Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Диаграммы А'Кампо–Гусейн-Заде как частично упорядоченные множества, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 49–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:22:01

УДК 515.1

Г. Г. Ильюта

Диаграммы А'Кампо–Гусейн-Заде как частично упорядоченные множества

Вещественные аналоги многих результатов о комплексной монодромии особенностей можно формулировать и доказывать в терминах структуры частичного порядка на диаграммах А'Кампо–Гусейн-Заде – вещественных вариантах диаграмм Кокстера–Дынкина особенностей. В статье доказано, что среди диаграмм А'Кампо–Гусейн-Заде особенностей только диаграммы простых особенностей определяют частично упорядоченные множества конечного типа (в смысле теории представлений колчанов). Для кодирующих вещественные распадаения особенности сюръекций частично упорядоченного множества в цепь определены аналоги инвариантов Васильева. Доказаны формулы для $(\text{mod } 2)$ -инвариантов Арнольда плоских кривых в терминах соответствующих диаграмм А'Кампо–Гусейн-Заде. В контексте высших порядков Брюа определены высшие частично упорядоченные множества и описана их связь с высшими M -морсификациями A_n . Также с точки зрения частично упорядоченных множеств рассматриваются некоторые ранее известные результаты о вещественных особенностях.

Библиография: 73 наименования.

С каждой критической точкой аналитической функции инвариантным образом связан набор базисов в гомологиях ее слоя Милнора [1]. Эти базисы кодируются диаграммами Кокстера–Дынкина (д.К.-Д.), среди которых для простых критических точек находятся классические диаграммы A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 . Учет вещественной структуры критической точки приводит к специальному классу д.К.-Д. – диаграммам А'Кампо–Гусейн-Заде (д.А.-Г.) [4], [16], которые являются наиболее геометричным обобщением диаграмм A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 . Доказанные и цитированные в этой статье факты можно рассматривать как эмпирическое доказательство последнего замечания; точнее, общей целью статьи является подтверждение на примерах следующего неформального принципа: вещественные аналоги результатов о монодромии особенностей получаются из соответствующих комплексных фактов добавлением некоторых условий, происходящих из структуры частичного порядка на д.А.-Г. особенности. Другими словами, в контексте нашего подхода вещественным аналогом множества является частично упорядоченное (ч.у.) множество. Частичный порядок на д.А.-Г. индуцируется естественным линейным порядком на множестве вещественных чисел, и мотивировкой для рассмотрения такой структуры на д.А.-Г. является ее удивительная согласованность с геометрией особенности [11]. В § 1 приводится словарь соответствия понятий. Опишем результаты статьи.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (№ 98-01-00612) и NWO–RFBR (№ 047.008.005).

На ч. у. множества обобщена теория представлений колчанов [69] (частный случай колчанов с соотношениями [32]). Традиционно в различных вариациях этой теории основной задачей является описание колчанов конечного типа, т. е. имеющих конечное число неприводимых представлений. В § 3 доказано, что среди д.А.-Г. особенностей ч. у. множества конечного типа определяют только д.А.-Г. простых особенностей. В связи с этим фактом возникает вопрос о вещественных аналогах результатов из [26], [27], [45], связывающих представления колчанов A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 и модули над локальной алгеброй простой особенности. В таких аналогах (если они существуют) роль диаграмм A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 должны играть д.А.-Г. простых особенностей.

В § 4 доказаны формулы для $(\text{mod } 2)$ -инвариантов Арнольда плоских кривых [24] в терминах соответствующих кривым д.А.-Г. Известно, что $J^+ - J^-$ равно числу двойных точек кривой [24] и $\text{Arf} = J^-/2 \pmod{2}$ [50]. Вместе с результатами § 4 эти формулы дают следующее: для определяемой особенностью плоской кривой индекс Уитни (число вращений касательного вектора) и инварианты Арнольда $J^\pm$, St над $\mathbb{Z}_2$ определяются Arf -инвариантом особенности и количества минимумов, седел и максимумов в вещественной морсификации. А именно, индекс Уитни по $\text{mod } 2$ равен числу седел (которое равно числу двойных точек кривой), а $\text{St} \pmod{2}$ равно числу максимумов с точностью до зависящей от индекса Уитни аддитивной константы (или числу минимумов с точностью до другой такой константы). Отметим, что количества минимумов, седел и максимумов можно рассматривать как инварианты первого порядка в пространстве функций Морса на многообразии (см. [49, замечание 1.4]). Также формулы из § 4 показывают, что над $\mathbb{Z}_2$ инвариант St аналогично инвариантам $J^\pm$ естественно рассматривать как два дополняющих друг друга инварианта $\text{St}^\pm$ (максимумы и минимумы), сумма которых равна числу компонент дополнения кривой. Возможно, и над $\mathbb{Z}$ естественно было бы ввести такое равноправие для инвариантов $J^\pm$ и St .

Основой для построения высших аналогов многих объектов являются определенные Ю. И. Маниным и Б. В. Шехтманом высшие порядки Брюа – высшие аналоги симметрических групп [56]. В § 5 в контексте высших порядков Брюа определяются высшие аналоги ч. у. множеств. Частным случаем высших ч. у. множеств являются частичные порядки на высших д.А.-Г. A_n [9], [10]. Линейные порядки на множестве $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$ очевидно отождествляются с перестановками на $\bar{n}$. Мы покажем, что высшие аналоги линейных порядков на $\bar{n}$ отождествляются с элементами высших порядков Брюа. Также в § 5 показано, что построенное в [9], [10] отображение из множества связных компонент пространства невырожденных k -высших M -морсификаций особенности A_n в высшие порядки Брюа $B(n, k)$ можно рассматривать как отображение в линейные расширения высшего частичного порядка на д.А.-Г. A_n . Высшему ч. у. множеству можно сопоставить порядковый комплекс, клетками которого являются гиперсимплексы (определение гиперсимплекса см. в [55]). Для обычного ч. у. множества клетки порядкового комплекса отвечают цепям и являются обычными симплексами. Мы вернемся к более подробному изучению этих объектов в другой статье.

Симплициальный комплекс называется *шелушимым* (shellable), если его максимальные по включению грани можно линейно упорядочить таким образом, что каждая грань (начиная со второй) пересекается с объединением предыдущих по

непустому объединению максимальных собственных граней [31], т.е. этот комплекс можно получить из какой-либо грани максимальной размерности последовательным приклеиванием наиболее регулярным образом других максимальных по включению граней. Используя теоремы 5.8 и 5.11 из [31], нетрудно показать, что порядковый комплекс (комплекс цепей) задаваемого д.А.-Г. особенности ч.у. множества является шелушимым, если справедлива следующая гипотеза: если из д.К.-Д. особенности выбросить вершину или ребро, то не более чем одна связная компонента оставшейся диаграммы не совпадает с какой-либо (а в классе д.А.-Г. со стандартной) д.К.-Д. A_n . Эту гипотезу можно рассматривать как обобщение теоремы А. М. Габриэлова о связности д.К.-Д. особенности [1].

Перечислим некоторые следствия шелушимости симплициального комплекса (напомним, что комплекс называется *чистым*, если все его максимальные по включению грани имеют одинаковую размерность): для любого симплициального комплекса определена двухиндексная последовательность целых чисел, обобщающая обычный h -вектор чистого комплекса [31], и для шелушимого комплекса компоненты этой последовательности неотрицательны (размерности некоторых пространств гомологий); шелушимый комплекс имеет гомотопический тип букета сфер (вообще говоря, разных размерностей); имеет место аналог утверждения о том, что кольцо Стенли–Рейснера чистого шелушимого комплекса является кольцом Коэна–Маколея [31].

Появление д.А.-Г. из геометрического объекта – вещественной линии уровня особенности – для простых особенностей характеризуется комбинаторно-алгебраически: среди д.К.-Д. простых особенностей д.А.-Г. выделяются тем, что задают эйлеровы ч.у. множества [11] (прототипом эйлеровых ч.у. множеств являются регулярные клеточные разбиения многообразий [14]). Д.А.-Г. точно так же можно построить по любой общей кривой на плоскости, и в связи с этим возникает вопрос: можно ли аналогичным образом характеризовать вещественные линии уровня особенностей среди всех кривых на плоскости? Возможно, для этого достаточно следующего общего факта о монодромии особенностей: корни характеристического полинома оператора классической монодромии являются корнями из 1, причем для корня, равного 1, жордановы клетки одномерны [1].

По-видимому, конструкции и результаты этой статьи естественно обобщаются также в следующих направлениях: д.А.-Г. многомерных особенностей [5], д.А.-Г. полных пересечений [38], [39], д.А.-Г. неалгебраических узлов [18]–[20].

Автор благодарен С.М. Гусейн-Заде за внимание к работе и полезные замечания.

§ 1. Словарь

В следующей таблице показано соответствие между понятиями теории частично упорядоченных множеств и теории диаграмм А'Кампо–Гусейн-Заде.

Прокомментируем словарь. Соответствия из первых трех строк словаря (т.е. основные определения) представлены в § 2.

Симплексы порядкового комплекса ч.у. множества по определению соответствуют цепям ч.у. множества, и поэтому обычная формула для эйлеровой характеристики комплекса совпадает в этом случае с формулой Холла для вычисления функции Мёбиуса [14]. Рассматривая ч.у. множество как д.К.-Д. [11], мы видим,

Частично упорядоченное множество	Диаграмма А'Кампо–Гусейн-Заде
функция Мёбиуса	форма Зейферта
дзета-функция	оператор вариации
эйлерова характеристика порядкового комплекса	след оператора классической монодромии
ранг элемента ч. у. множества	индекс Морса вещественной особенности
группа Гротендика представлений	гомологии слоя Милнора
линейное расширение	M -морсификация
порядковый многогранник	конус Спрингера
монотонная сюръекция в цепь	вещественное распадаение особенности
инварианты Васильева монотонных сюръекций	инварианты Васильева вещественных распадений
прямое произведение ч. у. множеств	прямая сумма особенностей
коумножение на ч. у. множестве	коумножение на вещественных распадениях
высшие ч. у. множества	высшие д.А.-Г.

что цепи взаимно однозначно отвечают монотонным циклам [7], и формула для эйлеровой характеристики порядкового комплекса совпадает с формулой для следа оператора классической монодромии [7].

В § 3 определяются представления ч. у. множеств и на соответствующей группе Гротендика в гомологических терминах вводится билинейная форма. Замечательным фактом является совпадение этой формы с функцией Мёбиуса ч. у. множества (формой Зейферта д.А.-Г.) [69]. В связи с вопросом, сформулированным во введении, о вещественном аналоге связи представлений колчанов с простыми особенностями отметим следующий факт. Соответствие Маккея сопоставляет представление бинарной полиэдральной группы каждой вершине диаграмм A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 [44]. Структура д.А.-Г. на этих диаграммах задается единственным разбиением вершин на два множества (максимумы и седла или минимумы и седла), в каждом из которых вершины не соединены ребрами. Таблицы характеров бинарных полиэдральных групп [44] дают следующий факт: комплексное сопряжение характеров сохраняет разбиение д.А.-Г. на максимумы (или минимумы) и седла.

Результаты о числе очень хороших M -морсификаций простой особенности для A_n [23] и для D_n , E_6 , E_7 , E_8 [46], [47] (см. также [25], [48]) могут быть единым образом сформулированы так: число неэквивалентных очень хороших M -морсификаций простой особенности равно числу линейных расширений частичных порядков, задаваемых всеми д.А.-Г. этой особенности. Поэтому результаты о линейных расширениях ч. у. множеств можно рассматривать как факты о M -морсификациях простых особенностей. Отметим некоторые из таких результатов. В работах [34], [35], [43], [52], [53], [63] изучаются различные статистики на множестве линейных расширений. В [40] доказано рекуррентное соотношение для числа линейных расширений. В [57], [59], [60] доказывается, что линейные расширения некоторых ч. у.

множеств можно линейно упорядочить так, что соседние расширения отличаются транспозицией. Другие результаты можно найти в [42], [62], [65], [67], [68]. Было бы интересно получить исходящие их определения M -морсификации доказательства этих фактов (подобные доказательству рекуррентной формулы для чисел Эйлера–Бернулли в [22]).

Результаты теории особенностей могут оказаться полезными для теории ч.у. множеств. Например, простой перевод многочисленных результатов об updown-перестановках [2] на язык линейных расширений ч.у. множеств, по-видимому, приведет к формулировке и доказательству общих теорем о линейных расширениях. В частности, числа из треугольника Эйлера–Бернулли [2] уже появлялись в контексте линейных расширений ч.у. множеств [63]. Интересная комбинаторно-алгебраическая модель для множества линейных расширений ч.у. множества (а тем самым и для M -морсификаций простых особенностей) содержится в [30]: множества линейных расширений ч.у. множеств характеризуются как выпуклые подмножества слабых порядков Брюа симметрических групп. По-видимому, такая характеристика остается справедливой для высших линейных расширений и высших порядков Брюа (см. § 5). Порядковые многогранники [64] появились в работах В. И. Арнольда как полиэдральные модели для пространств M -морсификаций [23], [25] (см. также [48]). В § 5 приводится определение высшего аналога порядкового многогранника. Отметим один из немногих общих фактов о порядковых многогранниках: в торической геометрии они определяют проективные многообразия с циклическими особенностями [51].

Аналогично M -морсификациям результат о вещественных распадах простых особенностей [15] можно переформулировать так: вещественные распада простейшей особенности кодируются монотонными (сохраняющими отношение порядка) сюръекциями в цепь частичных порядков, задаваемых всеми д.А.-Г. этой особенности (длина цепи равна количеству уровней распада). Естественным способом алгебраизации информации о том, что объект может несколькими способами распадаться на части, является введение коумножения [58]. В этих терминах теорема о вещественных распадах может быть сформулирована так: коумножение на вещественных распадах простейшей особенности совпадает с коумножением на ч.у. множествах [41], задаваемых всеми д.А.-Г. этой особенности (аналогично можно переформулировать и теорему О. В. Ляшко о комплексных распадах [13]). Тензорное произведение д.А.-Г., определяемое теоремой Себастьяни–Тома о прямой сумме особенностей [1], также соответствует прямому произведению ч.у. множеств [14], задаваемых д.А.-Г.

Множество вещественных распадов особенности является стратифицированным вещественным многообразием, и к нему применима идеология инвариантов Васильева. Опишем кратко соответствующую комбинаторику на сюръекциях ч.у. множества в цепь (полное соответствие между сюръекциями и вещественными распадами известно только для простых особенностей [15]). Назовем *ориентацией* ч.у. множества P любую нумерацию его элементов. *Узлом* в P назовем монотонное отображение $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. из условия $x < y$ в P следует, что $f(x) \leq f(y)$. Нумеруя элементы P в порядке возрастания f (если $f(x) = f(y)$, то x и y присваиваем один и тот же номер), получим сюръекцию из P в цепь. Два узла назовем *гомотопными*, если соответствующие им сюръекции совпадают. Переход через

общую точку дискриминанта в пространстве узлов (множества узлов, сюръекции которых не являются биекциями) отвечает перестановке номеров двух несравнимых элементов в P . Введем коориентацию: переход назовем *положительным*, если при нем увеличивается число инверсий в перестановке, задаваемой фиксированной ориентацией в P и сюръекцией (и ориентация, и сюръекция являются нумерациями вершин). Сюръекцию зададим списком ее значений в порядке, задаваемом ориентацией в P . *Инвариантом Васильева порядка $\leq n$* назовем вещественную функцию на гомотопических классах узлов (т.е. на сюръекциях из P в цепь), которая для любой пары несравнимых элементов с номерами $i, i + 1$ удовлетворяет условию

$$V(\dots, i, \dots, i + 1, \dots) - V(\dots, i + 1, \dots, i, \dots) = V(\dots, i, \dots, i, \dots)$$

и которая равна нулю на сюръекциях с более чем n парами совпадающих номеров. В [11] доказано, что операция перестановки последовательных номеров транзитивна на линейных расширениях P (биекциях из P в цепь). Также доказывается, что эта операция транзитивна на множестве сюръекций с фиксированным набором кратностей номеров. Поэтому инварианты Васильева порядка n для сюръекций с n парами совпадающих номеров являются функциями на наборах кратностей номеров (аналогах гауссовых диаграмм) и, в частности, пространство инвариантов порядка 0 одномерно.

§ 2. Частично упорядоченные множества и диаграммы А'Кампо–Гусейн–Заде: определения

Основные определения теории ч. у. множеств можно найти в [14], д.А.-Г. – в [1].

Ч. у. множеством называется бинарное отношение $R \subset P \times P$ на множестве P , которое:

- i) рефлексивно, т.е. $(a, a) \in R$ для всех $a \in P$;
- ii) антисимметрично, т.е. $(a, b) \in R \implies (b, a) \notin R$;
- iii) транзитивно, т.е. $(a, b), (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$.

Цепью в P называется подмножество, для любой пары a, b элементов которого либо $(a, b) \in R$, либо $(b, a) \in R$.

Антицепью в P называется подмножество, для любой пары $a \neq b$ элементов которого $(a, b) \notin R$.

Рассматривая элементы каждой цепи в P как вершины симплекса соответствующей размерности (с естественным отношением включения), получаем порядковый комплекс (комплекс цепей) ч. у. множества P .

Линейным расширением ч. у. множества P называется сохраняющая порядок биекция $\sigma: P \rightarrow \bar{n} = \{1, \dots, n\}$, т.е. для любых $a, b \in P$ из $(a, b) \in R$ следует, что $\sigma(a) \leq \sigma(b)$.

Если элементы P пронумерованы, то каждое линейное расширение можно рассматривать как перестановку на $\bar{n}$, т.е. множество линейных расширений любого ч. у. множества из n элементов можно рассматривать как подмножество в симметрической группе S_n [30].

Размерностью ч. у. множества P называется минимальное число m его линейных расширений $\sigma_1, \dots, \sigma_m: P \rightarrow \bar{n}$, пересечение которых совпадает с R , т.е. для

любой пары $(a, b) \notin R$ существуют $\sigma_i, \sigma_j, i, j = 1, \dots, m$, для которых

$$\sigma_i(a) < \sigma_i(b), \quad \sigma_j(a) > \sigma_j(b).$$

Порядковым многогранником ч. у. множества P из n элементов [64] называется многогранник в $\mathbb{R}^n$, определяемый системой неравенств (рассматриваем элементы P как декартовы координатные функции в $\mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} a \leq b, \quad \text{если} \quad (a, b) \in R, \\ 0 \leq a \leq 1 \quad \text{для всех} \quad a \in P. \end{aligned}$$

Дзета-функцией ч. у. множества P называется функция на $P \times P$, равная 1 на R и равная 0 на $P \times P \setminus R$.

Функцией Мёбиуса ч. у. множества P называется функция на $P \times P$, определяемая рекуррентно:

$$\begin{aligned} \mu(a, a) &= 1, \\ \mu(a, b) &= 0, \quad a, b \notin R, \\ \sum_{c: (a, c), (c, b) \in R} \mu(a, c) &= 0. \end{aligned}$$

Выберем линейное расширение $\sigma: P \rightarrow \bar{n}$ и зададим дзета-функцию и функцию Мёбиуса матрицами, строки и столбцы которых отвечают элементам P в нумерации σ (на месте $\sigma(a)\sigma(b)$ в матрице стоит значение соответствующей функции на (a, b)). Из определения дзета-функции и функции Мёбиуса следует, что матрицы этих функций обратны друг другу и их главные диагонали состоят из единиц. Из определения линейного расширения следует, что эти матрицы верхнетреугольные. Очень похожая ситуация возникает при изучении монодромии особенностей [1]: в отмеченном базисе матрицы оператора вариации и формы Зейферта особенности являются взаимно обратными верхнетреугольными матрицами с 1 на главных диагоналях. В [11] было замечено, что для отмеченных базисов, задающих д.А.-Г., это не просто аналогия, а совпадение, т. е. оператор вариации д.А.-Г. задает дзета-функцию некоторого ч. у. множества, а форма Зейферта – функцию Мёбиуса этого ч. у. множества. Перейдем к определению д.А.-Г. и соответствующих ч. у. множеств.

д.А.-Г. можно сопоставить любой кривой на плоскости, имеющей только трансверсальные пересечения в качестве особенностей (иммерсия нескольких прямых и окружностей). При построении д.А.-Г. двумерной особенности такая кривая возникает как вещественная линия уровня морсификации, все седла которой лежат на этом уровне [1]. В этом случае все максимумы и минимумы морсификации отвечают относительно компактным компонентам дополнения кривой, причем они чередуются при переходе через неособую точку кривой. Таким образом, вершины д.А.-Г. отвечают двойным точкам и относительно компактным компонентам дополнения кривой. Определим веса ребер, соединяющих вершины д.А.-Г. Для особенности эти веса будут равны индексам пересечения исчезающих циклов, отвечающих минимумам, седлам и максимумам морсификации [1]. Ребра в д.А.-Г.

будут соединять только вершины, отвечающие следующим парам: относительно компактная компонента дополнения и двойная точка в ее границе, пара соседних (т.е. имеющих дугу кривой в общей границе) относительно компактных компонент дополнения. Для произвольной кривой фиксируем разбиение компонент ее дополнения на два типа, условно называемые максимумами и минимумами, таким образом, что в любой паре соседних компонент есть и минимум и максимум. Вес ребра д.А.-Г., отвечающего паре (двойная точка, компонента дополнения), определим как взятое со знаком минус число подходов этой компоненты к двойной точке (оно может быть равно 1 или 2). Вес ребра, отвечающего паре (максимум, минимум), определим как число компонент кривой в общей границе соответствующих компонент дополнения кривой. Согласно [4] допустимыми преобразованиями (действием группы Kos) в д.А.-Г. двумерной особенности можно сделать равными ± 1 кратности всех ребер. Для краткости в этой статье мы ограничимся только такими д.А.-Г., поскольку в общем случае требуется небольшое расширение понятия ч.у. множества.

Частичный порядок на вершинах д.А.-Г. вводится следующим образом: максимумы больше связанных с ними в диаграмме седел и седла больше связанных с ними в диаграмме минимумов. Ключевое замечание состоит в том, что в таком отношении порядка вершина в д.А.-Г. больше другой вершины, если и только если индекс пересечения соответствующих этим вершинам исчезающих циклов не равен нулю и, более того, значения индексов пересечения совпадают со значениями соответствующей функции Мёбиуса [11].

§ 3. Диаграммы А'Кампо–Гусейн–Заде и представления колчанов с соотношениями

Линейным представлением A ч.у. множества P называется набор конечномерных векторных пространств A_x , $x \in P$, и линейных отображений

$$r_{xy}(A): A_x \rightarrow A_y, \quad x < y, \quad x, y \in P,$$

которые при всех $x < y < z$ удовлетворяют условию

$$r_{yz}(A)r_{xy}(A) = r_{xz}(A) \quad (1)$$

(т.е. согласованы со свойством транзитивности ч.у. множества P). Если Γ – диаграмма Хассе ч.у. множества P , то линейное представление можно рассматривать как представление колчана Γ с соотношениями (1) [32]. Напомним, что *диаграммой Хассе конечного ч.у. множества P* называется граф, вершинами которого являются элементы P , а пара (a, b) образует ребро, если элемент a предшествует элементу b (из $a \leq x \leq b$ следует, что $a = x$ или $x = b$), причем если $a < b$, то b рисуют “выше” a (т.е. с большей вертикальной координатой).

Вектор $m(A) = \{m_x(A) = \dim A_x\}$ называется *вектором размерностей представления A* . Морфизмом $\varphi: A \rightarrow B$ двух представлений A, B называется семейство линейных отображений $\varphi_x: A_x \rightarrow B_x$, $x \in P$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_x & \xrightarrow{\varphi_x} & B_x \\ r_{xy}(A) \downarrow & & \downarrow r_{xy}(B) \\ A_y & \xrightarrow{\varphi_y} & B_y \end{array}$$

Прямая сумма представлений A, B определяется покомпонентно:

$$(A \oplus B)_x = A_x \oplus B_x, \\ r_{xy}(A \oplus B) = r_{xy}(A) \oplus r_{xy}(B).$$

По отношению к этой операции стандартным образом строится группа Гротендика представлений [29]. Представление называется *неприводимым*, если оно не раскладывается в прямую сумму ненулевых представлений. Представления A, B называются *эквивалентными*, если существует морфизм $\varphi: A \rightarrow B$, у которого отображения φ_x являются изоморфизмами для всех $x \in P$. Ч.у. множество, имеющее конечное число не эквивалентных неприводимых представлений, называется *ч.у. множеством конечного типа*.

Представления ч.у. множества P можно рассматривать как пучки на топологическом пространстве $\bar{P}$, которое как множество совпадает с P и открытыми подмножествами которого являются идеалы в P (подмножества в P , которые вместе с x содержат все $y < x$). Эта точка зрения развита в [70]–[72]. В частности, для представлений над $\mathbb{R}$ определен тривиальный пучок, у которого $A_x = \mathbb{R}$ для всех $x \in P$ и $r_{xy} = \text{id}$ для всех $x < y$, $x, y \in P$. Также представление можно рассматривать как модуль над алгеброй инцидентности ч.у. множества P [28], и тогда для пары представлений A, B определены $\text{Ext}^i(A, B)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. В частности, если A – тривиальный пучок, то

$$\text{Ext}^i(A, B) = H^i(P, B), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

и если A и B тривиальны, то

$$\text{Ext}^i(A, B) = H^i(P, \mathbb{R}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $H^i(P, \mathbb{R})$ – вещественные когомологии порядкового комплекса ч.у. множества P , а $H^i(P, B)$ – когомологии ч.у. множества P с коэффициентами в пучке B [28]. Для полноты изложения приведем определение групп $H^i(P, B)$.

Определим коцепной комплекс $C^n(B)$ пучка B как модуль всех функций на цепях $x_0 < \dots < x_n$ в P со значениями в B_{x_n} , $n = 0, 1, \dots$. Кограничный оператор

$$d^n: C^n(B) \rightarrow C^{n+1}(B)$$

определим для $f \in C^n(B)$ по формуле

$$d^n(f)(a_0 < \dots < a_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f(a_0 < \dots < \hat{a}_i < \dots < a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} r_{x_n x_{n+1}}(B)(f(a_0 < \dots < a_n)).$$

Когомологии комплекса $C^n(B)$ называются *когомологиями ч.у. множества P с коэффициентами в пучке B* .

Определим на парах представлений A, B функцию со значениями в $\mathbb{Z}$

$$\Phi(A, B) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \text{Ext}^i(A, B).$$

Эта функция единственным образом расширяется до билинейной формы на группе Гротендика представлений ч. у. множества P .

ТЕОРЕМА 3.1 [69]. *Для любой пары представлений A, B*

$$\Phi(A, B) = \sum_{x, y \in P} \mu(x, y) m_x(A) m_y(B),$$

где $\mu(x, y)$ – функция Мёбиуса ч. у. множества P .

ТЕОРЕМА 3.2 [69]. *P является ч. у. множеством конечного типа, если и только если для любого положительного (ненулевого с неотрицательными координатами) вектора $m = (m_x)_{x \in P}$ имеем*

$$\Phi(m, m) > 0.$$

ТЕОРЕМА 3.3. *Д.А.-Г. особенности определяет ч. у. множество конечного типа, если и только если эта особенность проста.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Д.К.-Д. простых особенностей выделяются из всех д.К.-Д. условием положительной определенности соответствующей квадратичной формы (индекса пересечения в гомологиях слоя Милнора) [1]. Матрица этой формы в отмеченном базисе совпадает с $S + S^t$, где S – матрица формы Зейферта в этом базисе. Согласно § 2 для д.А.-Г. матрица S совпадает с матрицей функции Мёбиуса соответствующего ч. у. множества. Поэтому для д.А.-Г. простой особенности условие $\Phi(m, m) > 0$ вытекает из положительной определенности индекса пересечения, и тогда согласно теореме 3.2 д.А.-Г. простой особенности определяет ч. у. множество конечного типа.

Докажем обратное утверждение. В [8] доказан критерий того, что д.А.-Г. особенности является д.А.-Г. простой особенностью, а именно приведен список фрагментов д.А.-Г., хотя бы один из которых встретится в любой д.А.-Г. не простой особенности. Каждый из этих фрагментов содержит одну из классических аффинных д.К.-Д. A_n или D_n , для которых хорошо известны положительные векторы из ядра соответствующей квадратичной формы.

§ 4. Формулы для (mod 2)-инвариантов Арнольда плоских кривых

Поскольку д.А.-Г. можно сопоставить не только плоской кривой, возникающей из двумерной особенности, но и любой общей (имеющей только двойные точки в качестве особенностей) кривой на плоскости, то инварианты д.А.-Г. (например, f -вектор [12]) и вычисляемые по д.А.-Г. инварианты особенностей (например, коэффиценты характеристического полинома оператора классической монодромии (h -вектор [12]) или Arf-инвариант) можно рассматривать как инварианты плоских кривых [49]. Инварианты д.А.-Г. и инварианты особенностей довольно сложно ведут себя при простейших перестройках кривых, поскольку, по крайней мере, некоторые из этих перестроек плохо согласуются с геометрией особенностей. Инварианты Арнольда плоских кривых определялись именно исходя из требования максимальной простоты их поведения при простейших перестройках [24]. В этом, по-видимому, состоит причина трудностей, возникающих при попытках выразить

эти группы инвариантов друг через друга. Это удастся сделать лишь над $\mathbb{Z}_2$, и даже при таком упрощении задачи формула из [50] $- \text{Arf} = J^-/2 \pmod 2$ – доказываться довольно сложно, что, по-видимому, отвечает природе задачи.

Ниже доказаны формулы для инвариантов $J^\pm \pmod 4$ и $\text{St} \pmod 2$. Поскольку J^- всегда четно и $J^+ - J^-$ равно числу двойных точек кривой [24], то фактически формулы для $J^\pm \pmod 4$ так же, как и формула для $\text{St} \pmod 2$, являются формулами над $\mathbb{Z}_2$.

При элементарных перестройках кривых инварианты $J^\pm$ либо не меняются, либо меняются на 2, а инвариант St либо не меняется, либо меняется на 1. Поэтому для $J^\pm \pmod 4$ и $\text{St} \pmod 2$ не имеет значения коориентация дискриминанта в пространстве кривых – изменение инвариантов одинаково при положительном и отрицательном прохождении дискриминанта.

Под плоской кривой мы понимаем ориентированную иммерсию окружности [24] или прямой [50] в плоскость, имеющую в качестве особенностей только трансверсальные самопересечения. При простейших перестройках кривой могут возникать тройные трансверсальные самопересечения, самокасания с одинаковой ориентацией (попутное касание) или самокасания с противоположными ориентациями (противопутное касание).

Введем несколько определений. Известно, что компоненты дополнения кривой можно разбить на два множества так, что имеющие в замыканиях общую дугу кривой компоненты принадлежат разным множествам. В д.А.-Г. такое разбиение соответствует разбиению на максимумы и минимумы морсификации задающей особенность функции (двойные точки кривой отвечают седлам) [1]. Нам будет удобно фиксировать порядок на этой паре множеств: элементы первого будем называть $(-)$ -компонентами, а элементы второго $(+)$ -компонентами. Для этого достаточно фиксировать знак какой-либо одной компоненты, и это можно сделать, например, так: если кривая компактна, то $(+)$ -компонентой будем считать бесконечную область в ее дополнении, а если кривая есть образ прямой, то пройдем этот образ из $-\infty$ согласно ориентации и будем считать $(+)$ -компонентой бесконечную область справа. Обозначим через c^+ (c^-) число $(+)$ ($(-)$)-компонент дополнения кривой.

Пару (двойная точка, компонента дополнения) назовем a -парой, если двойная точка принадлежит границе компоненты и инцидентные двойной точке два ребра из границы компоненты либо оба входят в двойную точку, либо оба выходят из нее (напомним, что кривая ориентирована). Аналогично, такую пару назовем b -парой, если одно из ребер входит в двойную точку, а другое выходит из нее (в таком случае эти два ребра могут совпадать). Через a^+ (a^-) обозначим половину числа a -пар, в которых компонента дополнения является $(+)$ ($(-)$)-компонентой, и аналогично определим b^+ и b^- . Эти числа целые, поскольку отвечающие вертикальным углам пары имеют одинаковый тип. Очевидно также, что $a^\pm = b^\mp$, поскольку отвечающие смежным углам пары имеют противоположный тип и по двойной точке, и по компоненте дополнения.

ТЕОРЕМА 4.1. *С точностью до зависящей от индекса Уитни аддитивной константы (для каждой формулы своя константа) имеем*

$$J^+ = a^+ + c^- \pmod 4,$$

$$\begin{aligned} J^- &= a^+ - c^+ \pmod{4}, \\ \text{St} &= c^+ \pmod{2}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Разность $J^+ - J^-$ равна числу двойных точек [24]. В нашем случае $(a^+ + c^-) - (a^+ - c^+) = c^- + c^+$ равно числу компонент дополнения кривой, которое на 2 больше числа двойных точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В формулах теоремы 4.1 можно заменить a^+ на a^- и $c^\pm$ на $c^\mp$. Формулы останутся верными, но изменится зависящая от индекса Уитни аддитивная константа.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Для краткости мы не будем согласовывать наши формулы со значениями инвариантов $J^\pm$ и St на базисных кривых (компактных [24] или длинных [50]). При желании читатель может по своему вкусу или по вкусу своей задачи выбрать значения инвариантов на базисных кривых и тем самым фиксировать зависящие от индекса Уитни аддитивные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Согласно [24] достаточно проверить, что правые части формул нужным образом ведут себя при перестройках кривой, причем по вышесказанному за коориентацией перестройки, т. е. за знаком изменения инвариантов, следить не нужно. Явный подсчет показывает, что $a^+ + c^-$ меняется на 2 при перестройке попутного касания и не меняется или меняется на 4 при перестройке противоположного касания. Аналогично ведет себя $a^+ - c^+$ с заменой попутного касания на противоположное и наоборот. При перестройке тройного самопересечения $a^+ + c^-$ и $a^+ - c^+$ не меняются или меняются на 4. Инвариант c^+ при перестройках самокасания не меняется или меняется на 2, а при перестройке тройного самопересечения меняется на 1.

§ 5. Высшие частично упорядоченные множества

Приведем определение обычного ч. у. множества в удобной для обобщения форме. Частичный порядок P на $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$ можно рассматривать как отображение

$$\mathcal{L}: C(n, 2) \rightarrow \{-1, 0, 1\},$$

где через $C(n, k)$ обозначено множество k -элементных подмножеств в $\bar{n}$. Для $l = (i, j) \in C(n, 2)$, $i < j$, определим отображение $\mathcal{L}$ при помощи формул

$$\mathcal{L}(l) = \begin{cases} -1, & \text{если } i >_P j, \\ 0, & \text{если } i, j \text{ не сравнимы в } P, \\ 1, & \text{если } i <_P j. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что транзитивность $(a < b, b < c \implies a < c)$ эквивалентна следующему условию: для любого набора $(l_1, l_2, l_3) = ((ij), (ik), (jk))$, $i < j < k$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(l_1) = \mathcal{L}(l_3) \neq 0 &\implies \mathcal{L}(l_1) = \mathcal{L}(l_2) = \mathcal{L}(l_3), \\ \mathcal{L}(l_1) = -\mathcal{L}(l_2) \neq 0 &\implies \mathcal{L}(l_2) = \mathcal{L}(l_3), \\ \mathcal{L}(l_2) = -\mathcal{L}(l_3) \neq 0 &\implies \mathcal{L}(l_1) = \mathcal{L}(l_2). \end{aligned}$$

Для обобщения приведенной интерпретации ч. у. множества нам понадобится несколько определений. Для $l \in C(n, k+1)$ назовем k -*пакетом* в $C(n, k)$ множество

$$\{d: d \in C(n, k), d \subset l\}.$$

Например, единственный $(n-1)$ -пакет в $C(n, n-1)$ совпадает с $C(n, n-1)$, а любая пара элементов $\bar{n}$ является 1-пакетом в $C(n, 1) = \bar{n}$. На $C(n, k)$ имеется естественный линейный порядок – лексикографический. Этот порядок позволяет говорить, находится или не находится элемент $l \in C(n, k)$ между элементами $l_1, l_2 \in C(n, k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Частичным k -порядком на $\bar{n}$ назовем отображение*

$$\mathcal{L}: C(n, k+1) \rightarrow \{-1, 0, 1\},$$

обладающее свойством (обобщенная транзитивность): для принадлежащих одному $(k+1)$ -пакету $l, l_1, l_2 \in C(n, k+1)$ выполняются условия

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(l_1) = \mathcal{L}(l_2) \neq 0 &\implies \mathcal{L}(l_1) = \mathcal{L}(l) = \mathcal{L}(l_2), && \text{если } l \text{ между } l_1, l_2, \\ \mathcal{L}(l_1) = -\mathcal{L}(l_2) \neq 0 &\implies \mathcal{L}(l) = \mathcal{L}(l_1), && \text{если } l_1 \text{ между } l, l_2, \\ \mathcal{L}(l_1) = -\mathcal{L}(l_2) \neq 0 &\implies \mathcal{L}(l) = \mathcal{L}(l_2), && \text{если } l_2 \text{ между } l, l_1. \end{aligned}$$

Далее мы отождествляем частичный k -порядок с соответствующим отображением $\mathcal{L}$.

ПРИМЕР. 1) Любое отображение из $\bar{n} = C(n, 1)$ в $\{-1, 0, 1\}$ задает частичный 0-порядок на $\bar{n}$.

2) Частичные 1-порядки на $\bar{n}$ совпадают с обычными ч. у. множествами на $\bar{n}$.

3) Единственной д.А.-Г. A_n отвечает следующее ч. у. множество:

$$\{a_1, \dots, a_n \mid a_1 < a_2 > a_3 < \dots\}.$$

В [9], [10] появляется высший аналог этого объекта, который является частичным k -порядком на $\bar{n}$ в смысле определения 5.1. А именно, отображение $\mathcal{L}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{L}((i, i+1, \dots, i+k)) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ -1, & \text{если } i \text{ четно,} \end{cases}$$

$\mathcal{L}(l) = 0$ для других $l \in C(n, k+1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Частичный k -порядок на $\bar{n}$ называется *линейным*, если образ соответствующего отображения $\mathcal{L}$ принадлежит $\{-1, 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. *Линейным расширением частичного k -порядка $\mathcal{L}$ называется любой линейный k -порядок, который совпадает с $\mathcal{L}$ на множествах $\mathcal{L}^{-1}(-1)$ и $\mathcal{L}^{-1}(1)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Множеством инверсий частичного k -порядка $\mathcal{L}$ назовем множество $\mathcal{L}^{-1}(-1) \subset C(n, k+1)$.

Приведем определение высших порядков Брюа $B(n, k)$ [56]. Произвольный линейный порядок на $C(n, k)$ назовем *допустимым*, если на каждом k -пакете он индуцирует либо лексикографический порядок, либо обратный лексикографическому. В частности, любой линейный порядок на $C(n, 1) = \bar{n}$ является допустимым и множество линейных порядков на $C(n, 1)$ совпадает с множеством перестановок на $\bar{n}$. Через $A(n, k)$ обозначим множества всех допустимых порядков на $C(n, k)$. Два порядка из $A(n, k)$ назовем *элементарно эквивалентными*, если они отличаются только в паре соседних элементов, которые не принадлежат одному k -пакету. Фактор $A(n, k)$ по отношению эквивалентности, порожденному элементарной эквивалентностью, называется *высшим порядком Брюа* $B(n, k)$.

Частичный порядок на $B(n, k)$ определяется следующим образом. Множество инверсий $i(a) \subset C(n, k+1)$ элемента $a \in B(n, k)$ по определению состоит из тех элементов $C(n, k+1)$, которые имеют в a обратный лексикографический порядок. Для $a_1, a_2 \in B(n, k)$ скажем, что $a_1 < a_2$, если $i(a_1) \subset i(a_2)$ и $|i(a_2) \setminus i(a_1)| = 1$. Транзитивное замыкание этого отношения является частичным порядком на $B(n, k)$. Для $k = 1$ получается слабый порядок Брюа на симметрической группе S_n . Диаграмма Хассе слабого порядка Брюа на S_n совпадает с граничным графом пермutoэдра – выпуклой оболочки общей орбиты стандартного действия S_n на $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 5.5 [73]. Множество $U \subset C(n, k+1)$ является множеством инверсий некоторого элемента высшего порядка Брюа $B(n, k)$, если и только если для любого $d \in C(n, k+2)$ и $i < j < k$, $i, j, k \in d$, пересечение

$$U \cap \{d \setminus i, d \setminus j, d \setminus k\}$$

не совпадает ни с одним из множеств

$$\{d \setminus j\}, \quad \{d \setminus i, d \setminus k\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Множество $U \subset C(n, k+1)$ является множеством инверсий некоторого линейного k -порядка на $\bar{n}$, если и только если U является множеством инверсий некоторого элемента высшего порядка Брюа $B(n, k)$.

Доказательство вытекает из того, что обобщенная транзитивность при отсутствии нуля в образе отображения $\mathcal{L}$ очевидно эквивалентна условию из теоремы 5.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Элемент высшего порядка Брюа $B(n, k)$ определяется своим множеством инверсий [56]. Из определения очевидно, что линейный k -порядок на $\bar{n}$ также определяется своим множеством инверсий.

СЛЕДСТВИЕ 5.8. Построенное в [9], [10] отображение из пространства k -общих M -морсификаций особенности A_n в высшие порядки Брюа $B(n, k)$

можно рассматривать как отображение в линейные расширения частично-го k -порядка из примера 3).

Это следствие вытекает из доказанного в [10] факта: элемент высшего порядка Брюа, являющийся образом произвольной k -общей M -морсификации имеет на отвечающем $(k+1)$ -подмножеству $(i, i+1, \dots, i+k) \in C(n, k+1)$ пакете лексикографический порядок для нечетного i и обратный лексикографическому порядок для четного i .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. Основным результатом теории обычных M -морсификаций A_n ($k=1$) является биективность отображения из следствия 5.8 [23]. Для $k > 1$ это не доказано, и, более того, для биективности, по-видимому, нужно ограничиться подмножеством в $B(n, k)$, элементы которого определяют представимые ориентированные матроиды [73]. Для $k=1$ все элементы $B(n, 1)$, т. е. перестановки на $\bar{n}$, задают представимые ориентированные матроиды.

Приведем определения высших аналогов еще нескольких объектов теории ч. у. множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.10. Подмножество C в $\bar{n}$ назовем *цепью* (антицепью) частичного k -порядка $\mathcal{L}$, если ограничение $\mathcal{L}$ на $(k+1)$ -подмножества из C принимает значения в $\{-1, 1\}$ ($\{0\}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11. *Размерностью* частичного k -порядка $\mathcal{L}$ назовем наименьшее число линейных расширений $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ этого k -порядка, пересечение которых совпадает с $\mathcal{L}$, т. е. из равенства $\mathcal{L}(l) = 0$, $l \in C(n, k+1)$, вытекает, что существуют $i, j \in \bar{m}$, для которых $\mathcal{L}_i(l) \neq \mathcal{L}_j(l)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.12. В [30] показано, что в интерпретации множества линейных расширений ч. у. множества как выпуклого подмножества в слабом порядке Брюа на симметрической группе размерность совпадает с минимальным подмножеством в слабом порядке Брюа, выпуклая оболочка которого дает соответствующее ч. у. множеству подмножество. По-видимому, этот факт обобщается на линейные расширения частичного k -порядка и высшие порядки Брюа $B(n, k)$. О размерности обычных ч. у. множеств см. [54], [61], [66].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.13. Фиксируем $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 < \dots < x_n$. *Порядковым многогранником* частичного k -порядка $\mathcal{L}$ назовем множество решений в $\mathbb{R}^n$ с координатами $y_1, \dots, y_n$ следующей системы неравенств:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccccc} y_{i_0} & x_{i_0}^{k-1} & \dots & x_{i_0} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{i_k} & x_{i_k}^{k-1} & \dots & x_{i_k} & 1 \end{array} \right| \cdot \mathcal{L}(l) \geq 0, \quad l = (i_0, \dots, i_k) \in C(n, k+1), \\ & \quad \quad \quad i_0 < \dots < i_k \\ & 0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.14. Для фиксированного $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и стандартного базиса $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ набор определителей

$$\left| \begin{array}{ccccc} e_{i_0} & x_{i_0}^{k-1} & \dots & x_{i_0} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_{i_k} & x_{i_k}^{k-1} & \dots & x_{i_k} & 1 \end{array} \right|, \quad (i_0, \dots, i_k) \in C(n, k+1),$$

можно рассматривать как высший аналог системы корней A_n :

$$\begin{vmatrix} e_i & 1 \\ e_j & 1 \end{vmatrix} = e_i - e_j, \quad (i, j) \in C(n, 2).$$

Список литературы

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. П. М.: Наука, 1984.
2. Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН. 1992. Т. 47. № 1. С. 3–45.
3. Габриэлов А. М. Диаграммы Дынкина унимодальных особенностей // Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 1–6.
4. Гусейн-Заде С. М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей функций двух переменных // Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 1. С. 11–15.
5. Гусейн-Заде С. М. Индекс особой точки градиентного векторного поля // Функц. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 1. С. 7–12.
6. Гусейн-Заде С. М. Диаграммы Дынкина некоторых полных пересечений и вещественные морсификации // Тр. МИРАН. 1995. Т. 209. С. 124–132.
7. Ильютка Г. Г. О преобразовании Кокстера изолированной особенности // УМН. 1987. Т. 42. № 2. С. 227–228.
8. Ильютка Г. Г. Характеризация вещественных диаграмм Кокстера–Дынкина простых особенностей // УМН. 1995. Т. 50. № 3. С. 157–158.
9. Ильютка Г. Г. Высшие порядки Брюа и M -морсификации // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 306–308.
10. Ильютка Г. Г. Геометрические реализации высших порядков Брюа и M -морсификации // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 91–100.
11. Ильютка Г. Г. Диаграммы Кокстера–Дынкина частично упорядоченных множеств и диаграммы А'Кампо–Гусейн-Заде простых особенностей // Функц. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 1. С. 12–19.
12. Ильютка Г. Г. Соотношения из теории Морса для диаграмм Кокстера–Дынкина // Функц. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 3. С. 73–77.
13. Ляшко О. В. Распадение простых особенностей функций // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 2. С. 49–56.
14. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.
15. Численко Ю. С. Распадения простых особенностей вещественных функций // Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 4. С. 52–67.
16. A'Campo N. Le groupe de monodromie du deploiment des singularites isolees de courbes planes. I // Math. Ann. 1975. V. 213. P. 1–32.
17. A'Campo N. Le groupe de monodromie du deploiment des singularites isolees de courbes planes. II // Actes du Congr. Internat. Math. Vancouver. 1974. V. 1. P. 395–404.
18. A'Campo N. Real deformations and complex topology of plane curve singularities // Ann. Faculte Sci. Toulouse. 1999. V. VIII. P. 5–23.
19. A'Campo N. Generic immersions of curves, knots, monodromy and gordian number. Preprint / Univ. Basel, 1999.
20. A'Campo N. Planar trees, slalom curves and hyperbolic knots. Preprint / Univ. Basel, 1999.
21. Aicardi F. Tree-like curves // Adv. Soviet Math. 1994. V. 21. P. 1–31.
22. Arnold V. I. Bernoulli–Euler updown numbers, associated with function singularities, their combinatoric and arithmetic // Duke Math. J. 1991. V. 63. P. 537–555.
23. Arnold V. I. Springer numbers and morsification spaces // J. Alg. Geom. 1992. V. 1. P. 197–214.
24. Arnold V. I. Topological invariants of plane curves and caustics // University Lecture Series. 1994. V. 5. Providence, RI.
25. Arnold V. I. Topological classification of real trigonometric polynomials and cyclic serpents plyhedron // Arnold–Gelfand Math. Seminars. Boston: Birkhauser, 1997. P. 79–82.

26. *Artin M., Verdier J.* Reflexive modules over rational double points // *Math. Ann.* 1985. V. 270. P. 79–82.
27. *Auslander M.* Rational singularities and almost split sequences // *Transl. Amer. Math. Soc.* 1986. V. 293. P. 511–531.
28. *Baclawsky K.* Galois connections and the Leray spectral sequence // *Adv. Math.* 1977. V. 25. P. 191–215.
29. *Baclawsky K.* The Möbius algebra as a Grothendieck ring // *J. Algebra.* 1979. V. 57. P. 167–179.
30. *Bjorner A., Wachs M.* Permutation statistics and linear extensions of posets // *J. Comb. Th. Ser. A.* 1991. V. 58. P. 85–114.
31. *Bjorner A., Wachs M.* Shellable nonpure complexes and posets. I // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1996. V. 348. P. 1299–1327.
32. *Brenner S., Butler M.* Generalizations of the Bernstein–Gelfand–Ponomarev reflection functors // *Lecture Notes in Math.* 1980. V. 832. P. 103–169.
33. *Brightwell G.* Balanced pairs in partial orders // *Discrete Math.* 1999. V. 201. P. 25–52.
34. *Daykin D., Daykin J., Paterson S.* On log-concavity for order-preserving maps of partial orders // *Discrete Math.* 1984. V. 50. P. 221–226.
35. *Daykin J.* Inequalities for the number of monotonic functions of partial orders // *Discrete Math.* 1986. V. 61. P. 41–55.
36. *Ebeling W.* Milnor lattices and geometric bases of some special singularities // *Enseign. Math.* 1983. V. 29. P. 263–280.
37. *Ebeling W., Wall C. T. C.* Kodaira singularities and an extension of Arnold's strange duality // *Comp. Math.* 1985. V. 56. P. 3–77.
38. *Ebeling W., Gusein-Zade S.* Coxeter–Dynkin diagrams of the complete intersection singularities Z_9 and Z_{10} // *Math. Z.* 1995. V. 218. P. 549–562.
39. *Ebeling W., Gusein-Zade S.* Coxeter–Dynkin diagrams of fat points in $\mathbb{C}^2$ and their stabilizations // *Math. Ann.* 1996. V. 306. P. 487–512.
40. *Edelman P., Hibi T., Stanley R.* A recurrence for linear extensions // *Order.* 1989. V. 6. P. 15–18.
41. *Ehrenborg R.* On posets and Hopf algebras // *Adv. Math.* 1996. V. 119. P. 1–25.
42. *Etienne G.* Linear extensions of finite posets and a conjecture of G. Kreweras on permutations // *Discrete Math.* 1984. V. 52. P. 107–112.
43. *Fishburn P.* Correlation in partially ordered sets // *Discrete Appl. Math.* 1992. V. 39. P. 173–191.
44. *Ford D., McKay J.* Representations and Coxeter graphs // *The Geometric Vein (The Coxeter Festschrift)* / Ed. Ch. Davis, B. Grunbaum, F. Sherk. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 549–554.
45. *Gonzales-Sprinberg G., Verdier J.* Construction geometrique de la correspondance de McKay // *Ann. Sci. E.N.S.* 1983. V. 16. P. 409–449.
46. *Goryunov V.* Subprincipal Springer cones and morsifications of Laurent polynomials and D_μ singularities // *Adv. in Soviet. Math.* 1994. V. 21. P. 163–188.
47. *Goryunov V.* Morsifications of rational functions // *AMS Translations.* 1996. V. 173. P. 85–96.
48. *Goryunov V., Baines C.* Möbius and odd real trigonometric M -functions. Preprint, 1997.
49. *Gusein-Zade S.* Invariants of generic plane curves and invariants of singularities // *Proc. Symp. Pure Math.* 1997. V. 62. № 1. P. 423–433.
50. *Gusein-Zade S., Natanzon S.* The Arf-invariant and the Arnold invariants of plane curves // *Arnold–Gelfand Math. Seminars.* Boston: Birkhauser, 1997. P. 267–280.
51. *Hibi T.* Toric varieties arising from canonical triangulations of poset polytopes are projective // *Words, languages, and combinatorics. II (Kyoto, 1992).* World Sci. Publ, 1994. P. 192–199.
52. *Kahn J., Saks M.* Balancing poset extensions // *Order.* 1984. V. 1. P. 113–126.

53. *Kahn J., Linial N.* Balancing extensions via Brunn–Minkovski // *Combinatorica*. 1991. V. 11. P. 363–368.
54. *Kierstead H., Trotter W.* Super-greedy linear extensions of ordered sets // *Ann. New York Acad. Sci.* 1989. V. 555. P. 262–271.
55. *MacPherson R.* The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand, and Losik for the first Pontrjagin class // *Sem. Bourbaki*. № 497, 1976/77; // *Lecture Notes in Math.* 1978. V. 677.
56. *Manin Yu., Schechtman V.* Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat orders // *Adv. Studies in Pure Math.* 1985. V. 44. P. 289–308.
57. *Pruesse G., Ruskey F.* Generating the linear extensions of certain posets by transpositions // *SIAM J. Discrete Math.* 1991. V. 4. P. 413–422.
58. *Ray N., Schmitt W.* Combinatorial models for coalgebraic structures // *Adv. Math.* 1998. V. 138. P. 211–262.
59. *Ruskey F.* Transposition generation of alternating permutations // *Order*. 1989. V. 6. P. 227–233.
60. *Ruskey F.* Generating linear extensions of posets by transpositions // *J. Comb. Th. Ser. B*. 1992. V. 54. P. 77–101.
61. *Rival I., Zagulia N.* Greedy linear extensions with constraints // *Discrete Math.* 1987. V. 63. P. 249–260.
62. *Stanley R.* Ordered structures and partitions // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1972. V. 119.
63. *Stanley R.* Two combinatorial applications of the Aleksandrov–Fenchel inequalities // *J. Comb. Th. Ser. A*. 1981. V. 31. P. 56–65.
64. *Stanley R.* Two poset polytopes // *Discrete Comput. Geom.* 1986. V. 1. P. 9–23.
65. *Steiner G.* Minimizing bumps in ordered sets by substitution decomposition // *Discrete Math.* 1989. V. 76. P. 285–289.
66. *Trotter W.* Combinatorics and partially ordered sets. Dimension theory. Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 1992.
67. *Trotter W.* Partially ordered sets // *Handbook of Combinatorics*. Ch. 8. Amsterdam: Elsevier Sci., 1995.
68. *Wagner D.* Enumeration of functions from posets to chains // *European J. Comb.* 1992. V. 13. P. 313–324.
69. *Yuzvinsky S.* Linear representations of posets, their cohomology and a bilinear form // *European J. Comb.* 1981. V. 2. P. 385–397.
70. *Yuzvinsky S.* The variety of primitive representations of a quiver with normal relations // *Commun. Alg.* 1983. V. 11. P. 973–1009.
71. *Yuzvinsky S.* Flasque sheaves on posets and Cohen–Macaulay unions of regular varieties // *Adv. Math.* 1989. V. 73. P. 24–42.
72. *Yuzvinsky S.* Projective modules over rings of global sections of flasque sheaves // *J. Pure Appl. Alg.* 1990. V. 65. P. 191–197.
73. *Ziegler G.* Higher Bruhat orders and cyclic hyperplane arrangements // *Topology*. 1993. V. 32. P. 259–279.