Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Принцип соответствия в абелевой лагранжевой геометрии, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 191–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:56:07

УДК 512.6

Н. А. Тюрин

Принцип соответствия в абелевой лагранжевой геометрии

Представлена новая идея квантования классических механических систем с использованием конструкций статей [2], [7] и [1]. В качестве первого шага проверяется соответствие скобок Пуассона на исходном симплектическом многообразии и на многообразии модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного объема.

Библиография: 7 наименований.

Введение

В недавних работах [2] и [7] была представлена конструкция многообразия модулей бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного топологического типа над произвольным компактным симплектическим многообразием. Исходя из простого описания касательного расслоения к такому многообразию модулей была предложена некоторая “надстройка” – расслоенное над первым многообразием многообразие модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного объема. Последнее многообразие модулей наделяется структурой *бесконечномерного келерова многообразия*. Интересно, что это бесконечномерное многообразие строится почти канонически над фиксированным компактным симплектическим многообразием – дополнительно требуется только зафиксировать некоторую подходящую *метасимплектическую структуру* (см. [2], [7]).

С другой стороны, имеется интересный подход к описанию квантовой механики (см. [1]). В основе лежит идея вместо бесконечномерного гильбертова пространства (как обычно в квантовой механике) использовать в качестве пространства состояний *проективизацию* этого гильбертова пространства – бесконечномерное келерово многообразие, снабженное, как всякое келерово многообразие, интегрируемой комплексной структурой, симплектической формой и соответствующей римановой метрикой. Тогда (см. [1]) динамика этой квантово-механической модели описывается уже не уравнением Шрёдингера (как в случае исходного гильбертова пространства), а уравнением Гамильтона, причем используется естественная симплектическая структура на келеровом бесконечномерном многообразии. Риманова метрика на том же проективном многообразии состояний отвечает за вероятностную сторону такой квантовой механики. Подробнее мы напоминаем аспекты этого подхода в § 2.

Исходя из работ [2], [7] и [1] возникает естественная идея объединить конструкции, представленные в них, в одну общую картину нового квантования классических механических систем. А именно для произвольной классической механической системы, пространство состояний которой представлено некоторым компактным симплектическим многообразием (M, ω) с симплектической формой ω , можно рассмотреть бесконечномерное келерово многообразие полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов с фиксированным объемом. Это бесконечномерное келерово многообразие может оказаться подходящим аналогом проективизации гильбертова пространства, соответствующего квантованию исходной механической системы. При этом, как мы увидим ниже, гладким вещественным функциям на исходном многообразии M соответствуют некоторые специальные гладкие функции на таком бесконечномерном келеровом многообразии. Для произвольного компактного симплектического многообразия (M, ω) и соответствующего бесконечномерного келерова многообразия $\mathcal{B}_{\text{BS}}^{hw,1}$ модулей бор-зоммерфельдовых взвешенных лагранжевых циклов единичного объема, которое само по себе является симплектическим многообразием, имеется естественное вложение

$$F: C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R}) \hookrightarrow C^\infty(\mathcal{B}_{\text{BS}}^{hw,1} \rightarrow \mathbb{R}), \quad (0.1)$$

явно описанное ниже формулой (3.3). Возникает естественный вопрос: как соотносятся скобки Пуассона гладких функций на исходном симплектическом многообразии со скобками Пуассона на $\mathcal{B}_{\text{BS}}^{hw,1}$, индуцируемыми естественной симплектической формой Ω ?

Основной результат настоящей работы заключается в следующем (утверждение 3.2): вложение F сохраняет структуру алгебры Ли, причем скобки Пуассона, индуцируемые на прообразе исходной симплектической формой ω , переходят в скобки Пуассона, индуцируемые симплектической формой Ω (с точностью до константы, которая будет вычислена в конце § 4).

Иначе говоря, если рассматривать бесконечномерное келерово многообразие модулей лагранжевых бор-зоммерфельдовых полувзвешенных циклов фиксированного объема как кандидата квантового пространства состояний проквантованной исходной классической механической системы, то соответствие скобок Пуассона, доказываемое ниже, удостоверяет в том, что при таком квантовании соотношение Дирака выполнено (подробно о квантовании, предквантовании и проблеме Дирака см., например, [3], [4], [6]).

§ 1. Многообразие модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов

Для удобства чтения работы в этом параграфе мы кратко напоминаем основные определения и конструкции и приводим необходимые в дальнейшем для доказательства формулы и соотношения. Подробно весь этот материал изложен в [2], [7].

Пусть (M, ω) – симплектическое компактное многообразие размерности $2n$ с симплектической формой ω . Для некоторого фиксированного вещественного гладкого многообразия S размерности n рассмотрим пространство гладких вложений

$$\phi: S \rightarrow M \quad (1.1)$$

таких, что $\phi^*\omega$ тождественно нулю на S . Легко видеть, что это пространство соответствует пространству гладких лагранжевых циклов, гомологичных S . Пусть, кроме того, пара (M, ω) удовлетворяет условию Дирака, т.е. симплектическая форма ω имеет целочисленный класс когомологий

$$[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Тогда на (M, ω) имеется четверка данных предквантования (см. [6]), в которую, кроме самого многообразия M и симплектической формы ω , входит $U(1)$ -расслоение $L \rightarrow M$, топологически однозначно определяемое своим первым классом Черна, по условию равным

$$c_1(L) = [\omega],$$

вместе с эрмитовой связностью $a \in \mathcal{A}_h(L)$, удовлетворяющей условию

$$F_a = 2\pi i \omega. \quad (1.2)$$

Лагранжево вложение (1.1) называется *бор-зоммерфельдовым*, если выполнено следующее условие: рассмотрим над S обратный образ линейного расслоения ϕ^*L вместе с индуцируемой связностью ϕ^*a на нем. Тогда в силу лагранжевости вложения ϕ имеем, что пара (ϕ^*L, ϕ^*a) над S является тривиальным расслоением с плоской связностью на нем (то, что связность плоская, немедленно следует из (1.2)). Для лагранжева бор-зоммерфельдова цикла необходимо, чтобы плоская связность ϕ^*a была бы калибровочно эквивалентна тривиальной связности над S .

Легко видеть, что в случае односвязного S любое лагранжево вложение ϕ является вложением Бора–Зоммерфельда. Однако такой случай является очень специальным: привычно представлять себе лагранжев цикл как n -мерный тор.

После факторизации пространства таких вложений по группе диффеоморфизмов S получаем пространство, называемое *многообразием модулей* бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов данного топологического типа (отвечающего топологическому типу S). В исходных работах [2] и [7] касательное пространство к этому многообразию модулей в гладкой точке (S, ϕ) представляется пространством точных форм на S . Для простоты ограничимся случаем фиксированного S и обозначим, следуя оригинальным работам, такое многообразие модулей $\mathcal{B}_S$. Однако такое гладкое бесконечномерное многообразие не обладает никакой выделенной естественными условиями симплектической формой.

Следующий шаг (см. [2], [7]) состоит в рассмотрении многообразия модулей *планковских циклов* $\mathcal{P}_S$, расслоенного над $\mathcal{B}_S$ со слоем $U(1)$. Если теперь рассмотреть многообразие модулей *полувзвешенных планковских циклов* $\mathcal{P}_S^{hw}$, состоящее из пар

$$\mathcal{P}_S^{hw} = \{(\rho, \theta)\},$$

где ρ – планковский цикл над M , а θ – некоторая полуформа на нем (подробнее см. [2], [7]), то это многообразие модулей $\mathcal{P}_S^{hw}$ уже будет обладать естественными

симплектической формой и интегрируемой комплексной структурой (см. [2], [7]). Далее, на келеровом многообразии $\mathcal{P}_S^{hw}$ имеем естественное $U(1)$ -действие, сохраняющее обе структуры. Результатом келеровой редукции $\mathcal{P}_S^{hw}$ по этому действию и является многообразие модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного объема (см. [2], [7]), обозначаемое $\mathcal{B}_S^{hw,r}$, где $r \in \mathbb{R}$ – выбираемый фиксированный объем. В дальнейшем для простоты мы ограничиваемся циклами объема 1, однако все результаты легко переносятся на случай любого фиксированного объема.

Для дальнейшей работы нам понадобится локальное описание $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ и явная формула для симплектической структуры Ω на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$. Точки многообразия модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ представляются парами (ϕ, θ) , где ϕ – бор-зоммерфельдово лагранжево вложение S в M , а θ – некоторая полуформа на ϕS такая, что

$$\int_{\phi S} \theta^2 = 1. \quad (1.3)$$

Касательное пространство $T_{(\phi_0, \theta_0)} \mathcal{B}_S^{hw,1}$ представляется парами (f, θ) , где f – гладкая функция на $\phi_0 S$, а θ – некоторая полуформа, такими, что

$$\int_{\phi_0 S} f \theta_0^2 = 0, \quad \int_{\phi_0 S} \theta_0 \theta = 0. \quad (1.4)$$

Симплектическая форма Ω в точке (ϕ_0, θ_0) на паре касательных векторов

$$v_1 = (f_1, \theta_1), \quad v_2 = (f_2, \theta_2)$$

имеет вид

$$\Omega(v_1, v_2) = \int_{\phi_0 S} (f_1 \theta_2 - f_2 \theta_1) \theta_0. \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что эта 2-форма имеет полный ранг в каждой точке и замкнута. Подробно весь материал может быть найден в оригинальных работах [2], [7].

§ 2. Второй план: геометрическая формулировка квантовой механики

Итак, мы видели, что каждому компактному симплектическому многообразию (M, ω) может быть поставлен в соответствие набор бесконечномерных келеровых многообразий модулей $\mathcal{B}_{S_i}^{hw,1}$ в зависимости от набора классов $S_i \in H_n(M, \mathbb{Z})$. Эта конструкция нетривиально проецируется на интерпретацию физической теории, называемую “геометрической формулировкой” квантовой механики. Работа [1] (так же, как и [5]) содержит исчерпывающую информацию по истории вопроса и необходимые ссылки на оригинальные работы. Отвлечемся на некоторое время от непосредственной темы настоящей работы и коротко напомним, как выглядят основные постулаты квантовой механики в терминах такой “геометрической формулировки”.

Пусть $\mathcal{H}$ (здесь и в дальнейшем в настоящем параграфе мы будем придерживаться обозначений [1] для легкости сличения) – гильбертово пространство, соответствующее квантово-механической системе. На самом деле состояния определяются не векторами в $\mathcal{H}$, а их направлениями, поэтому в качестве пространства состояний берется проективизация

$$\mathcal{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H}).$$

Это проективное пространство является конечномерным или бесконечномерным келеровым многообразием, снабженным *келеровой тройкой*: интегрируемой симплектической структурой $\mathcal{J}$, симплектической формой Ω и римановой метрикой G , причем все эти структуры согласованы между собой. Таким образом, состояния системы представлены точками $\mathcal{P}$.

Место самосопряженных операторов на $\mathcal{H}$ занимают специальные функции над $\mathcal{P}$, получаемые следующим образом: каждый самосопряженный оператор $\hat{F}$ на $\mathcal{H}$ определяет вещественную функцию (среднее ожидаемое)

$$F = \langle \hat{F}\Psi; \Psi \rangle,$$

которая спускается до функции

$$f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

(переход к $\mathcal{P}$ может быть осуществлен посредством келеровой редукции относительно $U(1)$ -действия на $\mathcal{H}$ с отображением моментов

$$S = \langle \Psi; \Psi \rangle,$$

и для любого оператора $\hat{F}$ гамильтоново векторное поле функции F касается поверхности уровня $S \equiv 1$, так что спуск на $\mathcal{P}$ корректно определен). Все такие f над $\mathcal{P}$ однозначно характеризуются тем, что их гамильтоновы векторные поля являются киллинговыми (следствие 1 теоремы 2.1 из [1]). Далее, вместо собственных векторов и собственных значений операторов над $\mathcal{H}$ имеем критические точки и критические значения функций над $\mathcal{P}$ [1, п. 3 раздела C]. Для пары наблюдаемых $\hat{F}, \hat{K}$ над $\mathcal{H}$ их коммутатор в точности соответствует скобке Пуассона

$$\{f, k\}_\Omega$$

над $\mathcal{P}$. Таким образом, известные постулаты квантовой механики в терминах проективизации звучат так [1, раздел D]: физические состояния квантово-механической системы представляются точками проективного пространства $\mathcal{P}$ – бесконечномерного или конечномерного келероваго многообразия; наблюдаемые – те вещественнозначные гладкие функции, гамильтоновы поля которых сохраняют всю келерову структуру; квантовая динамика описывается уравнением Гамильтона (используется симплектическая структура Ω); вероятностные аспекты, редукции и

т.п. выражаются в терминах геодезических расстояний до критических точек (и за них отвечает риманова метрика G). Имеются интерпретации редукции и в случае дискретного, и в случае непрерывного спектра.

Применим данную схему к известному квантованию Теплица–Березина симплектического многообразия (M, ω) , снабженного согласованной с ω интегрируемой комплексной структурой I (о квантовании Теплица–Березина см., например, [2]). Тогда в роли гильбертова пространства $\mathcal{H}$ выступает $H^0(M, L)$, а каждой гладкой функции

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

соответствует теплицев оператор

$$A_f: H^0(M, L) \rightarrow H^0(M, L).$$

Переходя к проективизации, получаем соответствие

$$f \in C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R}) \mapsto \tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{P}^d \rightarrow \mathbb{R}), \quad (2.2)$$

где

$$\mathbb{P}^d = \mathbb{P}H^0(M, L).$$

Нетрудно вывести формулу, описывающую соответствие (2.2). Если реализовать $\mathbb{P}H^0(M, L)$ как результат келеровой редукции с отображением моментов

$$\mu: H^0(M, L) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(s) = \int_M |s|^2 d\mu,$$

(причем мы выбираем уровень $\mu \equiv 1$), то будем иметь

$$\tilde{f}(s) = \int_M f |s|^2 d\mu, \quad (2.3)$$

где $d\mu$, как обычно, форма Лиувилля.

Однако известно, что порождаемое (2.3) вложение

$$C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{P}^d \rightarrow \mathbb{R}) \quad (2.4)$$

не перестановочно со структурами алгебр Ли, индуцируемыми на обоих пространствах в (2.4) симплектическими структурами.

Класс гладких функций, являющихся квантовыми наблюдаемыми над проективным пространством, достаточно ограничен. С другой стороны, над проективным пространством этот класс максимален, над общим келеровым многообразием класс таких функций еще меньше (вплоть до пустого множества над некоторыми представителями, например над торами). Расширить класс наблюдаемых возможно с переходом к нелинейной квантовой динамике в рамках формализма Вайнберга–Салама (см. [1]). Утверждается, что это соответствует допущению всех гладких функций над проективным пространством в качестве квантовых наблюдаемых.

Существование многообразия модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ – бесконечномерного келерова многообразия – вместе с вложением (0.1) в рамках “геометрической формулировки” квантовой механики выглядит как определение нового способа квантования классических механических систем. Результатом такого квантования является некоторый вариант нелинейной квантовой механики на келеровом многообразии $\mathcal{B}_S^{hw,1}$, над которым образ вложения (0.1) представляет множество проквантованных наблюдаемых.

§ 3. Выделенные функции на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$

В этом параграфе мы построим вложение F (см. (0.1)) и рассмотрим некоторые естественные геометрические объекты, индуцируемые на многообразии модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ произвольной гладкой вещественной функцией f , определенной на базовом симплектическом многообразии (M, ω) :

$$f \in C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R}).$$

Заметим, что для исходного симплектического многообразия (M, ω) и келерова многообразия $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ с симплектической формой Ω и интегрируемой комплексной структурой I имеются следующие простые соответствия на пространствах функций. Пусть $f \in C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R})$ – некоторая гладкая функция. Тогда дифференциал этой функции df , ограничиваемый на произвольный бор-зоммерфельдов цикл $\phi S \subset M$, дает некоторый касательный к $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ вектор в точке (ϕ, θ) для любого θ . Это дает нам векторное поле A_f на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$. Это векторное поле не зависит от второй “координаты” на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$, т.е. постоянно вдоль слоев расслоения

$$\mathcal{B}_S^{hw,1} \rightarrow \mathcal{B}_S,$$

где $\mathcal{B}$ – вещественное многообразие модулей бор-зоммерфельдовых циклов.

Имеется следующее простое

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Особые точки поля A_f есть в точности те бор-зоммерфельдовы циклы ϕS , на которые функция f ограничивается константой.*

Кроме векторного поля A_f , функция f индуцирует естественным образом и 1-форму на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$. В точке (ϕ_0, θ_0) эта форма B^f определяется формулой

$$B_{\phi_0, \theta_0}^f(f_1, \theta_1) = \int_{\phi S} f \theta_0 \theta_1. \quad (3.1)$$

Напомним, что в явном виде симплектическая форма Ω на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ выписывается формулой (1.5), и отсюда нетрудно видеть, что векторное поле A_f и 1-форма B^f связаны соотношением

$$B^f = \Omega^{-1}(A_f). \quad (3.2)$$

Доказательство формулы (3.2) является полезным упражнением в локальных вычислениях над $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ и проводится простой подстановкой в формулу (1.5) координат векторного поля A_f . Действительно, для любого векторного поля

$$v = ((f_1(\phi, \theta), \theta); \theta_1(\phi, \theta))$$

имеем

$$\Omega(A_f, v)(\phi, \theta) = \int_{\phi S} (f\theta_1 - f_1 \cdot 0)\theta = \int_{\phi S} f\theta_1\theta = B^f(v)(\phi, \theta),$$

так как векторное поле A_f имеет координаты $(f, 0)$ в каждой точке $\mathcal{B}_S^{hw,1}$.

Теперь перейдем к определению вложения F (см. (0.1)). Для любой функции f на исходном многообразии M имеем следующую функцию F_f , естественно индуцируемую на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$:

$$F_f(\phi, \theta) = \int_{\phi S} f|_{\phi S} \theta^2. \quad (3.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула-определение (3.3) имеет сходство с формулой (2.3) из предыдущего параграфа. Заметим, кроме того, и очевидный факт: если f постоянна на M , то F_f необходимо постоянна на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$, более того, равна той же константе (ср. (3.3) и (1.3)). То же справедливо для соотношения (2.2).

Рассмотрим в пространстве всех гладких функций на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ образ пространства всех гладких функций на M при отображении (0.1):

$$\mathcal{N} = \text{Im } F(C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R})), \quad \mathcal{N} \subset C^\infty(\mathcal{B}_S^{hw,1} \rightarrow \mathbb{R}).$$

Нетрудно видеть исходя из формулы-определения (3.3), что $\mathcal{N}$ является линейным подпространством в пространстве всех функций на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$. Однако это подпространство не является *подалгеброй* относительно обычного поточечного умножения. Действительно, если F_f и F_g – пара функций на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$, индуцируемых функциями f и g , то их произведение $F_f \cdot F_g$ не обязано быть индуцируемо какой-либо функцией h на M . Этот недостаток с лихвой компенсируется тем, что $\mathcal{N}$ является *подалгеброй Ли* алгебры Ли $C^\infty(\mathcal{B}_S^{hw,1} \rightarrow \mathbb{R})$ со скобками Пуассона $\{\cdot; \cdot\}_\Omega$, индуцируемыми симплектической формой Ω .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Имеется тождество*

$$\{F_f; F_g\}_\Omega = 2F_{\{f;g\}_\omega}. \quad (3.4)$$

Это утверждение вместе с определением вложения F (3.3) и составляет ответ на вопрос, сформулированный во введении настоящей работы. Перед тем как приступить к доказательству, приведем несколько простых замечаний.

Определение (3.3) соответствия $f \mapsto F_f$ легко модифицируется посредством домножения на произвольную константу:

$$F_f(\phi_0, \theta_0) = \int_{\phi_0 S} \tau f|_{\phi_0 S} \theta_0^2.$$

Это позволяет видоизменять тождество (3.4):

$$\{F_f; F_g\}_\Omega = 2\tau^2 F_{\{f;g\}_\omega},$$

произвольным образом. В том числе и привести это тождество к виду условия Дирака (включить необходимую константу: постоянную Планка и т.п.).

С другой стороны, как уже отмечалось, обычное поточечное умножение $f \cdot g$ не переносится на F_f и F_g , из чего получаем интересный эффект. Предположим, что исходная классическая механическая система, представляемая симплектическим многообразием (M, ω) , является вполне интегрируемой системой, т.е. мы имеем набор первых интегралов $f_1, \dots, f_n$, коммутирующих между собой. Этот набор порождает коммутативную подалгебру в алгебре всех гладких функций на M . Эта подалгебра конечно порождена (тавтология). Перейдем теперь к многообразию модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$. На нем имеем бесконечный набор коммутирующих функций вида

$$F_{f_1^{r_1} \dots f_n^{r_n}}, \quad r_i \in \mathbb{Z}.$$

Однако из того, что соотношение $F_{fg} = F_f F_g$ не выполняется, соответствующая коммутативная подалгебра на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ не является конечно порожденной. Она имеет счетное число образующих, параметризованных $\mathbb{Z}^n$.

§ 4. Доказательство основного утверждения

Перейдем теперь непосредственно к вычислениям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R})$ вычислим дифференциал соответствующей ей функции F_f . Возмущая поочередно переменные в касательном пространстве (f_1, θ_1) , получаем, что дифференциал этой функции представлен в виде суммы двух 1-форм:

$$dF_f(\phi_0, \theta_0)(f_1, \theta_1) = \int_{\phi_0 S} 2f\theta_1\theta_0 + \int_{\phi_0 S} df_1(\omega^{-1}(df)|_{\phi_0 S})\theta_0^2, \quad (4.1)$$

первая из которых постоянна по первой касательной переменной, а вторая – по второй. Нетрудно видеть, что первым слагаемым в формуле (4.1) является удвоение знакомой нам формы B^f , определяемой формулой (3.1). Как мы видели выше (см. (3.2)), двойственным относительно симплектической формы Ω для этой 1-формы является векторное поле A_f . Таким образом, гамильтоново векторное поле функции F_f представляется в виде

$$H_{F_f} = \Omega^{-1}(dF_f) = 2A_f + C_f,$$

где C_f – симплектически двойственное векторное поле к 1-форме

$$\int_{\phi_0 S} df_1(\omega^{-1}(df)|_{\phi_0 S})\theta_0^2. \quad (4.2)$$

Нам не нужно явно вычислять C_f по следующему соображению. Векторное поле A_f постоянно по “полуформенной” координате, что явно видно из формул, в то время как симплектически двойственная 1-форма B^f имеет в качестве ядра все чисто “функциональные” поля вида $(f_1(\phi, \theta); 0)$. Обратным свойством обладают векторное поле C_f и симплектически двойственная этому полю 1-форма, являющаяся вторым слагаемым в (4.1). Легко видеть, что наша симплектическая форма “разделена” по переменным f_1 и θ_1 (это видно из определяющей формулы (1.5)). Искомая скобка Пуассона равна

$$\begin{aligned}\{F_f; F_g\}_\Omega &= \Omega(H_{F_f}; H_{F_g}) = \Omega(2A_f + C_f; 2A_g + C_g) \\ &= 2\Omega(A_f; C_g) - 2\Omega(A_g; C_f),\end{aligned}\quad (4.3)$$

так как $\Omega(A_f; A_g) = \Omega(C_f; C_g) = 0$ для любых f и g (непосредственная подстановка в (1.5)). Далее, продолжая (4.3), получаем

$$\{F_f; F_g\}_\Omega = 2B^f(C_g) - 2B^g(C_f) = 2C_f^*(A_g) - 2C_g^*(A_f), \quad (4.4)$$

где под C_f^* имеется в виду 1-форма (4.2). В силу формулы (4.4) нам не надо явно обращать последнюю 1-форму и явно выписывать векторное поле C_f .

Продолжим вычисления скобки Пуассона, подставляя в (4.4) явные формулы для векторных полей и 1-форм:

$$\{F_f; F_g\}_\Omega = 2 \int_{\phi_0 S} dg|_{\phi_0 S} (\omega^{-1}(df)|_{\phi_0 S}) \theta_0^2 - 2 \int_{\phi_0 S} df|_{\phi_0 S} (\omega^{-1}(dg)|_{\phi_0 S}) \theta_0^2. \quad (4.5)$$

Далее, рассмотрим подынтегральное выражение из (4.5)

$$2(dg|_{\phi_0 S} (\omega^{-1}(df)|_{\phi_0 S}) - df|_{\phi_0 S} (\omega^{-1}(dg)|_{\phi_0 S})). \quad (4.6)$$

Это некоторая функция на $\phi_0 S$. Покажем, что набор таких функций на $\phi_0 S$ “интегрируется” до глобальной функции на всем M . Для этого достаточно показать, что выражение (4.6) *в точности совпадает* с ограничением удвоенной скобки Пуассона $2\{f, g\}_\omega$ на $\phi_0 S$. Для того чтобы это сделать, посмотрим, как преобразуется выражение для скобок Пуассона на симплектическом многообразии (M, ω) вблизи произвольного лагранжева подмногообразия (которым будет наш $\phi_0 S$).

Нетрудно видеть, что имеется следующее тождество:

$$2\{f, g\}_\omega = 2df(\omega^{-1}(dg)) = -2dg(\omega^{-1}(df)) = df(\omega^{-1}(dg)) - dg(\omega^{-1}(df)). \quad (4.7)$$

Для удобства вычислений дополним симплектическую структуру на базовом многообразии M до эрмитовой тройки, т.е. выберем некоторую согласованную с ω почти комплексную структуру I . Тогда соответствующая риманова метрика G , такая что

$$\omega(u, v) = G(u, Iv) \quad \forall u, v \in \Gamma(TM), \quad (4.8)$$

“расщепляется” на касательном пространстве к $\phi_0 S$ посредством почти комплексной структуры I :

$$v \in T_m \phi S \subset T_m M \implies G(v, Iv) = 0. \quad (4.9)$$

В выражении (4.6) участвуют ограничения на $\phi_0 S$ дифференциалов df и dg и векторных полей $\omega^{-1}(dg)$ и $\omega^{-1}(df)$. Произведем необходимые разложения в формуле (4.7). Для краткости обозначений используем для касательных к $T\phi_0 S$ компонент индекс hor , а для ортогональных – vert (ортогонализация производится по метрике G). Преобразуем первое слагаемое в (4.7):

$$\begin{aligned} & (df_{\text{vert}}((IG^{-1}(dg))_{\text{vert}}) + df_{\text{vert}}((IG^{-1}(dg))_{\text{hor}}) \\ & + df_{\text{hor}}((IG^{-1}(dg))_{\text{vert}}) + df_{\text{hor}}((IG^{-1}(dg))_{\text{hor}})). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В выражении (4.10) из четырех слагаемых только два нетривиальны, а именно первое и четвертое (“ vert-vert ” и “ hor-hor ”). Аналогичным образом для второго слагаемого в (4.7) имеем

$$-(dg_{\text{vert}}((IG^{-1}(df))_{\text{vert}}) + dg_{\text{hor}}((IG^{-1}(df))_{\text{hor}})), \quad (4.11)$$

т.е. имеются тоже только два нетривиальных слагаемых. Однако из согласованности римановой метрики и почти комплексной структуры (отражаемой в (4.8) и (4.9)) имеем

$$df_{\text{vert}}((IG^{-1}(dg))_{\text{vert}}) = -dg_{\text{hor}}((IG^{-1}(df))_{\text{hor}}) \quad (4.12)$$

и

$$df_{\text{hor}}((IG^{-1}(dg))_{\text{hor}}) = -dg_{\text{vert}}((IG^{-1}(df))_{\text{vert}}). \quad (4.12')$$

Таким образом, мы можем переписать скобку Пуассона $\{f; g\}$, ограниченную на $\phi_0 S$, в виде одних горизонтальных компонент:

$$\{f; g\}|_{\phi_0 S} = df_{\text{hor}}((\omega^{-1}(dg))_{\text{hor}}) - dg_{\text{hor}}((\omega^{-1}(df))_{\text{hor}}). \quad (4.13)$$

Теперь остается вспомнить, что hor -компоненты в точности отвечают ограничениям и дифференциалов, и векторных полей на касательные пространства к $\phi_0 S$, и таким образом мы получаем

$$\{f; g\}|_{\phi_0 S} = df|_{\phi_0 S}(\omega^{-1}(dg)|_{\phi_0 S}) - dg|_{\phi_0 S}(\omega^{-1}(df)|_{\phi_0 S}), \quad (4.14)$$

и требуемый результат утверждения 3.2 немедленно следует из сравнения выражений (4.6) и (4.14).

ЗАМЕЧАНИЕ. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, мы можем деформировать соответствие

$$F: C^\infty(M \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{N} \subset C^\infty(\mathcal{B}^{hw,1} \rightarrow \mathbb{R})$$

так, чтобы выполнялось тождество

$$\{F_f; F_g\}_\Omega = cF_{\{f,g\}_\omega} \quad (4.15)$$

для любой положительной вещественной (или даже произвольной комплексной) константы c . Для этого достаточно изменить формулу (3.3) так, что

$$F_f(\phi, \theta) = \int_{\phi S} \frac{\sqrt{c}}{2} f \theta^2.$$

Правда, тогда исчезает точное соответствие констант: если

$$f = a = \text{const},$$

то F_f , конечно, будет тоже константой, но другой:

$$F_f = \frac{\sqrt{c}}{2} \cdot a.$$

Однако полное соответствие восстанавливается, если мы выберем другой уровень отображения моментов вместо единичного, т.е. нашим многообразием будет многообразие модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов веса $\frac{2}{\sqrt{c}}$.

Заключение

Вернемся снова к идее, высказанной в § 2, использующей многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ в качестве квантового пространства состояний проквантованной классической системы (M, ω) . Обычно результатом квантования признают некоторое подходящее гильбертово пространство (см. [3], [4], [6] и др.) вместе с соответствием “классическое наблюдаемое – квантовое наблюдаемое”, т.е. некоторым правилом сопоставления гладким функциям самосопряженных операторов. Требуются выполнения условий неприводимости и условия Дирака (скобки Пуассона переходят в коммутатор соответствующих операторов; это условие обычно называется *принципом соответствия*). Однако классическая теорема ван Хова (см. [3, раздел 5.2]) дает отрицательное решение для проблемы существования *линейного* квантования. Вместе с тем “геометрическая формулировка” квантовой механики порождает иной подход к проблеме квантования – искать подходящее келерово многообразие, определение которого не использовало бы ссылку на промежуточный ингредиент (гильбертово пространство). Одним из кандидатов выступает

многообразие модулей полувзвешенных бор-зоммерфельдовых лагранжевых циклов фиксированного объема – бесконечномерное келерово многообразие, в определении которого участвует только сама симплектическая структура на исходном M и метаплектическая структура на S (фиксация метаплектической структуры похожа просто на выбор выделенной параметризации).

Результат настоящей работы удостоверяет в том, что при данном квантовании принцип соответствия имеет место. Однако это квантование далеко от того, чтобы быть линейным. Действительно, линейность подразумевает то, что такое келерово многообразие допускает максимально возможное число “настоящих” квантовых наблюдаемых. В [1] это условие специализируется как условие постоянной голоморфной кривизны. В конечномерном случае это эквивалентно тому, что келерово многообразие изоморфно проективному пространству. Проверка того, что данному условию удовлетворяет многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$, не входит в задачи настоящей работы, но даже если бы это было так, выделенные функции F_f на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ далеки от того, чтобы их гамильтоновы поля были одновременно киллинговыми.

Нетрудно построить примеры F_f с очень “плохими” критическими точками (например, всего с одним критическим значением и т.п.). Это нарушило бы “классическую” кинематику, определяемую римановой метрикой на келеровом многообразии. Следует, однако, заметить, что ни соответствие (0.1), ни соответствие скобок Пуассона (утверждение 3.2) не зависят от римановой метрики G на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$, а только от симплектической структуры. Следовательно, имеется некоторая свобода в выборе (или деформации, предложенной в [2], [7]) римановой метрики на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$. Мы же хотели добавить в заключение к уже имеющейся картине еще один важный геометрический ингредиент абелевой лагранжевой геометрии: голоморфное ВРУ-отображение. Напомним (см. [2], [7]), что для многообразия модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ имеется голоморфное отображение

$$\text{ВРУ}_1: \mathcal{B}_S^{hw,1} \rightarrow \mathbb{P}H^0(M, L) \quad (*)$$

с сюръективным дифференциалом (здесь, как и на протяжении всей работы, мы ограничиваемся уровнем $k = 1$). Заметим, что отображение $(*)$ имеет “физическую” интерпретацию в терминах “геометрической формулировки” квантовой механики. Действительно, справа в $(*)$ стоит пространство *квантовых* состояний при *линейном* квантовании Теплица–Березина (см. § 2). Слева в $(*)$ стоит пространство квантовых состояний при *нелинейном* квантовании. Отображение $(*)$ можно назвать отображением *линеаризации* (а для квантовых наблюдаемых – специальных гладких функций на обоих пространствах – отображением *делинеаризации*). Для обоих пространств, входящих в $(*)$, имеем выделенные множества специальных гладких функций. Над многообразием модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ имеем образ вложения (0.1), над проективным пространством $\mathbb{P}H^0(M, L)$ имеем образ соответствия (2.3). Хотя квантование с использованием многообразия $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ и нелинейное, зато с выполненным принципом соответствия, в то время как квантование с использованием многообразия $\mathbb{P}H^0(M, L)$ линейное, но принцип соответствия выполнен только асимптотически. Спектр гипотетических выводов и будущих задач,

проистекающих из данной конструкции, достаточно широк. Конечно, гипотетически возможно, что многообразие модулей $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ изоморфно бесконечномерному проективному пространству

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}H^0(M, L^k)$$

(при переходе к этому пределу начинает выполняться принцип соответствия для правой части в (*)). Однако постановка не гипотетической, а вполне реальной и насущной в ближайшем будущем задачи, звучит так: описать образы вложения (0.1) и соответствия (2.3), в этих пространствах описать образы отображений BPU^* и BPU_* и описать соотношения скобок Пуассона на $\mathcal{B}_S^{hw,1}$ и скобок Пуассона на $\mathbb{P}H^0(M, L)$. Решение этой задачи послужит следующим шагом в АЛАГ-квантовании.

Список литературы

1. *Ashtekar A., Schilling T.* Geometrical formulation of quantum mechanics. arXiv: gr-qc/9706069.
2. *Gorodentsev A., Tyurin A.* ALAG (Abelian Lagrangian Algebraic Geometry). Preprint 00-7 / Max-Planck-Inst. für Math. (Bonn).
3. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
4. *Куриллов А. А.* Геометрическое квантование // Итоги науки и техники. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 141–178.
5. *Schilling T.* Geometry of quantum mechanics. Doctoral thesis. Penn State University, 1996.
6. *Tyurin A. N.* Geometric quantization and mirror symmetry. Preprint / Warwick 99-22; alg-geom/9902027.
7. *Tyurin A. N.* Complexification of Bohr-Sommerfeld conditions. Preprint / Math. Inst. Univ. of Oslo, 1999. № 15.

МИИТ

E-mail: tyurin@tyurin.mccme.ru,
jtyurin@mpim-bonn.mpg.de

Поступило в редакцию
26.IX.2000