Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, О теореме Ван Флека для правильных S -дробей с предельно периодическими коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 35–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:27:32

УДК 517.524

В. И. Буслаев

О теореме Ван Флека для правильных C -дробей с предельно периодическими коэффициентами

В статье исследуется множество сходимости правильной C -дроби с предельно периодическими коэффициентами. Указанное исследование проводится на основе общего утверждения о сходимости композиций дробно-линейных преобразований, коэффициенты которых являются голоморфными по параметру предельно периодическими функциями. Показано, что множество особенностей указанных C -дробей обладает экстремальным свойством, формулируемым в терминах трансфинитного диаметра (емкости) множеств.

Библиография: 7 наименований.

§ 1. Формулировка результата

В теории непрерывных дробей хорошо известна следующая теорема Ван Флека [1] о сходимости правильной C -дроби с предельно постоянными коэффициентами, т.е. функциональной непрерывной дроби вида

$$\frac{a_1 z}{1 + \frac{a_2 z}{1 + \dots}}, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots$ — комплексные числа, имеющие предел.

ТЕОРЕМА (Ван Флек). Пусть коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ правильной C -дроби (1) имеют предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$. Тогда C -дроби (1) сходятся к функции $f(z)$ в области $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, где $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = -\frac{1}{4a}t, t \geq 1\}$, $f(z)$ мероморфна в D и сходимость равномерна на любом компакте, лежащем в D и не содержащем полюсов $f(z)$.

Весьма важное замечание к теореме Ван Флека о невозможности мероморфного продолжения предельной функции $f(z)$ ни через какой интервал луча Γ было сделано А. А. Гончаром.

ЗАМЕЧАНИЕ (А. А. Гончар). В предположениях и обозначениях теоремы Ван Флека и дополнительном предположении $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, предельная функция $f(z)$ не может иметь мероморфного продолжения ни в какую область $(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \cup \{|z - z_0| < \varepsilon\}$, где $z_0 \in \Gamma$, ε — произвольное сколь угодно малое положительное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС (проект № 2000-272), РФФИ (грант № 99-01-01149) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96132).

В данной статье будет выписано в явном виде множество сходимости правильной C -дроби с предельно периодическими коэффициентами (т.е. с коэффициентами $a_1, a_2, \dots$, имеющими периодические пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm+l} = a^l$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, $l = 1, \dots, m$) и будут доказаны утверждения, аналогичные приведенным выше в теореме Ван Флека и в замечании Гончара. Этот результат будет получен как следствие более общего утверждения о сходимости композиций (по w) $S_1 \circ \dots \circ S_n(w, z)$ дробно-линейных (по w) преобразований

$$S_n(w, z) = \frac{a_n(z)w + b_n(z)}{c_n(z)w + d_n(z)} \quad (2)$$

с голоморфными предельно периодическими коэффициентами $a_n(z)$, $b_n(z)$, $c_n(z)$, $d_n(z)$.

Пусть коэффициенты $a_n(z)$, $b_n(z)$, $c_n(z)$, $d_n(z)$ дробно-линейных (по w) преобразований (2) являются голоморфными по z функциями в некоторой области Ω комплексной плоскости и имеют равномерные на компактах, лежащих в Ω , периодические пределы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm+l}(z) &= a^l(z), & \lim_{n \rightarrow \infty} b_{nm+l}(z) &= b^l(z), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_{nm+l}(z) &= c^l(z), & \lim_{n \rightarrow \infty} d_{nm+l}(z) &= d^l(z), \end{aligned}$$

где m – некоторое фиксированное натуральное число, $l = 1, \dots, m$. Будем пользоваться далее следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha^l(z) & \beta^l(z) \\ \gamma^l(z) & \delta^l(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^l(z) & b^l(z) \\ c^l(z) & d^l(z) \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} a^m(z) & b^m(z) \\ c^m(z) & d^m(z) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} a^1(z) & b^1(z) \\ c^1(z) & d^1(z) \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} a^{l-1}(z) & b^{l-1}(z) \\ c^{l-1}(z) & d^{l-1}(z) \end{pmatrix}, \\ I(z) &= \alpha^l(z) + \delta^l(z), & \Delta(z) &= \alpha^l(z)\delta^l(z) - \beta^l(z)\gamma^l(z), \\ \Gamma &= \{z \in \Omega : I^2(z) = 4t\Delta(z), 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функции $I(z)$ и $\Delta(z)$ – это соответственно след и определитель матрицы $\begin{pmatrix} \alpha^l(z) & \beta^l(z) \\ \gamma^l(z) & \delta^l(z) \end{pmatrix}$, равной произведению матриц $\begin{pmatrix} a^j(z) & b^j(z) \\ c^j(z) & d^j(z) \end{pmatrix}$, взятых в круговом порядке, $j = l, \dots, m, 1, \dots, l-1$. Поэтому $I(z)$ и $\Delta(z)$ не зависят от l . При этом, очевидно,

$$\Delta(z) = \prod_{j=1}^m (a^j(z)d^j(z) - b^j(z)c^j(z)).$$

Легко видеть также, что множество Γ можно определить как множество, состоящее из тех $z \in \Omega$, при которых либо $I(z) = 0$, либо $1 - 4\Delta(z)I^{-2}(z)$ принимает отрицательные (или нулевые) значения, и как множество

$$\{z \in \Omega : |I(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}| = |I(z) - \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}|\}.$$

Предполагая, что

$$|I(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}| < |I(z) - \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}|$$

при $z \in \Omega \setminus \Gamma$, обозначим

$$p^l(z) = \frac{\alpha^l(z) - \delta^l(z) + \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}}{2\gamma^l(z)}, \quad z \in \Omega \setminus \Gamma,$$

$$\Lambda = \bigcap_{l=1}^m \{(w, z) \in \mathbb{C} \times (\Omega \setminus \Gamma) : w \neq p^l(z)\}.$$

Отметим, что введенные обозначения допускают следующую интерпретацию. Введем в рассмотрение дробно-линейные преобразования

$$S^l(w, z) = \frac{a^l(z)w + b^l(z)}{c^l(z)w + d^l(z)}, \quad l = 1, \dots, m,$$

и их круговые композиции (по w)

$$\tilde{S}^l(w, z) = S^l \circ \dots \circ S^m \circ S^1 \circ \dots \circ S^{l-1}(w, z).$$

Тогда

$$\tilde{S}^l(w, z) = \frac{\alpha^l(z)w + \beta^l(z)}{\gamma^l(z)w + \delta^l(z)}, \quad l = 1, \dots, m,$$

Γ – множество тех $z \in \Omega$, при которых неподвижные точки

$$p_{1,2}^l(z) = \frac{\alpha^l(z) - \delta^l(z) \pm \sqrt{I^2(z) - 4\Delta(z)}}{2\gamma^l(z)}$$

преобразований $\tilde{S}^l(w, z)$ нейтральны, а $p^l(z)$ при $z \in \Omega \setminus \Gamma$ и указанном выборе знака корня – *отталкивающая* неподвижная точка $\tilde{S}^l(w, z)$.

В статье будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть имеются дробно-линейные (по w) преобразования (2) такие, что их коэффициенты $a_n(z)$, $b_n(z)$, $c_n(z)$, $d_n(z)$ являются голоморфными по z функциями в некоторой области Ω комплексной плоскости и существуют равномерные на компактах, лежащих в Ω , периодические пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm+l}(z) = a^l(z)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{nm+l}(z) = b^l(z)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{nm+l}(z) = c^l(z)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{nm+l}(z) = d^l(z)$, где m – некоторое фиксированное натуральное число, $l = 1, \dots, m$. Тогда во введенных выше обозначениях имеют место следующие утверждения:

- 1) при всех $(w, z) \in \Lambda$ последовательность композиций (по w) $S_1 \circ \dots \circ S_n(w, z)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к функции $f(z)$;
- 2) предельная функция $f(z)$ не зависит от w и является мероморфной по z функцией в $\Omega \setminus \Gamma$;

3) сходимость равномерна в сферической метрике на компактах, лежащих в Λ .

Фиксируем произвольное число $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Из теоремы 1 следует, в частности, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность композиций $S_1 \circ \dots \circ S_n(w_0, z)$ сходится к функции $f(z)$ при всех z таких, что $(w_0, z) \in \Lambda$, т.е. при всех $z \in \Omega \setminus (\Gamma \cup E(w_0))$, где $E(w_0) = \bigcup_{l=1}^m \{z \in \Omega: w_0 = p^l(z)\}$, и при этом предельная мероморфная функция $f(z)$ может быть мероморфно продолжена в $\Omega \setminus \Gamma$. Воспользуемся далее этим замечанием при $w_0 = 0$. Хорошо известно, что последовательность подходящих дробей непрерывной дроби (1) совпадает с последовательностью композиций $S_1 \circ \dots \circ S_n(0, z)$ дробно-линейных преобразований $S_n(w, z) = \frac{a_n z}{w+1}$. В предположениях и обозначениях теоремы 1 для такого вида дробно-линейных преобразований имеем

$$\Delta(z) = (-1)^m a^1 \dots a^m z^m,$$

где $a^l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm+l}$, $l = 1, \dots, m$. Поэтому фактически как частный случай теоремы 1 будут получены все, кроме последнего, утверждения в следующей теореме о сходимости правильной C -дроби с предельно периодическими коэффициентами. В этой теореме для следа (суммы диагональных элементов) матрицы A используется обозначение $\text{Tr } A$, для целой части действительного числа α используется обозначение $[\alpha]$, а под $[a, b]$ понимается отрезок с концами в точках a и b .

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты правильной C -дроби (1) имеют периодические пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm+l} = a^l$, $l = 1, \dots, m$, где m – некоторое фиксированное натуральное число. Тогда:

1) C -дроби (1) сходятся к функции $f(z)$ на множестве $D = \mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup E)$, где

$$\Gamma = \Gamma(a^1, \dots, a^m) = \{z \in \mathbb{C}: z^{-m} I^2(z; a^1, \dots, a^m) \in [0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m]\},$$

$$I(z; a^1, \dots, a^m) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & a^1 z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & a^m z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

– алгебраический многочлен степени не выше $[m/2]$ с единичным свободным членом, $E = E(a^1, \dots, a^m)$ – конечное множество (в обозначениях теоремы 1, $E = \bigcup_{l=1}^m \{z \in \mathbb{C}: 0 = p^l(z)\}$), состоящее из не более чем $m[(m-1)/2]$ точек, в частности E – пустое множество при $m = 1, 2$;

2) множество сходимости D является связной областью и содержит точку $z = 0$;

3) $f(z)$ мероморфна в D и сходимость равномерна на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов $f(z)$;

4) $f(z)$ допускает мероморфное продолжение в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$;

5) если Γ – ограниченное множество, т.е. если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-m} I^2(z; a^1, \dots, a^m) \notin [0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m], \quad (3)$$

то m четно и $f(z)$ допускает мероморфное продолжение в точку $z = \infty$;

6) пусть имеют место дополнительные предположения $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и пусть F – компакт комплексной плоскости такой, что росток

функции $f(z^{-1})$ в точке $z = \infty$ (очевидно, существующий, так как $0 \in D$) допускает мероморфное продолжение в компоненту $\mathbb{C} \setminus F$, содержащую точку $z = \infty$; тогда $d(F) \geq d(\Gamma^{-1}) = |a^1 \dots a^m|^{1/m}$, где $d(F)$ и $d(\Gamma^{-1})$ – трансфинитные диаметры компактов F и $\Gamma^{-1} = \{z: z^{-1} \in \Gamma\}$ соответственно.

Определение трансфинитного диаметра (емкости) множеств комплексной плоскости и его основные свойства см., например, в [2, с. 285].

В силу утверждения 4) теоремы 2 все точки конечного множества $E = E(a^1, \dots, a^m)$ являются устранимыми особыми точками предельной мероморфной функции $f(z)$, и по этой причине множество E не очень интересно. Значительно более интересным является множество $\Gamma = \Gamma(a^1, \dots, a^m)$. Легко видеть, что при $m = 1$ $\Gamma(a)$ – это луч, определенный в теореме Ван Флека, а при $m = 2$

$$\begin{aligned}\Gamma(a^1, a^2) &= \{z \in \mathbb{C}: z^{-2}(1 + a^1 z + a^2 z)^2 \in [0, 4a^1 a^2]\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}: z = -(a^1 + 2t\sqrt{a^1 a^2} + a^2)^{-1}, -1 \leq t \leq 1\}\end{aligned}$$

– это дуга окружности (или прямой), соединяющая точки $z_{1,2} = -(\sqrt{a^1} \pm \sqrt{a^2})^{-2}$, причем продолжение этой дуги проходит через точку $z = 0$. Легко видеть также, что если какой-либо из пределов a^l , $l = 1, \dots, m$, равен нулю, то $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}: z^{-m} I(z; a^1, \dots, a^m)^2 = 0\}$ – конечное множество, состоящее из не более чем $[m/2]$ точек.

Очевидно, что без дополнительных предположений $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, означающих, что все дробно-линейные преобразования $S_n(w, z) = \frac{a_n z}{w+1}$, $z \neq 0$, невырождены, утверждение 6) может и не выполняться, так как, например, при $a_1 = 0$ предельная функция $f(z)$ тождественно равна нулю. Отметим два следствия утверждения 6) об экстремальности трансфинитного диаметра компакта Γ^{-1} . Первое из них распространяет замечание Гончара к теореме Ван Флека на случай C -дробей с предельно периодическими коэффициентами.

СЛЕДСТВИЕ 1. В предположениях и обозначениях теоремы 2 и дополнительных предположениях $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $a^1 \dots a^m \neq 0$ функция $f(z)$ не может иметь мероморфного продолжения ни в какую область $(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \cup \{|z - z_0| < \varepsilon\}$, где $z_0 \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$.

Действительно, предположим противное. Тогда функция $f(z^{-1})$ допускает мероморфное продолжение в некоторую область $(\mathbb{C} \setminus \Gamma^{-1}) \cup \{|z - z_0^{-1}| < \delta\}$, где $z_0^{-1} \in \Gamma^{-1}$, $\delta > 0$. Так как при $a^1 \dots a^m \neq 0$ имеем строгое неравенство $d(\Gamma^{-1} \setminus \{|z - z_0^{-1}| < \delta\}) < d(\Gamma^{-1})$, то это противоречит утверждению 6).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $P(z)$ – алгебраический многочлен, k равно 0 или 1, $K = \{z \in \mathbb{C}: z^k P^2(z) \in [0, 1]\}$ и Φ – множество всех компактов F комплексной плоскости таких, что функция $\sqrt{P^2(z) - z^{-k}}$ допускает выделение регулярной ветви в $\mathbb{C} \setminus F$. Тогда $K \in \Phi$ и $d(K) = \min_{F \in \Phi} d(F)$.

Действительно, пусть $P(z) = Az^q + \dots$, где $A \neq 0$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $q \geq 1$, так как иначе следствие 2 тривиально. Положим $m = 2q + k$ и подберем m параметров $a^1, \dots, a^m$ таким образом, чтобы $z^q I(z^{-1}; a^1, \dots, a^m) = A^{-1}P(z)$ и $4(-1)^m a^1 \dots a^m = A^{-2}$ (напомним, что по

утверждению 1) теоремы 2 $I(z^{-1}; a^1, \dots, a^m)$ – многочлен от z^{-1} степени не выше $[m/2] = q$ с единичным свободным членом, и, следовательно, для m свободных параметров $a^1, \dots, a^m$ имеем $q + 1 \leq m$ условий). Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(a^1, \dots, a^m) &= \{z: z^m I^2(z^{-1}; a^1, \dots, a^m) \in [0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m]\} \\ &= \{z: z^k A^{-2} P^2(z) \in [0, A^{-2}]\} = K.\end{aligned}$$

Рассмотрим далее периодическую C -дробь (1) такую, что $a_{nm+l} = a^l$ при всех $n = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, m$. Для такой периодической C -дроби предельная функция $f(z)$ легко находится в явном виде как притягивающая неподвижная точка дробно-линейного преобразования

$$\tilde{S}^1(w, z) = S^1 \circ \dots \circ S^m(w, z),$$

где $S^l(w, z) = \frac{a^l z}{w+1}$, $l = 1, \dots, m$. В обозначениях теоремы 1 точки ветвления функции $f(z^{-1})$ совпадают с точками ветвления функции

$$\sqrt{I^2(z^{-1}) - 4\Delta(z^{-1})} = \sqrt{A^{-2}P^2(z)z^{-2q} - A^{-2}z^{-m}} = A^{-1}z^{-q}\sqrt{P^2(z) - z^{-k}}.$$

Поэтому из утверждения 6) теоремы 2 получаем следствие 2.

Заметим, что в рассмотренном выше чисто периодическом случае теорема 2 совпадает с известной теоремой Шталя [3] о сходимости диагональных аппроксимаций Паде алгебраических функций вне разрезов комплексной плоскости минимального трансфинитного диаметра, превращающих алгебраическую функцию в регулярную. Но все-таки подчеркнем, что теорема 2 и теорема Шталя имеют разные области применимости. Теорема 2 применима не только в чисто периодическом случае, но и в предельно периодическом случае, а теорема Шталя применима не только к алгебраическим функциям рассмотренного выше вида, но и к произвольным алгебраическим функциям. Отметим также, что в отличие от теоремы Шталя в теореме 2 выписывается и явный вид разрезов минимального трансфинитного диаметра. Для иллюстрации следствия 2 рассмотрим алгебраическую функцию с четырьмя точками ветвления второго порядка. Легко видеть, что следствие 2 применимо, если эти четыре точки ветвления лежат в вершинах $((z+a)^2 + b)^2 + c = 0$ некоторого параллелограмма (случай $k = 0$), либо если одна из точек ветвления равна нулю, а три другие находятся как решения кубического уравнения вида $z(z+a)^2 + c = 0$ (случай $k = 1$). В первом случае множество

$$K = \{z \in \mathbb{C}: ((z+a)^2 + b)^2 + ct = 0, 0 \leq t \leq 1\}$$

состоит из двух непересекающихся кусков гиперболы, каждый из которых соединяет две ближайшие друг к другу соседние вершины параллелограмма. Если параллелограмм является ромбом, то эти два куска гиперболы вырождаются в диагонали ромба. Во втором случае ($k = 1$) имеем

$$K = \{z \in \mathbb{C}: z(z+a)^2 + ct = 0, 0 \leq t \leq 1\}.$$

В качестве примера второго случая выберем следующие четыре точки ветвления: $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_{3,4} = \pm i$. В этом случае множество

$$K = \{z \in \mathbb{C}: z(z-1)^2 - 2t = 0, 0 \leq t \leq 1\}$$

состоит из отрезка $[0, 2]$ и кривой, проходящей через точки $\pm i$ и $1/3$.

§ 2. Доказательство теорем 1 и 2

Основу доказательства теоремы 1 будет составлять следующее утверждение, которое выделим в самостоятельную лемму.

ЛЕММА 1. Пусть дробно-линейные преобразования $S_n(w) = \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n}$ таковы, что при некоторых $p \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ и $\theta > 0$ выполняются неравенства

$$|\delta_n + p\gamma_n| + \theta^{-1}|\gamma_n p^2 + (\delta_n - \alpha_n)p - \beta_n| \leq q(|\alpha_n - p\gamma_n| - \theta|\gamma_n|), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда при всех w таких, что $|w - p| > \theta$, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w) = S$. При этом S не зависит от w , $|S - p| \geq \theta$ и

$$|(S_1 \circ \dots \circ S_n(w) - p)^{-1} - (S - p)^{-1}| \leq q^n \frac{|w - p| + \theta}{|w - p| - \theta} \theta^{-1}.$$

Приведем также и другую, по существу эквивалентную, формулировку леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть дробно-линейные преобразования $S_n(w) = \frac{\alpha_n w + \beta_n}{\gamma_n w + \delta_n}$ таковы, что при некоторых $p \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ и $\theta > 0$ выполняются неравенства

$$|\alpha_n - p\gamma_n| + \theta|\gamma_n| \leq q(|\delta_n + p\gamma_n| - \theta^{-1}|\gamma_n p^2 + (\delta_n - \alpha_n)p - \beta_n|), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда при всех w таких, что $|w - p| < \theta$, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w) = S$. При этом S не зависит от w , $|S - p| \leq \theta$ и

$$|S_1 \circ \dots \circ S_n(w) - S| \leq q^n \frac{\theta + |w - p|}{\theta - |w - p|} \theta.$$

Частный случай $p = 0$, $\theta = 1$ леммы 2 для невырожденных дробно-линейных преобразований $S_n(w)$ доказан автором в [4, с. 17]. Если же среди дробно-линейных преобразований $S_n(w)$ имеются вырожденные, то указанный частный случай тривиален. Покажем теперь, что и лемма 1 и лемма 2 представляют собой по сути дела разные формулировки этого частного случая ($p = 0$, $\theta = 1$) леммы 2, получаемые простой заменой переменной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 1 И 2. Положим $T_n(w) = \mathcal{Q}^{-1} \circ S_n \circ \mathcal{Q}(w)$, где $\mathcal{Q}(w) = \theta w^{-1} + p$ в случае леммы 1 и $\mathcal{Q}(w) = \theta w + p$ в случае леммы 2. В первом случае

$$T_n(w) = \frac{(\delta_n + \gamma_n p)w + \theta\gamma_n}{\theta^{-1}(-\gamma_n p^2 + (\alpha_n - \delta_n)p + \beta_n)w + (\alpha_n - \gamma_n p)},$$

а во втором случае

$$T_n(w) = \frac{(\alpha_n - \gamma_n p)w + \theta^{-1}(-\gamma_n p^2 + (\alpha_n - \delta_n)p + \beta_n)}{\theta\gamma_n w + (\delta_n + \gamma_n p)}.$$

В любом случае из предположений лемм следует, что коэффициенты дробно-линейных преобразований $T_n(w) = \frac{a_n w + b_n}{c_n w + d_n}$ удовлетворяют условию $|a_n| + |c_n| \leq q(|d_n| - |b_n|)$ уже доказанного в [4] частного случая $p = 0$, $\theta = 1$ леммы 2. Поэтому

при всех $|w| < 1$ существует не зависящий от w предел $\lim_{n \rightarrow \infty} T_1 \circ \dots \circ T_n(w) = T$.
При этом $|T| \leq 1$ и

$$|T_1 \circ \dots \circ T_n(w) - T| \leq q^n \frac{1 + |w|}{1 - |w|}, \quad |w| < 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как $S_1 \circ \dots \circ S_n(w) = \mathcal{Q} \circ T_1 \circ \dots \circ T_n \circ \mathcal{Q}^{-1}(w)$, то отсюда следует, что при всех w таких, что $|\mathcal{Q}^{-1}(w)| < 1$, существует не зависящий от w предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w) = S = \mathcal{Q}(T)$. При этом

$$|\mathcal{Q}^{-1}(S)| = |T| \leq 1$$

и

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}^{-1} \circ S_1 \circ \dots \circ S_n(w) - \mathcal{Q}^{-1}(S)| &= |T_1 \circ \dots \circ T_n \circ \mathcal{Q}^{-1}(w) - T| \\ &\leq q^n \frac{1 + |\mathcal{Q}^{-1}(w)|}{1 - |\mathcal{Q}^{-1}(w)|}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Вспоминая определение дробно-линейного преобразования $\mathcal{Q}(w)$, отсюда получаем утверждения лемм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заметим, что $p^l(z) = S^l \circ \dots \circ S^m(p^1(z), z)$ и равенство $\tilde{S}^l(w, z) = p^l(z)$ выполняется тогда и только тогда, когда $w = p^l(z)$, $l = 1, \dots, m$. Поэтому

$$\Lambda = \bigcap_{l=1}^m \{(w, z) \in \overline{\mathbb{C}} \times (\Omega \setminus \Gamma) : S^1 \circ \dots \circ S^l(w, z) \neq p^1(z)\}. \quad (4)$$

Легко видеть, что теорема 1 будет доказана, если для любой точки $z_0 \in \Omega \setminus \Gamma$ будет найдено положительное число $r = r(z_0)$ такое, что композиции $S_1 \circ \dots \circ S_n(w, z)$ равномерно в сферической метрике сходятся при $n \rightarrow \infty$ на компактах вида

$$\Lambda(z_0, r, \tau) = \bigcap_{l=1}^m \{(w, z) \in \overline{\mathbb{C}} \times K(z_0, r) : |S^1 \circ \dots \circ S^l(w, z) - p^1(z)| \geq \tau\},$$

где $K(z_0, r) = \{|z - z_0| \leq r\}$, τ — произвольное сколь угодно малое положительное число, r не зависящей от w и мероморфной по z в круге $K(z_0, r)$ функции $f(z)$.

Фиксируем точку $z_0 \in \Omega \setminus \Gamma$. Переходя в случае необходимости от заданных дробно-линейных преобразований (2) к дробно-линейным преобразованиям $S_{n,t}(w, z) = \mathcal{Q}_t^{-1} \circ S_n \circ \mathcal{Q}_t(w, z)$, где $\mathcal{Q}_t(w) = w^{-1} + t$ с надлежаще выбранным числом t , можно считать, не теряя общности рассуждений, что $\gamma^1(z_0) \neq 0$.

Выберем в качестве $r(z_0)$ любое положительное число такое, что круг $K = K(z_0, r)$ принадлежит $\Omega \setminus \Gamma$ и $\gamma^1(z) \neq 0$ при всех $z \in K$. Для комплексного числа z , не лежащего на отрицательной полуоси, обозначим через $\sqrt{z}$ тот из корней, для которого число $1 + \sqrt{z}$ имеет меньший модуль, т.е. $|1 + \sqrt{z}| < |1 - \sqrt{z}|$. Тогда $\sqrt{z} -$

функция, регулярная во всей комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси. Легко видеть, что

$$p^1(z) = \frac{\alpha^1(z) - \delta^1(z) + I(z)\sqrt{1 - 4\Delta(z)I^{-2}(z)}}{2\gamma^1(z)}$$

— функция, голоморфная в некоторой окрестности круга K , и при всех $z \in K$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} 2^{-1}|\delta^1(z) + \gamma^1(z)p^1(z)| &= |I(z)(1 + \sqrt{1 - 4\Delta(z)I^{-2}(z)})| < \\ &< |I(z)(1 - \sqrt{1 - 4\Delta(z)I^{-2}(z)})| = 2^{-1}|\alpha^1(z) - \gamma^1(z)p^1(z)|. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, в частности, что голоморфная функция $\alpha^1(z) - \gamma^1(z)p^1(z)$ не принимает при $z \in K$ значений, равных нулю, и, следовательно,

$$\min_{z \in K} |\alpha^1(z) - \gamma^1(z)p^1(z)| > 0. \quad (6)$$

Фиксируем $\tau_0 > 0$ и компакт $\Lambda_0 = \Lambda(z_0, r(z_0), \tau_0)$. Так как компакт Λ_0 лежит в Λ и так как коэффициенты дробно-линейных преобразований $S_{nm+1} \circ \dots \circ S_{nm+l}(w, z)$ равномерно сходятся на K при $n \rightarrow \infty$ к коэффициентам $S^1 \circ \dots \circ S^l(w, z)$, то из (4) получаем, что найдется индекс N_1 такой, что при всех $n \geq N_1$, всех $l = 1, \dots, m$ и всех $(w, z) \in \Lambda_0$

$$|S_{nm+1} \circ \dots \circ S_{nm+l}(w, z) - p^1(z)| \geq v, \quad (7)$$

где $v > 0$.

Из неравенств (5) и (6) следует, что найдутся положительные числа $\theta < v$ и $s < 1$ такие, что при всех $z \in K$

$$|\delta^1(z) + \gamma^1(z)p^1(z)| + \theta|\gamma^1(z)| \leq s|\alpha^1(z) - \gamma^1(z)p^1(z)|. \quad (8)$$

Положим

$$\begin{pmatrix} \alpha_n^1(z) & \beta_n^1(z) \\ \gamma_n^1(z) & \delta_n^1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{nm+1}(z) & b_{nm+1}(z) \\ c_{nm+1}(z) & d_{nm+1}(z) \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} a_{nm+m}(z) & b_{nm+m}(z) \\ c_{nm+m}(z) & d_{nm+m}(z) \end{pmatrix}.$$

По условиям теоремы голоморфные в $\Omega \setminus \Gamma$ функции $\alpha_n^1(z)$, $\beta_n^1(z)$, $\gamma_n^1(z)$, $\delta_n^1(z)$ и $\gamma_n^1(z)(p^1(z))^2 + (\delta_n^1(z) - \alpha_n^1(z))p^1(z) - \beta_n^1(z)$ равномерно сходятся на K соответственно к функциям $\alpha^1(z)$, $\beta^1(z)$, $\gamma^1(z)$, $\delta^1(z)$ и $\gamma^1(z)(p^1(z))^2 + (\delta^1(z) - \alpha^1(z))p^1(z) - \beta^1(z) \equiv 0$. Поэтому из (6) и (8) следует, что найдутся положительное число $q < 1$ и индекс $N \geq N_1$ такие, что при всех $n \geq N$ и всех $z \in K$

$$\begin{aligned} &|\delta_n^1(z) + \gamma_n^1(z)p^1(z)| + \theta^{-1}|\gamma_n^1(z)(p^1(z))^2 + (\delta_n^1(z) - \alpha_n^1(z))p^1(z) - \beta_n^1(z)| \\ &+ \theta|\gamma_n^1(z)| \leq q|\alpha_n^1(z) - \gamma_n^1(z)p^1(z)|. \end{aligned}$$

Это означает, что для последовательности дробно-линейных (по w) преобразований

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n^1(w, z) &= S_{nm+1} \circ \dots \circ S_{nm+m}(w, z) = \frac{\alpha_n^1(z)w + \beta_n^1(z)}{\gamma_n^1(z)w + \delta_n^1(z)}, \\ z &\in K, \quad n = N, N+1, \dots, \end{aligned}$$

и чисел $p = p^1(z)$, q и θ выполнены условия леммы 1. Поэтому по лемме 1 при всех $(w, z) \in \tilde{\Lambda} = \{(w, z) \in \overline{\mathbb{C}} \times K : |w - p^1(z)| \geq v\}$ (напомним, что $v > \theta$) существует не зависящий от w предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_N^1 \circ \dots \circ \tilde{S}_n^1(w, z) = f_N(z)$$

композиций дробно-линейных преобразований $\tilde{S}_n^1(w, z)$, $n = N, N+1, \dots$, причем

$$|f_N(z) - p^1(z)|^{-1} \leq \theta^{-1} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} & |(\tilde{S}_N^1 \circ \dots \circ \tilde{S}_n^1(w, z) - p^1(z))^{-1} - (f_N(z) - p^1(z))^{-1}| \\ & \leq q^{n-N+1} \frac{|w - p^1(z)| + \theta}{|w - p^1(z)| - \theta} \theta^{-1} \leq q^{n-N+1} \frac{v + \theta}{v - \theta} \theta^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ таково, что $|w_0| > v + \max_{z \in K} |p^1(z)|$. Тогда $(w_0, z) \in \tilde{\Lambda}$ при всех $z \in K$. Из неравенств (9) и (10) имеем, в частности, ограниченность в круге K мероморфных по z функций $(\tilde{S}_N^1 \circ \dots \circ \tilde{S}_n^1(w_0, z) - p^1(z))^{-1}$, $n = N, N+1, \dots$, а следовательно, и их голоморфность в круге K . Из неравенства (10) следует, что и функция $(f_N(z) - p^1(z))^{-1}$ голоморфна в круге K как равномерный предел голоморфных функций $(\tilde{S}_N^1 \circ \dots \circ \tilde{S}_n^1(w_0, z) - p^1(z))^{-1}$. Таким образом, $f_N(z)$ мероморфна в круге K .

Пусть $n = km + l$, $k \geq N$, $1 \leq l \leq m$. Тогда в силу (7) $(S_{km+1} \circ \dots \circ S_{km+l}(w, z), z) \in \tilde{\Lambda}$ при всех $(w, z) \in \Lambda_0$. Поэтому из неравенства (10) получаем, что композиции

$$S_{Nm+1} \circ \dots \circ S_n(w, z) = \tilde{S}_N^1 \circ \dots \circ \tilde{S}_{k-1}^1(S_{km+1} \circ \dots \circ S_{km+l}(w, z), z)$$

равномерно в сферической метрике сходятся при $n \rightarrow \infty$ к мероморфной функции $f_N(z)$ на компакте Λ_0 . Отсюда стандартным образом получаем существование равномерного на Λ_0 в сферической метрике предела

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_1 \circ \dots \circ S_n(w, z) &= S_1 \circ \dots \circ S_{Nm} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Nm+1} \circ \dots \circ S_n(w, z), z \right) \\ &= S_1 \circ \dots \circ S_{Nm}(f_N(z), z) = f(z), \end{aligned}$$

где предельная функция $f(z) = S_1 \circ \dots \circ S_{Nm}(f_N(z), z)$, очевидно, мероморфна в круге K . Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как уже отмечалось, сходимость непрерывной C -дроби (1) эквивалентна сходимости последовательности композиций $S_1 \circ \dots \circ S_n(0, z)$ дробно-линейных (по w) преобразований $S_n(w, z) = \frac{a_n z}{w+1}$. Положим в теореме 1 $\Omega = \mathbb{C}$, $S_n(w, z) = \frac{a_n z}{w+1}$ и заметим, что в обозначениях теорем 1 и 2

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= (-1)^m a^1 \dots a^m z^m, \quad I(z) = I(z; a^1, \dots, a^m), \\ \Gamma &= \{z \in \Omega : I^2(z) = 4t\Delta(z), 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : I^2(z; a^1, \dots, a^m) = 4t(-1)^m a^1 \dots a^m z^m, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : z^{-m} I^2(z; a^1, \dots, a^m) \in [0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m]\} = \Gamma(a^1, \dots, a^m). \end{aligned}$$

По теореме 1 C -дробь (1) сходится на множестве $D = \mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup E)$, где $E = \bigcup_{l=1}^m \{z \in \mathbb{C} : 0 = p^l(z)\}$ к функции $f(z)$, мероморфной в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов $f(z)$.

Покажем далее, что $I(z; a^1, \dots, a^m)$ является многочленом степени не выше $[m/2]$ с единичным свободным членом. Индукцией по m легко показывается, что

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & a^1 z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & a^m z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^1 z t_{m-3}(z; a^3, \dots, a^{m-1}) & a^1 z t_{m-2}(z; a^3, \dots, a^m) \\ t_{m-2}(z; a^2, \dots, a^{m-1}) & t_{m-1}(z; a^2, \dots, a^m) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $t_{-2} = 0$, $t_{-1} = t_0 = 1$ и

$$\begin{aligned} t_m(z; a^1, \dots, a^m) &= 1 + z \sum_{l=1}^m a^l + z^2 \sum_{l_0 < l_1 - 1} a^{l_0} a^{l_1} \\ &+ z^3 \sum_{l_0 < l_1 - 1 < l_2 - 2} a^{l_0} a^{l_1} a^{l_2} + \dots \\ &\dots + z^{[(m+1)/2]} \sum_{l_0 < l_1 - 1 < \dots < l_{[(m-1)/2]} - [(m-1)/2]} a^{l_0} \dots a^{l_{[(m-1)/2]}}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Непосредственно из определения видно, что $t_m(z; a^1, \dots, a^m)$ – алгебраический многочлен степени не выше $[(m+1)/2]$ с единичным свободным членом. Следовательно, $I(z; a^1, \dots, a^m) = a^1 z t_{m-3}(z; a^3, \dots, a^{m-1}) + t_{m-1}(z; a^2, \dots, a^m)$ – алгебраический многочлен степени не выше $[m/2]$ с единичным свободным членом.

Покажем теперь, что множество $E = E(a^1, \dots, a^m) = \bigcup_{l=1}^m \{0 = p^l(z)\}$ состоит из не более чем $m[(m-1)/2]$ точек и не содержит точку $z = 0$. Учитывая (11), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}^1(w, z) &= S^1 \circ \dots \circ S^m(w, z) \\ &= \frac{a^1 z t_{m-3}(z; a^3, \dots, a^{m-1})w + a^1 z t_{m-2}(z; a^3, \dots, a^m)}{t_{m-2}(z; a^2, \dots, a^{m-1})w + t_{m-1}(z; a^2, \dots, a^m)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как $p^1(z)$ – неподвижная точка дробно-линейного преобразования $\tilde{S}^1(w, z)$, то из (12) получаем

$$\{p^1(z) = 0\} \subset \{\tilde{S}^1(0, z) = 0\} = \{a^1 z t_{m-2}(z; a^3, \dots, a^m) = 0\}.$$

Легко видеть также, что $0 \notin \{p^1(z) = 0\}$, так как $w = 0$ является притягивающей, а не отталкивающей точкой дробно-линейного преобразования $\tilde{S}^1(w, 0) = \frac{0w+0}{w+1}$. Поэтому $\{p^1(z) = 0\} \subset \{t_{m-2}(z; a^3, \dots, a^m)\}$. Так как $t_{m-2}(z; a^3, \dots, a^m)$ – многочлен степени не выше $[(m-1)/2]$, то множество $\{p^1(z) = 0\}$ состоит из не более чем $[(m-1)/2]$ точек. Аналогичным образом множество $\{p^l(z) = 0\}$ не содержит точку $z = 0$ и состоит из не более чем $[(m-1)/2]$ точек. Следовательно, множество $E = \bigcup_{l=1}^m \{0 = p^l(z)\}$ не содержит точку $z = 0$ и состоит из не более чем $m[(m-1)/2]$ точек и, в частности, пусто при $m = 1, 2$.

Так как $0 \notin E$, а непосредственно из определения $\Gamma = \Gamma(a^1, \dots, a^m)$ следует, что и $0 \notin \Gamma$, то $0 \in D$ (впрочем, утверждение $0 \in D$, очевидно, следует и из известного критерия Ворпицкого [5] о сходимости непрерывной дроби (1) при $|z| < (4 \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|)^{-1}$). Таким образом, утверждения 1), 3) и 4), а также включение $0 \in D$ доказаны.

Докажем теперь утверждение 5) в предположении (3). При нечетных m имеем $\deg I^2(z; a^1, \dots, a^m) \leq 2[m/2] < m$ и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-m} I^2(z; a^1, \dots, a^m) = 0 \in [0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m],$$

т.е. (3) невозможно при нечетных m . Таким образом, m четно. Применим теперь теорему 1 к последовательности

$$\check{S}_n(w, z) = \frac{\alpha_n^1(z) z^{-m/2} w + \beta_n^1(z) z^{-m/2}}{\gamma_n^1(z) z^{-m/2} w + \delta_n^1(z) z^{-m/2}},$$

где

$$\begin{pmatrix} \alpha_n^1(z) & \beta_n^1(z) \\ \gamma_n^1(z) & \delta_n^1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{nm+1}z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & a_{nm+m}z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что по аналогии с равенством (12) многочлены $\alpha_n^1(z)$, $\beta_n^1(z)$, $\gamma_n^1(z)$, $\delta_n^1(z)$ являются многочленами степени не выше $m/2$ (при четных m). Поэтому коэффициенты дробно-линейных преобразований $\check{S}_n(w, z)$ являются голоморфными в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функциями. Так как $\check{I}(z) = z^{-m/2} I(z; a^1, \dots, a^m)$ и $\check{\Delta}(z) = (-1)^m a^1 \dots a^m$, то из (3) следует, что $\check{I}^2(z) \neq 4t\check{\Delta}(z)$, $0 \leq t \leq 1$, при всех $|z| > R$, включая $z = \infty$, где R – некоторое достаточно большое число. По теореме 1 имеем, что при любом фиксированном w последовательность композиций $\check{S}_1^1 \circ \dots \circ \check{S}_n^1(w, z)$ сходится на множестве $\{|z| > R\} \setminus \check{E}(w)$, где $\check{E}(w)$ – некоторое зависящее от w конечное множество точек, к мероморфной функции $\check{f}(z)$, совпадающей, очевидно, с $f(z)$ и допускающей мероморфное продолжение на все множество $\{|z| > R\}$, включая точку $z = \infty$.

Докажем теперь утверждение 6) при помощи двух хорошо известных результатов. Первый из них – это формулы, выражающие коэффициенты a_n правильной C -дроби (1) (при условии $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$) через ганкелевы определители предельной функции $f(z)$ (см., например, [6, с. 220, 221]). Если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ в некоторой окрестности точки $z = 0$, то из этих формул следует, в частности, что $H_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a_1 \dots a_{2k+1})$, где

$$H_n = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n & \dots & f_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Поэтому из условия существования периодических пределов коэффициентов a_n имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |H_n|^{1/n^2} = |a^1 \dots a^m|^{\frac{1}{mn^2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)} = |a^1 \dots a^m|^{1/m}. \quad (13)$$

Второй результат, лежащий в основе доказательства утверждения 6), – это известная теорема Поля [7] об оценке верхнего предела ганкелевых определителей голоморфной функции посредством трансфинитного диаметра множества ее особенностей.

ТЕОРЕМА (Поля). Пусть G – компакт комплексной плоскости, и пусть $g(z)$ – функция, голоморфная в компоненте $\mathbb{C} \setminus G$, содержащей точку $z = \infty$. Если $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^{-n}$ при достаточно больших z , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \begin{array}{ccc} g_1 & \dots & g_n \\ \dots & \dots & \dots \\ g_n & \dots & g_{2n-1} \end{array} \right|^{1/n^2} \leq d(G),$$

где $d(G)$ – трансфинитный диаметр компакта G .

Легко видеть, что теорема Поля сформулирована для голоморфных функций, но верна и для мероморфных в $\mathbb{C} \setminus G$ функций, так как добавление к G конечного числа точек не меняет его трансфинитного диаметра, а точками накопления полюсов могут служить только лишь точки компакта G . Пусть компакт F такой, как указано в утверждении 6). Тогда, применяя теорему Поля к функции $g(z) = f(z^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n}$, имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |H_n|^{1/n^2} \leq d(F).$$

Отсюда и из равенства (13) получаем $d(F) \geq |a^1 \dots a^m|^{1/m}$.

Покажем теперь, что $d(\Gamma^{-1}) = |a^1 \dots a^m|^{1/m}$. Это равенство следует непосредственно из определения множества Γ и хорошо известных свойств трансфинитного диаметра. Действительно, известно, что трансфинитный диаметр любого отрезка равен четверти его длины и что для всякого компакта E и всякого алгебраического многочлена $p_m(z)$ степени m с единичным старшим коэффициентом справедливо равенство $d(\{z: p_m(z) \in E\}) = d(E)^{1/m}$ (см., например, [2, с. 290]). Так как $z^m I^2(a^1 z^{-1}, \dots, a^m z^{-1})$ – алгебраический многочлен степени m с единичным старшим коэффициентом, то

$$\begin{aligned} d(\Gamma^{-1}) &= d(\{z: z^m I^2(z^{-1}; a^1, \dots, a^m) \in [0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m]\}) \\ &= d([0, 4(-1)^m a^1 \dots a^m])^{1/m} = |a^1 \dots a^m|^{1/m}. \end{aligned}$$

Утверждение 6) доказано.

Завершим теперь доказательство утверждения 2), а именно докажем, что множество $D = \mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup E)$ сходимости C -дроби (1) связно. Так как множество E конечно, то для этого достаточно показать, что связно множество $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Так как $\Gamma = \Gamma(a^1, \dots, a^m)$ зависит только лишь от набора чисел $a^1, \dots, a^m$, то для доказательства связности $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ достаточно рассмотреть чисто периодический случай, когда $a_{nm+l} = a^l$ при всех $n = 0, 1, \dots$, $l = 1, \dots, m$. При этом можно предполагать, что $a^l \neq 0$, $l = 1, \dots, m$, так как в противном случае множество Γ конечно, и $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, очевидно, связно. Как уже отмечалось в § 1, в чисто периодическом случае предельная функция $f(z)$ легко находится в явном виде как притягивающая неподвижная точка дробно-линейного преобразования $\tilde{S}^1(w, z) = S^1 \circ \dots \circ S^m(w, z)$, где $S^l(w, z) = \frac{a^l z}{w+1}$, $l = 1, \dots, m$. В обозначениях теоремы 1 точки ветвления функции $f(z^{-1})$ совпадают с точками ветвления функции

$$\sqrt{I^2(z^{-1}; a^1, \dots, a^m) - 4a^1 \dots a^m z^{-m}}.$$

По уже доказанному утверждению 6) компакт $\Gamma^{-1}(a^1, \dots, a^m)$ соединяет между собой пары точек ветвления $f(z^{-1})$ таким образом, чтобы иметь наименьший трансфинитный диаметр среди всех таких соединений. Из этого экстремального свойства компакта $\Gamma^{-1}(a^1, \dots, a^m)$ следует связность множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma^{-1}(a^1, \dots, a^m)$, а следовательно, и множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma(a^1, \dots, a^m)$. Теорема 2 полностью доказана.

В заключение заметим, что теорема, аналогичная теореме 2 о сходимости правильных C -дробей с предельно периодическими коэффициентами, имеет место и для присоединенных непрерывных дробей с предельно периодическими коэффициентами. Действительно, множество сходимости таких дробей легко находится при помощи теоремы 1, а экстремальное свойство множества особенностей таких дробей доказывается, как и выше, при помощи теоремы Поля и формул, выражающих коэффициенты присоединенной дроби через ганкелевы определители предельной функции (см., например, [6, с. 239]).

Список литературы

1. *Vlek E. V.* On the conergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values // Trans. Amer. Math. Soc. 1904. V. 5. P. 253–262.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
3. *Stahl H.* Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I. II // Constr. approx. 1986. V. 2. P. 225–240; P. 241–251.
4. *Буслаев В. И.* О теореме Пуанкаре и ее приложениях к вопросам сходимости цепных дробей // Матем. сб. 1998. Т. 189. №12. С. 13–28.
5. *Worpitsky J.* Untersuchungen über die Entwicklung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche // Friedrichs-Gymnasium und Realschule Jahresbericht. Berlin, 1865. S. 3–39.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985.
7. *Polya G.* Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. III // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1929. S. 55–62.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
7.XII.2000