Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко, Об априорных оценках решения I-ой краевой задачи для одного класса параболических систем второго порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 67–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/im348>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:12:08

УДК 517.9

Л. И. Камынин, Б. Н. Химченко

**Об априорных оценках решения I-ой краевой задачи
для одного класса параболических систем
второго порядка**

Рассмотрены два класса параболических матрично-векторных систем второго порядка (с решением $u \in M_{m \times 1}$, $m \geq 2$), допускающих сведение их к одному скалярному параболическому уравнению второго порядка для числовой функции $v = \langle p, u \rangle$, где $p \in M_{m \times 1}$ – фиксированный стохастический постоянный вектор. В неограниченной (по x) области рассмотрена I-я краевая задача для скалярного параболического уравнения второго порядка (с неограниченными коэффициентами), удовлетворяющая условию сильного поглощения на бесконечности. В обобщенных классах Тихонова–Тэклинда, обеспечивающих единственность решения, доказана априорная оценка решения I-ой краевой задачи.

Библиография: 11 наименований.

Введение

В работах [1], [2] при рассмотрении вопроса о слабом принципе экстремума для параболических систем второго порядка был изложен метод сведения матрично-векторной параболической системы к одному скалярному параболическому уравнению второго порядка

$$Lv = -H \quad (0.1)$$

для числовой функции $v(x, t) = \langle p, u(x, t) \rangle$, где $u \in M_{m \times 1}$ – решение параболической системы, а p – стохастический вектор.

Для полученного параболического уравнения второго порядка (0.1) справедлив классический слабый принцип экстремума (см., например, [2], [6]–[9]), который можно трактовать как слабый принцип экстремума (СПЭ) для исходной параболической системы. Введенный таким образом СПЭ используется в статье для нахождения априорных оценок классического решения I-ой краевой задачи для параболической системы (точнее, для скалярного уравнения (0.1), соответствующего исходной системе) в неограниченной (по x) области в обобщенных классах быстро растущих (по x) функций Тихонова–Тэклинда (ОТТ), введенных в [3], [4] и обеспечивающих, в частности, единственность решения I-ой краевой задачи. Основное внимание обращено при этом на априорные оценки для уравнения (0.1) с условием сильного поглощения на бесконечности.

Статья состоит из двух параграфов.

В §1 приведены найденные в [1], [2] классы параболических систем второго порядка (с полным перемешиванием), допускающих сведение к одному скаляр-

ному параболическому уравнению второго порядка (0.1), для которого справедлив СПЭ, который и трактуется как СПЭ для исходной системы. Основным моментом работы [1] (см. [1, условие (A.1), с. 47]) является возможность разложения матриц-коэффициентов исходной матрично-векторной системы как в матрицы простой структуры (подобные диагональным), так и в нильпотентные матрицы (см. [5]). Основным моментом работы [2] является использование условия (P) о существовании стохастической матрицы P (см. [2, с. 60]), после умножения на которую слева исходная параболическая система второго порядка приводится к скалярному параболическому уравнению (0.1). В § 1 сформулирован СПЭ для уравнения (0.1) и приведены как необходимые (теорема 1.1), так и достаточные (теоремы 1.2 и 1.3) условия его справедливости.

В § 2 устанавливается априорная оценка решения I-ой краевой задачи для уравнения (0.1) в неограниченной (по x) области $\omega \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ в классах ОТТ, обеспечивающих единственность решения краевой задачи. Точный класс единственности ОТТ соответствует при этом заданному поведению (при $|x| \rightarrow +\infty$) наибольшего собственного значения $\lambda_n(x, t)$ характеристической формы параболического оператора второго порядка Lv из (0.1) в трех вариантах:

- 1) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \lambda_n(x, t) = +\infty$;
- 2) ограниченность $\lambda_n(x, t)$ в ω ;
- 3) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \lambda_n(x, t) = 0$.

Коэффициенты оператора L при $D_i v$ могут при этом расти (по модулю) к бесконечности, но не быстрее функции Тэкланда (см. ниже определение 2.2). На априорных оценках решения I-ой краевой задачи для уравнения (0.1) существенно сказывается и поведение коэффициента $c(x, t)$ (при v в операторе Lv), для чего выделены три варианта поведения при $|x| \rightarrow +\infty$:

- 1) ограниченность $c(x, t)$ (что соответствует слабой диссипативности Lv при $-C \leq c(x, t) \leq 0$, слабого поглощения Lv при $0 \leq c(x, t) \leq C$);
- 2) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} c(x, t) = -\infty$ (сильная диссипативность Lv);
- 3) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} c(x, t) = +\infty$ (условие сильного поглощения для Lv).

Априорные оценки решения I-ой краевой задачи для уравнения (0.1) рассматривались (при ограниченных коэффициентах Lv) в [6]–[9]. В случае выполнения условия сильной диссипативности 2) априорные оценки решения I-ой краевой задачи были получены в [11]. В § 2 методом барьерных функций устанавливаются априорные оценки решения I-ой краевой задачи для уравнения (0.1) в неограниченных (по x) областях в классе ОТТ при выполнении условия сильного поглощения 3), т.е. при наличии внутренних источников или сильного поглощения из внешней среды.

§ 1. О слабом принципе экстремума для двух классов параболических систем второго порядка

Пусть $\omega \subset \{0 < t < T < +\infty\} \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$, $n \geq 1$, – область, для которой

$$\partial\omega = \gamma_0(\omega) \cup \Sigma(\omega) \cup \gamma(\omega),$$

где нижняя крышка $\gamma_0(\omega) = \text{int}(\bar{\omega} \cap \{t = 0\}) \subset \mathbb{R}_x^n$ является областью на гиперплоскости $\{t = 0\}$, а верхняя крышка $\gamma(\omega) = \text{int}(\bar{\omega} \cap \{t = T > 0\})$ является областью на гиперплоскости $\{t = T > 0\}$ и

$$\Gamma(\omega) = \partial\omega \setminus \gamma(\omega) \equiv \gamma_0(\omega) \cup \Sigma(\omega)$$

– параболическая граница области ω с боковой частью

$$\Sigma(\omega) = \Gamma(\omega) \setminus \gamma_0(\omega).$$

Рассмотрим на множестве $\omega \cup \gamma(\omega) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ параболическую систему второго порядка из m ($m \geq 2$) уравнений с “полным перемешиванием” вида

$$\begin{aligned} L_r u &\equiv \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i,j=1}^n a_{k,ij}^{(r)}(M) D_i D_j u_k + \sum_{i=1}^n b_{k,i}^{(r)}(M) D_i u_k + c_k^{(r)}(M) u_k \right) - D_t u_k \\ &= -\Phi(M), \quad r = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ и при $M = (x, t) \equiv (x_1, \dots, x_n; t)$, $n \geq 1$, действительные функции $a_{k,ij}^{(r)}$, $b_{k,i}^{(r)}$, $c_k^{(r)}$ принадлежат $C(\omega \cup \gamma(\omega))$, $r, k = \overline{1, m}$, $i, j = \overline{1, n}$, причем матрицы

$$a_k^{(r)}(M) = [a_{k,ij}^{(r)}(M)] \in M_{n \times n}, \quad r, k = \overline{1, m},$$

предполагаются симметрическими и положительно определенными на множестве $\omega \cup \gamma(\omega)$, так что их собственные значения

$$0 < \lambda_{k,1}^{(r)}(M) \leq \dots \leq \lambda_{k,n}^{(r)}(M) < +\infty \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega) \quad (1.2)$$

положительны.

Введем матрицы

$$\begin{aligned} A_{ij} &= [a_{k,ij}^{(r)}], \quad B_i = [b_{k,i}^{(r)}], \quad C(M) = [c_k^{(r)}], \\ I_m &= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = [e_1 \dots e_m] \in M_{m \times m}, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и векторы

$$\begin{aligned} u &= [u_1 \dots u_m]^T, \quad D_i u = [D_i u_1 \dots D_i u_m]^T, \\ D_i D_j u &= [D_i D_j u_1 \dots D_i D_j u_m]^T, \quad D_t u = I_m D_t u = [D_t u_1 \dots D_t u_m]^T, \\ \Phi &= [\Phi_1 \dots \Phi_m]^T, \end{aligned}$$

принадлежащие $M_{m \times 1}$.

Тогда параболическую систему второго порядка (1.1) можно записать в матрично-векторном виде:

$$\begin{aligned} Lu &\equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(M) D_i D_j u + \sum_{i=1}^n B_i(M) D_i u + C(M) u - I_m D_t u \\ &= -\Phi(M) \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Напомним, что в [1] было введено условие (А.1) (см. [1, определение 1 при $k = 1$, с. 47]) для матриц (1.3), позволяющее свести матрично-векторную параболическую систему (1.4), имеющую решение

$$u \in C_{x,t}^{(2,1)}(\omega \cup \gamma(\omega)), \quad u \in M_{m \times 1},$$

к одному скалярному уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} Lv &\equiv \frac{1}{s_1} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{r=1}^m s_r a_{1,ij}^{(r)}(M) \right) D_i D_j v + \frac{1}{s_1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{r=1}^m s_r b_{1,i}^{(r)}(M) \right) D_i v \\ &+ \frac{1}{s_1} \left(\sum_{r=1}^m s_r c_1^{(r)}(M) \right) v - D_t v \equiv -H(M) \equiv -\langle p, \Phi(M) \rangle, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$v(M) = \langle p, u(M) \rangle \in C_{x,t}^{(2,1)}(\omega \cup \gamma(\omega)) \quad (1.6)$$

при положительном стохастическом (см. [5]) векторе

$$p = [s_1 \dots s_m]^T \in M_{m \times 1}, \quad s_r > 0 \quad \forall r = \overline{1, m}, \quad \sum_{k=1}^m s_k = 1. \quad (1.7)$$

В силу стохастичности вектора (1.7) имеем оценку

$$\frac{1}{s_1} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{r=1}^m s_r a_{1,ij}^{(r)}(M) \right) \xi_i \xi_j > 0 \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega), \quad |\xi|_n = 1,$$

показывающую параболичность уравнения (1.5), причем условие диссипативности (1.5) имеет вид

$$\frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r c_1^{(r)}(M) \leq 0 \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega).$$

В работе [2] была введена стохастическая матрица (см. (1.7))

$$P = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1 & \dots & s_m \end{bmatrix} \in M_{m \times m}. \quad (1.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см. [2, с. 60]). Матрица $A \in M_{m \times m}$ удовлетворяет условию (Р), если для стохастической матрицы (1.8) выполнено равенство

$$PA = PAP. \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1 (критерий выполнения условия (P)). Матрица $A = [A_{ij}] \in M_{m \times m}$ удовлетворяет условию (P) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^m s_k A_{kr} = s_r \sum_{i,j=1}^m s_i A_{ij} \quad \forall r = \overline{1, m}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Параболическая система второго порядка (1.4) удовлетворяет условию (P), если существует стохастический вектор (1.7), для которого каждая матрица из (1.3) удовлетворяет условию (P) определения 1.1 в общей стохастической матрице (1.8) такой, что $\forall M = (x, t) \in \omega \cup \gamma(\omega)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} PA_{ij}(M) &= PA_{ij}(M)P, & PB_i(M) &= PB_i(M)P \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \\ PC(M) &= PC(M)P, & PI_m &= PI_m P. \end{aligned}$$

В [2] показано, что после умножения системы (1.4) слева на (1.8) и использования (1.9) числовая функция (1.6) становится решением на множестве $\omega \cup \gamma(\omega)$ скалярного уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} Lv &\equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(M) D_i D_j v + \sum_{i=1}^n b_i(M) D_i v + c(M)v - D_t v \\ &= -H(M) \equiv -\langle p, \Phi(M) \rangle, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где положено

$$\begin{aligned} a_{ij}(M) &= \sum_{r,k=1}^m s_r a_{k,ij}^{(r)}(M), & b_i(M) &= \sum_{r,k=1}^m s_r b_{k,i}^{(r)}(M), & i, j &= \overline{1, n}, \\ c(M) &= \sum_{r,k=1}^m s_r c_k^{(r)}(M), & H(M) &= -\langle p, \Phi(M) \rangle, \end{aligned}$$

причем матрица $[a_{ij}(M)] \in M_{n \times n}$ из (1.10) симметрическая и в силу стохастичности вектора (1.7) положительно определенная, так что уравнение второго порядка (1.10) параболично на $\omega \cup \gamma(\omega)$ с условием диссипативности

$$c(M) \leq 0 \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega).$$

Итак, при выполнении условий (A.1) из [1] или (P) из [2] параболическая система второго порядка (1.1), (1.4) может быть сведена к одному (скалярному) уравнению второго порядка параболического типа для числовой функции (1.6) вида (1.10), причем

$$a_{ij}(M) = \begin{cases} \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r a_{1,ij}^{(r)}(M) & \text{при (A.1),} \\ \sum_{r,k=1}^m s_r a_{k,ij}^{(r)}(M) & \text{при (P),} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b_i(M) &= \begin{cases} \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r b_{1,i}^{(r)}(M) & \text{при (A.1),} \\ \sum_{r,k=1}^m s_r b_{k,i}^{(r)}(M) & \text{при (P),} \end{cases} \\
c(M) &= \begin{cases} \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r c_1^{(r)}(M) & \text{при (A.1),} \\ \sum_{r,k=1}^m s_r c_k^{(r)}(M) & \text{при (P).} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 (ср. [2], [6]–[9]). Для параболического уравнения второго порядка (1.10), заданного на ограниченном множестве $\omega \cup \gamma(\omega) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$, $n \geq 1$, справедлив слабый принцип минимума (СПМин), соответственно слабый принцип максимума (СПМах), если для любого супер(суб)параболического решения (1.6) уравнения (1.10), т.е. при $-H(M) \leq 0$ или $-H(M) < 0$ (соответственно $-H(M) \geq 0$ или $-H(M) > 0$) $\forall M = (x, t) \in \omega \cup \gamma(\omega)$ не существует точки $M_0 = (x_0, t_0) \in \omega \cup \gamma(\omega)$ и окрестности

$$U^-(M_0) = \{(x, t) \mid |x - x_0| < \rho, t_0 - \rho < t \leq t_0\} \subset \omega \cup \gamma(\omega)$$

таких, что выполнена оценка снизу

$$v(M) \geq v(M_0) \quad \forall M \in U^-(M_0),$$

где либо $v(M_0) < 0$ при $-H(M_0) \leq 0$, либо $v(M_0) \leq 0$ при $-H(M_0) < 0$ (соответственно выполнена оценка сверху

$$v(M) \leq v(M_0) \quad \forall M \in U^-(M_0),$$

где либо $v(M_0) > 0$ при $-H(M_0) \geq 0$, либо $v(M_0) \geq 0$ при $-H(M_0) > 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 (ср. [1], [2]). Для параболической системы второго порядка (1.1), (1.4), заданной на ограниченном множестве $\omega \cup \gamma(\omega)$ и имеющей решение $u \in M_{m \times 1}$ (см. (1.3)) класса $C_{x,t}^{(2,1)}(\omega \cup \gamma(\omega))$, справедлив СПМин (соответственно СПМах), если выполнены условия:

1) параболическая система второго порядка (1.4) удовлетворяет или условию (A.1) из [1], или условию (P) из [2] при фиксированном стохастическом векторе (1.7);

2) для скалярного параболического уравнения второго порядка (1.10), (1.11), соответствующего системе (1.4) при $v(M)$ из (1.6) и $H(M) = \langle p, \Phi(M) \rangle$, справедлив СПМин (СПМах) в смысле определения 1.3.

ТЕОРЕМА 1.1 (о необходимом условии выполнения СПМин для (1.10) [2]). Пусть оператор Lv из (1.10) имеет непрерывные коэффициенты (1.11) на ограниченном множестве $\omega \cup \gamma(\omega)$, причем

$$c(M) \neq 0, \quad \alpha(M) \equiv \sum_{i=1}^n a_{ii}(M) > 0 \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega) \quad (1.12)$$

и существует точка $M_0 = (x_0, t_0) \in \omega \cup \gamma(\omega)$, в которой не выполнено условие “диссипативности” для уравнения (1.10) (см. (1.12)):

$$c(M) < 0 \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega),$$

так что

$$c(M_0) = \frac{4}{\gamma_0} > 0. \quad (1.13)$$

Тогда:

- 1) существуют полуокрестность $U^-(M_0) \subset \omega \cup \gamma(\omega)$ и отрицательная непрерывная в $U^-(M_0)$ функция $f(M) < 0$, $f(M_0) = -1$, такие, что
- 2) функция (см. (1.13))

$$v(x, t) = -\gamma_0 + t_0 - t + \frac{|x - x_0|^2}{\alpha(M_0)}$$

класса $C_{x,t}^{(2,1)}(U^-(M_0))$ удовлетворяет уравнению (см. (1.10))

$$Lv(M) = f(M) < 0 \quad \forall M \in U^-(M_0)$$

с правой частью $f(M)$ из утверждения 1), причем

$$Lv(M_0) = -1 \equiv f(M_0)$$

(т.е. $v(M)$ суперпараболична в полуокрестности $U^-(M_0)$) и

$$v(M) \geq v(M_0) = -\gamma_0 \quad \forall M \in U^-(M_0),$$

где постоянная $\gamma_0 > 0$ взята из (1.13) (так что для уравнения (1.10) в $U^-(M_0)$ не выполнен классический СПМин).

ТЕОРЕМА 1.2 (достаточное условие выполнения СПМин для (1.10) [2]). Пусть для параболического уравнения второго порядка (1.10), заданного на ограниченном множестве $\omega \cup \gamma(\omega)$, $\forall M \in \omega \cup \gamma(\omega)$ выполнено одно из условий: либо $-H(M) < 0$ и $c(M) \leq 0$, либо $-H(M) \leq 0$, но $c(M) < 0$. Тогда для параболического уравнения (1.10), (1.11) справедлив СПМин на $\omega \cup \gamma(\omega)$ в смысле определения 1.3.

ТЕОРЕМА 1.3 (об усиленном СПМин (СПМах) для параболической системы второго порядка (1.4)). Пусть на ограниченном множестве $\omega \cup \gamma(\omega) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$ задана параболическая система второго порядка (1.1), (1.4) при положительных значениях (1.2) матриц

$$[a_{k,ij}^{(r)}(M)] \in M_{n \times n}, \quad r, k = \overline{1, m},$$

из (1.3), причем непрерывные на $\omega \cup \gamma(\omega)$ матрицы (1.3) удовлетворяют либо условию (А.1) из [1], либо условию (Р) из [2] при выполнении ослабленного условия диссипативности

$$c(M) \leq 0 \quad \forall M \in \omega \cup \gamma(\omega)$$

для уравнения (1.10), (1.11). Тогда для решения $v(M)$ из (1.6) скалярного уравнения второго порядка (1.10), (1.11), соответствующего системе (1.4), имеем

$$\min_{\overline{\omega}} v(M) = \min_{\Gamma(\omega)} v \quad \text{при} \quad \min_{\overline{\omega}} v \leq 0,$$

соответственно

$$\max_{\overline{\omega}} v(M) = \max_{\Gamma(\omega)} v \quad \text{при} \quad \max_{\overline{\omega}} v \geq 0,$$

и, в частности, в силу стохастичности вектора (1.7)

$$u|_{\Gamma(\omega)} \geq 0 \Rightarrow v(M) \equiv \langle p, u(M) \rangle \geq 0 \quad \forall M \in \overline{\omega},$$

соответственно

$$u|_{\Gamma(\omega)} \leq 0 \Rightarrow v(M) \leq 0 \quad \forall M \in \overline{\omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к доказательству усиленного слабого принципа экстремума для решения $v(M)$ из (1.6) уравнения (1.10), (1.11) и проводится по схеме соответствующего утверждения для уравнения теплопроводности из [9] (см., например, доказательство теоремы 6 из [2]).

§ 2. Априорные оценки решения I-ой краевой задачи в неограниченной (по x) области для параболического уравнения второго порядка (1.10) с условием сильного поглощения

В этом параграфе будем рассматривать неограниченную (по x) область $\omega \subset \Pi(0, +\infty)$, где

$$\Pi(0, +\infty) = \{(x, t) \in \mathbb{R}_{x,t}^{n+1} \mid |x| < +\infty, 0 < t < +\infty\},$$

с границей (ср. §1) $\partial\omega = \gamma_0(\omega) \cup \Sigma(\omega)$.

Положим также

$$\Pi(0, T] = \Pi(0, +\infty) \cap \{0 < t \leq T < +\infty\}$$

и для каждого $T > 0$ определим множество $\omega_T = \omega \cap \Pi(0, T]$ такое, что $\gamma_0(\omega_T) = \gamma_0(\omega)$ и верхняя крышка

$$\gamma(\omega_T) = \text{int}(\bar{\omega} \cap \{t = T > 0\}) \subset \mathbb{R}_x^n$$

является областью на гиперплоскости $\{t = T > 0\}$, причем

$$\Sigma(\omega_T) = \partial\omega_T \setminus (\gamma_0(\omega) \cup \gamma(\omega_T)).$$

Введем также параболическую границу множества ω_T

$$\Gamma(\omega_T) = \Sigma(\omega_T) \cup \gamma_0(\omega) \quad \forall T > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть для области $\omega \subset \Pi(0, +\infty)$ существует точка $(y, 0)$ такая, что $\{|x - y| < \rho, 0 \leq t < +\infty\} \subset C\bar{\omega}$, причем, без ограничения общности, будем считать в дальнейшем, что $y = 0$, так что $\forall (x, t) \in \omega$ имеем $|x| > \rho > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Числовая функция $h \in C^{(1)}[0, +\infty)$ называется *функцией Тэклинда*, если:

1) $h(s) = h_0 = h(1) \quad \forall s \in [0, 1], \quad h(s) \geq h_0 s \quad \forall s \geq s_0 > 1$, причем

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s}{h(s)} = 0;$$

2) $Dh(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, s_0], \quad Dh(s) > 0 \quad \forall s \geq s_0 > 1$,

$$\max_{s \in [1, s_0]} Dh(s) = d_0 > 0;$$

3) (условие Тэклинда)

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} = +\infty.$$

ПРИМЕР. Имеем

$$h(s) = s \prod_{k=1}^m \ln_k s \quad \forall s \geq s_0 = \exp_m e,$$

где

$$\ln_k s = \underbrace{\ln \dots \ln}_k s, \quad \exp_k s = \underbrace{\exp \dots \exp}_k s.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. *Аддитивным классом* $T(h)$ называется совокупность функций Тэклинда такая, что для любого конечного числа $l \geq 2$ функций Тэклинда $h_k \in T(h)$, $k = \overline{1, l}$, функция $\sum_{k=1}^l h_k$ также является функцией Тэклинда (прим. см. в [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Классом* $T_h(g)$ называется совокупность функций $g \in C^{(1)}[0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $g(s) = g_0 > 0 \quad \forall s \in [0, s_0]$, $g(s) > 0 \quad \forall s \geq 0$;
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{g(s)} = +\infty$, так что для функции $G(s) = \int_0^s \frac{dz}{g(z)}$ имеем

$$G(s) = \frac{s}{g_0} \quad \forall s \in [0, s_0], \quad DG(s) = \frac{1}{g(s)} > 0 \quad \forall s > 0$$

и $\lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = +\infty$;

- 3) $-Dg(s) \leq h(G(s)) \quad \forall s \geq s_0 > 0$, где $h \in T(h)$;
- 4) $0 < Dh(s) \leq qh^2(s) \quad \forall s \geq s_0 > 1, q > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для функции $g \in T_h(g)$ возможны следующие варианты поведения при $s \rightarrow +\infty$:

- 1) $\lim_{s \rightarrow +\infty} g_1(s) = +\infty$, $g_1(s) = s \prod_{k=1}^m \ln_k s \quad \forall s \geq s_0$;
- 2) $0 < g_2(s) \leq A < +\infty \quad \forall s \geq 0$, $g_2(s) \equiv 1$;
- 3) $\lim_{s \rightarrow +\infty} g_3(s) = 0$, $g_3(s) = s^{-\alpha} \quad \forall s \geq s_0$, $\alpha < 0$.

В этом параграфе будем считать, что параболическая система второго порядка (1.4), рассматриваемая в неограниченной (по x) области ω , удовлетворяющей определению 2.1, сводится (см. § 1) к скалярному параболическому уравнению второго порядка (1.10), (1.11). Тогда из (1.2) для наибольшего собственного значения $\lambda_n(x, t)$ характеристической формы уравнения (1.10), (1.11) получаем

$$\lambda_n(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^m s_r \lambda_{1,n}^{(r)}(x, t) & \text{при (A.1),} \\ \sum_{r,k=1}^m s_r \lambda_{k,n}^{(r)}(x, t) & \text{при (P).} \end{cases} \quad (2.1)$$

Пусть $h \in T(h)$, $g \in T_h(g)$ и функция (1.6) из класса $C(\overline{\omega}) \wedge C_{x,t}^{(2,1)}(\omega)$ взята из обобщенного класса Тихонова–Тэклинда (ОТТ), введенного в [3], [4] так, что (см. определения 2.2, 2.3)

$$|v(x, t)| \leq v_0(t) \exp \left\{ \int_0^{G(|x|)} h(s) ds \right\} \quad \forall (x, t) \in \overline{\omega}, \quad (2.2)$$

где функция G взята из условия 2) определения 2.3 и $v_0(t)$ – положительная, неубывающая, непрерывная числовая функция на $[0, +\infty)$.

Скажем, что функция $v(M)$ из (1.6) является решением I-ой краевой задачи для уравнения (1.10), если

$$Lv(x, t) = -H(x, t) \quad \forall (x, t) \in \omega \quad (2.3)$$

при начальном условии

$$v(x, 0) = f(x) \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(\omega) \quad (2.4)$$

и краевом условии 1-го рода

$$v(M_0) = \varphi(M_0) \quad \forall M_0 = (x_0, t_0) \in \Sigma_0(\omega) = \Sigma(\omega) \setminus \bar{\gamma}_0(\omega). \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3 (см. определения 2.1–2.3). Положим при $h, h_c \in T(h)$, $g \in T_h(g)$

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{s_0}{g_0} \geq G(s) = \frac{s}{g_0} \quad \forall s \in [0, s_0], \\ g(s) &= g_0 > 0 \quad \forall s \in [0, s_0], \quad h(s) = \begin{cases} h_0, & 0 \leq s \leq 1, \\ \geq h_0 s, & 1 < s \leq s_0, \end{cases} \\ Dh(s) &= \begin{cases} 0, & s \in [0, 1], \\ 0 < Dh(s) \leq d_0 & \forall s \in [1, s_0]. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $0 < r < 1 < 4 < R < +\infty$, $rX > s_0 > 0$, $\alpha = \frac{R}{R-1} > 0$ и $\rho > 0$;

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha h^2(G_0) + d_0}{2(3+q)} + \frac{g_0}{8} h^2(G_0), \\ B &= \frac{\alpha h^2(G_0) + d_0}{2(3+q)} + \frac{h^2(G_0)}{8} \left(\frac{\rho}{g_0} + 1 \right). \end{aligned}$$

Поскольку $h_c^2(RX) \geq h_0 \cdot RX$ и $\lim_{X \rightarrow +\infty} (-h_c^2(RX)) = -\infty$, то $\exists X_0 > s_0 > 0$ такое, что $\forall X > X_0$ выполнены оценки сверху

$$A + \frac{1}{\alpha} (h_c^2(G_0) - h_c^2(RX)) < 0$$

и

$$B + \frac{1}{\alpha} (h_c^2(G_0) - h_c^2(RX)) < 0.$$

ТЕОРЕМА 2.1 (об априорной оценке решения I-ой краевой задачи (2.3)–(2.5) с условием сильного поглощения). Пусть функция (см. (1.6))

$$v \in C(\bar{\omega}) \wedge C_{x,t}^{(2,1)}(\omega) \quad (2.6)$$

является решением I-ой краевой задачи (2.3)–(2.5). Пусть существуют функция $g \in T_h(g)$, функции Тэклинда $h_c, h \in T(h)$, неубывающая функция $v_0 \in C[0, +\infty)$ такие, что для оператора Lv из (2.3) выполнено условие сильного поглощения:

$$c(x, t) < h_c^2(G(|x|)) \quad \forall (x, t) \in \omega. \quad (2.7)$$

Пусть (см. замечание 2.3) $rX > rX_0 > s_0 > 0$ и

$$\forall (x, t) \in \omega_T \cap \{G(|x|) < RX\} \equiv \omega_T(R)$$

положено (см. (2.7))

$$c_0(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} c(x, t) - h_c^2(RX) < 0 \quad (2.8)$$

и в случае (см. определение 2.3 и (2.1))

$$(x, t) \in \omega_T(R) \cap \{|x| \geq s_0 > 1\} \quad (2.9)$$

выполнены оценки сверху

$$\begin{aligned} 0 < 2(3+q)\lambda_1(x, t)h^2(G(|x|)) &\leq -g^2(|x|)c_0(x, t) && \text{при } n = 1, \\ 0 < 2\lambda_n(x, t) \max \left[(3+q)h^2(G(|x|)), \frac{4(n-1)}{|x|}h(G(|x|))g(|x|) \right] && (2.10) \\ &\leq -g^2(|x|)c_0(x, t) && \text{при } n \geq 2, \end{aligned}$$

$$b(x, t)h(G(|x|)) \leq -\frac{g(|x|)}{8}c_0(x, t), \quad (2.11)$$

где (см. (1.10), (1.11)) положено

$$b(x, t) = \left(\sum_{i=1}^n b_i^2(x, t) \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

а в случае (см. (2.1) и замечание 2.3)

$$(x, t) \in \omega_T(R) \cap \{0 < \rho \leq |x| \leq s_0\} \quad (2.13)$$

выполнены оценки сверху

$$\begin{aligned} 0 < 2(3+q)\lambda_1(x, t) &\leq g_0^2 && \text{при } n = 1, \\ 0 < 2\lambda_n(x, t) \max[(3+q)h(G_0), 4(n-1)/\rho] &\leq g_0^2h(G_0) && \text{при } n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

и (см. (2.12))

$$b(x, t) \leq \frac{g_0}{8}h(G_0). \quad (2.15)$$

Пусть решение (2.6) I-ой краевой задачи (2.3)–(2.5) принадлежит классу ОТТ (2.2) и существуют постоянные $m'_H \geq 0$, $m_f \geq 0$ и $m'_\varphi \geq 0$ такие, что для функции H из правой части уравнения (2.3), начальной функции f из (2.4)

и краевой функции φ из (2.5), также взятых из класса ОТТ (2.2), выполнены либо оценки сверху:

$$H(x, t) \leq v_0(t)m'_H \quad \forall (x, t) \in \omega, \quad (2.16)$$

$$f(x) \leq m_f \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(\omega), \quad (2.17)$$

$$\varphi(M_0) \leq v_0(t_0)m'_\varphi \quad \forall M_0 = (x_0, t_0) \in \Sigma_0(\omega), \quad (2.18)$$

либо оценки снизу:

$$H(x, t) \geq -v_0(t)m'_H \quad \forall (x, t) \in \omega, \quad (2.19)$$

$$f(x) \geq -m_f \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(\omega), \quad (2.20)$$

$$\varphi(x_0, t_0) \geq -v_0(t_0)m'_\varphi \quad \forall (x_0, t_0) \in \Sigma_0(\omega). \quad (2.21)$$

Тогда

$$\forall (x, t) \in \bar{\omega}_T \cap \{G(|x|) \leq rX\}$$

в классе ОТТ (2.2) при выполнении оценок сверху (2.16)–(2.18) имеют место оценки (при $0 < r < 1 < 4 < R < +\infty$)

$$\begin{aligned} -v_0(t) \exp \left\{ \int_0^{G(|x|)} h(s) ds \right\} &\leq v(x, t) \leq \exp \{h_c^2(RX)t\} \\ &\times \left[m_f + v_0(T) \left(m'_H t + m'_\varphi + \exp \left\{ -\frac{(1-r)R}{R-1} \int_0^X h(s) ds \right\} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

и аналогично в классе ОТТ (2.2) при выполнении оценок снизу (2.19)–(2.21) имеют место оценки

$$\begin{aligned} v_0(t) \exp \left\{ \int_0^{G(|x|)} h(s) ds \right\} &\geq v(x, t) \geq -\exp \{h_c^2(RX)t\} \\ &\times \left[m_f + v_0(T) \left(m'_H t + m'_\varphi + \exp \left\{ -\frac{(1-r)R}{R-1} \int_0^X h(s) ds \right\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем цилиндры (см. замечание 2.3)

$$\Pi_{RX}(0, T] = \{(x, t) \in \mathbb{R}_{x,t}^{n+1} \mid G(|x|) < RX, \ 0 < t \leq T\}$$

и $\Pi_{rX}(0, T]$, где $0 < r < 1 < 4 < R < +\infty$.

Положим

$$\omega_T(R) = \omega_T \cap \Pi_{RX}(0, T], \quad \omega_T(r) = \omega_T \cap \Pi_{rX}(0, T].$$

Рассмотрим в $\omega_T(R) \subset \omega$, где область ω неограничена (по x) и удовлетворяет определению 2.1 с $y = 0$, параболический оператор Lv из (1.10), (1.11), (2.3), для которого выполнено условие сильного поглощения (2.7), так что

$$0 < c(x, t) < h_c^2(G(|x|)) < h_c^2(RX) \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R),$$

и введем функцию (см. (2.6))

$$w(x, t) = v(x, t) \exp\{-h_c^2(RX)t\}. \quad (2.24)$$

Тогда

$$w \in C(\bar{\omega}_T(R)) \wedge C_{x,t}^{(2,1)}(\omega_T(R)),$$

причем в силу (2.2) для функции v из (2.6) имеем оценку ОТТ

$$|w(x, t)| \leq \exp\{-h_c^2(RX)t\} |v(x, t)| \leq v_0(T) \exp\left\{\int_0^{G(|x|)} h(s) ds\right\} \\ \forall (x, t) \in \bar{\omega}_T(R)$$

и для функции (2.24).

Полагая (см. (1.10), (1.11) и (2.8))

$$L_0 \bar{w} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) D_i D_j \bar{w} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) D_i \bar{w} + c_0(x, t) \bar{w} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R),$$

видим, что функция w из (2.24) является решением следующей I-ой краевой задачи:

$$L_0 w(x, t) \equiv \exp\{-h_c^2(RX)t\} L v(x, t) = -H_0(x, t) \\ \equiv -H(x, t) \exp\{-h_c^2(RX)t\} \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R), \quad (2.25)$$

причем из (2.4), (2.5) имеем

$$w(x, 0) = v(x, 0) = f(x) \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(\omega_T(R)) \quad (2.26)$$

и

$$w(M_0) = \varphi_0(M_0) \equiv \varphi(M_0) \exp\{-h_c^2(RX)t_0\} \quad \forall M_0 = (x_0, t_0) \in \Sigma_0 \cap \bar{\omega}_T(R). \quad (2.27)$$

В силу условий теоремы 2.1 для оператора $L_0 w$ на множестве $\omega_T(R)$ выполнены условия (2.10), (2.11) в случае (2.9) и (2.14), (2.15) в случае (2.13), где $h \in T(h)$.

В цилиндре $\bar{\Pi}_{RX}[0, T]$ при $\alpha = R/(R-1) > 0$ введем барьер (не зависящий от t) при $h \in T(h)$, $g \in T_h(g)$

$$V(x) = v_0(T) \exp\left\{\alpha \int_X^{G(|x|)} h(s) ds\right\}. \quad (2.28)$$

ЛЕММА 2.1 (ср. [11]). Для функций V из (2.28) и w из (2.24) справедливы утверждения:

- 1) $V \in C(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cap C_{x,t}^{(2,1)}(\Pi_{RX}(0, T])$;
- 2) $V(x) \geq v_0(T) \exp\left\{-\alpha \int_0^X h(s) ds\right\} \quad \forall (x, t) \in \bar{\Pi}_{RX}[0, T]$;
- 3) $V(x) = v_0(T) \exp\left\{\alpha \int_X^{RX} h(s) ds\right\} \quad \forall (x, t) \in \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \equiv \{(x, t) \mid G(|x|) = RX, 0 \leq t \leq T\}$, причем

$$V(x) \geq |w(x, t)| \quad \forall (x, t) \in \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cap \bar{\omega}_T(R);$$

- 4) $|w(x, t)| \leq v_0(T) \exp\left\{\int_0^{RX} h(s) ds\right\} \leq v_0(T) \exp\left\{\alpha \int_X^{RX} h(s) ds\right\} \quad \forall (x, t) \in \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cap \bar{\omega}_T(R)$;

- 5) $0 < v_0(T) \exp\left\{-\alpha \int_0^X h(s) ds\right\} \leq V(x) \leq v_0(T) \exp\left\{-\alpha(1-r) \int_0^X h(s) ds\right\} \quad \forall (x, t) \in \bar{\Pi}_{rX}[0, T]$;

- 6) $L_0 V(x) < 0, \quad c_0(x, t) < 0 \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R) \equiv \omega_T \cap \Pi_{RX}(0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) очевидно.

- 2) $G(|x|) > 0 \quad \forall |x| > \rho > 0$, поэтому

$$\alpha \int_X^{G(|x|)} h(s) ds = \alpha \int_0^{G(|x|)} h(s) ds - \alpha \int_0^X h(s) ds \geq -\alpha \int_0^X h(s) ds,$$

что приводит к утверждению 2).

- 3) $\forall (x, t) \in \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T])$ имеем $G(|x|) = RX$ и при $\alpha = R/(R-1)$ получаем

$$\frac{V(x)}{v_0(T)} = \exp\left\{\frac{R}{R-1} \int_0^{RX} h(s) ds\right\} = \exp\left\{\frac{R}{R-1} \left(\int_0^{RX} h(s) ds - \int_0^X h(s) ds\right)\right\}.$$

Но $h \in T(h)$, так что $h(s) \uparrow$ на $[0, +\infty)$, и, учитывая, что $R > 4 > 1 > r > 0$, имеем $h(s) \leq h(Rs) \quad \forall s > 0$, что при замене $z = Rs, \quad dz = R ds$ дает оценку сверху

$$\int_0^X h(s) ds \leq \int_0^X h(Rs) ds = \frac{1}{R} \int_0^{RX} h(z) dz,$$

и тогда $\forall (x, t) \in \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T])$ имеем оценку снизу

$$\frac{V(x)}{v_0(T)} \geq \exp\left\{\frac{R}{R-1} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \int_0^{RX} h(s) ds\right\} = \exp\left\{\int_0^{RX} h(s) ds\right\} \geq \frac{|w(x, t)|}{v_0(T)},$$

так что и утверждение 3) леммы доказано. Из утверждения 3) $\forall (x, t) \in \bar{\omega}_T(R) \cap \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T])$ имеем оценку

$$|w(x, t)| \leq v_0(T) \exp\left\{\int_0^{RX} h(s) ds\right\} \leq v_0(T) \exp\left\{\alpha \int_X^{RX} h(s) ds\right\},$$

т.е. получено и утверждение 4) леммы.

Далее, $G(|x|) \leq rX \quad \forall (x, t) \in \bar{\Pi}_{rX}[0, T]$, что дает

$$\begin{aligned} \int_X^{G(|x|)} h(s) ds &= \int_0^{G(|x|)} h(s) ds - \int_0^X h(s) ds \leq \int_0^{rX} h(s) ds - \int_0^X h(s) ds \\ &= r \int_0^X h(rz) dz - \int_0^X h(s) ds < (r-1) \int_0^X h(s) ds \end{aligned}$$

(поскольку $0 < r < 1 < 4 < R$, то $0 < rs < s \quad \forall s > 0$, и, делая замену $s = rz$, $ds = r dz$, имеем $h(rz) \leq h(z) \quad \forall z > 0$), так что $\forall G(|x|) \leq rX$ имеем оценку

$$\int_X^{G(|x|)} h(s) ds \leq (r-1) \int_0^X h(s) ds,$$

и тогда $\forall (x, t) \in \bar{\Pi}_{rX}[0, T]$ имеем из (2.28)

$$V(x) < v_0(T) \exp \left\{ -\alpha(1-r) \int_0^X h(s) ds \right\},$$

т.е. утверждение 5) леммы доказано.

Для доказательства утверждения 6) леммы положим для краткости записи

$$\begin{aligned} g(|x|) &\equiv g, & G(|x|) &\equiv G, & h(G(|x|)) &\equiv h(G), & Dh(G(|x|)) &\equiv Dh(G), \\ a_{ij}(x, t) &\equiv a_{ij}, & b_i(x, t) &\equiv b_i, & i, j &= \overline{1, n}, & c_0(x, t) &\equiv c_0. \end{aligned}$$

Тогда имеем $\forall |x| \geq \rho > 0$

$$\begin{aligned} D_i |x| &= \frac{x_i}{|x|}, & |x| D_i |x| &= x_i, \\ D_i \left(\frac{x_i}{|x|} \right) &= \frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}, \\ D_i G &= \begin{cases} \frac{x_i}{g_0 |x|} & \text{при } 0 < \rho \leq |x| \leq 1, \\ \frac{1}{g} \frac{x_i}{|x|} & \text{при } 1 \leq |x| \leq s_0, \end{cases} \\ D_i D_j G &= \begin{cases} \frac{1}{g_0} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right), & 0 < \rho \leq |x| \leq 1, \\ -\frac{Dg}{g^2} \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{1}{g} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right), & 1 \leq |x| \leq s_0, \end{cases} \\ h(G) D_i G &= \begin{cases} \frac{h_0}{g_0} \frac{x_i}{|x|}, & 0 < \rho \leq |x| \leq 1, \\ \frac{h(|x|/g_0)}{g_0} \frac{x_i}{|x|}, & 1 \leq |x| \leq s_0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^2(G)D_iGD_jG &= \begin{cases} h_0^2 \frac{x_i x_j}{g_0^2 |x|^2}, & 0 < \rho \leq |x| \leq 1, \\ \frac{h(|x|/g_0)}{g_0^2 |x|^2}, & 1 \leq |x| \leq s_0, \end{cases} \\
h(G)D_iD_jG &= \begin{cases} \frac{h_0}{g_0} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right), & 0 < \rho \leq |x| \leq 1, \\ h \left(\frac{|x|}{g_0} \right) \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right), & 1 \leq |x| \leq s_0, \end{cases} \\
Dh(G)D_iGD_jG &= \begin{cases} 0, & 0 < \rho \leq |x| \leq 1, \\ \frac{Dh(|x|/g_0)x_i x_j}{g_0^2 |x|^2}, & 1 \leq |x| \leq s_0, \end{cases}
\end{aligned}$$

а также $\forall |x| \geq s_0 > 0$

$$\begin{aligned}
D_iG &= \frac{1}{g} \frac{x_i}{|x|}, \quad D_iD_jG = -\frac{Dg}{g^2} \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{1}{g} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right), \\
h(G)D_iG &= \frac{h(G)}{g} \frac{x_i}{|x|}, \quad h^2(G)D_iGD_jG = h^2(G) \frac{x_i x_j}{g^2 |x|^2}, \\
h(G)D_iD_jG &= h(G) \left[-\frac{Dg}{g^2} \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{1}{g} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right) \right].
\end{aligned}$$

И тогда $\forall |x| \geq \rho > 0$ из (2.28) имеем

$$\begin{aligned}
D_iV &= \alpha V \frac{h(G)}{g} \frac{x_i}{|x|} \equiv \alpha V h(G) D_iG, \\
D_iD_jV &= \alpha V [(\alpha h^2(G) + Dh(G)) D_iG \cdot D_jG + h(G) D_iD_jG] \\
&= \alpha V \left\{ \frac{1}{g^2} (\alpha h^2(G) + Dh(G)) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right. \\
&\quad \left. + h(G) \left[-\frac{Dg}{g^2} \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{1}{g} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

и поэтому $\forall (x, t) \in \Pi_{RX}(0, T] \cap \omega_T(R)$ имеем $\forall |x| \geq \rho > 0$ представление

$$\frac{L_0 V(x)}{\alpha V(x)} = \sum_{i=1}^n I_i \equiv J, \tag{2.29}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{g^2} [\alpha h^2(G) - Dh(G) - h(G)Dg] \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2}, \\
I_2 &= \frac{h(G)}{|x|g} \left[\sum_{i=1}^n a_{ii} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right], \\
I_3 &= \frac{h(G)}{g} \sum_{i=1}^n b_i \frac{x_i}{|x|}, \quad I_4 = \frac{c_0}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $R > 4$, $\alpha = R/(R-1) < 4/3$, имеем

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 2, \quad \frac{5}{8} < \frac{3}{4} < \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha+q+1}{2(q+3)} + \frac{1}{4} < \frac{3}{4}, \quad \frac{\alpha+q}{2(q+3)} + \frac{1}{4} < \frac{3}{4}, \\ \frac{\alpha+q+1}{2(q+3)} + \frac{1}{8} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\alpha+q+1}{2(q+3)} + \frac{1}{8} < \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Пусть сначала выполнено (2.9), тогда при $n = 1$ имеем

$$I_2 = 0, \quad a_{11} = \lambda_1, \quad b_1 = b,$$

и тогда из (2.29) получаем

$$J \leq \frac{\lambda_1}{g^2} [\alpha h^2(G) + Dh(G) - h(G)Dg] + h(G) \frac{b}{g} + \frac{c_0}{\alpha}.$$

Но в силу определения 2.3

$$Dh(G) \leq qh^2(G), \quad -Dg \leq h(G),$$

т.е. при $n = 1$

$$J \leq \lambda_1 h^2(G) \frac{\alpha+q+1}{g^2} + b \frac{h(G)}{g} + \frac{c_0}{\alpha}.$$

Но в силу (2.9)–(2.11) при $n = 1$

$$2(3+q)\lambda_1 h^2(G) \leq -g^2 c_0, \quad bh(G) \leq -\frac{gc_0}{8},$$

так что, учитывая (2.8), имеем из (2.30) оценку сверху:

$$J \leq \left[\alpha \left(\frac{\alpha+q+1}{2(3+q)} + \frac{1}{8} \right) \right] c_0 \leq \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{8} \right) c_0 < 0,$$

т.е. в случае (2.9) при $n = 1$ имеем $L_0 V(x) < 0$. При $n \geq 2$ в случае (2.9) имеем

$$0 < \lambda_1 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2} \leq \lambda_n,$$

откуда

$$0 < \sum_{i=1}^n a_{ii} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2} \leq (n-1)\lambda_n.$$

Вновь учитывая оценки $Dh(G) \leq qh^2(G)$, $-Dg \leq h(G)$ из определения 2.3 и оценки (см. (2.11))

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{b_i x_i}{|x|} \right| \leq b,$$

в случае (2.9) при $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{\lambda_n}{g^2} [\alpha h^2(G) + Dh(G) - h(G)Dg] + \frac{(n-1)\lambda_n h(G)}{|x|g} + b \frac{h(G)}{g} + \frac{c_0}{\alpha} \\ &\leq \frac{\lambda_n}{g^2} h^2(G)(\alpha + q + 1) + \frac{n-1}{|x|g} h(G) + \frac{Gh(G)}{g} + \frac{c_0}{\alpha}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что при $n \geq 2$ в силу (2.9)–(2.11) имеем

$$2\lambda_n \max \left[(3+q)h^2(G), \frac{4(n-1)h(G)g}{|x|} \right] \leq -g^2 c_0, \quad 8bh(G) \leq -gc_0,$$

так что

$$\lambda_n \frac{h^2(G)}{g^2} \leq -\frac{c_0}{2(3+q)}, \quad \frac{(n-1)\lambda_n h(G)}{|x|g} \leq -\frac{c_0}{8}, \quad \frac{bh(G)}{g} \leq -\frac{c_0}{8}.$$

Но тогда при $n \geq 2$ в случае (2.9) в силу (2.8) имеем из (2.30)

$$J \leq c_0 \left[\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\alpha + q + 1}{2(3+q)} + \frac{1}{2} \right) \right] \leq c_0 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{4} \right) < 0,$$

так что в случае (2.9) оценка $L_0 V(x) < 0$ доказана и при $n \geq 2$.

В случае (2.13) в силу (2.14), (2.15) и (2.8) имеем при $n = 1$, используя определение 2.3, оценку

$$J \leq \frac{\lambda_1}{g_0^2} (\alpha h^2(G_0) + d_0) + \frac{h(G_0)}{g_0} b + \frac{c_0}{\alpha} h^2(G_0) \leq A + \frac{c_0}{\alpha},$$

где

$$A = \frac{\alpha h^2(G_0) + d_0}{2(3+q)} + \frac{g_0}{8} h^2(G_0).$$

Далее, в случае (2.13) при $n \geq 2$ имеем оценку

$$J \leq \lambda_n [\alpha h^2(G_0) + d_0] + \frac{(n-1)}{g_0} h(G_0) \lambda_n + \frac{h(G_0)b}{g_0} + \frac{c_0}{\alpha} \leq B + \frac{c_0}{\alpha},$$

где

$$B = \frac{\alpha h^2(G_0) + d_0}{2(3+q)} + \frac{h^2(G_0)}{8} \left(1 + \frac{\rho}{g_0} \right).$$

Но поскольку в силу (2.8)

$$c_0 \leq h_c^2(G_0) - h_c^2(RX) < 0,$$

то в случае (2.13) получаем оценки

$$J \leq A + \frac{1}{\alpha} (h_c^2(G_0) - h_c^2(RX)) \quad \text{при } n = 1$$

и

$$J \leq B + \frac{1}{\alpha} (h_c^2(G_0) - h_c^2(RX)) \quad \text{при } n \geq 2.$$

Но тогда из замечания 2.3, считая, что $X > X_0 > s_0$ в $\Pi_{RX}(0, T]$, получаем оценку сверху $J < 0$ в случае (2.13) как при $n = 1$, так и при $n \geq 2$. Утверждение 6) леммы доказано.

Рассмотрим теперь I-ю краевую задачу (2.25)–(2.27) для функции (2.24), считая выполненными в теореме 2.1 оценки сверху (2.16)–(2.18). Тогда из (2.25)–(2.27) имеем оценки сверху:

$$H_0(x, t) \leq H(x, t) \leq v_0(T)m'_H \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R), \quad (2.31)$$

$$f(x) \leq m_f \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(\omega_T(R)), \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(M_0) &\equiv \varphi(M_0) \exp\{-h_c^2(RX)t_0\} \\ &\leq v_0(T)m'_\varphi \quad \forall M_0 = (x_0, t_0) \in \Sigma_0(\omega) \cap \bar{\Pi}_{RX}[0, T]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Введем барьер (см. (2.28))

$$W(x, t) = V(x) - w(x, t) + m_{\varphi_0}(T) + m_f + v_0(T)m'_{H_0} \cdot t.$$

Тогда в силу леммы 2.1

$$L_0 V(x) < 0 \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R),$$

и в силу (2.31)

$$-L_0 w(x, t) \leq v_0(T)m'_H \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R),$$

и в силу (2.8)

$$c_0(x, t)(m_{\varphi_0}(T) + m_f) \leq 0, \quad -v_0(T)m'_H \leq 0,$$

т.е.

$$L_0 W(x, t) < 0, \quad c_0(x, t) < 0 \quad \forall (x, t) \in \omega_T(R),$$

так что функция W суперпараболична на множестве $\omega_T(R)$. Далее, $\forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(\omega_T(R))$ имеем в силу (2.26), (2.32)

$$W(x, 0) = V(x) - w(x, 0) + m_{\varphi_0}(T) + m_f,$$

где $V(x) > 0$ в силу утверждения 2) леммы 2.1 и $-w(x, 0) = -v(x, 0) = -f(x)$, так что (см. (2.32))

$$W(x, 0) > m_f - f(x) \geq 0 \quad \forall (x, 0) \in \bar{\gamma}_0(\omega_T(R)).$$

Далее,

$$\forall M_0 = (x_0, t_0) \in \Sigma_0(\omega) \cap \bar{\Pi}_{RX}[0, T] \quad (2.34)$$

имеем

$$W(x_0, t_0) = V(x_0) - \varphi_0(x_0, t_0) + m_{\varphi_0}(T) + v_0(T)m'_{H_0}t_0.$$

В силу (2.33) $\varphi_0(x_0, t_0) \leq m_{\varphi_0}(T)$. Но из утверждения 2) леммы $V(x_0) > 0$, так что при выполнении (2.33) имеем (см. (2.34))

$$W(M_0) \geq m_{\varphi_0}(T) - \varphi_0(M_0) + m_f + v_0(T)m'_H t_0 > 0.$$

Далее, отметим представление

$$\Sigma(\omega_T(R)) = (\Sigma(\omega) \cap \bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cup (\Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cap \bar{\omega}_T).$$

Тогда в силу утверждения 4) леммы 2.1 имеем

$$\begin{aligned} W(M_0) &\geq V(x_0) - |w(M_0)| + m_{\varphi_0}(T) + v_0(T)m'_H t_0 \\ &\geq V(x_0) - |w(x_0, t_0)| > 0 \quad \forall M_0 \in \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cap \bar{\omega}_T, \end{aligned}$$

откуда получаем оценку снизу:

$$W(M_0) > 0 \quad \forall M_0 \in \Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cap \bar{\omega}_T,$$

так что

$$\begin{aligned} W(M_0) &\geq 0 \\ \forall M_0 \in \Sigma_0(\omega_T(R)) &\equiv (\Sigma_0(\omega) \cap \bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cup (\Sigma(\bar{\Pi}_{RX}[0, T]) \cap \bar{\omega}_T(R)). \end{aligned}$$

Но тем самым доказана оценка снизу:

$$W(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma(\omega_T(R)) = \bar{\gamma}_0(\omega_T(R)) \cup \Sigma_0(\omega_T(R)). \quad (2.35)$$

В силу слабого принципа минимума (см. теорему 1.2), примененного к суперпараболической (на множестве $\omega_T(R)$) функции W , имеем оценку снизу:

$$W(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{\omega}_T(R),$$

из которой, в частности, получаем оценку сверху для решения I-ой краевой задачи (2.25)–(2.27) $w(x, t)$ из (2.24):

$$w(x, t) \leq V(x) + m_{\varphi_0}(T) + m_f + v_0(T)m'_{H_0}t \quad \forall (x, t) \in \bar{\omega}_T(R),$$

из которой в силу утверждения 5) леммы 2.1 имеем оценку сверху:

$$\begin{aligned} w(x, t) &\leq v_0(T)m'_{\varphi_0} + m_f + v_0(T)m'_{H_0}t \\ &\quad + v_0(T) \exp\left\{-\alpha(1-r) \int_0^X h(s) ds\right\} \\ \forall (x, t) &\in \bar{\omega}_T(r) \subset \bar{\Pi}_{rX}[0, T]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Но тогда, учитывая оценку ОТГ (2.2), из (2.24) получаем оценки (2.22) теоремы 2.1 при выполнении оценок сверху (2.16)–(2.18).

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (теорема единственности в классе ОТТ решения I-ой краевой задачи для оператора Lv с условием сильного поглощения). Пусть функция (2.6) является решением I-ой краевой задачи (2.3)–(2.5) при выполнении условия сильного поглощения (2.7), взятое из класса ОТТ (2.2). Пусть в оценках (2.16)–(2.21) положено $m'_H = m_f = m'_\varphi = 0$. Тогда для любой фиксированной точки $(x, t) \in \bar{\omega}_T$ существует множество

$$\bar{\omega}_T(r) = \bar{\omega}_T \cap \bar{\Pi}_{rX}[0, T]$$

(при $X > X_0 > s_0$ из замечания 2.3), содержащее точку (x, t) , и в силу двусторонней оценки (см. (2.22), (2.23)) теоремы 2.1 имеем

$$|w(x, t)| \leq v_0(T) \exp \left\{ -\alpha(1-r) \int_0^X h(s) ds \right\} \quad \forall (x, t) \in \bar{\omega}_T(r).$$

Переходя в ней к пределу при $X \rightarrow +\infty$, получаем $w(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{\omega}_T$, т.е. доказано, что $w(x, t) \equiv 0$ в $\bar{\omega}_T$, откуда, поскольку (см. (2.24)) $\forall (x, t) \in \bar{\omega}_T(R)$

$$v(x, t) = \exp\{h_c^2(RX)t\}w(x, t),$$

имеем $v(x, t) \equiv 0$ в $\bar{\omega}_T$.

Список литературы

1. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. О слабом (алгебраическом) принципе экстремума для параболической системы 2-го порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 5. С. 35–62.
2. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. О слабом (стохастическом) принципе экстремума для одного класса параболических систем 2-го порядка // Вестн. РУДН. 1996. Т. 3. № 1. С. 58–71.
3. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. Об изотропной теории единственности решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравн. 1988. Т. 24. № 1. С. 73–85.
4. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. О проблеме Тихонова–Петровского для параболических уравнений 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. № 5. С. 78–109.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
6. Ильин А. М., Калашиников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1961. Т. 17. № 3. С. 3–146.
7. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
10. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. Об односторонних оценках решений задачи Коши для параболических уравнений второго порядка в классах быстро растущих функций. I // Дифференц. уравн. 1994. Т. 30. № 5. С. 838–846.
11. Камынин Л. И. Односторонние оценки решения I краевой задачи в неограниченной области для сильно диссипативного параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 1. С. 105–117.

Поступило в редакцию
27.IX.1996