Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Сабитов, А. А. Карамова, Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 133–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 08:20:48

УДК 517.95

К. Б. Сабитов, А. А. Карамова

**Спектральные свойства решений задачи Трикоми
для уравнения смешанного типа с двумя
линиями изменения типа и их применения**

В работе найдены собственные значения и собственные функции спектральной задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа. Построены решения задачи Трикоми для уравнений с оператором Лаврентьева–Бицадзе на плоскости и в пространстве.

Библиография: 22 наименования.

Введение

Данная работа является продолжением работы [1], в которой были установлены экстремальные свойства решений задачи Трикоми для общего линейного уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и показаны их применения. Ранее задача Трикоми для модельных уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа изучалась в работах [2]–[10].

В данной работе изучены спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе и показаны их применения при построении решения задачи Трикоми.

В § 1 спектральная задача Трикоми для оператора Лаврентьева–Бицадзе сведена к новой нелокальной спектральной задаче для оператора Лапласа. В случае когда область эллиптичности является сектором с центром в начале координат, методом разделения переменных найдены собственные значения $\lambda_{n,m}$ и построены в явном виде соответствующие собственные функции спектральной задачи Трикоми в областях эллиптичности и гиперболичности. Изучен вопрос о полноте системы собственных функций в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области, а также вопрос о наличии присоединенных функций.

В § 2–4 показаны применения системы собственных функций для построения решения задачи Трикоми с нулевыми данными на характеристиках в виде суммы рядов.

Отметим, что ранее, в работах [11], [12], методом разделения переменных были построены в виде суммы рядов решения краевых задач для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе с одной линией изменения типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (грант № 22) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00934).

§ 1. Построение собственных функций и исследование на полноту

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (1.1)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, в области D , ограниченной:

1) простой кривой Жордана Γ , лежащей в первой четверти плоскости x, y с концами в точках $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$;

2) характеристиками OC_1 ($x + y = 0$) и C_1A ($x - y = 1$) уравнения (1.1) при $x > 0, y < 0$;

3) характеристиками OC_2 ($x + y = 0$) и C_2B ($y - x = 1$) при $x < 0, y > 0$;

где $C_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $O = (0, 0)$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

В области D для уравнения (1.1) поставим следующую спектральную задачу.

Задача T_λ . Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \quad (1.2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \quad (1.3)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in C_1C_2 \cup \Gamma. \quad (1.4)$$

Предварительно для уравнения (1.1) построим решения краевой задачи Дарбу в областях D_1 и D_2 .

Задача ДАРБУ. 1) Найти в области D_1 решение $u(x, y)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.5)$$

$$u(x, -x) = 0, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (1.6)$$

где $\tau_1(x)$ – заданная функция.

2) Найти в области D_2 решение $u(x, y)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad y \in [0, 1], \quad (1.7)$$

$$u(y, -y) = 0, \quad y \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (1.8)$$

где $\tau_2(y)$ – заданная функция.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Если $\tau_1(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\tau_1(x) \in L_1[0, 1]$, $\tau_1(0) = 0$, то существует единственное решение задачи (1.1), (1.5) и (1.6), которое определяется формулой

$$u(x, y) = \tau_1(x + y) + \lambda y \int_0^{x+y} \tau_1(t) \bar{J}_1 \left[\sqrt{\lambda(x + y - t)(x - y - t)} \right] dt, \quad (1.9)$$

где $\bar{J}_1(z) = J_1(z)/z$, $J_1(z)$ – функция Бесселя, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

2) Если $\tau_2(y) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\tau_2(y) \in L_1[0, 1]$, $\tau_2(0) = 0$, то существует единственное решение задачи (1.1), (1.7) и (1.8), которое определяется формулой

$$u(x, y) = \tau_2(x + y) + \lambda x \int_0^{x+y} \tau_2(t) \bar{J}_1 \left[\sqrt{\lambda(x + y - t)(y - x - t)} \right] dt. \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения 1) приведено в [13], а формула (1.10) получается из (1.9) заменой x на y , y на x в силу симметричности уравнения (1.1) и областей D_1 и D_2 относительно прямой $y = x$.

Из (1.9) имеем

$$u_y(x, 0) = \nu_1(x) = \tau_1'(x) + \lambda \int_0^x \tau(t) \bar{J}_1 [\sqrt{\lambda}(x - t)] dt, \quad 0 < x < 1,$$

или

$$u_y(x, 0) = u_x(x, 0) + \lambda \int_0^x u(t, 0) \bar{J}_1 [\sqrt{\lambda}(x - t)] dt, \quad 0 < x < 1. \quad (1.11)$$

Аналогично из (1.10) получаем

$$u_x(0, y) = u_y(0, y) + \lambda \int_0^y u(0, t) \bar{J}_1 [\sqrt{\lambda}(y - t)] dt, \quad 0 < y < 1. \quad (1.12)$$

Таким образом, задача T_λ сведена к новой нелокальной эллиптической задаче на собственные значения для оператора Лапласа в области D_0 : найти значения параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.4), (1.11) и (1.12).

В общем случае, т.е. когда кривая Γ является произвольной, не удастся пока найти решение указанной нелокальной задачи, поэтому рассмотрим случай, когда Γ – четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$. В области D_0 введем полярные координаты

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 < \varphi < \pi/2$, $0 < r < 1$. В полярных координатах (r, φ) , разделяя переменные $u(x, y) = v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (1.13)$$

$$R(0) = 0, \quad R(1) = 0, \quad (1.14)$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (1.15)$$

$$\Phi'(0)\frac{R(r)}{r} = R'(r)\Phi(0) + \lambda \int_0^r R(t)\Phi(0)\bar{J}_1[\sqrt{\lambda}(r-t)] dt, \quad 0 < r < 1, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{R(r)}{r} &= -R'(r)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \lambda \int_0^r R(t)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\bar{J}_1[\sqrt{\lambda}(r-t)] dt, \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Известно, что решением уравнения (1.13), удовлетворяющим первому условию из (1.14), является функция Бесселя

$$R(r) = J_\mu(\sqrt{\lambda}r), \quad \operatorname{Re} \mu > 0. \quad (1.18)$$

С учетом (1.18) вычислим интеграл в (1.16) по формуле 2.12.33.6 из [14]:

$$\int_0^r J_\mu(\sqrt{\lambda}r)J_1[\sqrt{\lambda}(x-t)]\frac{dt}{\sqrt{\lambda}(r-t)} = \frac{J_{\mu+1}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Тогда из (1.16), используя известную рекуррентную формулу

$$zJ'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - zJ_{\nu+1}(z),$$

получим

$$\mu\Phi(0) - \Phi'(0) = 0. \quad (1.19)$$

Аналогично, подставив функцию (1.18) в равенство (1.17), будем иметь

$$\mu\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (1.20)$$

Решая краевую задачу (1.15), (1.19), (1.20), найдем

$$\Phi_n(\varphi) = C_n(\cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi), \quad (1.21)$$

где $\mu_n = 2n - 1$, $C_n = \text{const} \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$

Далее, учитывая найденные значения μ_n и второе из условий (1.14), для функции (1.18) имеем

$$J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (1.22)$$

Из теории бесселевых функций [15, с. 530] известно, что функция Бесселя $J_\nu(z)$ при $\nu > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая через $\alpha_{n,m}$ m -й корень уравнения (1.22), получим собственные значения задачи T_λ

$$\lambda_{n,m} = \alpha_{n,m}^2, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

На основании формул (1.18), (1.21), (1.23) найдем собственные функции задачи T_λ в области D_0

$$u_{n,m}(x, y) = v_{n,m}(r, \varphi) = c_{n,m} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} r) (\cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi). \quad (1.24)$$

Для построения собственных функций в области D_1 можно воспользоваться формулой (1.9), но в силу громоздкости такого подхода воспользуемся методом, предложенным в [16]. Вводя в области D_1 новые переменные

$$\sigma = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2},$$

в уравнении (1.1) разделим переменные и построим многообразие его частных решений

$$u(x, y) = \left[k_1 \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^{\rho/2} + k_2 \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\rho/2} \right] J_\rho \left[\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)} \right], \quad (1.25)$$

где $\operatorname{Re} \rho \geq 0$, k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Из формулы (1.24) вычислим

$$\tau_{1n,m}(x) = u_{n,m}(x, 0) = c_{n,m} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} x), \quad (1.26)$$

$$\nu_{1n,m}(x) = \frac{\partial}{\partial y} u_{n,m}(x, 0) = c_{n,m} \mu_n x^{-1} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} x). \quad (1.27)$$

Если в формуле (1.25) положить $\rho = \mu_n = 2n-1$, $\lambda = \alpha_{n,m}^2$, $k_1 = 0$, $k_2 = c_{n,m}$, то получим решение задачи Коши для уравнения (1.1) в области D_1 с краевыми условиями (1.26) и (1.27).

Таким образом, система собственных функций задачи T_λ в области D_1 имеет вид

$$u_{n,m}(x, y) = c_{n,m} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n} \left[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2 - y^2)} \right]. \quad (1.28)$$

Для получения собственных функций в D_2 в формуле (1.25) заменим x на y , y на x в силу симметричности коэффициентов уравнения (1.1), в результате получим

$$u(x, y) = \left[k_3 \left(\frac{y-x}{y+x} \right)^{\rho/2} + k_4 \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{\rho/2} \right] J_\rho \left[\sqrt{\lambda(y^2 - x^2)} \right], \quad (1.29)$$

где $\operatorname{Re} \rho \geq 0$, k_3 и k_4 — произвольные постоянные.

Из (1.24) имеем

$$\tau_{2n,m}(y) = u_{n,m}(0, y) = c_{n,m}(-1)^{n-1} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}y), \quad (1.30)$$

$$\nu_{2n,m}(y) = \frac{\partial}{\partial x} u_{n,m}(0, y) = (-1)^{n-1} c_{n,m} \mu_n y^{-1} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}y). \quad (1.31)$$

Положив в (1.29) $\rho = \mu_n = 2n - 1$, $\lambda = \alpha_{n,m}^2$, $k_3 = 0$, $k_4 = (-1)^{n-1} c_{n,m}$, получим решение задачи Коши для уравнения (1.1) в области D_2 с краевыми условиями (1.30) и (1.31). Тогда система собственных функций задачи T_λ в области D_2 имеет вид

$$u_{n,m}(x, y) = (-1)^{n-1} c_{n,m} \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n} \left[\sqrt{\lambda_{n,m}(y^2 - x^2)} \right]. \quad (1.32)$$

Следовательно, объединяя формулы (1.24), (1.28) и (1.32), получим систему собственных функций задачи T_λ в области D

$$u_{n,m}(x, y) = \begin{cases} c_{n,m} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} \sqrt{x^2 + y^2}) (\cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi), & (x, y) \in D_0, \\ c_{n,m} \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} \sqrt{x^2 - y^2}), & (x, y) \in D_1, \\ (-1)^{n-1} c_{n,m} \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} \sqrt{y^2 - x^2}), & (x, y) \in D_2, \end{cases} \quad (1.33)$$

где $\mu_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $c_{n,m}$ — действительные числа.

Отметим, что система (1.33) получена в [17] другим, более сложным методом. Исследуем свойства системы (1.33).

ТЕОРЕМА 1.2. Система собственных функций (1.33) задачи T_λ полна в $L_2(D_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что в $L_2(D_0)$ существует функция $F(x, y)$ такая, что

$$\iint_{D_0} F(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy = 0 \quad (1.34)$$

для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Покажем, что $F(x, y) = 0$ почти всюду в D_0 .

В (1.34) перейдем в полярную систему координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда с учетом (1.33) получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} f(r, \varphi) J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) (\cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi) r d\varphi dr \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} f(r, \varphi) J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \left[\sin \left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right] r d\varphi dr \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 F_n(r) J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r dr, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где

$$f(r, \varphi) = F(x, y), \quad F_n(r) = \int_0^{\pi/2} f(r, \varphi) \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi.$$

Из (1.35) имеем, что для функции $F_n(r)$ все коэффициенты ряда Фурье–Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга [15] следует, что $F_n(r) \equiv 0$, $n = 1, 2, \dots$, если интеграл $\int_0^1 \sqrt{r} |F_n(r)| dr$ существует и абсолютно сходится. В самом деле, из неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{r} |F_n(r)| dr &\leq \left(\int_0^1 r dr \int_0^1 \left| \int_0^{\pi/2} f(r, \varphi) \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi \right|^2 dr \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_0^{\pi/2} \sin^2\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi} \sqrt{\int_0^1 \int_0^{\pi/2} f^2(r, \varphi) d\varphi dr} \\ &= C \|F\|_{L_2(D_0)} < +\infty, \end{aligned}$$

поэтому

$$\int_0^{\pi/2} f(r, \varphi) \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = 0 \quad (1.36)$$

для всех $n = 1, 2, \dots$ при любом $r \in (0, 1)$.

В интеграле (1.36) произведем замену $\theta = 2\varphi$. Тогда имеем

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^\pi f\left(r, \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\mu_n \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) d\theta.$$

Из результатов [18] следует, что система синусов

$$\sin\left(\mu_n \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

образует базис в $L_2(0, \pi)$. Тогда система функций $\{\sin(\mu_n \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})\}$ полна в $L_2(0, \pi)$, поэтому из (1.36) получаем, что при каждом r множество тех φ , где $f(r, \varphi) \neq 0$, имеет меру нуль. Таким образом, $f(r, \varphi) = 0$ почти всюду в D_0 . Отсюда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 1.3. Система собственных функций (1.33) задачи T_λ полна в $L_2(D_1)$ и $L_2(D_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для области D_1 , а для области D_2 доказательство аналогично. Допустим, что существует функция $F(x, y) \in L_2(D_1)$ такая, что

$$\iint_D F(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy = 0 \quad (1.37)$$

для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Покажем, что $F(x, y) = 0$ почти всюду в D_1 . Проведем в (1.37) замену переменных $2x = \xi + \eta$, $2y = \xi - \eta$. Тогда область D_1 перейдет в область $\Delta = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\}$, а интеграл (1.37) запишется в виде

$$\iint_\Delta f(\xi, \eta) v_{n,m}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (1.38)$$

где $f(\xi, \eta) = F(x, y)$, $v_{n,m}(\xi, \eta) = u_{n,m}(x, y)$.

Учитывая (1.33), преобразуем интеграл (1.38):

$$0 = \int_0^1 d\eta \int_0^\eta f(\xi, \eta) \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} \sqrt{\xi\eta}) d\xi.$$

Полагая во внутреннем интеграле $\xi = \eta t$ и меняя порядок интегрирования, затем заменяя $\eta\sqrt{t} = r$, $t = s^2$, получим

$$0 = \int_0^1 J_{\mu_n}(\alpha_{n,m} r) r dr \int_r^1 s^{\mu_n-1} f\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds.$$

Из последнего равенства имеем, что для функции

$$F_n(r) = \int_r^1 f\left(rs, \frac{r}{s}\right) s^{\mu_n-1} ds, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

все коэффициенты ряда Фурье–Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга следует, что

$$\int_r^1 f\left(rs, \frac{r}{s}\right) s^{\mu_n-1} ds = 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ при каждом $r \in [0, 1]$.

Система $\{s^{\mu_n-1}\}$ полна в $L_2[0, 1]$, значит, при каждом r множество тех s , где $f(rs, r/s) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $f(rs, r/s) = 0$ почти всюду в $D_1^* = \{(s, r) : r < s < 1, 0 < r < 1\}$ и, стало быть, в области D_1 .

ТЕОРЕМА 1.4. Система собственных функций (1.33) задачи T_λ не полна в $L_2(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области D рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} F_0(x, y), & (x, y) \in D_0, \\ F_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ F_2(x, y), & (x, y) \in D_2, \end{cases} \quad (1.39)$$

из $L_2(D)$ и интеграл

$$\begin{aligned} J &= \iint_D F(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy = \iint_{D_0} F_0(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy \\ &\quad + \iint_{D_1} F_1(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy + \iint_{D_2} F_2(x, y) u_{n,m}(x, y) dx dy \\ &= i_0 + i_1 + i_2. \end{aligned} \quad (1.40)$$

В интеграле i_0 , переходя к полярным координатам (r, φ) , получим

$$\begin{aligned} i_0 &= \sqrt{2} c_{n,m} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} f_0(r, \varphi) J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \left[\sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] r d\varphi dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r dr \int_0^\pi f_0\left(r, \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\mu_n \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) d\theta, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где $f_0(r, \varphi) = F_0(x, y)$.

Интеграл i_1 преобразуем к виду

$$i_1 = c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r dr \int_r^1 s^{\mu_n-1} f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds, \quad (1.42)$$

где $f_1(\xi, \eta) = F_1(x, y)$. Интеграл i_2 запишем в виде

$$i_2 = (-1)^{n-1} c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r dr \int_r^1 s^{\mu_n-1} f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds, \quad (1.43)$$

где $f_2(\xi, \eta) = F_2(x, y)$. Теперь, подставляя (1.41)–(1.43) в (1.40), получим

$$\begin{aligned} J &= c_{n,m} \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi f_0\left(r, \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\mu_n \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_r^1 s^{\mu_n-1} f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds + (-1)^{n-1} \int_r^1 s^{\mu_n-1} f_2\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds \right] dr. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_0\left(r, \frac{\theta}{2}\right) &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)(2k+4)} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{r^{2k+1}}{2k+1} - \frac{r^{2k+2}}{2k+2} \right) + (-1)^k \left(\frac{r^{2k+3}}{2k+3} - \frac{r^{2k+4}}{2k+4} \right) \right] h_k(\theta), \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) = -s^2(1-s), \quad f_2\left(rs, \frac{r}{s}\right) = -s^4(1-s),$$

где $\{h_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$ – система, биортогонально сопряженная к системе синусов $\{\sin[(k-1/2)\theta + \pi/4]\}_{k=1}^{\infty}$:

$$h_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos \varphi/2)^{-1}}{(\operatorname{tg} \varphi/2)^{1/2}} \sum_{k=1}^n (\sin k\varphi) B_{n-k}, \quad (1.46)$$

$$B_l = \sum_{m=0}^l C_{1/2}^{l-m} C_{1/2}^m (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

В силу результатов [18] функции $|h_k|$ равномерно ограничены по номеру, поэтому при $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ряд (1.45) равномерно сходится, и функция f_0 непрерывна в D_0 .

Подставляя функции f_0, f_1, f_2 в (1.44), меняя в первом интеграле порядок суммирования и интегрирования и учитывая определение биортогональных систем, имеем $J = 0$.

Итак, существует функция $F(x, y) \in L_2(D)$, $F(x, y) \neq 0$ в D , такая, что интеграл J равен нулю. Теорема доказана.

Изучим вопрос о наличии присоединенных функций у системы (1.33) собственных функций задачи T_λ . Для этого вернемся к задачам (1.13)–(1.15), (1.19), (1.20).

Система собственных функций краевой задачи (1.13), (1.14) $\{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)\}$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ ортогональна и образует базис как система собственных функций первой краевой задачи для уравнения Бесселя [19]. Поэтому у данной системы не может быть присоединенных функций.

Краевая задача (1.15), (1.19), (1.20) является несамосопряженной. Из определения присоединенной функции [21] следует, что присоединенная функция $F_n(\varphi)$ к собственной функции $\Phi_n(\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} F_n''(\varphi) + \mu_n^2 F_n(\varphi) &= -2\mu_n \Phi_n(\varphi), \\ F_n'(0) - \mu_n F_n(0) - \Phi_n(0) &= 0, \\ F_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu_n F_n\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Phi_n\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Учитывая, что $\Phi_n(\varphi) = C_n(\cos \mu_n \varphi + \sin \mu_n \varphi)$, $\mu_n = 2n - 1$, решим первое уравнение системы (1.47). Его общее решение задается формулой

$$F_n(\varphi) = p_1 \cos \mu_n \varphi + p_2 \sin \mu_n \varphi + C_n \varphi [\cos \mu_n \varphi - \sin \mu_n \varphi],$$

где p_1 и p_2 – некоторые постоянные. Из граничных условий системы (1.47) имеем $p_2 - p_1 = 0$, $C_n \pi - p_2 + p_1 = 0$. Отсюда следует, что задача (1.47) не имеет решения. Следовательно, задача T_λ не имеет присоединенных функций.

§ 2. Построение решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{2.1}$$

в области D , ограниченной:

- 1) четвертью окружности Γ ($x^2 + y^2 = 1$, $x, y > 0$);
 - 2) характеристиками OC_1 ($x + y = 0$) и C_1A ($x - y = 1$) уравнения (2.1) при $x > 0$, $y < 0$;
 - 3) характеристиками OC_2 ($x + y = 0$) и C_2B ($y - x = 1$) при $x < 0$, $y > 0$;
- где $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $O = (0, 0)$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ (задача T_1). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \quad (2.2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \quad (2.3)$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (2.4)$$

$$u|_{C_1 C_2} = 0, \quad (2.4')$$

где f – заданная достаточно гладкая функция.

Отметим, что доказательство единственности решения задачи T_1 проведено в работах [3], [4], [21].

Построим решение задачи Трикоми. Воспользовавшись формулой $u(x, y) = \tau_1(x + y)$ решения задачи Дарбу (1.5), (1.6) для уравнения (2.1) в области D_1 , можно получить соотношение на отрезке OA оси $y = 0$:

$$u_x(x, 0) - u_y(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (2.5)$$

Аналогично, из области D_2 получим равенство на OB оси $x = 0$:

$$u_x(0, y) - u_y(0, y) = 0, \quad y \in (0, 1). \quad (2.6)$$

Теперь решим в области D_0 следующую смешанную задачу для уравнения Лапласа: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2.2)–(2.6).

Переходя к полярным координатам (r, φ) и разделяя переменные $u(x, y) = v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\mu^2}{r^2}R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (2.7)$$

$$R(0) = 0, \quad |R(1)| < +\infty, \quad (2.8)$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (2.9)$$

$$R'(x)\Phi(0) - \frac{R(x)}{x}\Phi'(0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (2.10)$$

$$R'(y)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{R(y)}{y}\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad (2.11)$$

где $\mu \neq 0$ – некоторая постоянная.

Решением уравнения (2.7), удовлетворяющим граничным условиям (2.8), является функция

$$R(r) = r^\mu, \quad \mu > 0. \quad (2.12)$$

Подставляя функцию (2.12) в условия (2.10) и (2.11), получим

$$\mu\Phi(0) - \Phi'(0) = 0, \quad \mu\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (2.13)$$

Решая краевую задачу (2.9), (2.13), найдем

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \sin\left(\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $\mu_n = 2n - 1$, $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, функции вида

$$v_n(r, \varphi) = C_n r^{\mu_n} \sin\left[\mu_n \varphi + \frac{\pi}{4}\right]$$

удовлетворяют в области D_0 всем условиям (2.2)–(2.6), кроме (2.4).

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд по системе синусов $\{\sin[(n + \frac{1}{2})2\varphi + \frac{\pi}{4}]\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < 2\varphi < \pi$ [18]:

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)2\varphi + \frac{\pi}{4}\right], \quad (2.14)$$

где

$$f_n = \int_0^{\pi} f(\varphi/2) h_n(\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

h_n определяются по формуле (1.46). В силу [18] при $f(\varphi) \in C^{\alpha}[0, \pi/2]$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(0) = f(\pi/2) = 0$, ряд (2.14) сходится равномерно на $[0, \pi/2]$ к функции $f(\varphi)$.

Далее, будем искать решение задачи (2.1)–(2.6) в виде суммы ряда

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{2n-1} \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)2\varphi + \frac{\pi}{4}\right]. \quad (2.16)$$

При любом $r < 1$ ряд (2.16) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз. А при $r = 1$ из (2.16) получаем (2.14), т.е. и при $r = 1$ ряд (2.16) сходится равномерно к функции $f(\varphi)$.

Таким образом, сумма ряда (2.16) непрерывна в $\overline{D}_0$ и на $D_0 \cup OA \cup OB$ допускает почленное дифференцирование по r и φ любое число раз.

Из (2.16) при $\varphi = 0$ получим

$$v(r, \varphi)|_{\varphi=0} = u(x, 0) = \tau_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{2n-1}. \quad (2.17)$$

В области D_1 решение задачи T_1 определяется как решение задачи Дарбу для уравнения (2.1) с данными

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad x \in [0, 1], \quad u(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1/2],$$

где функция $\tau_1(x)$ определена формулой (2.17). Это решение имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x+y)^{2n-1}, \quad (x, y) \in D_1. \quad (2.18)$$

Поскольку $0 \leq x+y \leq 1$ в $\overline{D}_1$, то ряд (2.18) в $\overline{D}_1$ сходится равномерно и на множестве $D_1 \cup OA \cup OC_1$ допускает почленное дифференцирование по x и y любое число раз.

Аналогично определяется решение задачи T_1 в области D_2 :

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n(y+x)^{2n-1}.$$

Таким образом нами доказана

ТЕОРЕМА 2.1. Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0, \pi/2]$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(0) = f(\pi/2) = 0$, то существует единственное решение задачи T_1 , которое имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{2n-1} \sin \left[(2n-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right], & (r, \varphi) \in D_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n (x+y)^{2n-1}, & (x, y) \in D_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n (y+x)^{2n-1}, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где f_n определяются по формуле (2.15). Функция $u(x, y)$ принадлежит $C^\infty(D_0 \cup OA \cup OB) \wedge C^\infty(D_1 \cup OA) \wedge C^\infty(D_2 \cup OB)$.

§ 3. Решение задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром

Для уравнения (1.1) в области D , где Γ – четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$ (см. § 1), найдем решение задачи Трикоми (см. § 2).

Используя собственные функции задачи T_λ , решение задачи Трикоми в области D_0 при $\lambda \neq \lambda_{n,m}$ будем искать в виде суммы ряда

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{2n-1}(r\sqrt{\lambda})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})} \sin \left[(2n-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right], \quad (3.1)$$

где коэффициенты f_n определяются по формулам (2.15), а $\frac{J_{2n-1}(r\sqrt{\lambda})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}$ – ортонормированные собственные функции задачи (1.13), (1.14).

На основании асимптотической формулы [22, с. 217]

$$J_n(z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

ряд (3.1) при любом $r < 1$ сходится равномерно, так как при больших n справедлива оценка

$$\left| f_n \frac{J_{2n-1}(r\sqrt{\lambda})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})} \sin \left[(2n-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right] \right| \leq M \cdot r^{2n-1},$$

где $M = \text{const} > 0$.

Можно доказать, что ряд (3.1) при $r < 1$ допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз.

При $r = 1$ имеем ряд

$$v(1, \varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \left[(2n-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right],$$

равномерная сходимость которого отмечена в § 2.

Из (3.1) находим

$$v(r, 0) = u(x, 0) = \tau_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{2n-1}(x\sqrt{\lambda})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}. \quad (3.2)$$

Для построения решения задачи (2.2)–(2.4') в области D_1 воспользуемся формулой (1.25). Полагая в ней $k_1 = 0$, $\rho = 2n-1$, $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{f_n}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}$, получим функцию

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{2n-1} \frac{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda}(x^2-y^2))}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})},$$

которая является решением задачи Дарбу для уравнения (1.1) в области D_1 с условиями (3.2) и (1.6).

Аналогично, из (1.29) найдем решение задачи T_1 в области D_2

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{2n-1} \frac{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda}(y^2-x^2))}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}.$$

Таким образом доказана

ТЕОРЕМА 3.1. Если $f(\varphi) \in C^\alpha[0, \pi/2]$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(0) = f(\pi/2) = 0$, то существует решение задачи (3.1)–(3.4) при всех $\lambda \neq \lambda_{n,m}$, которое имеет вид

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{2n-1}(r\sqrt{\lambda})}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})} \sin \left[(2n-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right], & (r, \varphi) \in D_0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{2n-1} \frac{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda}(x^2-y^2))}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}, & (x, y) \in D_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{2n-1} \frac{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda}(y^2-x^2))}{J_{2n-1}(\sqrt{\lambda})}, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где $\lambda_{n,m}$ – собственные значения задачи T_λ . При этом $u(x, y) \in C^\infty(D_0 \cup OA \cup OB) \wedge C^\infty(D_1 \cup OA) \wedge C^\infty(D_2 \cup OB)$.

§ 4. Пространственная задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа

Рассмотрим уравнение

$$LW \equiv \operatorname{sgn} x \cdot W_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot W_{yy} + W_{zz} = 0 \quad (4.1)$$

в области $G = D \times (0, \pi)$, где D – область плоскости x, y , описанная в § 2. Обозначим через S часть цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$, $x, y > 0$, $z \in [0, \pi]$; $G_0 = G \cap \{x, y > 0\}$; $G_1 = G \cap \{x > 0, y < 0\}$; $G_2 = G \cap \{x < 0, y > 0\}$.

Поставим следующую задачу Трикоми.

Задача T . Найти функцию $W(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &\in C(\overline{G}) \cap C^1(G) \cap C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2), \\ LW(x, y, z) &\equiv 0, \quad (x, y, z) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2, \\ W(x, y, z)|_S &= V(r, \varphi, z)|_{r=1} = F(\varphi, z), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad z \in [0, \pi], \\ W(x, y, z)|_{y=-x} &= 0, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad z \in [0, \pi], \\ W(x, y, z)|_{z=0} &= W(x, y, z)|_{z=\pi} = 0, \end{aligned}$$

где F – заданная достаточно гладкая функция.

В области G , разделив в уравнении (4.1) переменные $W(x, y, z) = u(x, y)Z(z)$, получим

$$\operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - \mu^2 u = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (4.2)$$

$$u(x, y)|_{y=-x} = 0, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad (4.3)$$

$$Z'' + \mu^2 Z = 0, \quad Z(0) = Z(\pi) = 0, \quad (4.4)$$

где $\mu = \operatorname{const} > 0$.

Полученная задача (4.2), (4.3) есть задача (2.2), (2.3), (2.4'), где $\lambda = -\mu^2$. Полагая в формулах (1.9), (1.10) $\lambda = -\mu^2$ и учитывая, что $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$, получим соотношения

$$u_y(x, 0) = u_x(x, 0) - \mu^2 \int_0^x u(t, 0) \bar{I}_1[\mu(x-t)] dt, \quad 0 < x < 1, \quad (4.5)$$

и

$$u_x(0, y) = u_y(0, y) - \mu^2 \int_0^y u(0, t) \bar{I}_1[\mu(y-t)] dt, \quad 0 < y < 1, \quad (4.6)$$

позволяющие свести полученную задачу к нелокальной эллиптической задаче. В (4.5) и (4.6) $\bar{I}_1(t) = I_1(t)/t$, $I_1(t)$ – модифицированная функция Бесселя.

В области G_0 , разделяя переменные $u(x, y) = v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, перейдем к задаче

$$R_{rr} + \frac{1}{r}R_r - \left(\mu^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0, \quad (4.7)$$

$$|R(1)| < +\infty, \quad R(0) = 0, \quad (4.8)$$

$$\Phi'' + \nu^2\Phi = 0, \quad (4.9)$$

$$\Phi'(0)\frac{R(r)}{r} = R'(r)\Phi(0) - \mu^2 \int_0^r R(t)\Phi(0)\bar{I}_1[\mu(r-t)]dt, \quad 0 < r < 1, \quad (4.10)$$

$$\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{R(r)}{r} = -R'(r)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu^2 \int_0^r R(t)\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\bar{I}_1[\mu(r-t)]dt, \quad 0 < r < 1. \quad (4.11)$$

Решением уравнения (4.7), удовлетворяющим условиям (4.8), является модифицированная функция Бесселя $R(r) = I_\nu(\mu r)$, $\operatorname{Re} \nu > 0$. Подставив ее в условия (4.10) и (4.11), получим граничные условия для определения функции $\Phi(\varphi)$:

$$\nu\Phi(0) - \Phi'(0) = 0, \quad \nu\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Решениями уравнения (4.9), удовлетворяющими полученным граничным условиям, являются функции

$$\Phi_k(\varphi) = C_k \sin\left(\nu_k\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \nu_k = 2k - 1, \quad C_k = \operatorname{const} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, функции

$$u_k(x, y) = v_k(r, \varphi) = C_k I_{\nu_k}(\mu r) \sin\left(\nu_k\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

определяют в области D_0 решения уравнения (4.2), удовлетворяющие условиям (4.5) и (4.6).

Теперь рассмотрим задачу (4.4). Ее решениями являются функции

$$Z_n(z) = B_n \sin nz, \quad B_n = \operatorname{const} \neq 0, \quad \mu = n = 1, 2, \dots$$

Решение задачи T в области G_0 будем искать в виде суммы ряда

$$W(x, y, z) = V(r, \varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \sin\left[(2k-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right] \frac{I_{2k-1}(nr)}{I_{2k-1}(n)}. \quad (4.12)$$

Полагая в (4.12) $r = 1$, получим

$$F(\varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin\left[(2k-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right] \sin nz,$$

где коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции $P_n(\varphi)$ в ряд по системе синусов (см. § 2):

$$P_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{nk} \sin \left[(2k-1)\varphi + \frac{\pi}{4} \right], \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

а функция $P_n(\varphi)$ определяется по формуле $P_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi, z) \sin nz \, dz$.

Теперь запишем решение задачи T в областях G_1 и G_2 :

$$W(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{2k-1} \\ \quad \times \frac{I_{2k-1}(n\sqrt{x^2-y^2})}{I_{2k-1}(n)}, & (x, y, z) \in G_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_{nk} \sin nz \left(\frac{y+x}{y-x} \right)^{2k-1} \\ \quad \times \frac{I_{2k-1}(n\sqrt{y^2-x^2})}{I_{2k-1}(n)}, & (x, y, z) \in G_2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Если функция $F(\varphi, z)$ по переменной φ удовлетворяет на отрезке $[0, \pi/2]$ условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, а по переменной z на отрезке $[0, \pi]$ условию Гёльдера с показателем $\beta \in (0, 1]$, $F(\varphi, 0) = F(\varphi, \pi) = 0$, $F(0, z) = F(\pi/2, z) = 0$, то существует решение задачи T в области G , которое задается формулами (4.12), (4.13).

Список литературы

1. Сабитов К. Б., Карамова А. А., Шарафутдинова Г. Г. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Изв. вузов. Математика. 1999. № 11. С. 69–80.
2. Волкова В. Ф. Принцип локального экстремума и его применение к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 1969.
3. Зайнулабидов М. М. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения // Дифференц. уравн. 1969. Т. 5. № 1. С. 91–99.
4. Зайнулабидов М. М. Краевая задача для уравнений смешанного типа с двумя пересекающимися линиями вырождения // Дифференц. уравн. 1970. Т. 6. № 1. С. 99–108.
5. Маричев О. И. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1970. № 5. С. 21–29.
6. Хе Кан Чер. О единственности решения задачи Трикоми для уравнения с двумя линиями вырождения // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. С. 64–67.
7. Хе Кан Чер. О сингулярной задаче Трикоми для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Препринт / Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970. 16 с.
8. Исамухамедов С. С., Орамов Ж. О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравн. 1982. Т. 18. № 2. С. 324–334.

9. Салатитдинов М. С., Хасанов А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравн. 1983. Т. 19. № 1. С. 110–119.
10. Сабитов К. Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравн. 1988. Т. 24. № 11. С. 1967–1976.
11. Моисеев Е. И. Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравн. 1990. Т. 26. № 1. С. 93–103.
12. Моисеев Е. И. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравн. 1992. Т. 28. № 1. С. 110–121.
13. Сабитов К. Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравн. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
15. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. I. М., 1949.
16. Сабитов К. Б., Тихомиров В. В. О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 10. С. 100–109.
17. Пономарев С. М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
18. Моисеев Е. И. О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравн. 1987. Т. 23. № 1. С. 177–179.
19. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
20. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1954.
21. Карамова А. А. К вопросу о единственности решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа // Тез. докл. Междунар. науч. конф. “Дифференциальные уравнения. Интегральные уравнения. Специальные функции”. Самара, 1997. С. 33.
22. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963.

Стерлитамакский государственный
педагогический институт,
Стерлитамакский филиал
Академии наук Республики Башкортостан

Поступило в редакцию
1.XII.1999