Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, Обоснование метода квазинормальных форм для уравнения Хатчинсона с малым коэффициентом диффузии, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 111–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:11:30

УДК 517.926

Ю. С. Колесов

**Обоснование метода квазинормальных
форм для уравнения Хатчинсона
с малым коэффициентом диффузии**

В силу трудоемкости доказательства ограничиваемся рассмотрением конкретной краевой задачи, указанной в названии статьи. Однако практически без изменений проходят построения и в том случае, когда имеем дело с достаточно произвольной сингулярно возмущенной системой типа реакция–диффузия с временными запаздываниями в обыкновенной части.

Библиография: 12 наименований.

Важнейший вопрос математической экологии – описание механизма десинхронизации пространственно однородных колебаний в однородных средах при учете миграционного фактора. В работе [1] предложен метод квазинормальных форм для решения задач такого типа, что привело к проблеме его обоснования, а также к вопросу о границе его применимости. Этапной на этом пути явилась статья [2], в которой дано обоснование двух теорем, выявляющих связь между стационарными режимами определенной сложности квазинормальной формы и исходной сингулярно возмущенной системой типа реакция–диффузия (ее несколько расширенный вариант включен в монографию [3]). Однако в [2] с целью максимального упрощения изложения принято допущение о нерезонансности в подходящем смысле собственных значений, лежащих в левой комплексной полуплоскости, матрицы линейного приближения к обыкновенной части рассматриваемой системы реакция–диффузия. Но если обыкновенная часть такой системы содержит временные запаздывания, теряет содержательность упомянутое дополнительное ограничение.

Со временем стало ясно, что задержка в публикации развернутого доказательства теоремы из [1] тормозит исследования по выявлению тонких особенностей механизма возникновения пространственно неоднородных колебаний в ряде математических моделей взаимодействующих популяций. Главным образом по этой причине автор посчитал целесообразным написать данную статью.

§ 1. Постановка проблемы и формулировка результата

Давно замечено, что резко меняется с течением времени численность массовых видов млекопитающих и рыб [4]. Для теоретического объяснения этого феномена

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-00549) и Министерства общего и профессионального образования России.

Хатчинсон в 1948 г. предложил уравнение [5]

$$\dot{N} = r_0 \left[1 - \frac{N(t - h_0)}{K_0} \right] N, \quad (1)$$

где N – численность популяции в текущий момент времени, h_0 – средний возраст половозрелых самок, r_0 – мальтузианский коэффициент линейного роста, параметр K_0 – средний размер популяции, называемый также *емкостью* ареала обитания. При $r_0 h_0 > \pi/2$ аттрактором положительных решений уравнения (1) является цикл, который ответвляется от состояния равновесия $N = K_0$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа.

Отметим также следующее: с помощью уравнения (1) моделируется ситуация, когда ареал обитания однороден, а миграционный фактор столь значителен, что происходит полное перемешивание. Сохраняя допущение об однородности ареала обитания, предположим, что мал миграционный фактор. В этом случае уравнение (1) заменяется краевой задачей [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \Delta u - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) u_{t-1} (1 + u), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (3)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $u_{t-1} = u(t-1, x)$, x – двумерный вектор, Ω – ограниченная односвязная плоская область с достаточно гладкой границей $\partial \Omega$, ν – направление внешней нормали в произвольной точке $\partial \Omega$. Граничное условие (3) означает, что отсутствует миграция из ареала Ω .

Остановимся на связи уравнений (1) и (2). Во-первых, при составлении уравнения (2) введена переменная

$$u = \frac{N}{K_0} - 1,$$

а за единицу времени выбрана величина h_0 . Во-вторых, принято, что

$$r_0 h_0 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

а значит, краевая задача (2), (3) имеет близкий к гармоническому однородный цикл с амплитудой порядка $\varepsilon^{1/2}$. Наконец, в-третьих, коэффициент подвижности взят в виде εD , так как ясно, что при его подходящем увеличении не может терять устойчивость за счет пространственных возмущений упомянутый выше однородный цикл краевой задачи (2), (3).

Обозначим через $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$, где $0 < \alpha < 1$, пространство непрерывных при $-1 \leq t \leq 0$ и $x \in \bar{\Omega}$, где $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω , функций переменных t и x , удовлетворяющих по этим переменным условиям Гёльдера с показателями $\alpha/2$ и α соответственно. Пусть оно нормировано обычным образом. Банахово пространство $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$ можно считать фазовым пространством краевой задачи (2), (3). Действительно, так как решения краевой задачи (2), (3) строятся методом шагов, то,

скажем, для нахождения $u(t, x)$ при $0 \leq t \leq 1$ в (2) следует заменить u_{t-1} на u_{0t-1} , где $u_0(t, x)$ – начальная функция, принадлежащая $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$, т.е. приходим к линейной краевой задаче, гладкость коэффициентов которой обеспечивает принадлежность решений тому же пространству $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$ при $t \geq 0$ и $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}$ при $t > 0$ (см. уже давно написанный подробный обзор [6]).

Поставим вопрос об аттракторах решений краевой задачи (2), (3) с начальными условиями из некоторого достаточно малого шара с центром в нуле фазового пространства.

Чтобы дальнейший способ действий был понятнее, отметим сначала ряд простых и хорошо известных фактов.

Начнем с объяснения ряда свойств дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)u(t-1)(1+u). \quad (4)$$

Отбрасывая в (4) нелинейность и полагая $\varepsilon = 0$, приходим к линейному уравнению

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi}{2}u(t-1). \quad (5)$$

Его характеристический квазиполином

$$P_0(\lambda) = \lambda + \frac{\pi}{2} \exp(-\lambda) \quad (6)$$

имеет простые корни $\pm i\pi/2$, а у остальных корней отрицательны действительные части. Поэтому нелинейное уравнение (4) в своем фазовом пространстве $C(-1, 0)$ непрерывных на отрезке $-1 \leq s \leq 0$ функций имеет в достаточно малой окрестности нуля гладкое двумерное инвариантное многообразие, к которому траектории $u(t+s)$ решений $u(t)$ уравнения (4) приближаются по экспоненциальному закону с не зависящим от малых значений ε показателем экспоненты. Отсюда следует, что анализ характера поведения решений при $t \rightarrow \infty$ сводится к рассмотрению некоторой двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, порождаемой фазовым потоком траекторий на инвариантном интегральном многообразии.

В статье [7] предложен алгоритм построения нормальной формы Пуанкаре–Дюлака–Крылова–Боголюбова–Митропольского на интегральном многообразии для широкого класса уравнений с запаздыванием в предположении, что в окрестности мнимой оси находится произвольное число корней характеристического квазиполинома линеаризованного в нуле уравнения. Нам удобно упростить его в двух направлениях, опираясь на следующие факты.

Во-первых, выявление грубых аттракторов связано не со всей нормальной формой, а только с ее некоторой частью, которую уместно назвать *главной*.

Во-вторых, в интересующем нас вырождении аттракторы нормальной формы расположены на расстоянии порядка $\varepsilon^{1/2}$ от нуля фазового пространства.

В связи со сказанным главную часть нормальной формы уравнения (4) на двумерном интегральном многообразии целесообразно строить следующим образом. Ищем решения уравнения (4) в виде асимптотического ряда

$$u = \varepsilon^{1/2}u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{3/2}u_2 + \dots, \quad (7)$$

где

$$u_0 = \xi(\tau) \exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \text{к.с.}, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (8)$$

а $u_1, u_2, \dots$ – гармонические по t функции с зависящими от медленного времени τ коэффициентами. В правой части (8) обозначение к.с. – обычное сокращение для комплексно-сопряженной величины. Подставляя выражение (7) в уравнение (4) и приравнявая коэффициенты при степенях ε , с учетом (8) приходим к линейному неоднородному уравнению вида

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{\pi}{2}u_1(t-1) + f(t, \tau), \quad (9)$$

где f – некоторая линейная комбинация вторых гармоник. В том же виде однозначно строится u_1 . После приравнявания коэффициентов при степенях $\varepsilon^{3/2}$ для нахождения u_2 получим по структуре аналогичное (9) уравнение, в котором, однако, теперь неоднородность – сумма первых и третьих гармоник. Оно разрешимо в классе тригонометрических многочленов в том и только том случае, если равны нулю коэффициенты при первых гармониках, что приводит к главной части нормальной формы

$$\dot{\xi} = \frac{i}{P'_0\left(i\frac{\pi}{2}\right)}\xi + d\xi|\xi|^2, \quad (10)$$

где дифференцирование идет по τ , а ляпуновская величина d задается формулой

$$d = \frac{\pi(1-3i)}{10P'_0\left(i\frac{\pi}{2}\right)}, \quad P'_0\left(i\frac{\pi}{2}\right) = 1 + i\frac{\pi}{2}.$$

Формально уравнение (10) дополняется комплексно-сопряженным уравнением для $\bar{\xi}$.

Для упрощения терминологии уравнение (10) удобно назвать *нормальной формой* дифференциально-разностного уравнения (4). Очевидно, уравнение (10) имеет орбитально экспоненциально устойчивый автомодельный цикл

$$\xi_0(\tau) = \sqrt{\frac{10}{3\pi-2}} \exp\left(-\frac{2i}{3\pi-2}\tau\right), \quad (11)$$

которому соответствует цикл уравнения (4) с тем же свойством устойчивости. Одна из наших проблем – построение теории, позволяющей объяснить механизм его десинхронизации, связанный с подходящим уменьшением параметра D .

Вернемся к краевой задаче (2), (3). Если в ней положить $\varepsilon = 0$ и отбросить нелинейность, приходим к уравнению (5), поэтому находимся в окрестности резонанса 1 : 1 бесконечного порядка. Однако данное обстоятельство, что впервые было отмечено в [1], не препятствует возможности применения к этой задаче описанного выше формализма построения нормальной формы. Единственное видоизменение, связанное с его реализацией, таково: в формуле (8) следует считать ξ зависящим

не только от τ , но и от пространственной переменной x . Тем самым вместо (10) приходим к краевой задаче

$$P'_0\left(i\frac{\pi}{2}\right)\dot{\xi} = D\Delta\xi + i\xi + \frac{\pi(1-3i)}{10}\xi|\xi|^2, \quad (12)$$

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (13)$$

Она, как и уравнение (10), дополняется комплексно-сопряженной краевой задачей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть квазинормальная форма (12), (13) имеет грубый автомодельный цикл

$$\xi_0(\tau, x) = \xi_0(x) \exp(i\alpha_0\tau), \quad (14)$$

где α_0 – вещественное число, а ξ_0 – некоторая гладкая функция. В этом случае найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ исходная краевая задача (2), (3) имеет грубый цикл с тем же свойством устойчивости, асимптотика которого на промежутке времени порядка ε^{-1} с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ получается путем подстановки (14) в аналогичное (7) выражение.

В [2] введено также понятие грубого автомодельного цикла с T_0 -периодически меняющейся амплитудой, которому в исходной краевой задаче соответствует двумерный тор. Аналогичное утверждение справедливо и для рассматриваемой нами краевой задачи (2), (3). Однако благодаря развитой в [2] технике обоснование подобного утверждения носит технический характер.

§ 2. Доказательство предложения для краевой задачи без временного запаздывания в обыкновенной части

2.1. Постановка вопроса и формулировка теоремы. Доказательство нашего основного предложения будет восприниматься проще, если сначала обратимся к стандартной системе типа реакция–диффузия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D\Delta u + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u), \quad (15)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (16)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$; D теперь не константа, а такая матрица, все собственные значения которой лежат справа от мнимой оси; гладкое нелинейное отображение F имеет в нуле высший порядок малости; матрица A_0 имеет простые собственные значения $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, а ее остальной спектр лежит в открытой левой полуплоскости комплексной плоскости.

Сформулируем еще одно ограничение (в [1] оно названо *условием отсутствия взрывной диффузионной неустойчивости*) на параметры уравнения (15).

Считаем, что при всех $z > 0$ собственные значения матрицы $A_0 - zD$ лежат в левой открытой комплексной полуплоскости, причем при малых z близкие к $\pm i\omega_0$ ее собственные значения общим образом отходят от мнимой оси.

Пусть

$$A_0 a = i\omega_0 a, \quad A_0^* b = -i\omega_0 b, \quad (a, b) = 1. \quad (17)$$

Тогда последнее из предполагаемых выше ограничений эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re}(Da, b) > 0. \quad (18)$$

Отметим, что при нарушении условия отсутствия взрывной диффузионной неустойчивости перестает быть локальной проблема построения устойчивых автоколебаний краевой задачи (15), (16): на высоких модах (собственных функциях оператора Лапласа с номерами порядка ε^{-1}) экспоненциально растут (с показателем экспоненты порядка единицы) решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \Delta u + A_0 u + \varepsilon A_1 u$$

при граничном условии (16).

К краевой задаче (15), (16) применим описанный выше способ построения квазинормальной формы. Приходим к параболическому уравнению

$$\dot{\xi} = (Da, b)\Delta\xi + (A_1 a, b)\xi + d\xi|\xi|^2 \quad (19)$$

при граничном условии (13). В правой части (19) d – первая ляпуновская величина обыкновенного уравнения в $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{du}{dt} = A_0 u + F(u).$$

Напомним, что краевая задача (19), (13) дополняется краевой задачей для $\bar{\xi}$ с комплексно-сопряженными коэффициентами.

ТЕОРЕМА. Пусть квазинормальная форма (19), (13) имеет грубый авто-модельный цикл, т.е. цикл вида (14). Пусть выполнено сформулированное выше условие отсутствия взрывной диффузионной неустойчивости. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ краевая задача (15), (16) имеет грубый цикл с тем же свойством устойчивости, асимптотика которого на промежутке времени порядка ε^{-1} с точностью до величин порядка $\varepsilon^{3/2}$ в метрике $C^{2+\alpha}$ получается путем учета (14) в подобном (7) выражении.

В последующих пунктах этого параграфа приведем такое доказательство теоремы, которое базируется на самых общих свойствах краевой задачи (15), (16). Это обстоятельство позволит при проведении громоздкого обоснования нашего предложения, т.е. при рассмотрении краевой задачи (2), (3), избежать общих мест, сосредоточившись на трудностях, обусловленных бесконечномерностью фазового пространства обыкновенной части уравнения (2), получающейся при $D = 0$.

Отметим, что сформулированный результат является новым в данной тематике: в [2] аналогичное утверждение доказано при дополнительном ограничении

$$\lambda_k - \lambda_j \neq i\omega_0, \quad k, j = 1, \dots, n-2,$$

где λ_s – собственные значения матрицы A_0 с отрицательными действительными частями.

2.2. Общие свойства системы в вариациях на автомодельном цикле.

Линеаризуя квазинормальную форму (19), (13) на ее автомодельном цикле (14), приходим к системе

$$\dot{\eta}_1 = (Da, b)\Delta\eta_1 + (A_1a, b)\eta_1 + d[2|\xi_0(\tau, x)|^2\eta_1 + \xi_0^2(\tau, x)\eta_2], \quad (20)$$

$$\dot{\eta}_2 = (D\bar{a}, \bar{b})\Delta\eta_2 + (A_1\bar{a}, \bar{b})\eta_2 + \bar{d}[\bar{\xi}_0^2(\tau, x)\eta_1 + 2|\xi_0(\tau, x)|^2\eta_2], \quad (21)$$

дополненной условиями непроницаемости на границе $\partial\Omega$ области Ω . Выполняя в (20), (21) замены

$$\eta_1 \rightarrow \eta_1 \exp(i\alpha_0\tau), \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \exp(-i\alpha_0\tau),$$

получаем постоянную по τ систему

$$\dot{\eta}_1 = (Da, b)\Delta\eta_1 + d_1(x)\eta_1 + d_2(x)\eta_2, \quad (22)$$

$$\dot{\eta}_2 = (D\bar{a}, \bar{b})\Delta\eta_2 + \bar{d}_2(x)\eta_1 + \bar{d}_1(x)\eta_2, \quad (23)$$

где

$$d_1(x) = (A_1a, b) - i\alpha_0 + 2d|\xi_0(x)|^2, \quad d_2(x) = d\xi_0^2(x). \quad (24)$$

Положим

$$L_0 = \begin{pmatrix} (Da, b) & 0 \\ 0 & (D\bar{a}, \bar{b}) \end{pmatrix} \Delta + \Lambda_0(x), \quad (25)$$

где элементами первой строки матрицы Λ_0 являются функции (24), а второй – функции $\bar{d}_2, \bar{d}_1$. По построению оператор L_0 , эллиптичность которого обеспечивает неравенство (18), аннулируется на вектор функции с координатами $i\xi_0(x), -i\bar{\xi}_0(x)$.

Напомним, что автомодельный цикл (14) квазинормальной формы (19), (13) называется *грубым*, если не равны нулю действительные части ненулевых точек спектра оператора (25), а нулевое собственное число является простым. При этом, если у него имеются собственные значения с положительными действительными частями, цикл называется *дихотомичным*, в противном случае – *орбитально экспоненциально устойчивым*.

Чтобы объяснить фундаментальность свойств системы (22), (23) для доказательства теоремы, сначала разберемся со свойствами обыкновенной части уравнения в вариациях исходной краевой задачи на его приближенном периодическом по t решении.

2.3. Разделение критических и некритических переменных в обыкновенной части, линеаризованной на приближенном цикле краевой задачи. Обозначим через $u(t, x, \varepsilon)$ приближенное периодическое решение краевой задачи (19), (13), о котором идет речь в формулировке теоремы. В линеаризованной на нем краевой задаче удобно выполнить нормировку времени

$$\left(1 + \varepsilon \frac{\alpha_0}{\omega_0}\right)t \rightarrow t, \quad (26)$$

чтобы избежать зависимости периода от ε . Сразу же отметим (это прояснится позднее), что в линеаризованной краевой задаче достаточно удержать только малые слагаемые порядка $\varepsilon^{1/2}$ и ε .

Важное место в анализе линеаризованной краевой задачи занимает выявление свойств ее обыкновенной части

$$\frac{dh}{dt} = A(t, x, \varepsilon)h, \quad (27)$$

где

$$A(t, x, \varepsilon) = A_0 + \varepsilon^{1/2}A_1(t, x) + \varepsilon A_2(t, x). \quad (28)$$

Отметим, что по построению $\frac{2\pi}{\omega_0}$ -периодические по t матрицы A_1 и A_2 гладко зависят от переменной x , которая пока считается параметром.

Выполним в уравнении (27) замену

$$h \rightarrow h \exp(-\gamma_0 t), \quad (29)$$

где положительная постоянная γ_0 такова, что одинаково количество собственных значений с отрицательными действительными частями у матриц A_0 и $A_0 + \gamma_0 I$. Из (28) следует, что при любых $x \in \bar{\Omega}$ и при достаточно малых значениях ε для уравнения в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{dh}{dt} = [\gamma_0 I + A(t, x, \varepsilon)]h \quad (30)$$

имеет место экспоненциальная дихотомия решений. Именно, оно имеет двумерное подпространство экспоненциально растущих решений и $(n - 2)$ -мерное подпространство экспоненциально затухающих. Через $P_-(t, x, \varepsilon)$ и $P_+(t, x, \varepsilon)$, где $P_- + P_+ = I$, обозначим связанные с этим понятием $\frac{2\pi}{\omega_0}$ -периодические по t проекторы в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что решения с начальными условиями из $P_-(t_0, x, \varepsilon)\mathbb{R}^n$, задаваемыми в момент времени t_0 , при $t > t_0$ принадлежат $P_-(t, x, \varepsilon)\mathbb{R}^n$ и экспоненциально растут при $t \rightarrow \infty$, а решения с начальными условиями из $P_+(t_0, x, \varepsilon)\mathbb{R}^n$ экспоненциально затухают. Подчеркнем, что эти проекторы гладко зависят от t , x и $\varepsilon^{1/2}$.

Из способа выбора постоянной γ_0 в замене (29) следует, что для интересующего нас уравнения (27) проекторы P_- и P_+ выполняют несколько иную роль: решения с начальными условиями из $P_+\mathbb{R}^n$ по-прежнему экспоненциально затухают, а в силу (28) стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ характеристические показатели решений с начальными условиями из двумерного подпространства $P_-\mathbb{R}^n$.

Введем критические и некритические переменные

$$h^1 = P_-(t, x, \varepsilon)h, \quad h^2 = P_+(t, x, \varepsilon)h. \quad (31)$$

В силу равенств [3]

$$\frac{dP_{\pm}}{dt} = A(t, x, \varepsilon)P_{\pm}(t, x, \varepsilon) - P_{\pm}(t, x, \varepsilon)A(t, x, \varepsilon) \quad (32)$$

уравнение (27) в переменных (31) записывается в виде системы

$$\frac{dh^1}{dt} = A(t, x, \varepsilon)h^1, \quad \frac{dh^2}{dt} = A(t, x, \varepsilon)h^2, \quad (33)$$

в которой разделены критические и некритические переменные. Однако основанный на (31) и (32) способ разделения этих переменных приводит к операторной форме записи уравнения (27) в виде системы (33). Много более проясняющим является “координатный” подход к рассматриваемой проблеме.

Применим к уравнению (37) изложенный в [3] алгоритм выделения критических переменных. Для этого введем в рассмотрение $\frac{2\pi}{\omega_0}$ -периодическую матрицу-строку

$$V_0(t) = [a \exp(i\omega_0 t), \bar{a} \exp(-i\omega_0 t)] \quad (34)$$

и найдем матричное решение уравнения (27) в виде

$$V(t, x, \varepsilon) \exp[(\varepsilon \Lambda_0(x) + \varepsilon^2 \Lambda_1(x) + \dots)t], \quad (35)$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots$ – подлежащие определению двумерные квадратные матрицы, а

$$V = V_0(t) + \varepsilon^{1/2} V_1(t, x) + \varepsilon V_2(t, x) + \dots \quad (36)$$

Отметим, что элементы матриц $V_1, V_2, \dots$ предполагаются тригонометрическими по t . Подставляя (35) в уравнение (27) и приравнявая коэффициенты при степенях $\varepsilon^{1/2}$, в силу (34) и свойств матрицы A_1 из (28) приходим к линейному уравнению, разрешимому в классе тригонометрических функций. Из способа же составления квазинормальной формы вытекает, что уравнение относительно V_2 разрешимо в этом классе в том и только том случае, если матрица Λ_0 совпадает с фигурирующей в правой части выражения (25) матрицей (по этому поводу см. также соответствующее место в [3]). Уравнение же для нахождения V_3 снова получим разрешимым в классе тригонометрических функций.

Пусть матрица-строка V вычислена с точностью до ε^2 . В статье [3] отмечено, что подсчитанную часть этой матрицы можно так возмутить слагаемыми порядка ε^2 , что ее столбцы будут доставлять комплексно-сопряженный $\frac{2\pi}{\omega_0}$ -периодический по t базис в $P_- \mathbb{R}^n$

$$v(t, x, \varepsilon), \quad \bar{v}(t, x, \varepsilon) \quad (37)$$

с гладкой зависимостью от t, x и $\varepsilon^{1/2}$.

Применяя аналогичные рассуждения к присоединенному к (27) уравнению, строим биортогональные к (37) комплексно-сопряженные $\frac{2\pi}{\omega_0}$ -периодические по t векторы

$$w(t, x, \varepsilon), \quad \bar{w}(t, x, \varepsilon), \quad (38)$$

служащие базисными в аналогичном $P_- \mathbb{R}^n$ двумерном подпространстве $\mathbb{R}^n$ присоединенного уравнения.

Итак, получено аналитическое описание проектора P_- : согласно (37) и (38) имеем

$$P_-(t, x, \varepsilon)h = zv(t, x, \varepsilon) + \bar{z}\bar{v}(t, x, \varepsilon), \quad (39)$$

$$z = (h, w), \quad \bar{z} = (h, \bar{w}). \quad (40)$$

Фиксируем произвольно полный набор линейно независимых векторов $a_1, \dots, a_{n-2}$ из корневого подпространства матрицы A_0 , отвечающего ее собственным значениям с отрицательными действительными частями. Затем в уравнении (27) при помощи равенства

$$h = zv + \bar{z}\bar{v} + z_1P_+a_1 + z_{n-2}P_+a_{n-2} \quad (41)$$

перейдем к комплексно-сопряженным переменным $z, \bar{z}$ и вещественным переменным $z_1, \dots, z_{n-2}$. Приходим к декартовой (и более детализированной) реализации системы (33)

$$\frac{dh^1}{dt} = \varepsilon\Lambda_0(x)h^1 + \varepsilon^2\Lambda_1(x, \varepsilon)h^1, \quad (42)$$

$$\frac{dh^2}{dt} = B_0h^2 + \varepsilon^{1/2}B_1(t, x, \varepsilon)h^2. \quad (43)$$

Здесь B_0 – матрица линейного оператора A_0 , записанного в матричном виде с использованием базиса $a_1, \dots, a_{n-2}$, действующего в упоминавшемся выше корневом подпространстве, $\frac{2\pi}{\omega_0}$ -периодические по t матрицы Λ_1 и B_1 гладко зависят от t, x и $\varepsilon^{1/2}$, а за прежними по смыслу переменными обозначения сохранены. Основное преимущество, которое имеем по сравнению с (33), – в правых частях (42) и (43) выделены главные слагаемые по порядку относительного малого параметра ε .

Заканчивая рассмотрение этого вопроса, отметим, что в соответствии с (39) и (40) при $\varepsilon = 0$ имеем

$$P_-^0(t)h = (h, b)a \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}, \quad (44)$$

где по сравнению с (17) вектор b более специализирован: дополнительно считаем его выбранным так, что $(\bar{a}, b) = 0$.

Подведем итог проделанным построениям.

ЛЕММА 1. *Если в уравнении (27) выполнить замену (41), приходим к системе (42), (43) с разделенными критическими и некритическими переменными.*

2.4. Привлечение галеркинских аппроксимаций для частичного разделения критических и некритических переменных при учете диффузионного слагаемого. В линеаризованном на приближенном цикле уравнении

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \varepsilon D\Delta h + A(t, x, \varepsilon)h \quad (45)$$

выполним замену (41). Согласно лемме 1 получаем систему

$$\frac{\partial h^1}{\partial t} = \varepsilon D_{11}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta h^2 + \varepsilon \Lambda_0(x) h^1, \quad (46)$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \varepsilon D_{21}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{22}(t) \Delta h^2 + B h^2, \quad (47)$$

где $B = B_0 + \varepsilon^{1/2} B_1(t, x, \varepsilon)$, а матричные коэффициенты диффузии соответственно равны:

$$\begin{aligned} D_{11}(t) &= \begin{pmatrix} (Da, b) & (D\bar{a}, b) \exp(-2i\omega_0 t) \\ (Da, \bar{b}) \exp(2i\omega_0 t) & (D\bar{a}, \bar{b}) \end{pmatrix}, \\ D_{12}(t) &= \begin{pmatrix} (Da_1, b) \exp(-i\omega_0 t) & \dots & (Da_{n-2}, b) \exp(-i\omega_0 t) \\ (Da_1, \bar{b}) \exp(i\omega_0 t) & \dots & (Da_{n-2}, \bar{b}) \exp(i\omega_0 t) \end{pmatrix}, \\ D_{21}(t) &= \begin{pmatrix} (Da, b_1) \exp(i\omega_0 t) & (D\bar{a}, b_1) \exp(-i\omega_0 t) \\ \dots & \dots \\ (Da, b_{n-2}) \exp(i\omega_0 t) & (D\bar{a}, b_{n-2}) \exp(-i\omega_0 t) \end{pmatrix}, \\ D_{22} &= \begin{pmatrix} (Da_1, b_1) & \dots & (Da_{n-2}, b_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (Da_1, b_{n-2}) & \dots & (Da_{n-2}, b_{n-2}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сделаем два замечания, поясняющие способ получения системы (46), (47). Во-первых, при ее составлении учтены только слагаемые порядка $\varepsilon^{1/2}$ и ε . Во-вторых, векторы $b_1, \dots, b_{n-2}$, фигурирующие в записи матричных коэффициентов диффузии, выбраны из корневого подпространства матрицы A_0^* , отвечающего ее собственным значениям с отрицательными действительными частями, так, что образуют с $a_1, \dots, a_{n-2}$ биортогональную систему.

Обращаем внимание на то, что в системе (46), (47) критические и некритические переменные h^1 и h^2 не разделены. Для нас будет достаточно того, что удастся добиться их определенного частичного разделения. Реализацию этой общей идеи свяжем с подходящими галеркинскими аппроксимациями переменных h^1 и h^2 .

Обозначим через $m_0 = m_0(\varepsilon)$ наибольшее из таких целых m , что

$$m \leq \frac{M}{\varepsilon^{1/2}}, \quad (48)$$

где положительной постоянной величиной M распорядимся в последующем.

Каждую из переменных h^1 и h^2 системы (46), (47) расцепим на две. Через h_Γ^1 обозначим проекцию h^1 на первые m_0 собственных функций оператора Лапласа при граничных условиях непроницаемости. Обозначение h_{oc}^1 используем для той части h^1 , которая ортогональна (в смысле скалярного произведения в L_2) всем указанным выше собственным функциям. Аналогичный смысл придадим обозначениям h_Γ^2, h_{oc}^2 .

ЛЕММА 2. После выполнения некоторых стандартных замен во введенных переменных система (46), (47) с точностью до слагаемых высшего порядка малости по ε допускает следующее представление:

$$\frac{dh_\Gamma^1}{dt} = \varepsilon D_{11} \Delta_\Gamma h_\Gamma^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta_\Gamma h_\Gamma^2 + \varepsilon \Lambda_{11} h_\Gamma^1 + \varepsilon \Lambda_{12} h_{oc}^1, \quad (49)$$

$$\frac{dh_\Gamma^2}{dt} = \varepsilon D_{22} \Delta_\Gamma h_\Gamma^2 + B_0 h_\Gamma^2 + \varepsilon^{1/2} B_{11} h_\Gamma^1 + \varepsilon^{1/2} B_{12} h_{oc}^2, \quad (50)$$

$$\frac{\partial h_{oc}^1}{\partial t} = \varepsilon D_{11}(t) \Delta h_{oc}^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta h_{oc}^2 + \varepsilon \Lambda_{21} h_\Gamma^1 + \varepsilon \Lambda_{22} h_{oc}^1, \quad (51)$$

$$\frac{\partial h_{oc}^2}{\partial t} = \varepsilon D_{21}(t) \Delta h_{oc}^1 + \varepsilon D_{22} \Delta h_{oc}^2 + B_0 h_{oc}^2 + \varepsilon^{1/2} B_{21} h_\Gamma^2 + \varepsilon^{1/2} B_{22} h_{oc}^2. \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО элементарно, а в пояснениях нуждаются лишь использованные обозначения.

Во-первых, в (49) и (50) h_Γ^1 и h_Γ^2 отождествлены с векторами размерности $2m_0$ и $(n-2)m_0$ соответственно. Однако при этом для простоты сохранены обозначения матричных коэффициентов диффузии, подразумевая, что на самом деле они имеют блочно-диагональный вид. Во-вторых, Δ_Γ – диагональная матрица с упоминавшимися младшими собственными значениями оператора Лапласа.

Отметим отличие уравнений (49), (50) от (46), (47).

Во-первых, в (49) теперь имеем

$$D_{11} = \begin{pmatrix} (Da, b) & 0 \\ 0 & (D\bar{a}, \bar{b}) \end{pmatrix}.$$

Во-вторых, в (50) отсутствует слагаемое $\varepsilon D_{21}(t) \Delta_\Gamma h_\Gamma^1$.

Оба эти факта связаны с тем, что попутно нами выполнены стандартные замены, обеспечивающие усреднение соответствующих матриц. Например, в (50) была выполнена замена

$$h_\Gamma^2 \rightarrow h_\Gamma^2 + \varepsilon \int_0^t D_{21}(s) ds h_\Gamma^1,$$

позволяющая устранить матрицу $D_{21}(t)$. Однако матрицу $D_{12}(t)$ в (49) таким образом усреднить не удастся: мешает фигурирующая в (50) матрица B_0 .

Для завершения доказательства остается отбросить высшие порядки малости по ε , возникающие в результате проведения усредняющих замен.

2.5. Регулярность дифференциального оператора, связанного с уравнением в вариациях. В этом пункте считаем, что в линеаризованной на приближенном цикле краевой задаче выполнена замена

$$h \rightarrow h \exp(-\varepsilon \gamma_0 t), \quad (53)$$

где положительная постоянная γ_0 выбрана так, что по сравнению с L_0 у оператора $L_0 + \gamma_0 I$ увеличивается ровно на единицу количество собственных значений с положительными действительными частями.

Для сокращения записи ниже используем обозначение $\| * \|$, подразумевая, что

$$\|f(t, x)\| = \sup_{-\infty < t < \infty} \sqrt{\int_{\Omega} (f(t, x), f(t, x)) dx}, \quad (54)$$

где f – некоторая непрерывная и ограниченная по t функция, если ее рассматривать как абстрактную функцию со значениями в векторном варианте L_2 . В случае, когда она от x не зависит, считаем, что в правой части выражения (54) используется евклидова длина вектора.

ЛЕММА 3. Пусть в уравнениях (49)–(52) выполнены замены, индуцированные заменой (53). Пусть к их правым частям добавлены соответственно произвольные гладкие функции

$$f_{\Gamma}^1(t), \quad f_{\Gamma}^2(t), \quad f_{oc}^1(t, x), \quad f_{oc}^2(t, x)$$

с конечными нормами (54). Тогда получившаяся неоднородная краевая задача имеет единственное ограниченное по t в метрике (54) решение h с компонентами

$$h_{\Gamma}^1(t), \quad h_{\Gamma}^2(t), \quad h_{oc}^1(t, x), \quad h_{oc}^2(t, x),$$

причем найдется такая универсальная положительная постоянная ν , что

$$\|h\| \leq \frac{\nu}{\varepsilon} \|f\|, \quad (55)$$

где компоненты f описаны выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО начнем с напоминания о том, что при достаточно подробной галеркинской аппроксимации оператора (25) дифференциальное выражение (49), в котором учтена замена (53) и выделены слагаемые, содержащие только h_{Γ}^1 , порождает регулярный дифференциальный оператор, причем норма обратного оператора по порядку равна ε^{-1} [2]. Отсюда и из (48) следует, что

$$\|h_{\Gamma}^1\| \leq \nu (\|h_{\Gamma}^2\| + \|h_{oc}^1\|) + \frac{\nu}{\varepsilon} \|f_{\Gamma}^1\|, \quad (56)$$

где (как и в формулировке леммы) ν – некоторая универсальная положительная постоянная. В силу (48) коэффициенты уравнения (50) близки к постоянным, а значит,

$$\|h_{\Gamma}^2\| \leq \nu \varepsilon^{1/2} \|h_{oc}^2\| + \nu \|f_{\Gamma}^2\|. \quad (57)$$

В уравнениях (51) и (52) выполним замену

$$h_{oc}^1 \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(-i\omega_0 t) & 0 \\ 0 & \exp(i\omega_0 t) \end{pmatrix} h_{oc}^1,$$

снимающую вращение, т.е. возвратимся к постоянному матричному коэффициенту диффузии перед переменной h_{oc}^1 в уравнении (51). Попутно h_{oc}^1 и h_{oc}^2 объединим в общую вектор-функцию h_{oc} (аналогичный смысл имеет вектор-функция f_{oc}). В

итоге из условия отсутствия взрывной диффузионной неустойчивости и способа выбора m_0 вытекает, что при подходящем увеличении M

$$\|h_{\text{oc}}\| \leq \frac{\nu \varepsilon^{1/2}}{M} \|h_{\Gamma}^1\| + \frac{\nu}{M} \|h_{\Gamma}^2\| + \frac{\nu}{M \varepsilon^{1/2}} \|f_{\text{oc}}\|. \quad (58)$$

В случае необходимости снова увеличивая постоянную M , из неравенств (56)–(58) выводим суммирующую оценку (55). Доказательство леммы завершено.

В статье [2] отмечено, что допущение об устойчивости взрывной диффузионной неустойчивости позволяет применить технику повышения гладкости ограниченных на всей временной оси решений линейных параболических уравнений (например, см. [8]). Сочетая ее с классическими свойствами параболических систем [9], заключаем, что неравенство (55) влечет много более сильную оценку шаудеровского типа

$$\|h\|_{C^{2+\alpha, \frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\nu}{\varepsilon} \|h\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}, \quad (59)$$

где по t соответствующая метрика работает на всей временной оси.

Из (59), в частности, следует, что не играют роли слагаемые, которыми пренебрегали ранее. Из этой оценки также вытекает, что доказательство теоремы завершается по изложенному в [2] или [3] способу. В целях полноты изложения истории вопроса отметим, что в периодическом случае проходит более простой подход, развитый в [10].

§ 3. Способ преодоления трудностей, связанных с временным запаздыванием в обыкновенной части

3.1. Доказательство леммы об отсутствии взрывной диффузионной неустойчивости. Сведем при помощи метода Фурье линеаризованную в нуле краевую задачу (2), (3) к дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{du}{dt} = -z_{\text{в}} u - \frac{\pi}{2} u(t-1), \quad (60)$$

где произвольной величины параметр $z_{\text{в}} > 0$ – волновое число, а в множителе перед слагаемым с временным запаздыванием опущен малый параметр ε . Обозначим через

$$Q_0(\lambda) = \lambda + z_{\text{в}} + \frac{\pi}{2} \exp(-\lambda) \quad (61)$$

характеристический квазиполином уравнения (60).

ЛЕММА 4. *Корни квазиполинома (61) расположены в открытой левой комплексной полуплоскости, причем обращающиеся в $\pm i\pi/2$ при $z_{\text{в}} = 0$ его корни $\lambda(z_{\text{в}})$ и $\bar{\lambda}(z_{\text{в}})$ при возрастании $z_{\text{в}}$ общим образом отходят от мнимой оси.*

Доказательство начнем с рассмотрения случая, когда мало $z_{\text{в}}$. Дифференцируя по $z_{\text{в}}$ тождество $Q_0(\lambda(z_{\text{в}})) \equiv 0$ и затем полагая $z_{\text{в}} = 0$, убеждаемся, что

$$\operatorname{Re} \lambda'(0) = -\frac{4}{\pi^2 + 4} < 0,$$

т.е. выполнено аналогичное (18) неравенство.

Итак, при малых $z_{\text{в}}$ корни квазиполинома (61) находятся в левой открытой комплексной полуплоскости. Допустим, найдется такое $\omega_* > 0$, что $Q_0(i\omega_*) = 0$ при некотором положительном $z_{\text{в}}^*$. Из этого комплексного равенства следуют два вещественных равенства

$$\omega_* = \frac{\pi}{2} \sin \omega_*, \quad z_{\text{в}}^* = -\frac{\pi}{2} \cos \omega_*. \quad (62)$$

В силу первого из них $\omega_* = \pi/2$. Отсюда и из второго равенства (62) вытекает, что $z_{\text{в}}^* = 0$. Доказательство закончено.

3.2. Разделение критических и некритических переменных в обыкновенной части линеаризованной на приближенном периодическом решении краевой задачи. Отнюдь не простое обоснование нашего основного предложения проведем, модифицируя развитую в предыдущем параграфе технику. В частности, как и там, начнем с анализа свойств обыкновенной части линеаризованной на приближенном периодическом решении краевой задачи, в которой при $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ проведем нормировку времени (26), а затем удержим только существенные слагаемые.

В общем плане опишем процедуру разделения критических и некритических переменных дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{dh}{dt} = a_1(t, x, \varepsilon)h(t - \delta) + a_2(t, x, \varepsilon)h, \quad (63)$$

где по построению

$$a_1 = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon^{1/2}a_{11}(t, x) + \varepsilon a_{12}(t, x), \quad (64)$$

$$a_2 = \varepsilon^{1/2}a_{21}(t, x) + \varepsilon a_{22}(t, x), \quad \delta = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{2\alpha_0}{\pi}}. \quad (65)$$

Фигурирующие в (64), (65) 4-периодические по t функции гладко зависят от переменных. В дальнейшем удобно считать, что $\alpha_0 \geq 0$, а значит, $\delta \leq 1$. В этом случае в качестве фазового пространства уравнения (63) можно взять уже упоминавшееся ранее пространство $C(-1, 0)$ непрерывных на отрезке $-1 \leq s \leq 0$ функций. Если же $\alpha_0 < 0$, то в качестве фазового пространства можно взять, скажем, $C(-\frac{3}{2}, 0)$.

Согласно (64), (65) 4-периодические по t коэффициенты уравнения (63) близки к постоянным. Поэтому в соответствии с построенной в [11] теорией фазовое пространство $C(-1, 0)$ расщепляется в прямую сумму двух подпространств, одно

из которых двумерно. Кроме того, характеристические показатели решений с начальными условиями из конечномерного подпространства стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а решения с начальными условиями из его дополняющего бесконечномерного подпространства при $t \rightarrow \infty$ затухают по экспоненциальному закону с некоторым не зависящим от ε показателем экспоненты. Для дальнейшего важно, что указанная дихотомия решений осуществляется при помощи 4-периодических по t проекторов $P_-(t, x, \varepsilon)$ и $P_+(t, x, \varepsilon)$, гладко зависящих от $t, x, \varepsilon^{1/2}$. При этом в двумерном подпространстве $P_-C(-1, 0)$ имеется 4-периодический по t базис с гладкой зависимостью от t, x и $\varepsilon^{1/2}$.

Перечисленными свойствами, но при $t \rightarrow -\infty$, обладает присоединенное к (63) дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -a_1(t + \delta, x, \varepsilon)y(t + \delta) - a_2(t, x, \varepsilon)y, \quad (66)$$

фазовым пространством которого является $C(0, 1)$.

Напомним, что на каждой паре фазовых траекторий уравнений (63) и (66) постоянна величина

$$\langle h, y \rangle = h(t)y(t) + \int_{-\delta}^0 a_1(t + s + \delta, x, \varepsilon)h(t + s)y(t + s + \delta) ds. \quad (67)$$

Пусть $P_-^*(t, x, \varepsilon)$ и $P_+^*(t, x, \varepsilon)$ – проекторы, связанные с упомянутой дихотомией решений уравнения (66). Ниже будет использовано то, что в соответствии с изложенной в [11] теорией в двумерном подпространстве $P_-^*C(0, 1)$ конструируется такой 4-периодический по t базис с гладкой зависимостью от переменных t, x и $\varepsilon^{1/2}$, который образует с отмеченным выше базисом из $P_-C(-1, 0)$ биортогональную систему в смысле скалярного произведения (67). Данное обстоятельство, в частности, позволяет выписать явную формулу для проектора P_- , которая структурно подобна равенствам (39), (40).

В предыдущем параграфе важную роль сыграли формулы (32). Для уравнений с запаздыванием, что показано в [11], аналогичные по смыслу формулы устроены более сложно. Чтобы их привести, удобно сначала уравнение (63) записать компактнее:

$$\frac{dh}{dt} = l(t, h(t + s)), \quad (68)$$

где $l(t, *)$ – линейный функционал в $C(-1, 0)$, явный вид которого ясен. Здесь для простоты записи его зависимость от параметров x и ε не подчеркнута. Как оказывается, на каждой непрерывно дифференцируемой функции $h(s)$ справедливо равенство

$$\frac{dP_-}{dt}h(s) = l(t + s, P_-h(s)) - P_-h'(s) + P_-E_0(s)[h'(0) - l(t, h(s))], \quad (69)$$

где дифференцирование ведем по s , а кусочно непрерывная функция $E_0(s)$ равна единице при $s = 0$ и нулю при $s < 0$. Отметим, что проектор P_- допускает такое

расширение, при котором его можно применять к кусочно непрерывным функциям. Так как $P_- + P_+ = I$, из равенства (69) выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{dt}h(s) &= l(t+s, P_+h(s)) - P_+h'(s) + h'(s) - l(t+s, h(s)) \\ &\quad - E_0(s)[h'(0) - l(t, h(s))] + P_+E_0(s)[h'(0) - l(t, h(s))]. \end{aligned} \quad (70)$$

Формулы (69), (70) позволяют продвинуться дальше. Обозначим через

$$v(t, s, x, \varepsilon), \quad \bar{v}(t, s, x, \varepsilon) \quad (71)$$

базисные элементы в $P_-C(-1, 0)$, конструируемые по описанному в [11] правилу (см. также предыдущий параграф), а обозначения

$$w(t, \sigma, x, \varepsilon), \quad \bar{w}(t, \sigma, x, \varepsilon) \quad (72)$$

используем для базисных функций в $P_-^*C(0, 1)$. Разумеется, считаем, что функции (71) и (72) образуют биортогональный базис в смысле упоминавшегося ранее скалярного произведения. Напомним также, что 4-периодические по t функции (71) и (72) гладко зависят от $\varepsilon^{1/2}$ и остальных переменных.

Через h^1 обозначим вектор с комплексно-сопряженными координатами z и $\bar{z}$, которые вычисляются по аналогичным (40) формулам с привлечением функций (71), (72) и скалярного произведения (67). Обозначим через h^2 элементы подпространства $P_+C(-1, 0)$.

ЛЕММА 5. *В указанных переменных дифференциально-разностное уравнение (63) записывается в виде эквивалентной системы*

$$\frac{dh^1}{dt} = \varepsilon \Lambda_0(x)h^1 + \varepsilon^2 \Lambda_1(x, \varepsilon)h^1, \quad (73)$$

$$\frac{dh^2}{dt} = l(t, h^2(t+s)). \quad (74)$$

Доказательство прямо вытекает из равенств (69) и (70), хотя промежуточные выкладки не относятся к числу тривиальных.

Отметим двойную нагрузку обозначения h^2 в (74): в правой части $h^2 = h^2(t+s)$, т.е. является элементом $P_+C(-1, 0)$, а в левой части $h^2 = h^2(t)$ – функция времени.

Структурно система (73), (74) подобна системе (42), (43). Однако фигурирующая в (73) зависящая от x двумерная матрица Λ_0 связана, естественно, с уравнением (12).

Итак, нами описан способ разделения критических и некритических переменных в обыкновенной части линеаризованной на приближенном цикле краевой задачи. Его изложение было достаточно конспективно, так как он уже был описан в предыдущем параграфе, правда, в более простом случае. Детальное же изложение данного способа действий содержится в [11].

3.3. Явный вид проекторов при $\varepsilon = 0$. Ниже будет полезно знать явный вид проектора $P_-^0(t)$, в который переходит проектор $P_-(t, x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$.

ЛЕММА 6. *Справедлива формула*

$$P_-^0 h = l_1(h) \exp\left[i\frac{\pi}{2}(t+s)\right] + l_2(h) \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(t+s)\right], \quad (75)$$

где функционалы l_1 и l_2 комплексно сопряжены:

$$l_1(h) = \frac{h(0) \exp(-i\frac{\pi}{2}t)}{P'_0(i\frac{\pi}{2})} - \frac{\pi}{2P'_0(i\frac{\pi}{2})} \int_{-1}^0 h(s) \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(t+s+1)\right] ds,$$

$$l_2(h) = \frac{h(0) \exp(i\frac{\pi}{2}t)}{\overline{P}'_0(i\frac{\pi}{2})} - \frac{\pi}{2\overline{P}'_0(i\frac{\pi}{2})} \int_{-1}^0 h(s) \exp\left[i\frac{\pi}{2}(t+s+1)\right] ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из материала, изложенного в предыдущем пункте.

Отметим, что в соответствии с леммой 6

$$P_-^0 E_0(s) = \frac{\exp(i\frac{\pi}{2}s)}{P'_0(i\frac{\pi}{2})} + \frac{\exp(-i\frac{\pi}{2}s)}{\overline{P}'_0(i\frac{\pi}{2})}, \quad (76)$$

$$l_1(P_-^0 E_0) = \frac{\exp(-i\frac{\pi}{2}t)}{P'_0(i\frac{\pi}{2})}, \quad l_2(P_-^0 E_0) = \frac{\exp(i\frac{\pi}{2}t)}{\overline{P}'_0(i\frac{\pi}{2})}. \quad (77)$$

3.4. Использование критических и некритических переменных в записи линеаризованной на приближенном периодическом решении краевой задачи. Нами все подготовлено, чтобы обратиться к указанной линейной краевой задаче, в которой условимся удерживать только существенные слагаемые. Последнее означает, что она состоит из уравнения (63), к правой части которого добавлено диффузионное слагаемое $\varepsilon D\Delta h$, а на границе $\partial\Omega$ области Ω поставлены условия непроницаемости. По описанному выше правилу перейдем в задаче к переменным h^1 и h^2 . При этом будем, как и в предыдущем параграфе, в диффузионных слагаемых получающейся системы сохранять только главные по ε порядки.

При выводе уравнения относительно h^1 воспользуемся формулой (69) и равенствами (77). Прямой выкладкой получаем уравнение

$$\frac{\partial h^1}{\partial t} = \varepsilon D_{11}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{12}(t) \Delta h^2 + \varepsilon \Lambda_0 h^1, \quad (78)$$

совпадающее по форме записи с уравнением (46). Однако теперь в силу (77) имеем в (78)

$$D_{11}(t) = D \begin{pmatrix} \frac{1}{P'_0(i\frac{\pi}{2})} & \frac{\exp(-i\pi t)}{P'_0(i\frac{\pi}{2})} \\ \frac{\exp(i\pi t)}{\overline{P}'_0(i\frac{\pi}{2})} & \frac{1}{\overline{P}'_0(i\frac{\pi}{2})} \end{pmatrix}, \quad D_{12}(t) = D \begin{pmatrix} \frac{\exp(-i\frac{\pi}{2}t)}{P'_0(i\frac{\pi}{2})} \\ \frac{\exp(i\frac{\pi}{2}t)}{\overline{P}'_0(i\frac{\pi}{2})} \end{pmatrix}.$$

Действуя аналогичным образом, но опираясь на формулу (70), приходим к заключению, что

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \varepsilon D_{21}(t) \Delta h^1 + \varepsilon D_{22} \Delta h^2 - \frac{\pi}{2} h^2 (t - \delta) + \varepsilon^{1/2} l_g(t, h^2(t + s), x, \varepsilon), \quad (79)$$

где явный вид функционала l_g не играет роли, а в силу равенства $P_+^0 = I - P_-^0$ и формулы (76) получим

$$D_{21}(t) = D \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4} \left(\exp\left(i \frac{\pi}{2} t\right) \exp\left(-i \frac{\pi}{2} t\right) \right), \quad D_{22} = D \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4}.$$

Подчеркнем, что при выводе уравнений (78) и (79) переменная h^1 была интерпретирована как вектор-столбец с компонентами z и $\bar{z}$.

Итак, система в вариациях на приближенном цикле преобразовалась к виду (78), (79), а последние уравнения в общем плане подобны уравнениям (46), (47).

3.5. Завершающий этап доказательства нашего предложения. На первый взгляд представляется, что для завершения доказательства остается воспользоваться изложенной в конце предыдущего параграфа техникой. Однако столь прямолинейному способу действий препятствуют два обстоятельства.

Первое из них таково. В предыдущем параграфе, обыгрывая конечномерность фазового пространства обыкновенной части, при помощи замены (41) мы добились, что составной частью уравнения (47) является уравнение

$$\frac{dh^2}{dt} = B_0 h^2,$$

где все собственные значения B_0 имеют отрицательные действительные части, что было использовано при доказательстве леммы 3 (см. вывод оценки (57)). В случае аналогичного ему уравнения (79) таковой главной частью можно попытаться считать дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{dh^2}{dt} = -\frac{\pi}{2} h^2 (t - \delta). \quad (80)$$

Однако решения последнего с начальными условиями из $P_+(t_0, x, \varepsilon)C(-1, 0)$, задаваемыми в момент времени t_0 , не обладают свойством экспоненциального затухания с некоторым универсальным положительным показателем экспоненты.

Второе затруднение связано с тем, что по построению нетривиальным образом зависит от x проектор $P_-(t, x, \varepsilon)$, а значит, возникает дополнительная сложность при использовании галеркинских аппроксимаций.

Покажем, что отмеченные две трудности взаимосвязаны, а их преодоление носит технический характер.

Выберем произвольно такую положительную 4-периодическую гладкую функцию $\gamma_{\text{вс}}(t)$ (единственное ограничение – она должна быть заметно отделенной от нуля), что для дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{dh^2}{dt} = -\frac{\pi}{2}h^2(t - \delta) + \varepsilon\gamma_{\text{вс}}(t)h^2 \quad (81)$$

имеет место экспоненциальная дихотомия решений, осуществляемая при помощи проекторов $P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon)$ и $P_+^{\text{вс}}(t, \varepsilon)$. Для дальнейшего существенно, что в соответствии с результатами из [11] проектор $P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon)$ по норме лишь на величину порядка ε отличается от $P_-^0(t)$. Важно также то, что решения уравнения (81) с начальными условиями из $P_+^{\text{вс}}(t_0, \varepsilon)C(-1, 0)$ при возрастании t затухают по экспоненциальному закону, причем показатель экспоненты можно считать не зависящим от ε .

В силу изложенного в [11] справедливо равенство

$$P_-(t, x, \varepsilon) = P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon) + \varepsilon^{1/2}Q(t, x, \varepsilon), \quad (82)$$

где норма гладкого по совокупности переменных линейного оператора Q ограничена сверху некоторой постоянной (это же справедливо и для его производных по t и x). Так как $P_-(t, x, \varepsilon)h^2 = 0$, то согласно (82)

$$P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon)h^2 + \varepsilon^{1/2}Q(t, x, \varepsilon)h^2 = 0. \quad (83)$$

Применяя к (83) проектор $P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon)$, получаем

$$P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon)h^2 + \varepsilon^{1/2}P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon)Q(t, x, \varepsilon)h^2 = 0. \quad (84)$$

В уравнении (79) выполним гладкую ляпуновскую замену

$$h_{\text{вс}}^2 = h^2 + \varepsilon^{1/2}Q(t, x, \varepsilon)h^2.$$

Так как в силу (84)

$$P_-^{\text{вс}}(t, \varepsilon)h_{\text{вс}}^2 = 0,$$

то новая переменная $h_{\text{вс}}^2$ в подходящем смысле ортогональна двум уже не зависящим от x функциям.

В уравнении, в которое трансформировалось уравнение (79), нижний индекс у переменной $h_{\text{вс}}^2$ опустим. Затем, добавляя и вычитая $\varepsilon\gamma(t)h^2$, выделим два слагаемых, которые формируют правую часть уравнения (81). Приходим к заключению, что составной частью уравнения (79) становится уравнение (81), решения которого с начальными условиями из $P_+^{\text{вс}}(t_0, \varepsilon)C(-1, 0)$, а именно такие начальные условия мы и должны рассматривать, экспоненциально затухают с не зависящим от ε показателем экспоненты. Поэтому видоизмененная указанным способом система (78), (79) по своим общим свойствам идентична системе (46), (47). Теперь уже можно воспользоваться развитой в предыдущем параграфе техникой. Доказательство предложения завершено.

Установленное предложение строго обосновывает упомянутые в [3] механизмы десинхронизации пространственно однородного цикла.

§ 4. Об одной нерешенной задаче

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \varepsilon D_1 \Delta N_1 + \frac{r_1}{1+a} [1 + a(1 - N_2) - N_1(t - h_1, x)] N_1, \quad (85)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \varepsilon D_2 \Delta N_2 + r_2 [N_1 - N_2(t - h_2, x)] N_2, \quad (86)$$

дополненную условиями непроницаемости на границе прямоугольника

$$0 \leq x_1 \leq l_1, \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \quad x = (x_1, x_2).$$

В [12] отмечено, что система (85), (86), все параметры которой положительны, моделирует взаимодействие хищника, имеющего плотность N_2 , со своей жертвой, имеющей плотность N_1 . Там же показано, что в общем случае найдется такое r_1^0 , что при $r_1 = r_1^0 + \varepsilon$ в рамках точечной модели, когда $D_1 = D_2 = 0$, происходит бифуркация Андронова–Хопфа. Поэтому при некоторой общности положения к системе (85), (86) непосредственно применима развитая выше теория, если в качестве ее фазового пространства взять подходящие соболевские пространства функций. Нерешенная же задача относится к следующему особому случаю.

Предположим, что D_1 существенно меньше D_2 . Как указано в [12], при этом ограничении и при подходящем выборе остальных параметров квазинормальной формой системы (85), (86) может служить некоторое уравнение блочного типа. При рассмотрении аналогичной краевой задачи на отрезке данное обстоятельство влечет существование у системы (85), (86) большого числа устойчивых циклов типа возбужденных мод [12]. Однако, по нашему мнению, в случае рассмотрения краевой задачи в области ситуация принципиально иная.

ГИПОТЕЗА. В окрестности указанных в [12] значениях параметров мало количество аттракторов положительных решений системы (85), (86), причем каждый из них обладает хорошо выраженной индивидуальностью.

Имеются два главных аргумента в пользу этой гипотезы. Во-первых, обычно такова динамика волновых уравнений в плоских областях. Во-вторых, что отмечалось в [12], существование большого числа устойчивых циклов не согласуется с биологическими представлениями. Другие доводы опустим – решающим фактором может служить только подробный численный анализ системы (85), (86). Согласно [12] численные эксперименты целесообразно проводить, когда

$$\begin{aligned} l_1 = l_2 = 1, \quad \varepsilon D_1 = 0.001, \quad \varepsilon D_2 = 0.02, \quad a = 0.1, \\ r_1 = 3, \quad h_1 = 0.8, \quad r_2 = 0.8, \quad h_2 = 1.9. \end{aligned}$$

Отметим, что приведенные значения параметров соответствуют взаимодействующим популяциям лисы и мышевидных.

Численное решение сформулированной задачи представляет значительный теоретический интерес. Действительно, может быть получен пример системы типа

реакция–диффузия с выраженным свойством буферности, если ее рассматривать на отрезке, и небольшим числом сложных аттракторов, если ее рассматривать в квадрате.

Представляет также интерес всесторонний теоретический анализ по выявлению динамических свойств системы (85), (86), опирающийся на наше базовое предположение.

Посвящаю данную статью 80-летию со дня рождения моего учителя М. А. Красносельского. Именно по его инициативе методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений впервые стали широко использоваться для анализа динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Список литературы

1. Колесов Ю. С. Задача паразит–хозяин // Динамика биологических популяций. Горький: Изд-во ГГУ, 1984. С. 16–29.
2. Колесов Ю. С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. №3. С. 121–136.
3. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
4. Яблоков В. А. Популяционная биология. М.: Высшая шк., 1987.
5. Hutchinson G. E. Circular causal systems in ecology // Ann. N. Y. Acad of Sci. 1948–1950. V. 50. P. 221–246.
6. Ильин А. М., Калашиников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. №3. С. 3–141.
7. Колесов Ю. С. Метод нормальных форм для систем с запаздыванием // Литовский матем. сб. 1980. Т. 20. №4. С. 73–78.
8. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 297–350.
9. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
10. Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Матем. сб. 1986. Т. 130. №4. С. 488–499.
11. Колесов Ю. С., Колесов В. С., Федик И. И. Автоколебания в системах с распределенными параметрами. Киев: Наук. думка, 1979.
12. Захаров А. А., Колесов Ю. С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник–жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1984. С. 3–15.

Поступило в редакцию
2.XII.1999