Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, О дробных долях быстрорастущих функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 89–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:19:16

УДК 511

А. А. Карацуба

О дробных долях быстро растущих функций

Изучается поведение дробных долей функций вида $\alpha \exp([\log^c x] \log x)$, где α – вещественное алгебраическое число степени $n \geq 2$ и c – произвольное положительное число, меньшее единицы.

Библиография: 12 наименований.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

В [1] автор оценил тригонометрическую сумму $S(f)$ следующего вида:

$$S(f) = \sum_{x \leq X} \exp(2\pi i m f(x)),$$

где $m \neq 0$, m – целое число,

$$f(x) = \exp(c_1 \log^\gamma x),$$

c_1 и γ – абсолютные положительные константы, причем $1 < \gamma < 3/2$, и, в качестве следствия оценки, получил теорему о равномерном распределении дробных долей $f(x)$.

Более точно эти результаты формулируются так (см. также [2, с. 72] и [3, с. 103]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $c_1 > 0$ – произвольное фиксированное число, γ – константа, $1 < \gamma < 3/2$, m – целое число, $m \neq 0$, $X \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(c_1 \log^\gamma x), \\ S &= S(f) = \sum_{x \leq X} \exp(2\pi i m f(x)). \end{aligned} \tag{1}$$

Если $0 < |m| \leq \exp((\log X)^{3-2\gamma-\varepsilon})$, где $0 < \varepsilon < 3 - 2\gamma$, то

$$|S| \leq c_2 X \exp(-c_3 (\log X)^{3-2\gamma}),$$

где $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$, $c_3 = c_3(\varepsilon) > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $0 < \sigma \leq 1$ и $D(\sigma)$ – количество чисел ряда $x = 1, 2, \dots, X$ с условием $\{f(x)\} < \sigma$, и пусть

$$D(\sigma) = \sigma X + \lambda(X).$$

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям (1), то

$$\lambda(X) = O(X \exp(-c_4(\log X)^{3-2\gamma})),$$

где $c_4 > 0$ и постоянная в знаке O зависят только от γ .

Следствием последнего утверждения является теорема о разрешимости диофантова неравенства (в натуральных числа x):

При любом вещественном числе ξ выполняется неравенство

$$\min_{x \leq X} \|f(x) - \xi\| \leq c_5 \exp(-c_6(\log X)^{3-2\gamma}), \quad (2)$$

где $c_5 = c_5(\gamma) > 0$, $c_6 = c_6(\gamma) > 0$ и символ $\|\omega\|$ означает расстояние от вещественного числа ω до ближайшего целого числа.

Такое же утверждение справедливо для $\alpha f(x)$ при любом отличном от нуля вещественном числе α . Легко видеть, что $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ стремится к $+\infty$ быстрее любого многочлена от x .

Вопросы о поведении дробных долей вещественнозначных функций и, в частности, вопросы о разрешимости неравенств вида (2) в натуральных числах x с вещественнозначной функцией $f(x)$ были поставлены и изучались в работах [4]–[8]. При доказательстве (2) применялся метод Виноградова оценок тригонометрических сумм с многочленом растущей степени в экспоненте.

В настоящей статье получен результат типа неравенства (2) с функцией $f(x)$, растущей быстрее, чем (1).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Пусть α – произвольное вещественное алгебраическое число степени не меньше 2,

$$f(x) = \alpha \exp([\log^c x] \log x),$$

где константа c удовлетворяет неравенствам $0 < c < 1$ и $[\log^c x]$ есть целая часть $\log^c x$. Тогда существуют число $X_1 = X_1(c) > 0$ и постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что при $X \geq X_1$ и при любом вещественном числе ξ количество решений неравенства

$$\|\xi - f(x)\| \leq \exp(-c_1 \log^{1-c} X)$$

в целых положительных числах x , $x \leq X$, не меньше чем

$$X \exp(-c_2(\log^{1-c} X + \log^c X \log \log X)).$$

В частности,

$$\min_{x \leq X} \|\xi - f(x)\| \leq \exp(-c_1 \log^{1-c} X).$$

Метод, на основе которого доказывается теорема, развит в работах автора [9]–[12]. Однако прямо применить результаты [11] или [12] к доказательству сформулированной теоремы нельзя из-за слишком жесткой связи главного и второстепенного параметров, введенных в [11] и [12]. Теорема статьи отвечает на один вопрос профессора О. Штрауха, сотрудника Математического института Словакии.

Выражаю глубокую благодарность профессору О. Штрауху за полезное обсуждение проблем теории диофантовых приближений.

Обозначения. Буквами $c, c_1, c_2, \dots$ будем обозначать абсолютные положительные постоянные, причем $0 < c < 1$, а $c_1, c_2, \dots$ в разных формулах могут быть разными; буквами $p, p_1, p_2, \dots$ – простые числа; символы $[\omega], \{\omega\}, \|\omega\|$ обозначают соответственно целую часть вещественного числа ω , т.е. $[\omega]$ – целое число с условием $[\omega] \leq \omega < [\omega] + 1$, дробную часть ω , т.е. $\{\omega\} = \omega - [\omega]$, и расстояние от ω до ближайшего целого числа, т.е. $\|\omega\| = \min(\{\omega\}, 1 - \{\omega\})$; запись $A \asymp B$ означает, что $c_1 A \leq B \leq c_2 A$; запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leq c_1 B$; $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x ; X – основной растущий параметр, $X \geq X_1(c) > 0$; $\log N \asymp \log X$; n и k – натуральные числа, причем $n \asymp \log^c X$, $k \asymp \log^c X$; $\theta, \theta_1, \dots$ – некоторые функции с условием $|\theta| \leq 1$, $|\theta_1| \leq 1, \dots$; постоянные в знаках O – абсолютные.

§ 2. Основная лемма

В этом параграфе доказывается основная лемма 1 об оценке сверху количества решений следующего диофантова уравнения:

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = y_1^n + y_2^n + \dots + y_k^n. \quad (3)$$

В уравнении (3) неизвестные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ принимают значения натуральных чисел специального вида, которые в дальнейшем будут называться *v-числами*. Построим множество натуральных чисел V , отвечающее параметрам N, n и k , элементы которого и будут *v-числами*. Для этого при $j = 1, 2, \dots, k$ определим числа X_j, Y_j равенствами

$$X_j = \left(1 - \frac{1}{4k}\right) Y_j, \quad Y_j = N^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}.$$

Далее, при каждом j , $1 \leq j \leq k$, заставим параметр p_j принимать значения всех простых чисел из промежутка $(X_j, Y_j]$, другими словами, заставим p_j пробегать последовательные простые числа с условием

$$X_j < p_j \leq Y_j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *V-множеством, отвечающим параметрам N, n и k , или, коротко, V -множеством, называется множество чисел вида $v = p_1 p_2 \dots p_k$.*

Легко видеть, что $v \neq v'$, если только $p_j \neq p'_j$ хотя бы при одном значении j , $1 \leq j \leq k$. Отсюда, в частности, следует, что количество решений уравнения $xu = z$, где x и y – неизвестные *v-числа*, а z – заданное натуральное число, не

превосходит 2^k . Далее, если символом $\|V\|$ обозначить количество элементов V , т.е. количество всех v -чисел, то имеем равенство

$$\|V\| = \prod_{j=1}^k (\pi(Y_j) - \pi(X_j)).$$

Пользуясь асимптотической формулой Валле-Пуссена

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})),$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{8k} \frac{Y_j}{\log Y_j} &\leq \pi(Y_j) - \pi(X_j) \leq \frac{1}{2k} \frac{Y_j}{\log Y_j}, \\ 4^{-k} M &\leq \|V\| \leq M, \end{aligned}$$

где

$$M = \left(\frac{n}{2k \log N} \right)^k \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{\frac{k(k-1)}{2}} N^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}.$$

В свою очередь, верхняя граница V_2 и нижняя граница V_1 изменения v таковы:

$$V_1 = \left(1 - \frac{1}{4k} \right)^k N^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k} \leq v \leq N^{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k} = V_2.$$

ЛЕММА 1. Пусть I – количество решений уравнения (3) при условии, что $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ принимают значения v -чисел, и пусть $2n + 6 < k \ll n$. Тогда для I справедлива следующая оценка:

$$I \leq a(n; k) N^{2k - n + \omega},$$

где

$$\begin{aligned} a(n; k) &= (4k)^{-(k-2n-5)(1.5k+n-41)-(2n+5)(4n+9)}, \\ \omega &= \omega(n; k) = n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{k-2n-5} - (k+2n+4) \left(1 - \frac{1}{n} \right)^k - 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. При целом числе s , $0 \leq s \leq s_1 = k - 2(n+3)$, символом $I^{(s)}$ обозначим количество решений следующего уравнения:

$$x_{s+1}^n + \dots + x_k^n = y_{s+1}^n + \dots + y_k^n. \quad (4)$$

Здесь x_j и y_j , $j = s+1, \dots, k$, принимают значения чисел вида $p_{s+1} \dots p_k$, где, в свою очередь, p_j принимают значения всех простых чисел соответственно промежутков $(X_j, Y_j]$. Очевидно, что $I^{(0)} = I$.

2. Для величины $I^{(s)}$ докажем следующее основное рекуррентное неравенство:

$$I^{(s)} \leq 5nH^2(Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} I^{(s+1)} \prod_{j=2}^{k-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}), \quad (5)$$

где $H = (2k^5)^4$.

3. Представим $I^{(s)}$ в виде интеграла от соответствующей тригонометрической суммы. Пусть

$$S(\alpha) = \sum_{X_{s+1} < p_{s+1} \leq Y_{s+1}} \cdots \sum_{X_k < p_k \leq Y_k} \exp(2\pi i \alpha (p_{s+1} \cdots p_k)^n).$$

Тогда имеем следующее равенство:

$$I^{(s)} = \int_0^1 |S(\alpha)|^{2(k-s)} d\alpha. \quad (6)$$

4. Преобразуем $S(\alpha)$. Вводя новые тригонометрические суммы

$$S(\alpha; p_{s+1}) = \sum_{X_{s+2} < p_{s+2} \leq Y_{s+2}} \cdots \sum_{X_k < p_k \leq Y_k} \exp(2\pi i \alpha (p_{s+1} \cdots p_k)^n),$$

имеем следующее равенство:

$$S(\alpha) = \sum_{X_{s+1} < p_{s+1} \leq Y_{s+1}} S(\alpha; p_{s+1}).$$

Возьмем $H = (2k^5)^4$, $H_{s+1} = (Y_{s+1} - X_{s+1})H^{-1}$ и разделим промежуток $(X_{s+1}, Y_{s+1}]$ на H промежутков j_r следующего вида:

$$j_r: (X_{s+1} + (r-1)H_{s+1}, X_{s+1} + rH_{s+1}], \quad r = 1, 2, \dots, H.$$

Тогда, соответственно этому разбиению, $S(\alpha)$ представится суммой H слагаемых:

$$S(\alpha) = \sum_{r=1}^H S_r(\alpha), \quad (7)$$

где

$$S_r(\alpha) = \sum_{p_{s+1} \in j_r} S(\alpha; p_{s+1}). \quad (8)$$

5. Преобразуем $S^{k-s}(\alpha)$. Возведем обе части равенства (7) в степень $k-s$; получим

$$S^{k-s}(\alpha) = \sum_{r_1=1}^H \cdots \sum_{r_{k-s}=1}^H S_{r_1}(\alpha) \cdots S_{r_{k-s}}(\alpha). \quad (9)$$

Все наборы чисел вида $(r_1, \dots, r_{k-s})$, где $1 \leq r_1, \dots, r_{k-s} \leq H$, разобьем на классы A и B следующим образом: в класс A отнесем такие наборы $(r_1, \dots, r_{k-s})$, в которых найдется r_j , отличное от всех остальных r_ν , $j \neq \nu$, т.е. $r_j \neq r_\nu$ при

$\nu \neq j$; в класс B отнесем все остальные наборы. Сумму в правой части (9) по наборам $(r_1, \dots, r_{k-s})$ из класса A обозначим Σ_1 , а сумму по наборам $(r_1, \dots, r_{k-s})$ из класса B обозначим Σ_2 . Таким образом,

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{(r_1, \dots, r_{k-s}) \in A} \dots \sum S_{r_1}(\alpha) \dots S_{r_{k-s}}(\alpha), \\ \Sigma_2 &= \sum_{(r_1, \dots, r_{k-s}) \in B} \dots \sum S_{r_1}(\alpha) \dots S_{r_{k-s}}(\alpha).\end{aligned}$$

Равенство (9) перепишем так:

$$S^{k-s}(\alpha) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (10)$$

6. Преобразуем слагаемые сумм Σ_1 и Σ_2 . После перенумерации индексов наборов $(r_1, \dots, r_{k-s})$ слагаемые в Σ_1 имеют следующий вид:

$$S_{r_1}(\alpha) S_{r_2}(\alpha) \dots S_{r_{k-s}}(\alpha),$$

причем $r_1 \neq r_\nu$, $\nu = 2, \dots, k-s$. Также после перенумерации индексов наборов $(r_1, \dots, r_{k-s})$ слагаемые в Σ_2 имеют следующий вид:

$$S_{r_1}^{\beta_1}(\alpha) \dots S_{r_t}^{\beta_t}(\alpha), \quad (11)$$

где $r_\nu \neq r_j$, $\nu \neq j$, $\beta_1 \geq 2, \dots, \beta_t \geq 2$, и, кроме того,

$$\beta_1 + \dots + \beta_t = k-s. \quad (12)$$

7. Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ – количество наборов $(r_1, \dots, r_{k-s})$ в классе A и в классе B соответственно. Для $\|A\|$ имеем тривиальную верхнюю оценку: $\|A\| \leq H^{k-s}$.

Оценим теперь сверху $\|B\|$. Так как числа $\beta_1, \dots, \beta_t$ в (12) не меньше, чем 2, то $t \leq 0.5(k-s)$. Пусть $r_1, \dots, r_t$, $\beta_1, \dots, \beta_t$ заданы. Это означает, что в наборе $(r_1, r_2, \dots, r_{k-s})$ число r_1 встречается β_1 раз, число r_2 встречается β_2 раза, $\dots$, число r_t встречается β_t раз. Следовательно, на $k-s$ местах число r_1 занимает β_1 мест, что можно осуществить

$$(k-s)(k-s-1) \dots (k-s-\beta_1+1) < (k-s)^{\beta_1}$$

способами, число r_2 занимает β_2 мест, что можно осуществить не более чем $(k-s)^{\beta_2}$ способами, $\dots$, и, наконец, r_t может занимать β_t мест, что можно осуществить не более чем $(k-s)^{\beta_t}$ способами. Таким образом, количество слагаемых вида (11) при заданных $r_1, \dots, r_t$, $\beta_1, \dots, \beta_t$ не больше, чем

$$(k-s)!(k-s)^{\beta_1+\dots+\beta_t} < (k-s)^{2(k-s)}.$$

Далее, если $r(t)$ – количество решений уравнения (11) в числах $\beta_1, \dots, \beta_t$, то $r(t) \leq (k-s)^{t-1}$, поэтому для $\|B\|$ получаем такую верхнюю границу:

$$\|B\| \leq \sum_{1 \leq t \leq 0.5(k-s)} H^t r(t) (k-s)^{2(k-s)} \leq 2(k-s)^{2.5(k-s)} H^{0.5(k-s)}.$$

8. Перейдем в (10) к неравенствам. Возведем, далее, обе части этого неравенства в квадрат и воспользуемся неравенством Коши; получим

$$|S(\alpha)|^{2(k-s)} \leq 2\|A\| \sum_{(r_1, \dots, r_{k-s}) \in A} \dots \sum |S_{r_1}(\alpha)|^2 \dots |S_{r_{k-s}}(\alpha)|^2 + 2\|B\| \sum_{(r_1, \dots, r_{k-s}) \in B} |S_{r_1}(\alpha)|^2 \dots |S_{r_{k-s}}(\alpha)|^2. \quad (13)$$

Слагаемые по $(r_1, \dots, r_{k-s})$ в правой части последнего неравенства преобразуем следующим образом. К произведениям второй кратной суммы применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим. То же самое сделаем с произведениями первой кратной суммы, предварительно выделив первый множитель. Для слагаемых первой суммы получаем неравенство

$$|S_{r_1}(\alpha)|^2 |S_{r_2}(\alpha)|^2 \dots |S_{r_{k-s}}(\alpha)|^2 \leq \frac{1}{k-s-1} |S_{r_1}(\alpha)|^2 (|S_{r_2}(\alpha)|^{2(k-s-1)} + \dots + |S_{r_{k-s}}(\alpha)|^{2(k-s-1)}). \quad (14)$$

Отметим, что здесь $r_1 \neq r_j$, $j = 2, \dots, k-s$.

Для слагаемых второй суммы получаем неравенство

$$|S_{r_1}(\alpha)|^2 \dots |S_{r_{k-s}}(\alpha)|^2 \leq \frac{1}{k-s} (|S_{r_1}(\alpha)|^{2(k-s)} + \dots + |S_{r_{k-s}}(\alpha)|^{2(k-s)}). \quad (15)$$

Подставив (14) и (15) в (13), а затем (13) – в (6), приходим к неравенству

$$I^{(s)} \leq 2\|A\|^2 I_1^{(s)} + 2\|B\|^2 I_2^{(s)}, \quad (16)$$

где

$$I_1^{(s)} = \int_0^1 |S_{r_1}(\alpha)|^2 |S_{r_2}(\alpha)|^{2(k-s-1)} d\alpha, \quad (17)$$

$$I_2^{(s)} = \int_0^1 |S_r(\alpha)|^{2(k-s)} d\alpha. \quad (18)$$

В неравенстве (16) r_1, r_2, r – фиксированные натуральные числа, причем $r_1 \neq r_2$, $1 \leq r_1, r_2, r \leq H$, и, кроме того, такие, для которых интегралы $I_1^{(s)}$ и $I_2^{(s)}$ принимают свои максимальные значения. Еще заметим, что интеграл $I_2^{(s)}$ имеет такой же вид, что и $I^{(s)}$, только промежуток изменения переменной суммирования p_{s+1} в сумме $S(\alpha)$, который имел вид

$$X_{s+1} < p_{s+1} \leq Y_{s+1},$$

заменился в сумме $S_r(\alpha)$ на более короткий промежуток вида

$$X_{s+1}^{(1)} = X_{s+1} + (r-1)H_{s+1} < p_{s+1} \leq X_{s+1} + rH_{s+1} = Y_{s+1}^{(1)},$$

длина которого равна

$$H_{s+1} = Y_{s+1}^{(1)} - X_{s+1}^{(1)} = (Y_{s+1} - X_{s+1})H^{-1}.$$

9. Преобразуем интеграл $I_1^{(s)}$. Так как

$$S_{r_2}(\alpha) = \sum_{X_{s+1}^{(1)} < p_{s+1} \leq Y_{s+1}^{(1)}} S(\alpha; p_{s+1}),$$

то, переходя к неравенствам и применяя затем неравенство Гёльдера, найдем

$$\begin{aligned} |S_{r_2}(\alpha)|^{2(k-s-1)} &\leq H_{s+1}^{2(k-s-1)-1} \sum_{X_{s+1}^{(1)} < p_{s+1} \leq Y_{s+1}^{(1)}} |S(\alpha; p_{s+1})|^{2(k-s-1)}, \\ I_1^{(s)} &\leq H_{s+1}^{2(k-s-1)} \int_0^1 |S_{r_1}(\alpha)|^2 |S(\alpha; p)|^{2(k-s-1)} d\alpha. \end{aligned} \quad (19)$$

В последнем интеграле буквой p обозначено некоторое фиксированное простое число из промежутка $(X_{s+1}^{(1)}, Y_{s+1}^{(1)})$, т.е.

$$X_{s+1}^{(1)} = X_{s+1} + (r_2 - 1)H_{s+1} < p \leq X_{s+1} + r_2 H_{s+1} = Y_{s+1}^{(1)},$$

причем $r_2 \neq r_1$ и число p такое, при котором этот интеграл принимает максимальное значение.

10. Пусть

$$I = \int_0^1 |S_{r_1}(\alpha)|^2 |S(\alpha; p)|^{2(k-s-1)} d\alpha.$$

Очевидно, что интеграл I равен количеству решений следующего уравнения:

$$x_{s+1}^n - y_{s+1}^n = p^n (x_{s+2}^n + \dots + x_k^n - y_{s+2}^n - \dots - y_k^n).$$

В этом уравнении неизвестные x_{s+1} , y_{s+1} принимают значения чисел вида $p_{s+1} \dots p_k$, а неизвестные $x_{s+2}, \dots, x_k$, $y_{s+2}, \dots, y_k$ принимают значения чисел вида $p_{s+2} \dots p_k$, причем p_{s+1} меняются в промежутке следующего вида:

$$X_{s+1} + (r_1 - 1)H_{s+1} < p_{s+1} \leq X_{s+1} + r_1 H_{s+1},$$

а $p_{s+2}, \dots, p_k$ меняются в промежутках вида

$$X_j < p_j \leq Y_j, \quad j = s+2, \dots, k.$$

Так как $r_2 \neq r_1$, то $p \neq p_{s+1}$.

Обозначим через T количество решений в числах x_{s+1} , y_{s+1} сравнения

$$x_{s+1}^n \equiv y_{s+1}^n \pmod{p^n}. \quad (20)$$

Тогда для I получаем такую оценку:

$$I \leqslant T I_1, \quad (21)$$

где I_1 – количество решений уравнения

$$x_{s+2}^n + \dots + x_k^n = y_{s+2}^n + \dots + y_k^n$$

в числах x_j, y_j , $j = s+2, \dots, k$, каждое из которых имеет вид $p_{s+2} \dots p_k$. Легко видеть, что $I_1 = I^{(s+1)}$.

11. Оценим сверху T . По определению неизвестные x_{s+1} и y_{s+1} имеют вид $p_{s+1} \dots p_k$, причем $(p, x_{s+1}) = (p, y_{s+1}) = 1$ и $X_{s+1} < p \leqslant Y_{s+1}$. Из верхних границ изменения $p_{s+1}, \dots, p_k$ получаем оценки сверху для x_{s+1} и y_{s+1} :

$$\max(x_{s+1}, y_{s+1}) \leqslant Y_{s+1} \dots Y_k = N^{(1-\frac{1}{n})^s - (1-\frac{1}{n})^k}.$$

В свою очередь, для p^n выполняется такая нижняя оценка:

$$p^n > X_{s+1}^n = \left(1 - \frac{1}{4k}\right)^n N^{(1-\frac{1}{n})^s}.$$

Из условий на N, k, n, s легко следует неравенство

$$N^{(1-\frac{1}{n})^s - (1-\frac{1}{n})^k} < \left(1 - \frac{1}{4k}\right)^n N^{(1-\frac{1}{n})^s}.$$

Тем самым неизвестные x_{s+1} и y_{s+1} сравнения (20) принимают значения некоторой части приведенной системы вычетов по модулю p^n . Поэтому при фиксированном y_{s+1} сравнение (20) будет иметь не более чем n решений, и, следовательно, для T выполняется оценка

$$T \leqslant n(Y_{s+1} - X_{s+1}) \dots (Y_k - X_k). \quad (22)$$

12. Соберем полученные оценки. Из (21), (22) находим

$$I \leqslant n(Y_{s+1} - X_{s+1}) \dots (Y_k - X_k) I^{(s+1)}.$$

Из (19) следует неравенство

$$I_1^{(s)} \leqslant H_{s+1}^{2(k-s-1)} I \leqslant n H_{s+1}^{2(k-s-1)} (Y_{s+1} - X_{s+1}) \dots (Y_k - X_k) I^{(s+1)}. \quad (23)$$

Наконец, из оценок $\|A\|, \|B\|$ и формул (16)–(19), (23) получаем первую основную оценку величины $I^{(s)}$:

$$\begin{aligned} I^{(s)} &\leqslant 2n H_{s+1}^{2(k-s)} H_{s+1}^{2(k-s-1)} (Y_{s+1} - X_{s+1}) \dots (Y_k - X_k) I^{(s+1)} \\ &\quad + 2(k-s)^{5(k-s)} H^{k-s} I_2^{(s)} \\ &= 2n H_{s+1}^{2(k-s)} H_{s+1}^{2(k-s-1)} (Y_{s+1} - X_{s+1}) L I^{(s+1)} + 2(k-s)^{5(k-s)} H^{k-s} I_2^{(s)}. \end{aligned} \quad (24)$$

В этом неравенстве величины H_{s+1} и L соответственно равны:

$$H_{s+1} = (Y_{s+1} - X_{s+1})H^{-1}, \quad L = (Y_{s+2} - X_{s+2}) \dots (Y_k - X_k),$$

а интеграл $I_2^{(s)}$ имеет такой же вид, что и интеграл $I^{(s)}$, только величины X_{s+1} , Y_{s+1} , которые входят в определение $I^{(s)}$ (это есть границы изменения простых чисел p_{s+1}), заменились на новые, именно на $X_{s+1}^{(1)}$, $Y_{s+1}^{(1)}$, где

$$X_{s+1}^{(1)} = X_{r+1} + (r-1)H_{s+1}, \quad Y_{s+1}^{(1)} = X_{s+1} + rX_{s+1}$$

и r – некоторое целое фиксированное число, $1 \leq r \leq H$.

13. Чтобы удобно было применять неравенство (24), введем новые обозначения и перепишем его в этих новых обозначениях. Положим

$$\begin{aligned} I^{(s)} &= I_{2,0}^{(s)}; \quad I_2^{(s)} = I_{2,1}^{(s)}; \quad Y_{s+1} = Y_{s+1}^{(0)}, \quad X_{s+1} = X_{s+1}^{(0)}; \\ H_{s+1} &= H_{s+1}^{(0)} = (Y_{s+1}^{(0)} - X_{s+1}^{(0)})H^{-1}; \quad X_{s+1}^{(1)} = X_{s+1}^{(0)} + (r_0 - 1)H_{s+1}^{(0)}, \\ Y_{s+1}^{(1)} &= X_{s+1}^{(0)} + r_0H_{s+1}^{(0)}. \end{aligned}$$

Тогда (24) перепишется так:

$$\begin{aligned} I_{2,0}^{(s)} &\leq 2nH^{2(k-s)}(H_{s+1}^{(0)})^{2(k-s-1)}(Y_{s+1}^{(0)} - X_{s+1}^{(0)})LI^{(s+1)} \\ &\quad + 2(k-s)^{5(k-s)}H^{k-s}I_{2,1}^{(s)}. \end{aligned} \quad (25)$$

14. Определим теперь натуральное число μ неравенствами

$$H^{\mu+2} < Y_{s+1} - X_{s+1} \leq H^{\mu+3}.$$

Далее, определим при $j = 0, 1, \dots, \mu$ параметры $X_{s+1}^{(j+1)}$, $Y_{s+1}^{(j+1)}$, $H_{s+1}^{(j)}$ равенствами

$$\begin{aligned} X_{s+1}^{(j+1)} &= X_{s+1}^{(j)} + (r_j - 1)H_{s+1}^{(j)}, \quad Y_{s+1}^{(j+1)} = X_{s+1}^{(j)} + r_jH_{s+1}^{(j)}, \\ H_{s+1}^{(j)} &= (Y_{s+1}^{(j)} - X_{s+1}^{(j)})H^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь r_j – некоторые целые числа (например, $r_0 = r$), которые появляются в соответствующем итеративном процессе, $1 \leq r_j \leq H$. Тогда, повторяя рассуждения пп. 3–12, приходим к неравенству, подобному (25):

$$\begin{aligned} I_{2,j}^{(s)} &\leq 2nH^{2(k-s)}(H_{s+1}^{(j)})^{2(k-s-1)}(Y_{s+1}^{(j)} - X_{s+1}^{(j)})LI^{(s+1)} \\ &\quad + 2(k-s)^{5(k-s)}H^{k-s}I_{2,j+1}^{(s)}. \end{aligned} \quad (26)$$

15. Оценим сверху $I_{2,\mu+1}^{(s)}$. Этот интеграл тривиально оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{2,\mu+1}^{(s)} &= \int_0^1 \left| \sum_{X_{s+1}^{(\mu+1)} < p_{s+1} \leq Y_{s+1}^{(\mu+1)}} S(\alpha; p_{s+1}) \right|^{2(k-s)} d\alpha \\ &\leq (Y_{s+1}^{(\mu+1)} - X_{s+1}^{(\mu+1)})^{2(k-s)} \int_0^1 |S(\alpha; p)|^{2(k-s)} d\alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Последний интеграл равен количеству решений такого уравнения:

$$x_{s+1}^n + \dots + x_k^n = y_{s+1}^n + \dots + y_k^n,$$

причем неизвестные $x_j, y_j, j = s+1, \dots, k$, принимают значения чисел вида $p_{s+2} \dots p_k$. Поэтому, опять же применяя тривиальную оценку, находим

$$\int_0^1 |S(\alpha; p)|^{2(k-s)} d\alpha \leq (Y_{s+1} - X_{s+1})^2 \dots (Y_k - X_k)^2 I^{(s+1)}. \quad (28)$$

Из определения параметров $\mu, Y_{s+1}^{(j)}, X_{s+1}^{(j)}$ получаем

$$Y_{s+1}^{(\mu+1)} - X_{s+1}^{(\mu+1)} = (Y_{s+1} - X_{s+1}) H^{-\mu-1} \leq H^2.$$

Поэтому из (27) и (28) приходим к нужной нам оценке $I_{2,\mu+1}^{(s)}$:

$$I_{2,\mu+1}^{(s)} \leq H^{4(k-s)} (Y_{s+1} - X_{s+1})^2 \dots (Y_k - X_k)^2 I^{(s+1)}. \quad (29)$$

16. Обозначим через a множитель, стоящий перед $I_{2,j+1}^{(s)}$ в правой части неравенства (26), т.е.

$$a = 2(k-s)^{5(k-s)} H^{k-s}.$$

Умножим обе части неравенства (26) на a^j , получим

$$a^j I_{2,j}^{(s)} \leq 2n H^{2(k-s)} L I^{(s+1)} a^j (H_{s+1}^{(j)})^{2(k-s-1)} + a^{j+1} I_{2,j+1}^{(s)}. \quad (30)$$

Суммируя обе части (30) по $j = 0, 1, \dots, \mu$, найдем

$$\begin{aligned} I_{2,0}^{(s)} + \sum_{j=1}^{\mu} a^j I_{2,j}^{(s)} &\leq 2n H^{2(k-s)} L I^{(s+1)} \sum_{j=0}^{\mu} a^j (H_{s+1}^{(j)})^{2(k-s-1)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\mu} a^j I_{2,j}^{(s)} + a^{\mu+1} I_{2,\mu+1}^{(s)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда получаем такое неравенство (пользуемся тем, что $I_{2,0}^{(s)} = I^{(s)}$, и оценкой (29)):

$$I^{(s)} \leq (2n H^{2(k-s)} L V_1 + V_2) I^{(s+1)}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{j=0}^{\mu} a^j (H_{s+1}^{(j)})^{2(k-s-1)}, \\ V_2 &= a^{\mu+2} H^{4(k-s)} (Y_{s+1} - X_{s+1})^2 \dots (Y_k - X_k)^2. \end{aligned}$$

17. Оценим сверху V_1 . Так как

$$H = (2k^5)^4, \quad a = 2(k-s)^{5(k-s)} H^{k-s} \leq (2k^5)^{k-s} H^{k-s},$$

$$H_{s+1}^{(j)} = (Y_{s+1} - X_{s+1}) H^{-j-1},$$

то слагаемые суммы V_1 оценим так:

$$\begin{aligned} & a^j (H_{s+1}^{(j)})^{2(k-s-1)} \\ & \leq (2k^5)^{j(k-s)} H^{j(k-s)} (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} H^{-2(k-s-1)} H^{-j(2k-2s-2)} \\ & = (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} H^{-2(k-s-1)} ((2k^5)^{k-s} H^{-(k-s)+2})^j \\ & = (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} H^{-2(k-s-1)} ((2k^5)^{-3(k-s)+8})^j. \end{aligned}$$

Так как $k-s \geq 2(n+3)$, то

$$V_1 \leq 2H^{-2(k-s-1)} (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)}.$$

Докажем теперь, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & 2nH^{2(k-s)} L \cdot 2H^{-2(k-s-1)} (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} \\ & \leq 4nH^2 (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} \prod_{j=2}^{k-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & a^{\mu+2} H^{4(k-s)} (Y_{s+1} - X_{s+1})^2 \dots (Y_k - X_k)^2 \\ & \leq nH^2 (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} \prod_{j=2}^{k-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}). \end{aligned} \quad (34)$$

Напомним, что здесь

$$L = (Y_{s+2} - X_{s+2}) \dots (Y_k - X_k),$$

$$H^{\mu+2} < Y_{s+1} - X_{s+1} \leq H^{\mu+3}, \quad a = 2(k-s)^{5(k-s)} H^{k-s}.$$

Непосредственно видно, что соотношение (33) является равенством. Неравенство (34) после сокращения на общий множитель перейдет в такое:

$$a^{\mu+2} H^{4(k-s)-2} (Y_{s+2} - X_{s+2}) \dots (Y_k - X_k) \leq n(Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s)-4}.$$

Докажем более грубое неравенство, заменяя $a^{\mu+2}$ большей величиной:

$$\begin{aligned} & (2(k-s)^{5(k-s)})^{\mu+2} (Y_{s+1} - X_{s+1})^{k-s} H^{4(k-s)-2} (Y_{s+2} - X_{s+2}) \dots (Y_k - X_k) \\ & \leq n(Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s)-4}. \end{aligned}$$

Так как $2k^5 = H^{\frac{1}{4}}$, то $(2(k-s)^5)^{k-s} \leq H^{\frac{k-s}{4}}$. Кроме того, $H^{\mu+2} < Y_{s+1} - X_{s+1}$. Поэтому будем доказывать еще более грубое неравенство

$$\begin{aligned} & (Y_{s+1} - X_{s+1})^{\frac{5}{4}(k-s)} H^{4(k-s)-2} (Y_{s+2} - X_{s+2}) \dots (Y_k - X_k) \\ & \leq n(Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s)-4}, \end{aligned}$$

или даже такое:

$$H^{4(k-s)}(Y_{s+2} - X_{s+2}) \dots (Y_k - X_k) \leq (Y_{s+1} - X_{s+1})^{\frac{3}{4}(k-s)-4}. \quad (35)$$

Заменяя Y_j , X_j их значениями, находим

$$\begin{aligned} Y_j - X_j &= (4k)^{-1} Y_j = (4k)^{-1} N^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}, \\ (Y_{s+2} - X_{s+2}) \dots (Y_k - X_k) &= ((4k)^{-1})^{k-s-1} N^{\frac{1}{n}} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s+1} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \right), \\ (Y_{s+1} - X_{s+1})^{\frac{3}{4}(k-s)-4} &= ((4k)^{-1})^{\frac{3}{4}(k-s)-4} N^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \left(\frac{3}{4}(k-s)-4\right). \end{aligned}$$

Поэтому (35) переписется так:

$$H^{4(k-s)} ((4k)^{-1})^{\frac{k-s}{4}+3} \leq N^{\varkappa}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \left(\frac{3}{4}(k-s)-4\right) - \frac{1}{n} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s+1} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \left(\frac{3(k-s)}{4n} - \frac{4}{n} - 1 + \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-s} \right). \end{aligned}$$

Еще раз огрубим (36):

$$H^{4(k-s)} \leq N^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \left(\frac{3(k-s)}{4n} - \frac{n+3}{n} \right)}.$$

Отсюда получаем, что достаточно доказать неравенство

$$H^4 \leq N^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \left(\frac{3}{4n} - \frac{n+3}{n(k-s)} \right)}.$$

Так как $k - s \geq 2(n + 3)$, то докажем, что

$$H^4 \leq N^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{4n}}. \quad (37)$$

Вспоминая, что $N \asymp \log X$, $k \asymp \log^c X$, $n \asymp \log^c X$, $H = 2k^5$ и $0 < c < 1$, убеждаемся в справедливости неравенства (37) при $X \geq X_1(c) > 0$.

Итак, неравенства (33) и (34) выполняются, что вместе с (32) дает нам вторую основную формулу:

$$I^{(s)} \leq 5nH^2(Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} I^{(s+1)} \prod_{j=2}^{k-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}).$$

Это есть неравенство (5) п. 2.

18. Перемножая (5) при $s = 0, 1, \dots, s_1$, получим

$$I^{(0)} \prod_{s=1}^{s_1} I^{(s)} \leq I^{(s_1+1)} \left(\prod_{s=1}^{s_1} I^{(s)} \right) (5nH^2)^{s_1+1} \\ \times \left(\prod_{s=0}^{s_1} (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)} \right) \left(\prod_{s=0}^{s_1} \prod_{j=2}^{k-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}) \right).$$

Сокращая обе части этого неравенства на соответствующее произведение, приходим к оценке

$$I^{(0)} \leq ABCD, \quad (38)$$

где

$$A = (5nH^2)^{s_1+1}, \quad B = \prod_{s=0}^{s_1} (Y_{s+1} - X_{s+1})^{2(k-s-1)}, \\ C = \prod_{s=0}^{s_1} \prod_{j=2}^{k-s} (Y_{s+j} - X_{s+j}), \quad D = I^{(s_1+1)}.$$

Тривиальная оценка величины $I^{(s)}$ выглядит так (фиксируются все, кроме одной неизвестной):

$$I^{(s)} \leq \left(\prod_{j=s+1}^k (Y_j - X_j) \right)^{2(k-s)-1}.$$

Поэтому

$$D = I^{(s_1+1)} \leq \left(\prod_{j=s_1+2}^k (Y_j - X_j) \right)^{2(k-s_1-1)-1}.$$

Так как $H = (2k^5)^4$, $s_1 = k - 2(n+3) \geq 1$, $Y_j - X_j = (4k)^{-1} N^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}$, для A, B, C, D легко получаем такие неравенства:

$$A < (1280k^{41})^{k-2n-5} < 4^{6(k-2n-5)} k^{41(k-2n-5)}, \\ B = \prod_{s=0}^{s_1} (4k)^{-2(k-s-1)} N^{\frac{2(k-s-1)}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \\ = (4k)^{-2k(s_1+1)+(s_1+1)(s_1+2)} N^{2k-2n-(2n+10)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s_1+1}, \\ C = \prod_{s=0}^{s_1} \prod_{j=2}^{k-s} (4k)^{-1} N^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s+j-1} \\ = \prod_{s=0}^{s_1} (4k)^{-(k-s-1)} N^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k} \\ = (4k)^{-k(s_1+1)+\frac{1}{2}(s_1+1)(s_1+2)} N^{n-1-n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s_1+2} - (s_1+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}, \\ D = \left(\prod_{j=s_1+2}^k (4k)^{-1} N^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \right)^{4n+9}$$

$$= (4k)^{-(2n+5)(4n+9)} N^{(4n+9)} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s_1+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right).$$

Из формулы (38) и найденных оценок величин A, B, C, D приходим к окончательному неравенству для $I^{(0)} = I$:

$$I = I^{(0)} < a(k; n) N^{2k-n+\omega},$$

где

$$a(k; n) = (4k)^{-(k-2n-5)(1.5k+n-41)-(2n+5)(4n+9)},$$

$$\omega = \omega(k; n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2n-5} - (k+2n+4) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k - 1.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая условия $k > 2(n+3)$ и $n \asymp \log^c X$, для $a(k; n)$ получаем простую форму оценки:

$$a(k; n) < \exp\left(-\frac{1}{8} k^2 \log k\right).$$

§ 3. Оценка тригонометрической суммы специального вида

Применяя лемму 1, оценим двойную тригонометрическую сумму $W(\alpha)$, определение которой будет дано в следующей лемме.

ЛЕММА 2. Пусть α – вещественное число, причем

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

где $q \geq 3$, $(a, q) = 1$, $|\theta| \leq 1$. Рассмотрим двойную тригонометрическую сумму

$$W(\alpha) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \exp(2\pi i \alpha t x^n y^n),$$

где x и y пробегают значения v -чисел из V -множества, отвечающего параметрам N, n, k ; t – целое положительное число. Тогда для $|W(\alpha)|$ справедлива следующая оценка:

$$|W(\alpha)| \ll \|V\|^2 \Delta_0,$$

где

$$\Delta_0 = (m \log q)^{\frac{1}{4k^2}} \left(N^{\omega_1} q^{-\frac{1}{4k^2}} + N^{\omega_2} q^{\frac{1}{4k^2}} \right) \log N,$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2k^2} + \frac{n}{2k^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2n-5} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{3n+4}{2k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k,$$

$$\omega_2 = -\frac{n+1}{2k^2} + \frac{n}{2k^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2n-5} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{n+2}{k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь неравенством Гёльдера, последовательно получаем

$$\begin{aligned}
 |W(\alpha)|^{2k} &\leq \left(\sum_{x \in V} \left| \sum_{y \in V} \exp(2\pi i \alpha t x^n y^n) \right| \right)^{2k} \\
 &\leq \|V\|^{2k-1} \sum_{x \in V} \left| \sum_{y \in V} \exp(2\pi i \alpha t x^n y^n) \right|^{2k} \\
 &= \|V\|^{2k-1} \sum_{x \in V} \sum_{\lambda} I_k(\lambda) \exp(2\pi i \alpha t x^n \lambda), \tag{39}
 \end{aligned}$$

где символом $I_k(\lambda)$ обозначено количество решений уравнения

$$y_1^n + \dots + y_k^n = y_{k+1}^n + \dots + y_{2k}^n + \lambda \tag{40}$$

в числах $y_1, \dots, y_{2k} \in V$. Так как для y_j , $1 \leq j \leq 2k$, выполняются неравенства $V_1 \leq y_j \leq V_2$, то при $|\lambda| > \Lambda = k(V_2^n - V_1^n)$ число $I_k(\lambda)$ равно нулю. Поэтому в (39) считаем $|\lambda| \leq \Lambda$. Меняя в (39) порядки суммирования, приходим к следующей формуле:

$$|W(\alpha)|^{2k} \leq \|V\|^{2k-1} \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} I_k(\lambda) \left| \sum_{x \in V} \exp(2\pi i \alpha t \lambda x^n) \right|.$$

Возведем обе части этого неравенства в степень $2k$ и опять применим неравенство Гёльдера; найдем

$$\begin{aligned}
 |W(\alpha)|^{4k^2} &\leq \|V\|^{2k(2k-1)} \left(\sum_{|\lambda| \leq \Lambda} I_k(\lambda) \right)^{2k-1} \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} I_k(\lambda) \left| \sum_{x \in V} \exp(2\pi i \alpha t \lambda x^n) \right|^{2k} \\
 &= \|V\|^{4k^2-2k} W_1 W_2, \tag{41}
 \end{aligned}$$

где

$$W_1 = \left(\sum_{|\lambda| \leq \Lambda} I_k(\lambda) \right)^{2k-1}, \tag{42}$$

$$W_2 = \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} I_k(\lambda) \left| \sum_{x \in V} \exp(2\pi i \alpha t \lambda x^n) \right|^{2k}. \tag{43}$$

Оценим сверху каждую из выписанных выше сумм W_1 , W_2 . Сумма величин $I_k(\lambda)$ по всем λ равна количеству всех возможных наборов неизвестных $y_1, \dots, y_{2k}$ в уравнении (40), т.е.

$$\sum_{|\lambda| \leq \Lambda} I_k(\lambda) = \|V\|^{2k}; \quad W_1 = \|V\|^{4k^2-2k}.$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} I_k(\lambda) &= \int_0^1 \left| \sum_{x \in V} \exp(2\pi i \alpha x^n) \right|^{2k} \exp(-2\pi i \alpha \lambda) d\alpha \\ &\leq \int_0^1 \left| \sum_{x \in V} \exp(2\pi i \alpha x^n) \right|^{2k} d\alpha = I_k(0), \end{aligned}$$

то для W_2 получаем цепочку таких соотношений:

$$\begin{aligned} W_2 &\leq I_k(0) \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} \left| \sum_{x \in V} \exp(2\pi i \alpha t \lambda x^n) \right|^{2k} \\ &= I_k(0) \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} \sum_{|\mu| \leq \Lambda} I_k(\mu) \exp(2\pi i \alpha t \lambda \mu) \\ &\leq I_k(0) \sum_{|\mu| \leq \Lambda} I_k(\mu) \left| \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} \exp(2\pi i \alpha t \mu \lambda) \right| \\ &\leq I_k^2(0) \sum_{|\mu| \leq \Lambda} \left| \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} \exp(2\pi i \alpha t \mu \lambda) \right|. \end{aligned} \quad (44)$$

Воспользуемся теперь тем, что при любом вещественном числе β справедливо неравенство

$$\left| \sum_{|\lambda| \leq \Lambda} \exp(2\pi i \beta \lambda) \right| \leq \min \left(2\Lambda + 1, \frac{1}{2\|\beta\|} \right).$$

Следовательно, из соотношений (44) для W_2 находим

$$\begin{aligned} W_2 &\leq I_k^2(0) \sum_{|\mu| \leq \Lambda} \min \left(2\Lambda + 1, \frac{1}{2\|\alpha t \mu\|} \right) \\ &\leq I_k^2(0) \sum_{|\mu| \leq m\Lambda} \min \left(2\Lambda + 1, \frac{1}{2\|\alpha \mu\|} \right). \end{aligned}$$

К сумме по μ применим известное неравенство (см. [8, с. 254] или [3, с. 94]); получим

$$\begin{aligned} W_2 &\leq 6I_k^2(0) \left(\frac{2m\Lambda + 1}{q} + 1 \right) (2\Lambda + 1 + q \log q) \\ &\leq 36I_k^2(0) \frac{m}{q} (\Lambda + q)^2 \log q. \end{aligned} \quad (45)$$

Замечая, что $I_k(0) = I$, где I определено и оценено в лемме 1, из (41)–(45) последовательно находим

$$\begin{aligned} |W(\alpha)|^{4k^2} &\leq 36\|V\|^{8k^2-4k} I^2 \frac{m}{q} (\Lambda + q)^2 \log q; \\ |W(\alpha)| &\leq \|V\|^2 \Delta, \\ \Delta &= \left(\frac{36m}{q} (\Lambda + q)^2 \log q \right)^{\frac{1}{4k^2}} I^{\frac{1}{2k^2}} \|V\|^{-\frac{1}{k}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Чтобы получить нужную оценку Δ , воспользуемся оценками сверху величин Λ , I и нижней оценкой $\|V\|$:

$$\begin{aligned}\Lambda &< kV_2^n = kN^{n-n(1-\frac{1}{n})^k}, \\ I &< a(k; n)N^{2k-n+\omega}, \\ \|V\| &\geq \left(\frac{n}{8k \log N}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} N^{1-(1-\frac{1}{n})^k}.\end{aligned}$$

Вводя знак Виноградова $\ll$ и учитывая замечание к лемме 1, находим

$$\begin{aligned}I^{\frac{1}{2k^2}} \|V\|^{-\frac{1}{k}} &\ll \frac{k \log N}{n} N^{\frac{1}{k} - \frac{n}{2k^2} + \frac{\omega}{2k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}} (1 - \frac{1}{n})^k \\ &\ll (\log N) N^{-\frac{n}{2k^2} - \frac{1}{2k^2} + \frac{n}{2k^2}} (1 - \frac{1}{n})^{k-2n-5} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{n+2}{k^2}\right) (1 - \frac{1}{n})^k, \\ \Lambda^{\frac{1}{2k}} q^{-\frac{1}{4k^2}} &\ll N^{\frac{n}{2k^2} - \frac{n}{2k^2}} (1 - \frac{1}{n})^k q^{-\frac{1}{4k^2}}, \\ \Delta &\ll \Delta_1 \ll (m \log q)^{\frac{1}{4k^2}} (N^{\omega_1} q^{-\frac{1}{4k^2}} + N^{\omega_2} q^{\frac{1}{4k^2}}) \log N,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{n}{2k^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2n-5} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \\ &\quad - \frac{n+2}{k^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k - \frac{n}{2k^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \\ &= \frac{n}{2k^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2n-5} - \frac{1}{2k^2} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{3n+4}{2k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k, \\ \omega_2 &= -\frac{n+1}{2k^2} + \frac{n}{2k^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-2n-5} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{n+2}{k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.\end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (46) следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы оценка леммы 2 была не тривиальной, необходимо выполнение неравенств

$$N^{4k^2\omega_1} < q < N^{-4k^2\omega_2}.$$

§ 4. Доказательство теоремы

1. Прежде всего заметим, что при $X \geq X_1(c) > 0$ выполняется равенство $[\log^c X] = [\log^c x]$ либо при всех x из промежутка $[0.5X, X]$, либо при всех x из промежутка $[X, 2X]$. Действительно, если $\{\log^c X\} > 4 \log^{-1+c} X$, то

$$\begin{aligned}(\log 0.5X)^c &= (\log^c X) \cdot \left(1 - \frac{\log 2}{\log X}\right)^c \\ &= \log^c X - c \frac{\log 2}{\log X} \log^c X + \dots = [\log^c X] + \{\log^c X\} - \dots > [\log^c X].\end{aligned}$$

Следовательно, при $0.5X \leq x \leq X$ имеем

$$[\log^c X] < (\log 0.5X)^c \leq \log^c x \leq \log^c X < [\log^c X] + 1,$$

и при всех $x \in [0.5X, X]$

$$[\log^c x] = [\log^c X].$$

Если же $\{\log^c X\} \leq 4 \log^{-1+c} X$, то

$$\begin{aligned} (\log 2X)^c &= (\log^c X) \left(1 + \frac{\log 2}{\log X}\right)^c = \log^c X + c(\log 2) \log^{c-1} X + \dots \\ &= [\log^c X] + \{\log^c X\} + c(\log 2) \log^{c-1} X + \dots < [\log^c X] + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, при $X \leq x \leq 2X$

$$[\log^c X] \leq \log^c X \leq \log^c x \leq (\log 2X)^c < [\log^c X] + 1,$$

и при всех $x \in [X, 2X]$ имеем

$$[\log^c x] = [\log^c X].$$

Поэтому, никак не ограничивая общности, будем считать X таким, что $[\log^c x] = [\log^c X]$ при всех x из промежутка $[0.5X, X]$.

2. Полагая $n = [\log^c X]$, $k = 10n$, определим число N равенством

$$X = N^{2-2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}.$$

Пусть $V = V(N; n, k)$ – множество v -чисел, отвечающее параметрам N, n, k . При $0 \leq a < b \leq 1$ символом $K = K(X; a, b)$ обозначим количество чисел $z = xy$, где x и y пробегает независимо друг от друга значения v -чисел множества V , таких, что

$$a \leq \{\alpha \exp([\log^c z] \log z)\} < b.$$

3. Пусть $r = 2[\log X]$, $\Delta = N^{-\frac{n}{k^2}}$, числа a_1 и b_1 таковы, что $0 \leq a_1 < b_1 \leq 1$, $\Delta \leq b_1 - a_1 \leq 1 - \Delta$, и $\psi(x)$ – “стаканчик” Виноградова, отвечающий параметрам r, Δ, a_1, b_1 (см., например, [3, с. 14]). Найдем асимптотику следующей суммы K_1 :

$$K_1 = K_1(X; a_1, b_1) = \sum_z \psi(\alpha \exp([\log^c z] \log z)).$$

4. Прежде всего функция $\psi(x)$ разлагается в такой ряд Фурье:

$$\psi(x) = b_1 - a_1 + \sum_{m \neq 0} g(m) \exp(2\pi i m x),$$

где

$$|g(m)| \leq \min\left(b_1 - a_1, \frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|} \left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right).$$

Пользуясь при $|m| > m_1 = 2r\Delta^{-1}$ третьей оценкой $|g(m)|$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|m| > m_1} g(m) \exp(2\pi i m x) \right| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{\pi \Delta} \right)^r \sum_{m > m_1} \frac{1}{m^{r+1}} \\ &< \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{\pi \Delta m_1} \right)^r < X^{-3}. \end{aligned}$$

Поэтому для K_1 справедлива следующая формула:

$$K_1 = (b_1 - a_1) \|V\|^2 + \sum_{0 < |m| \leq m_1} g(m) S(m) + \theta \|V\|^2 X^{-3}, \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} S(m) &= \sum_z \exp(2\pi i m f(z)), \\ f(z) &= \alpha \exp([\log^c z] \log z). \end{aligned}$$

5. Так как $z = xy$, $x \in V$, $y \in V$, то нижняя и верхняя границы изменения z легко находятся:

$$0.5X \leq \left(1 - \frac{1}{4k}\right)^{2k} N^{2-2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k} \leq z \leq N^{2-2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k} = X.$$

Поэтому при всех значениях z выполняется равенство

$$[\log^c z] = [\log^c X] = n,$$

и, следовательно, $f(z) = \alpha z^n = \alpha x^n y^n$. Таким образом, $S(m)$ есть сумма из леммы 2.

6. Так как α – вещественное алгебраическое число степени, не меньшей 2, то α представляется бесконечной цепной дробью. Пусть P_ν и Q_ν – числитель и знаменатель ν -й подходящей дроби α , $\nu = 1, 2, \dots$. Известно, что $(P_\nu, Q_\nu) = 1$ и, кроме того,

$$\left| \alpha - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| < \frac{1}{Q_\nu Q_{\nu+1}}. \quad (48)$$

По теореме Туэ–Зигеля–Рота для любого $\varepsilon > 0$ существует $c_5 = c_5(\alpha; \varepsilon) > 0$ такое, что для любой рациональной дроби P_ν/Q_ν , $(P_\nu, Q_\nu) = 1$, выполняется неравенство

$$\left| \alpha - \frac{P_\nu}{Q_\nu} \right| \geq \frac{c_5}{Q_\nu^{2+\varepsilon}}. \quad (49)$$

Из неравенств (48) и (49) находим оценку для $Q_{\nu+1}$:

$$Q_\nu < Q_{\nu+1} \leq c_6 Q_\nu^{1+\varepsilon}. \quad (50)$$

Возьмем $\varepsilon = 0,01$, $c_6 = c_6(\alpha) > 0$ и определим натуральное число ν неравенствами

$$Q_\nu < N^{n-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k} \leq Q_{\nu+1}. \quad (51)$$

Обозначая через q число Q_ν , а через a – число P_ν , получим

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Из неравенств (50) и (51) для q находим нужные нам верхнюю и нижнюю оценки:

$$c_7 N^{\frac{100}{101} \varkappa} \leq q \leq N^\varkappa, \quad \varkappa = n - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k. \quad (52)$$

7. К сумме $S(m)$ применим лемму 2, получим

$$|S(m)| \ll (m \log q)^{\frac{1}{4k^2}} \left(N^{\omega_1} q^{-\frac{1}{4k^2}} + N^{\omega_2} q^{\frac{1}{4k^2}} \right) \|V\|^2 \log N.$$

Из определения величин $m_1 = 2r\Delta^{-1}$, Δ , ω_1 , ω_2 , k , n , q и оценки (52) после несложных вычислений приходим к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} (m \log q)^{\frac{1}{4k^2}} &\leq (m_1 n \log N)^{\frac{1}{4k^2}} \ll (\Delta^{-1} \log^3 X)^{\frac{1}{4k^2}} \\ &= (N^{\frac{n}{k^2}} \log^3 X)^{\frac{1}{4k^2}} \ll N^{\frac{n}{4k^4}}, \\ N^{\omega_1} q^{-\frac{1}{4k^2}} &\ll N^{\omega_1 - \frac{1}{4k^2} \left(1 - \frac{1}{101}\right) \left(n - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)} \leq N^{-\frac{n}{8k^2}}, \\ N^{\omega_2} q^{\frac{1}{4k^2}} &\leq N^{\omega_2 + \frac{1}{4k^2} \left(n - n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)} \leq N^{-\frac{n}{8k^2}}, \\ N^{\frac{n}{4k^4}} \cdot N^{-\frac{n}{8k^2}} &\leq N^{-\frac{n}{9k^2}}, \\ |S(m)| &\ll N^{-\frac{n}{9k^2}} \|V\|^2 \log N. \end{aligned} \quad (53)$$

8. Оценивая при $0 < |m| \leq m_1$ коэффициенты $g(m)$ ряда Фурье функции $\psi(x)$ величиной $1/\pi|m|$, из (47) и (53) находим асимптотическую формулу для K_1 :

$$\begin{aligned} K_1 &= (b_1 - a_1) \|V\|^2 + \theta_1 c_8 \|V\|^2 N^{-\frac{n}{9k^2}} \log N + \theta_1 \|V\|^2 X^{-3} \\ &= (b_1 - a_1) \|V\|^2 + \theta_2 \|V\|^2 N^{-\frac{n}{10k^2}}. \end{aligned}$$

9. Теперь применим лемму В из [3, с. 16]. Полагая в ней $r = 2[\log X]$, $\Delta = N^{-\frac{n}{k^2}}$, $\delta_s = \{\alpha \exp([\log^c z] \log z)\}$, $s = 1, 2, \dots, \|V\|^2$, и учитывая асимптотическую формулу для $K_1 = K_1(X; a_1, b_1)$, в силу п. а) этой леммы получаем

$$\begin{aligned} K &= K(X; a, b) = (b - a) \|V\|^2 + O(\|V\|^2 N^{-\frac{n}{10k^2}}) + O(\|V\|^2 N^{-\frac{n}{k^2}}) \\ &= (b - a) \|V\|^2 + O(\|V\|^2 N^{-\frac{n}{10k^2}}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любых a и b , $0 \leq a < b \leq 1$,

$$b - a \gg N^{-\frac{n}{10k^2}} = \exp(-c_1 \log^{1-c} X),$$

для K выполняется нижняя оценка:

$$K \gg (b - a) \|V\|^2.$$

Как уже отмечалось выше, количество решений уравнения $xy = z$, $x \in V$, $y \in V$, не превосходит 2^k . Поэтому количество натуральных чисел z , не превосходящих X и таких, что

$$a \leq \{\alpha \exp([\log^c z] \log z)\} < b,$$

не меньше, чем

$$\begin{aligned} c_8 2^{-k} (b-a) \|V\|^2 &\geq c_9 2^{-10n} N^{-\frac{n}{10k^2}} \left(\frac{8k \log N}{n}\right)^{-2k} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{k(k-1)} N^{2-2\left(1-\frac{1}{n}\right)^k} \\ &\geq X \exp(-c_{10}(\log^{1-c} X + \log^c X \log \log X)). \end{aligned}$$

В частности, отсюда получаем, что при любом вещественном числе ξ количество решений в натуральных числах z системы неравенств $z \leq X$,

$$\|\xi - f(z)\| \leq \exp(-c_1 \log^{1-c} X),$$

не меньше, чем

$$X \exp(-c_{10}(\log^{1-c} X + \log^c X \log \log X)),$$

и, следовательно,

$$\min_{z \leq X} \|\xi - f(z)\| \leq \exp(-c_1 \log^{1-c} X).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы остается в силе, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными.

Список литературы

1. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения // Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 241–255.
2. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.
3. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
4. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of Diophantine approximation // Internat. Congress of Math. Cambridge. 1912. V. 1. P. 223–229.
5. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352.
6. Виноградов И. М. Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена // Изв. АН СССР. 6 серия. 1927. Т. 21. С. 567–578.
7. Виноградов И. М. О приближениях посредством рациональных дробей, имеющих знаменателем точную степень // ДАН СССР. 1935. Т. 2. С. 1–5.
8. Виноградов И. М. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
9. Карацуба А. А. Тригонометрические суммы и их применения // Тр. МКМ. Ванкувер. 1975. Т. 1. С. 365–368.
10. Карацуба А. А. О некоторых арифметических задачах с числами, имеющими малые простые делители // Acta Arith. 1975. Т. 27. С. 489–492.
11. Карацуба А. А. О функции $G(n)$ в проблеме Варинга // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 5. С. 935–947.
12. Карацуба А. А. Об одном диофантовом неравенстве // Acta Arith. 1989. Т. LIII. С. 309–324.