дифференцирований) образуют $k(2\pi i\tau)$ -базис пространства $\text{Der}(k(2\pi i\tau)/k)$;

Γ – конгруэнц-подгруппа симплектической группы $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ (или, что то же самое, подгруппа конечного индекса в случае $g > 1$);

$K := K(\Gamma, k)$ – поле модулярных функций относительно конгруэнц-подгруппы Γ ; как известно, это поле является конечно порожденным расширением k , имеющим степень трансцендентности

$$\text{tr deg}_k K = \frac{g(g+1)}{2} = n;$$

при $g > 1$ поле $K \otimes_k \mathbb{C}$ отождествляется с полем мероморфных на $\mathfrak{H}_g$ функций, инвариантных под действием группы Γ ;

$M := M(\Gamma, k)$ – δ -дифференциальное поле, порожденное K , т.е. поле, порожденное над k всеми частными δ_{jl} -производными любого порядка элементов из K .

В [3, теорема 1] мы доказали, что δ -дифференциальное поле M является конечным расширением поля, порожденного δ -частными производными элементов из K порядка не выше 2, и имеет *конечную степень трансцендентности над k* , равную

$$\text{tr deg}_k M = \dim Sp_{2g} = 2g^2 + g; \quad (1)$$

более того, *поля M и $\mathbb{C}(\tau)$ линейно разделены над k* , поэтому

$$\text{tr deg}_k M(\tau) = \dim Sp_{2g} + n = \frac{1}{2}g(5g+3). \quad (2)$$

Мы обобщаем эту теорему следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – δ -дифференциальное поле, отвечающее полю модулярных функций K , и пусть c – произвольное ненулевое комплексное число. Тогда показательные функции $e^{c\tau_{jl}}$, $1 \leq j \leq l \leq g$, алгебраически независимы над $M(\tau)$, поэтому

$$\text{tr deg}_k M(\tau, e^{c\tau}) = \dim Sp_{2g} + 2n = 3g^2 + 2g.$$

Настоящая работа устроена следующим образом. § 2 содержит некоторые вспомогательные утверждения о действии группы Γ на $\mathfrak{H}_g$ и Z_g . В § 3, 4 мы приводим два независимых доказательства теоремы 1. Более точно, доказательство из § 3 основано на теореме Акса (функциональной версии гипотезы Шенуэла) и имеет чисто алгебраическую природу, в то время как доказательство из § 4 использует более простую версию теоремы Акса (а именно, доказанный Колчиным мультипликативный аналог теоремы Островского) и аналитические рассуждения. На самом деле, в § 4 мы доказываем следующее усиление теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *В обозначениях теоремы 1 пусть $\{Q_1, \dots, Q_N\}$ – произвольное множество многочленов от переменных $\tau = (\tau_{jl})_{1 \leq j \leq l \leq g}$ с комплексными коэффициентами и без свободных членов. Предположим, что многочлены $Q_1, \dots, Q_N$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда функции $e^{Q_1(\tau)}, \dots, e^{Q_N(\tau)}$ алгебраически независимы над $M(\tau)$.*

Наконец, § 5 посвящен изучению модулярных тэта-констант; особое внимание уделяется роду 2, в котором мы приводим явные выражения для разложений Фурье некоторых логарифмических производных тэта-констант (т.е. разложений в терминах показательных функций $e^{c\tau_{jl}}$ при $c = \pi i$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Несмотря на то, что наши рассуждения следуют идеям доказательства из статьи [2], представленные здесь как алгебраический, так и аналитический методы добавления показательных функций к дифференциальному полю, порожденному модулярными формами, являются новыми даже в случае рода 1. Второй автор использовал аналогичные аргументы в другой работе [4] для добавления показательной функции к дифференциальному полю, порожденному так называемым (квантовым) спариванием Юкавы.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Как отмечено в [3], достаточно доказать наши теоремы в случае полной модулярной группы

$$\Gamma = Sp_{2g}(\mathbb{Z});$$

кроме того, не ограничивая общности можно считать, что поле констант совпадает с полем комплексных чисел:

$$k = \mathbb{C}.$$

В дальнейшем мы будем считать эти требования выполненными.

Точно так же, как и в [1], [2], следующее утверждение играет ключевую роль в наших доказательствах. Вместе с конечностью степени трансцендентности M над $\mathbb{C}$ (см. формулу (1) из § 1 и далее § 3) или, альтернативно, с алгебраической независимостью τ_{jl} над M (см. формулу (2) из § 1 и далее § 4) нам, в действительности, понадобится всего лишь одно свойство дифференциального поля $M(\tau)$ ¹. Напомним, что группа Γ представляет дробно-линейное действие (слева) на верхнем полупространстве Зигеля $\mathfrak{H}_g$:

$$(\gamma, \tau) \mapsto \gamma \cdot \tau := (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1} \quad \text{для всех} \quad \left(\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau\right) \in \Gamma \times \mathfrak{H}_g,$$

¹См. замечания 2, 3 и 4 в конце § 4, в которых приводится более детальное сравнение методов двух наших доказательств.

так что она действует (справа) на поле $\mathfrak{M}$ мероморфных на $\mathfrak{H}_g$ функций по правилу

$$(\gamma, f) \mapsto \gamma \cdot f: \tau \mapsto (\gamma \cdot f)(\tau) := f(\gamma \cdot \tau) \quad \text{для всех } (\gamma, f) \in \Gamma \times \mathfrak{M}.$$

Подполе M поля $\mathfrak{M}$ не является устойчивым под действием Γ , но имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Поле $M(\tau)$ устойчиво под действием группы Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $m = 0, 1, \dots, \infty$ так же, как и в [3, § 4], обозначим через $K^{(m)}$ поле, порожденное над $\mathbb{C}$ всеми δ -производными порядка не выше m всех элементов из K . Тогда $K^{(0)} = K \subset K^{(1)} \subset \dots \subset K^{(\infty)} = M$. Индукцией по m покажем устойчивость $K^{(m)}(\tau)$ под действием Γ . Определение поля K делает это утверждение очевидным при $m = 0$ (а также при $m = 1$ согласно [3, § 5, формула (4)]). В случае произвольного m рассмотрим произвольный элемент f поля $K^{(m)}(\tau)$ и произвольный $\gamma \in \Gamma$; напомним, что дифференциал в точке τ автоморфизма $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ группы $\mathfrak{H}_g$ задается формулой

$$d_\tau \gamma = {}^t(c\tau + d)^{-1} d\tau (c\tau + d)^{-1}.$$

Поскольку

$$d_\tau(\gamma \cdot f) = d_{\gamma \cdot \tau} f \circ d_\tau \gamma, \quad (d_\tau \gamma)^{-1} = d_{\gamma \cdot \tau}(\gamma^{-1})$$

и $g = \gamma \cdot f$ лежит в $K^{(m)}(\tau)$ по индуктивному предположению, мы заключаем, что каждая компонента $\gamma \cdot (\delta_{jl} f)$ дифференциала $d_{\gamma \cdot \tau} f$ принадлежит полю, порожденному над $K^{(m)}(\tau)$ всеми δ -производными первого порядка всех элементов g из $K^{(m)}(\tau)$. Но последнее поле совпадает с $K^{(m+1)}(\tau)$, и поэтому $K^{(m+1)}(\tau)$ является устойчивым под действием γ . Лемма доказана.

Следующие утверждения этого параграфа являются упражнениями по коммутативной алгебре.

ЛЕММА 2. *Многочлен $\det \tau \in \mathbb{C}[\tau_{jl}, 1 \leq j \leq l \leq g]$ неприводим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. с упражнением 3 из [5, § 30], в котором рассматривается случай произвольной матрицы). Достаточно показать неприводимость многочлена

$$P_g(\tau_1, \dots, \tau_g) = \det \tau^*, \quad \text{где } \tau_{jl}^* = \begin{cases} \tau_j, & \text{если } j = l, \\ 1, & \text{если } j = l + 1 \text{ или } l = j + 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Действительно, при такой специализации общая степень g многочлена $\det \tau$ не убывает. Мы докажем наше утверждение индукцией по g , начиная с многочленов $P_1(\tau_1) = \tau_1$ и $P_2(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 \tau_2 - 1$, неприводимость которых очевидна. Раскладывая $\det \tau^*$ по последнему столбцу (или строке), получаем

$$P_g(\tau_1, \dots, \tau_g) = \tau_g P_{g-1}(\tau_1, \dots, \tau_{g-1}) - P_{g-2}(\tau_1, \dots, \tau_{g-2}).$$

Предположим теперь, что многочлен P_g приводим. Применяя лемму Гаусса к кольцу $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_{g-1}][\tau_g]$, согласно индукционному предположению заключаем, что многочлены P_{g-1} и P_{g-2} делят друг друга, а это, очевидно, невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ многочлен $\det(\tau - m\mathbf{1}_g) \in \mathbb{C}[\tau]$ неприводим. В частности, для любой пары различных целых m_1, m_2 многочлены $\det(\tau - m_1\mathbf{1}_g)$ и $\det(\tau - m_2\mathbf{1}_g)$ взаимно просты в $\mathbb{C}[\tau]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\tau' = \tau - m\mathbf{1}_g$, мы сводим первое утверждение к лемме 2. Второе утверждение следует из невырожденности $\det(\tau - m_2\mathbf{1}_g)$ в точке $\tau = m_1\mathbf{1}_g$.

В следующих утверждениях мы рассматриваем левое действие группы Γ на полном векторном пространстве Z_g симметрических матриц (расширяющее указанное выше действие на $\mathfrak{H}_g$) и соответствующее правое действие Γ на поле $\mathbb{C}(\tau)$ рациональных функций на $Z_g/\mathbb{C}$. В частности, нам понадобятся элементы Γ вида

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_g & -\mathbf{1}_g \\ \mathbf{1}_g & -m\mathbf{1}_g \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}), \quad \gamma_m(\tau) := \gamma_m \cdot \tau = -(\tau - m\mathbf{1}_g)^{-1},$$

где m – произвольное рациональное целое. Для каждого такого m положим

$$\mathcal{D}_m = \{\tau \in Z_g : \det(\tau - m\mathbf{1}_g) = 0\}.$$

Согласно следствию из леммы 2 множество $\mathcal{D}_m$ является неприводимым дивизором аффинного пространства Z_g , а дивизоры $\mathcal{D}_{m_1}, \mathcal{D}_{m_2}$ различны для $m_1 \neq m_2$.

ЛЕММА 3. Пусть $P \in \mathbb{C}[\tau]$ – ненулевой однородный многочлен и $m \in \mathbb{Z}$. Положим $R = \gamma_m \cdot P$, т.е. $R(\tau) = P(-(\tau - m\mathbf{1}_g)^{-1})$. Тогда R является ненулевой рациональной функцией на Z_g , чей полярный дивизор совпадает с $(\deg P) \cdot \mathcal{D}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сдвигая при необходимости параметр m , мы можем считать $m = 0$, так что

$$\gamma_0(\tau) = -\tau^{-1} = \left(\frac{T_{jl}}{\det \tau} \right)_{1 \leq j, l \leq g},$$

где $(-1)^{j+l+1}T_{jl}$ обозначает определитель (j, l) -минора матрицы τ . В частности, выражения $T_{jl} = T_{lj}$ являются однородными многочленами степени $g-1$ в кольце $\mathbb{C}[\tau]$. Поэтому

$$R(\tau) = P(-\tau^{-1}) = P\left(\frac{T_{jl}}{\det \tau}\right) = \frac{N(\tau)}{(\det \tau)^{\deg P}},$$

где $N(\tau) = P(T_{jl})$ – либо нулевой, либо однородный многочлен в $\mathbb{C}[\tau]$ степени, равной $(g-1)\deg P$. Поскольку $P \neq 0$ по условию, невырожденность R , а значит, и N очевидна. Следовательно, N является однородным многочленом степени $(g-1)\deg P < \deg(\det \tau)^{\deg P}$. Ввиду невырожденности дивизора $\mathcal{D}_0 = \{\tau \in Z_g : \det \tau = 0\}$ мы заключаем, что полярный дивизор рациональной функции R в Z_g является целым положительным кратным $\nu\mathcal{D}_0$ дивизора $\mathcal{D}_0$. Иными словами, $R = \tilde{N}/\tilde{D}$, где $\tilde{D} = (\det \tau)^\nu$ для некоторого целого $\nu \geq 1$ и $\tilde{N}$ взаимно прост с $\tilde{D}$ в кольце $\mathbb{C}[\tau]$; более того, $\nu \leq \deg P$ и $\deg \tilde{N} < \deg \tilde{D} = g\nu$. Это завершает доказательство в случае $\deg P = 1$ и сводит общий случай к проверке равенства $\nu = \deg P$.

Заметим, что случай $\deg P = 1$ также влечет тот факт, что прообраз $\gamma_0^{-1}(\mathcal{H})$ аффинной гиперплоскости $\mathcal{H} \subset Z_g$ под действием автоморфизма γ_0 из Z_g является гиперповерхностью степени g в Z_g . Таким образом, образ $\gamma_0(\mathcal{L})$ аффинной прямой $\mathcal{L}$ в Z_g является кривой степени g .

Далее, согласно $\deg \tilde{N} < \deg \tilde{D}$ степень $g\nu$ полярного дивизора $\nu\mathcal{D}_0$ рациональной функции R может быть вычислена следующим образом. Пусть α – точка в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{L}$ – прямая в аффинном пространстве Z_g . Тогда уравнение $R(\tau) = \alpha$ задает в Z_g неприводимый и приведенный дивизор D_α степени $g\nu$ (с уравнением $\tilde{N} - \alpha\tilde{D} = 0$), так что D_α пересекает прямую $\mathcal{L}$ в $g\nu$ простых точках. Поскольку γ_0 является как локальным, так и глобальным изоморфизмом Z_g , образы $\gamma_0(D_\alpha)$ и $\gamma_0(\mathcal{L})$ также пересекаются в $g\nu$ простых точках, именно $\gamma_0(D_\alpha) \cap \gamma_0(\mathcal{L}) = \gamma_0(D_\alpha \cap \mathcal{L})$. Но из представления $R = \gamma_0 \cdot P$ следует, что

$$\gamma_0(D_\alpha) = \{\tau' = \gamma_0(\tau) : R(\tau) = \alpha\} = \{\tau' \in Z_g : P(\tau') = \alpha\}$$

является дивизором степени $\deg P$, в то время как $\gamma_0(\mathcal{L})$ является кривой степени g . Кроме того, они пересекаются (в виду произвольности выбора $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\mathcal{L}$ в Z_g) на конечном расстоянии и (как мы видели) однократно. Поэтому из теоремы Безу мы заключаем, что множество $\gamma_0(D_\alpha) \cap \gamma_0(\mathcal{L})$ состоит из $g \deg P$ различных точек. Следовательно, $g\nu = g \deg P$, откуда $\nu = \deg P$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть t – положительное целое, $P_0, \dots, P_t \in \mathbb{C}[\tau]$ – (не обязательно однородные) ненулевые многочлены без постоянных членов и Q – произвольный ненулевой многочлен в $\mathbb{C}[\tau]$. Для каждого $m = 0, \dots, t$ положим $R_m(\tau) = P_m(-(\tau - m\mathbf{1}_g)^{-1})$. Тогда рациональные функции $R_0, \dots, R_t$ и Q линейно независимы над $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что любое семейство ненулевых рациональных функций на Z_g , полярные дивизоры которых попарно различны, линейно независимо над $\mathbb{C}$. Здесь “попарно различны” означает “различны либо как множества, либо входят с разными кратностями”, при этом тривиальный дивизор 0 (т.е. пустое множество) также может быть элементом этого семейства. Приведенное замечание очевидным образом следует из единственности разложения на множители в $\mathbb{C}[\tau]$. Рассматривая теперь каждую ненулевую однородную компоненту P_{mi} степени i (где $i \in I_m \subset \{1, \dots, \deg P_m\}$) каждого многочлена P_m ($0 \leq m \leq t$) из условия, согласно лемме 3 и следствию из леммы 2 мы получаем семейство ненулевых рациональных функций $P_{mi}(-(\tau - m\mathbf{1}_g)^{-1})$, которые вместе с многочленом $Q(\tau)$ допускают попарно различные полярные дивизоры, а именно $i\mathcal{D}_m$ ($m = 0, \dots, t, i \in I_m$) и 0. Следовательно, это семейство линейно независимо над $\mathbb{C}$, и это же свойство выполнено для исходного набора $R_1, \dots, R_t, Q$.

§ 3. Алгебраическое доказательство теоремы 1

Основным инструментом в этом доказательстве служит следующий результат Дж. Акса [6, теорема 4], являющийся сильной функциональной версией гипотезы Шенуэла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (теорема Акса). Пусть $F \supseteq E \supseteq k \supseteq \mathbb{Q}$ – последовательность полей, Δ – множество дифференцирований поля F таких, что

для всех $\delta \in \Delta$ выполнено $\delta E \subseteq E$, и $\bigcap_{\delta \in \Delta} \ker \delta = k$. Пусть элементы $y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_s \in F^*$ таковы, что:

- а) $\delta z_r / z_r - \delta y_r \in E$ для всех $\delta \in \Delta$, $r = 1, \dots, s$;
- б) любое нетривиальное произведение степеней $z_1, \dots, z_s$ не является алгебраическим над E .

Тогда

$$\operatorname{tr} \deg_E E(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_s) \geq s.$$

Предположим, что функции $e^{c\tau_{jl}}$, $1 \leq j \leq l \leq g$, алгебраически зависимы над $M(\tau)$. Согласно лемме 1 это предположение означает, что для всякого автоморфизма $\gamma \in \Gamma$ функции $e^{c\tau'_{jl}}$, $1 \leq j \leq l \leq g$, где $(\tau'_{jl}) = \gamma(\tau_{jl})$, также алгебраически зависимы над $M(\tau)$. Поэтому, полагая $\tau^{(m)} = (\tau'_{jl}) = \gamma_m(\tau)$, $m = 0, 1, \dots, t$, для любого набора $\gamma_0, \dots, \gamma_t \in \Gamma$, мы получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \deg_{M(\tau)} M(\tau, e^{c\tau^{(0)}}, e^{c\tau^{(1)}}, \dots, e^{c\tau^{(t)}}) &\leq \#\{\tau^{(m)}\}_{m=0,1,\dots,t} - (t+1) \\ &= (t+1)n - (t+1). \end{aligned}$$

Обозначим теперь

$$\begin{aligned} k = \mathbb{C}, \quad E = M, \quad F = M(\tau, e^{c\tau^{(0)}}, e^{c\tau^{(1)}}, \dots, e^{c\tau^{(t)}}), \quad \Delta = \{\delta_{jl}\}, \\ \{y_r\} = \{c\tau_{jl}^{(m)}\} \quad \text{и} \quad z_r = e^{y_r}, \quad r = 1, \dots, s \end{aligned}$$

с $s = (t+1)n$, в предложении 1 и допустим, что условие б) выполнено. Условие а) предложения 1 выполнено автоматически, так как $\delta z_r / z_r - \delta y_r = 0$ для всех дифференцирований $\delta \in \Delta$ и любых $r = 1, \dots, s$; включение $\delta E \subseteq E$ следует из определения поля M . Тогда согласно теореме Акса

$$\operatorname{tr} \deg_M M(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_s) \geq s, \quad \text{где} \quad s = (t+1)n.$$

Вспоминая, что $M(y_1, \dots, y_s) = M(c\tau) = M(\tau)$ и величина $\operatorname{tr} \deg_M M(\tau)$ конечна (более точно, равна n), мы получем оценку снизу

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \deg_{M(\tau)} M(\tau, e^{c\tau^{(0)}}, e^{c\tau^{(1)}}, \dots, e^{c\tau^{(t)}}) &= \operatorname{tr} \deg_{M(\tau)} M(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_s) \\ &\geq s - \operatorname{tr} \deg_M M(\tau) = (t+1)n - n, \end{aligned}$$

противоречащую оценке сверху для достаточно большого t (именно, для $t \geq n$).

Таким образом, достаточно предъявить набор $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_t \in \Gamma = Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, для которого выполнено условие б) теоремы Акса. Как и в доказательстве из [2], выберем

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_g & -\mathbf{1}_g \\ \mathbf{1}_g & -m\mathbf{1}_g \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}), \quad m = 0, 1, \dots, t.$$

Обозначим, как выше,

$$\tau^{(m)} = (\tau'_{jl}) = \gamma_m(\tau) = -(\tau - m\mathbf{1}_g)^{-1}$$

(т.е. $\tau_{jl}^{(m)} = \gamma_m \cdot \tau_{jl}$ в обозначениях § 2) и предположим, что условие б) предложения 1 не выполнено для соответствующего выбора $\{y_r\}$ и $\{z_r = e^{y_r}\}$. Тогда существует нетривиальное множество $\{C_{jl}^{(m)}\} \in \mathbb{Z}^{nt}$ такое, что рациональная функция

$$R(\tau) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq l \leq g \\ 1 \leq m \leq t}} C_{jl}^{(m)} c\tau_{jl}^{(m)}$$

удовлетворяет включению

$$e^{R(\tau)} \in M^{\text{alg}},$$

где через M^{alg} обозначено алгебраическое замыкание поля M . Вычисляя логарифмические производные и пользуясь дифференциальной замкнутостью M , а значит, и M^{alg} , мы приходим к соотношениям

$$\frac{\partial R}{\partial \tau_{jl}}(\tau) \in M^{\text{alg}} \quad \text{для всех } 1 \leq j \leq l \leq g.$$

Но поля M^{alg} и $\mathbb{C}(\tau)$ линейно разделены над $\mathbb{C}$, поскольку M и $\mathbb{C}(\tau)$ линейно разделены над $\mathbb{C}$ (см. формулу (2) из § 1), а $\mathbb{C}(\tau)$ является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{C}$, так что из полученных соотношений следует, что

$$\frac{\partial R}{\partial \tau_{jl}}(\tau) \in \mathbb{C} \quad \text{для всех } 1 \leq j \leq l \leq g.$$

Следовательно, для некоторого *многочлена* Q (степени не выше 1) выполнено

$$R = Q \in \mathbb{C}[\tau].$$

Рассмотрим теперь t многочленов

$$P_m(\tau) = \sum_{1 \leq j \leq l \leq g} C_{jl}^{(m)} c\tau_{jl}, \quad m = 0, 1, \dots, t.$$

Для каждого m образ $R_m = \gamma_m \cdot P_m$ многочлена P_m под действием $\gamma_m \in \Gamma$ есть рациональная функция

$$R_m(\tau) = P_m(-(\tau - m\mathbf{1}_g)^{-1}) = \sum_{1 \leq j \leq l \leq g} C_{jl}^{(m)} c\tau_{jl}^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, t,$$

поскольку действие Γ на $\mathbb{C}(\tau)$ является $\mathbb{C}$ -линейным. Значит, $R = \sum_{0 \leq m \leq t} R_m$, и мы в итоге приходим к соотношению

$$\sum_{0 \leq m \leq t} R_m = Q.$$

Многочлен Q может тождественно быть равным нулю, но числовое множество $\{C_{jl}^{(m)} c\} \in \mathbb{C}^{nt}$ нетривиально и, значит, хотя бы один из многочленов P_m , $m = 0, \dots, t$, ненулевой. Эти многочлены являются линейными формами, в частности не содержат свободные члены. Поэтому последнее соотношение противоречит следствию из леммы 3, и это противоречие завершает доказательство теоремы 1.

§ 4. Аналитическое доказательство теоремы 2

4.1. Новое доказательство теоремы 1 в случае $g = 1$. В этом случае мы можем обойтись без дифференциальной алгебры. Напомним, что степень трансцендентности поля M над $\mathbb{C}$ конечна, и предположим, что теорема 1 неверна, т.е. функция $e^{c\tau}$ алгебраична над $M(\tau)$. Согласно лемме 1 поле $M(\tau)$ устойчиво под действием группы $\Gamma = Sp_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})$. Поэтому для любого $\gamma \in \Gamma$ функция $e^{c\gamma(\tau)}$ также алгебраична над полем $M(\tau)$. Теперь мы утверждаем, что *если γ пробегает группу Γ , то функции $e^{c\gamma(\tau)}$ порождают над $\mathbb{C}$ поле конечной степени трансцендентности*.

Следовательно, все функции $e^{c\gamma(\tau)}$ не могут быть алгебраичными над полем $M(\tau)$ конечной степени трансцендентности, и это противоречие доказывает теорему 1 в случае $g = 1$.

Докажем сформулированное утверждение ($g = 1$). Основное наблюдение заключается в том, что функция $e^{c\tau}$ голоморфна во всей τ -плоскости, а не только в верхней полуплоскости $\mathfrak{H}_1$. Поэтому, выбирая элементы γ вида $\gamma_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, мы получаем, что для каждого m функция $e^{c\gamma_m(\tau)} = e^{-c/(\tau-m)}$ голоморфна всюду в $\mathbb{C}$, за исключением существенно особой точки $\tau = m$. Но любая такая функция f трансцендентна над полем функций, мероморфных в окрестности m (согласно теореме Сохоцкого–Вейерштрасса о плотности образа любой проколотой окрестности точки m под действием f). Следовательно, для каждого положительного целого t функция $e^{c\gamma_t(\tau)}$ трансцендентна над полем, порожденным над $\mathbb{C}$ предыдущими $e^{c\gamma_m(\tau)}$, $m = 0, 1, \dots, t-1$, и доказательство утверждения завершается индукцией по t .

4.2. Доказательство теоремы 2. Вместо теоремы Акса, как это было в § 3, мы воспользуемся более простым результатом дифференциальной алгебры, полученным Е. Р. Колчиным (см. [7, ч. VI, § 5, упражнение 4 (b)]). Этот мультипликативный аналог теоремы Островского следует из того факта, что любая собственная подгруппа группы мультипликативного типа содержится в ядре нетривиального характера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (теорема Колчина). *Пусть $F \supseteq E \supseteq k \supseteq \mathbb{Q}$ – последовательность полей, Δ – множество дифференцирований поля F таких, что $\delta E \subseteq E$ для всех $\delta \in \Delta$, и $\bigcap_{\delta \in \Delta} \ker \delta = k$. Пусть элементы $z_1, \dots, z_s \in F^*$ алгебраически зависимы над E и $\delta z_r / z_r \in E$ для всех $\delta \in \Delta$ и $r = 1, \dots, s$. Тогда существуют числа $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$, не равные одновременно нулю, такие, что $z_1^{n_1} \dots z_s^{n_s} \in E^*$.*

Пусть теперь выполнены все условия теоремы 2, и предположим от противного, что функции $e^{Q_1(\tau)}, \dots, e^{Q_N(\tau)}$ алгебраически зависимы над $M(\tau)$. Применяя предложение 2 к δ -дифференциальному полю $E = M(\tau)$ и функциям $z_r = e^{Q_r(\tau)}$ ($r = 1, \dots, s$ с $s := N$), мы получаем нетривиальное множество $\{c_1, \dots, c_N\} \in \mathbb{Z}^N$ такое, что многочлен

$$P(\tau) = \sum_{1 \leq r \leq N} c_r Q_r(\tau)$$

удовлетворяет включению

$$e^{P(\tau)} \in M(\tau).$$

Поскольку многочлены Q_r линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и не содержат свободные члены, многочлен P ненулевой и тоже без свободных членов, так что согласно лемме 1 для любого $\gamma \in \Gamma$ функция $e^{(\gamma \cdot P)(\tau)} = e^{P(\gamma(\tau))}$ также лежит в $M(\tau)$.

Рассматривая элементы Γ вида

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_g & -\mathbf{1}_g \\ \mathbf{1}_g & -m\mathbf{1}_g \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}), \quad m = 0, 1, \dots,$$

мы утверждаем, что для любого положительного целого t функции $e^{\gamma_m \cdot P}$, $m = 0, \dots, t$, алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.

Следовательно, для достаточно большого t (более точно, для $t > \frac{1}{2}g(5g+3)$ в соответствии с формулой (2) из §1) все указанные функции не могут лежать в поле $M(\tau)$ конечной степени трансцендентности. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Докажем утверждение ($g \geq 1$). Представляя многочлен P в виде суммы его ненулевых однородных компонент, отвечающих степеням ≥ 1 , согласно лемме 3 и факториальности кольца $\mathbb{C}[\tau]$ заключаем, что дивизор в Z_g рациональной функции

$$R_m(\tau) = \gamma_m \cdot P(\tau) = P(-(\tau - m\mathbf{1}_g)^{-1}), \quad m = 0, 1, \dots, t,$$

совпадает как множество с дивизором $\mathcal{D}_m$. Зафиксируем теперь точку $\tau' \in \mathcal{D}_t$, не принадлежащую полярным дивизорам функций $R_m = \gamma_m \cdot P$, $m = 0, 1, \dots, t-1$ (что возможно согласно следствию из леммы 2), а также нулевому дивизору функции R_t (т.е. отличную от точек неопределенности R_t) и множеству особенностей $\mathcal{D}_t$. Тогда функции $e^{R_m(\tau)}$, $m = 0, 1, \dots, t-1$, лежат в поле $\mathfrak{M}_{\tau'}$ ростков мероморфных в τ' функций, и нам остается показать, что функция $f = e^{R_t}$ не может удовлетворять нетривиальному алгебраическому уравнению $S(f) = 0$ над $\mathfrak{M}_{\tau'}$.

Рассмотрим аналитическую кривую $C \subset Z_g(\mathbb{C})$, пересекающую $\mathcal{D}_t$ трансверсально в точке τ' , росток которой в τ' не содержится в нулевых и полярных дивизорах коэффициентов S , и обозначим

$$\phi: \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} \rightarrow C, \quad \phi(0) = \tau',$$

параметризацию C . Ввиду трансверсальности и отсутствия неопределенности функции R_t в точке τ' , функция $f \circ \phi(z)$ одной переменной имеет существенно особую точку в нуле, в то время как прообразы коэффициентов S под действием ϕ являются ростками в 0 корректно определенных ненулевых мероморфных функций переменной z . Как было отмечено в п. 4.1, получающееся в результате алгебраическое соотношение для $f \circ \phi$ невозможно, что и завершает доказательство нашего утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Применяя предложение 2 дважды, несложно превратить аргументы этого параграфа в чисто алгебраическое доказательство теоремы 2. Действительно, анализ возникает только при доказательстве утверждения. Но если это утверждение неверно, то повторное обращение к теореме Колчина (на этот раз с $E = \mathbb{C}(\tau)$) и тот факт, что ненулевые логарифмические дифференциалы на аффинном пространстве Z_g не являются точными, влекут линейную независимость рациональных функций $R_m(\tau)$, $m = 0, 1, \dots, t$, над $\mathbb{Z} \bmod \mathbb{C}$. Это противоречит следствию из леммы 3, примененному к многочленам $P_0 = \dots = P_t := P$ и $Q = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Подобным образом при выводе теоремы 1 из теоремы Акса в § 3 мы воспользовались следствием из леммы 3 только для линейных форм $P_0, \dots, P_t$ (этот случай допускает более простое доказательство, опирающееся только на лемму 2). Мы оставляем читателю проверку того, что применение следствия из леммы 3 в полном объеме и аргументов из § 3 позволяет доказать теорему 2. (Необходимо всюду в § 3 заменить n линейных форм τ_{jl} на N многочленов Q_r теоремы 2, а $\tau_{jl}^{(m)} = \gamma_m \cdot \tau_{jl}$ на $\gamma_m \cdot Q_r$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Самое главное отличие между доказательствами § 3 и § 4 заключается в том, какие именно аргументы из работы [3] мы используем: в § 3 нам только необходимо знать, что $M(\tau)$ – чисто трансцендентное расширение M , в то время как аргументы § 4 основаны исключительно на конечности степени трансцендентности поля M над $\mathbb{C}$. (Разумеется, в обоих случаях нашим основным аргументом является устойчивость поля $M(\tau)$ под действием Γ .)

§ 5. Тэта-константы и их логарифмические производные

Полагая

$$q_{jl} = e^{2\pi i \tau_{jl}}, \quad 1 \leq j < l \leq g, \quad \text{и} \quad q_{jj} = e^{\pi i \tau_{jj}}, \quad 1 \leq j \leq g,$$

рассмотрим модулярные формы, именно *тэта-константы*

$$\vartheta_{\mathbf{a}} = \vartheta_{(\mathbf{a}', \mathbf{a}'')}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i (\mathbf{n} + \mathbf{a}'/2) \mathbf{a}''} \prod_{1 \leq j \leq l \leq g} q_{jl}^{(n_j + a'_j/2)(n_l + a'_l/2)},$$

отвечающие четным 2-характеристикам $\mathbf{a} = (\mathbf{a}', \mathbf{a}'') \in \mathfrak{K}_+ \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$, т.е. с $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'' \equiv 0 \pmod{2}$. Эти ряды сходятся в некоторой нетривиальной области $\mathbf{q}$ -пространства, где $\mathbf{q} = \{q_{jl}, 1 \leq j \leq l \leq g\} \in \mathbb{C}^n$, но мы будем считать их формальными элементами кольца

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{q}} = \mathbb{C}[[\mathbf{q}^{\nu}, 4\nu \in Z_g(\mathbb{Z}), \nu \geq 0]].$$

(Для согласования со стандартными разложениями Фурье мы используем обозначение $\mathbf{q}^{\nu} = e^{i\pi \operatorname{Tr}(\nu \tau)}$.)

Множество частных производных δ преобразуется теперь в

$$\delta_{jl} = q_{jl} \frac{\partial}{\partial q_{jl}}, \quad 1 \leq j \leq l \leq g,$$

и превращает $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}$ в дифференциальное кольцо. Определим *логарифмические производные тэта-констант* формулами

$$\psi_{\mathbf{a}, jl} = \frac{\delta_{jl} \vartheta_{\mathbf{a}}}{\vartheta_{\mathbf{a}}}, \quad \mathbf{a} \in \mathfrak{K}_+, \quad 1 \leq j \leq l \leq g.$$

Поскольку

$$\vartheta_{\mathbf{a}} = 1 + \sum_{\mathbf{0} \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} (-1)^{t_{\mathbf{n}} \mathbf{a}''} \prod_{1 \leq j \leq l \leq g} q_{jl}^{n_j n_l}, \quad \mathbf{a} = (\mathbf{a}', \mathbf{a}'') : \mathbf{a}' = \mathbf{0}, \quad (3)$$

n логарифмических производных, отвечающих 2^g функциям

$$\psi_{\mathbf{a},pq} = \sum_{\mathbf{0} \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} (-1)^{t_{\mathbf{n}} \mathbf{a}''} n_p n_q \prod_{1 \leq j \leq l \leq g} q_{jl}^{n_j n_l} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(- \sum_{\mathbf{0} \neq \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} (-1)^{t_{\mathbf{n}} \mathbf{a}''} \prod_{1 \leq j \leq l \leq g} q_{jl}^{n_j n_l} \right)^m$$

($1 \leq p \leq q \leq g$), лежат в кольце $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}$, в то время как логарифмические производные остальных тэта-констант ($\mathbf{a}' \neq \mathbf{0}$) лежат в поле частных кольца $\mathfrak{F}_{\mathbf{q}}$.

Согласно [3, § 5] поле частных кольца

$$Q_g = \mathbb{Q}[\vartheta_{\mathbf{a}}, \psi_{\mathbf{a},jl}]_{\mathbf{a} \in \mathfrak{K}_+; 1 \leq j \leq l \leq g}$$

является δ -устойчивым и его алгебраическое замыкание совпадает с M . Поэтому из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 3. *Поле частных кольца*

$$P_g = \mathbb{Q}[q_{jl}, \vartheta_{\mathbf{a}}, \psi_{\mathbf{a},jl}]_{\mathbf{a} \in \mathfrak{K}_+; 1 \leq j \leq l \leq g}$$

устойчиво под действием дифференцирований δ и имеет степень трансцендентности $\frac{1}{2}g(5g+3)$ над $\mathbb{Q}$.

В классическом случае $g = 1$, а также в случае $g = 2$ само кольцо Q_g является устойчивым под действием дифференцирований δ (см. [3, § 6]); значит, это свойство справедливо также для колец P_1 и P_2 . Более того, в случае $g = 1$ формула произведения для тэта-констант $\vartheta_{\mathbf{a}}$ (см., например, [8, § 21.42]) дает явные выражения для q -разложений соответствующих логарифмических производных $\psi_{\mathbf{a}}$. Недавние результаты Борчердса показывают, что в этом направлении также существует некоторая аналогия между классическим случаем и $g = 2$. Мы подытожим эту статью объяснением того, как с помощью формулы Борчердса выписать явные q -разложения десяти элементов, образующих согласно [3, теорема 3 (iv)] базис трансцендентности поля Q_2 над $\mathbb{Q}$, значит (по теореме 3), и поля P_2 над $\mathbb{Q}[q]$.

Всюду далее мы считаем $g = 2$. Как и в [3, § 6], мы воспользуемся для простоты отображением $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$:

$$(0, 0) \mapsto 0, \quad (0, 1) \mapsto 1, \quad (1, 0) \mapsto 2, \quad (1, 1) \mapsto 3,$$

для представления характеристики $\mathbf{a} = (\mathbf{a}', \mathbf{a}'') \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ только двумя шифрами. Тогда $\mathfrak{K}_+ = \{00, 01, 02, 03, 10, 12, 20, 21, 30, 33\}$. Перенумеруем элементы $\mathbf{q}$, полагая $q_1 = q_{11}$, $q_2 = q_{22}$, $q_3 = q_{12}$, и проделаем то же самое с дифференцированиями

$$\delta_j = q_j \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

и с логарифмическими производными $\psi_{\mathbf{a},j}$. В этих обозначениях указанный выше базис трансцендентности для Q_2 задается списком

$$\vartheta_{00}, \vartheta_{01}, \vartheta_{02}, \quad \psi_{00,1}, \psi_{01,1}, \psi_{02,1}, \quad \psi_{00,2}, \psi_{01,2}, \psi_{02,2}, \quad \psi_{00,3}. \quad (4)$$

Наконец, через Z_2^+ мы обозначим пространство неотрицательно определенных симметрических матриц $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_3 \\ \nu_3 & \nu_2 \end{pmatrix}$ с элементами $\nu_1, \nu_2, 2\nu_3 \in \mathbb{Z}$, для которых, как и выше, положим $\mathbf{q}^{\nu} = q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} q_3^{\nu_3}$. Тогда выполнено (см. [9, § 4])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (формула произведения Борчердса). *Справедливо следующее тождество:*

$$\vartheta_{03}(q) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} (-1)^{n_1+n_2} q_1^{n_1^2} q_2^{n_2^2} q_3^{n_1 n_2} = \prod_{\mathbf{0}_2 \neq \boldsymbol{\nu} \in Z_2^+} \left(\frac{1 - q^{\boldsymbol{\nu}}}{1 + q^{\boldsymbol{\nu}}} \right)^{f(\det \boldsymbol{\nu})}, \quad (5)$$

где

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(m) q^m = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \right)^{-1} = 1 + 2q + 4q^2 + 8q^3 + 14q^4 + 24q^5 + \dots$$

есть обращение одномерной тэта-константы $\vartheta_{01}(q)$.

Делая подстановки $q_1 \mapsto -q_1$ и $q_2 \mapsto -q_2$ в (5) и (3), находим формулы произведения для трех оставшихся тэта-констант с $\mathbf{a}' = 0$:

$$\begin{aligned} \vartheta_{01} &= \prod_{\mathbf{0}_2 \neq \boldsymbol{\nu} \in Z_2^+} \left(\frac{1 - (-1)^{\nu_1} q^{\boldsymbol{\nu}}}{1 + (-1)^{\nu_1} q^{\boldsymbol{\nu}}} \right)^{f(\det \boldsymbol{\nu})}, \quad \vartheta_{02} = \prod_{\mathbf{0}_2 \neq \boldsymbol{\nu} \in Z_2^+} \left(\frac{1 - (-1)^{\nu_2} q^{\boldsymbol{\nu}}}{1 + (-1)^{\nu_2} q^{\boldsymbol{\nu}}} \right)^{f(\det \boldsymbol{\nu})}, \\ \vartheta_{00} &= \prod_{\mathbf{0}_2 \neq \boldsymbol{\nu} \in Z_2^+} \left(\frac{1 - (-1)^{\nu_1 + \nu_2} q^{\boldsymbol{\nu}}}{1 + (-1)^{\nu_1 + \nu_2} q^{\boldsymbol{\nu}}} \right)^{f(\det \boldsymbol{\nu})}. \end{aligned} \quad (6)$$

Явные формулы для q -разложений логарифмических производных этих тэта-констант очевидным образом следуют из (5), (6). Так, например, в случае $\mathbf{a}'' = 3$ и $j = 1, 2, 3$ мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_{03,j} &= \frac{\delta_j \vartheta_{03}}{\vartheta_{03}} = -2 \sum_{\mathbf{0}_2 \neq \boldsymbol{\nu} \in Z_2^+} \frac{\nu_j f(\det \boldsymbol{\nu}) q^{\boldsymbol{\nu}}}{1 - q^{2\boldsymbol{\nu}}} \\ &= -2 \sum_{\mathbf{0}_2 \neq \boldsymbol{\mu} \in Z_2^+} q^{\boldsymbol{\mu}} \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{\nu} \in Z_2^+ : (2m+1)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu} \\ m \in \mathbb{Z}, m \geq 0}} \nu_j f(\det \boldsymbol{\nu}) \right). \end{aligned}$$

Тем самым формулы (3) и (6) приводят к обещанным q -разложениям всех элементов из нашего списка (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае $g = 2$ разложения в бесконечные произведения существуют и для других тэта-констант, не входящих в изученную выше четверку. В качестве примера отметим тэта-константу ϑ_{33} (см. [10, пример 2.3], где она названа “максимально нечетной среди четных”). Кроме того, в [10, пример 2.4] приводится разложение в бесконечное произведение модулярной формы веса 5, заданной формулой $\prod_{\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_+} \vartheta_{\mathbf{a}}$.

Список литературы

1. *Mahler K.* On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions // J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. P. 445–450.
2. *Nishioka K.* A conjecture of Mahler on automorphic functions // Arch. Math. (Basel). 1989. V. 53. № 1. P. 46–51.
3. *Bertrand D., Zudilin W.* On the transcendence degree of the differential field generated by Siegel modular forms // Prépubl. de l’Institut de Math. de Jussieu. V. 248, 2000; // <http://xxx.lanl.gov/abs/math/0006176>.
4. *Zudilin W.* Number theory casting a look at the mirror. Preprint, 2000 (submitted for publication); <http://xxx.lanl.gov/abs/math/0008237>.
5. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
6. *Ax J.* On Schanuel’s conjectures // Ann. of Math. (2). 1971. V. 93. P. 252–268.
7. *Kolchin E. R.* Differential algebra and algebraic groups. Pure Appl. Math. V. 54. N.Y.–London: Academic Press, 1973.
8. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматлит, 1963.
9. *Kontsevich M.* Product formulas for modular forms on $O(2, n)$ (after R. Borcherds) [Exp. no. 821] // Astérisque 1997. V. 245. P. 41–56; // Sémin. Bourbaki. V. 1996/97. Exp. 820–834, <http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9709006>.
10. *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. Part II // Internat. J. Math. 1998. V. 9. № 2. P. 201–275.

(Д. Бертран) Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris
 (В.В. Зудилин) Московский государственный университет
 им. М.В. Ломоносова
E-mail: bertrand@math.jussieu.fr, wadim@ips.ras.ru

Поступило в редакцию
 26.XII.2000