Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 4, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 09:39:52

УДК 517.982.1+517.53+517.55

Б. Н. Хабибуллин

Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I

Устанавливаются условия возможности двойственного представления суперлинейных функционалов на проективном пределе векторных решеток. Это позволит дать во второй части статьи новые двойственные постановки ряда задач для весовых пространств голоморфных функций одной и многих переменных, определенных в области из $\mathbb{C}^n$, а именно нетривиальность заданного пространства, описание нулевых множеств, описание множеств (не-)единственности, существование голоморфных мультипликаторов-функций из определенных классов, “погашающих” рост заданной голоморфной функции, представление мероморфных функций отношением голоморфных функций из заданного пространства.

Библиография: 26 наименований.

Введение

Задачи, упомянутые в аннотации, включаются в круг основных в теории функций комплексных переменных, что продиктовано как внутренней логикой этой теории, так и вопросами, связанными с аппроксимацией, интерполяцией, аналитическим продолжением, представлением рядами, со спектральным синтезом, с обобщенными функциями. Отметим то общее, что объединяет эти задачи.

Пусть M – действительная и непрерывная функция в области $G \subset \mathbb{C}^n$, $H(G)$ – пространство голоморфных в G функций,

$$H(G, M) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H(G): \log |f(z)| \leq M(z) + \text{const}, z \in G\}. \quad (0.1)$$

В следующих пяти пунктах для простоты предполагаем, что $n = 1$.

1. Задача о нетривиальности $H(G, M)$. При каких условиях на M существует голоморфная в G функция $g \neq 0$ такая, что

$$\log |g(z)| \leq M(z), \quad z \in G? \quad (0.2)$$

Один из примеров такой задачи – проблема Гельфонда–Шилова [1, с. 20], связанная с обобщенными функциями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00770) и частичной поддержке Конкурсного Центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете (проект № 01-960-000936).

2. *Описание нулевых множеств для $H(G, M)$.* Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность точек из G . При каких условиях на последовательность Λ и функцию M найдется голоморфная в G функция $f \in H(G, M)$ с нулевым множеством Λ ?

Учитывая, что по любой последовательности Λ при $\lambda_n \rightarrow \partial G$, ∂G – граница G , можно построить некоторую функцию $f_\Lambda \in H(G)$ с нулевым множеством Λ , эту задачу можно сформулировать и иначе: *когда найдется функция $g \in H(G)$, не обращающаяся в нуль в G , такая, что*

$$\log |g| \leq M - \log |f_\Lambda| \quad \text{на } G? \quad (0.3)$$

Ясно, что функция $f = f_\Lambda g$ – искомая.

3. *Описание множеств (не-)единственности для $H(G, M)$.* При каких условиях на последовательность Λ и функцию M существует (или не существует) ненулевая функция $f \in H(G, M)$, обращающаяся в нуль на Λ ?

Если она существует, то Λ – множество неединственности для $H(G, M)$; в противном случае – множество единственности. Иная формулировка в обозначениях предыдущего пункта: *существует ли при некоторых условиях на Λ и M функция $g \in H(G)$ такая, что $g \not\equiv 0$ и выполнено (0.3)?*

4. *Задача о мультипликаторе.* Пусть K – некоторый класс функций из $H(G)$, $f \in H(G)$. При каких условиях на функции f и M найдется функция-мультипликатор $g \in K$ такая, что $g \not\equiv 0$ и $fg \in H(G, M)$? Иначе говоря, *когда найдется функция $g \not\equiv 0$, $g \in K$, такая, что выполнено (0.3) с заменой f_Λ на f ?*

Типичные результаты подобного рода – классическая теорема Р. Неванлинны о существовании ограниченного мультипликатора для голоморфной в единичном круге функции ограниченной характеристики при $M \equiv 0$ [2] и теоремы типа Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторах для целых функций экспоненциального типа [3]–[5].

5. *Представление мероморфных функций.* Пусть f – мероморфная в G функция, представленная в виде отношения $f = p_0/q_0$ двух функций p_0 и q_0 из $H(G)$, не имеющих общих нулей. Традиционные характеристики роста мероморфной функции f (такие, как характеристики Неванлинны, Симидзу–Альфорса) выражаются интегралами от субгармонических функций $\max\{\log |p_0|, \log |q_0|\}$ или $\log(|p_0|^2 + |q_0|^2)^{1/2}$. Обозначая обе последние функции одним символом u_f , можно сформулировать задачу о представлении мероморфных функций: *при каких условиях на u_f найдется функция $g \in H(G)$, $g \not\equiv 0$, такая, что*

$$\log |g| \leq M - u_f \quad \text{на } G? \quad (0.4)$$

Легко видеть, что если выполнено (0.4), то $f = p/q$, где $p = p_0 g$ и $q = q_0 g$, но функции p и q уже из пространства $H(G, M)$. Можно требовать в постановке и большее: функции p и q по-прежнему не имеют общих нулей. В этом варианте

функция g в (0.3) должна не иметь нулей в G . Истоки этой задачи – в классическом результате Р. Неванлинны о представлении мероморфной функции ограниченной характеристики в единичном круге отношением ограниченных голоморфных функций [1].

Нетрудно экстраполировать сформулированные пять проблем на функции нескольких комплексных переменных. Как видно из соотношений (0.2)–(0.4), основной момент в их решении – это построение по заданной полунепрерывной снизу функции v голоморфной в области $G \subset \mathbb{C}^n$ функции g , возможно, со специальными свойствами, такой, что

$$\log |g| \leq v \text{ на } G, \quad g \neq 0. \quad (0.5)$$

Традиционный подход к такому построению заключается в более или менее явном конструировании функции g , удовлетворяющей (0.5), используя, например, аппарат бесконечных произведений, интегральных представлений, решения $\bar{\partial}$ - или $\partial\bar{\partial}$ -задач. Как правило, построение функции g облегчается, если действовать поэтапно. Сначала строится плюрисубгармоническая (или плюригармоническая, если g не должна иметь нулей в G) функция h на G (если требуется, с предписанными свойствами) такая, что

$$h \leq v \text{ на } G, \quad h \neq -\infty, \quad (0.6)$$

а затем – требуемая в (0.5) голоморфная функция g , удовлетворяющая ограничению $\log |g| \leq h$. Последний этап может быть преодолен, например, с помощью аппроксимации плюрисубгармонических функций логарифмами модуля голоморфных или методами $\bar{\partial}$ -задачи. Более того, этот этап сразу отпадает, если функция h плюригармоническая.

Нас в данной работе будет интересовать существование функции h , удовлетворяющей (0.6). Явное построение функции h во многих ситуациях и в особенности при $n > 1$ может оказаться затруднительным, если оно вообще возможно. В целях преодоления этой трудности в нашей работе предлагается двойственная постановка такой задачи и ее трактовки для проблем, описанных в пп. 1–5. Двойственные постановки позволяют заменить задачу построения функции h , удовлетворяющей (0.6) и принадлежащей некоторому классу плюрисубгармонических функций H , проверкой равномерной ограниченности снизу действий специальной системы линейных положительных функционалов, предопределяемой классом H , на функцию v из (0.6). Таким образом, задача построения переходит в проблему существования.

В более общей постановке пусть X – упорядоченное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (у.в.п.) с отношением порядка $\leq$, $L(X)$ и $L^+(X)$ – соответственно пространство линейных функционалов и конус линейных положительных функционалов на X , H – выпуклый конус с вершиной в нуле из X .

Функционал $T \in L^+(X)$ порождает на X монотонный и суперлинейный, т.е. положительно однородный и супераддитивный, функционал

$$q_{H,T}: v \rightarrow \sup\{T(h): h \leq v, \quad h \in H\}, \quad v \in X, \quad (0.7)$$

где, как обычно, $\sup \emptyset = -\infty$. Очевидно, конечность $q_{H,T}(v)$ означает существование элемента $h \in H$ такого, что $h \leq v$, как и в (0.6).

Если суперлинейный функционал $q: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ представляется нижней огибающей семейства линейных функционалов S , мажорирующих q ($q \leq S$, если $q(x) \leq S(x)$ для всех $x \in X$), т.е.

$$q(v) = \inf \{S(v) : S \in L(X), q \leq S\}, \quad v \in X, \quad (0.8)$$

то говорим, что *функционал q допускает двойственное представление*. В этом случае конечность $q(v)$ эквивалентна конечности правой части (0.8). Таким образом, двойственная постановка рассматриваемых задач сводится по сути к нахождению условий возможности двойственного представления для суперлинейного функционала q на X с последующей расшифровкой этих условий для функционала (0.7) в терминах конуса H и линейного функционала T .

Если суперлинейный функционал q принимает только конечные значения, то как следствие теоремы Хана–Банаха легко устанавливается, что q допускает двойственное представление [6, с. 299]. Возможность такого представления становится проблематичной, если q может принимать значение $-\infty$ [7, § 1, п. 2], а в контексте рассматриваемых приложений только этот случай и интересен. Для локально выпуклых пространств X исчерпывающий (топологический!) ответ дает теорема Л. Хёрмандера: *суперлинейный функционал допускает двойственное представление, если и только если он полунепрерывен сверху* (см. [8], [9]). Следует отметить, что проверка полунепрерывности в конкретных ситуациях может также оказаться непростой задачей. Если рассматривать функционал q как определенный только на конусе $\{x \in X : q(x) \neq -\infty\}$, то некоторые условия возможности представления (0.8) получены М. М. Фельдманом [10, § 3]. Кроме того, для некоторых функциональных пространств X ряд результатов теории функций представляют собой не что иное, как возможность двойственного представления специального суперлинейного функционала $q_{H,T}$ или противоположного ему. Отметим здесь работу [11, гл. II, теорема 2.1], в которой $X = C(K)$ – пространство действительных непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K , $H = \operatorname{Re} A$, где A – равномерная алгебра на K , $T = \operatorname{Re} \varphi$, где φ – гомоморфизм на A ; работы [12], [13, гл. XI, Т45], в которых $X = C(K)$ со специальным отношением порядка $f \leq g$, если $f(t) \leq g(t)$ для $t \in A$, где A – шиловское множество на компакте K относительно выпуклого конуса H ; а также теорему П. Кусиса о наименьшей супергармонической мажоранте [4], [14], [15], где X – пространство действительных непрерывных в $\mathbb{C}$ функций, H – конус непрерывных супергармонических в $\mathbb{C}$ функций, $T = \delta_z$ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке $z \in \mathbb{C}$, и теорему о наименьшей мажоранте [16], [17], где теорема П. Кусиса распространяется на классы функций, определенных в области из $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, и на выпуклые подконусы H конуса супергармонических в этой области функций. Аналогичные вопросы рассматривались Ч. Бу и В. Шахермайером в статье [18, предложение III.3] и в работах Е. А. Полецкого о голоморфных потоках [19, следствие], [20, теорема 6.2] для конуса плюри-субгармонических функций в области.

В этой статье возможность двойственного представления исследуется для случая, когда у.в.п. X можно задать как проективный предел последовательности

у.в.п. X_n , $n = 1, 2, \dots$, и а priori известно, что двойственное представление имеет место для суперлинейных функционалов q_n на X_n , определенным образом порожденных функционалом q . Привлечение проективных пределов связано с тем, что эти результаты применяются к функциональным пространствам на области G из $\mathbb{C}^n$, а их часто удобно рассматривать как пересечение пространств функций, определенных на компактах из G , т.е. как проективный предел. Кроме того, исследование вопроса о двойственном представлении в такой постановке открывает перспективы его применения к более широким и разнообразным классам функций, чем тех, которые описаны в пп.1–5.

§ 1. Проективный предел векторных решеток

Пусть $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность у.в.п. над $\mathbb{R}$ и $\leq_n$ – отношение порядка на X_n . Проекцию вектора $x = (x_n)$ из векторного пространства-произведения $\prod_n X_n$ на пространство X_n обозначаем через $\text{pr}_n x = x_n$. На $\prod_n X_n$ вводится естественный порядок $\leq$, а именно $x = (x_n) \leq x' = (x'_n)$ в $\prod_n X_n$, если и только если $x_n \leq_n x'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Нулевой элемент различных векторных пространств обозначаем одним и тем же символом 0, что, надеемся, не должно вызвать разночтений. Положительность всюду понимается как ≥ 0 , а монотонность – как монотонное возрастание.

Пусть p_n – линейные монотонные, т.е. положительные, отображения X_{n+1} в X_n . Подпространство X в $\prod_n X_n$, элементы x которого удовлетворяют условию

$$\text{pr}_n x = p_n(\text{pr}_{n+1} x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

снабженное индуцированным с у.в.п. $\prod_n X_n$ отношением порядка $\leq$, называем *проективным пределом последовательности у.в.п. X_n относительно отображений p_n* и обозначаем $X = \varprojlim X_n p_n$. Из (1.1) видно, что

$$p_n(\text{pr}_{n+1} B) = \text{pr}_n B, \quad B \subset X. \quad (1.2)$$

У.в.п. называется *векторной решеткой*, если всякая пара элементов в нем имеет точную верхнюю грань (т.в.г.), а следовательно, и точную нижнюю грань (т.н.г.).

Проективный предел $X = \varprojlim X_n p_n$ векторных решеток X_n называем *правильным*, если каждое отображение p_n сохраняет т.в.г. для конечных множеств, т.е. для любого конечного множества $B_{n+1} \subset X_{n+1}$ выполнено

$$\sup_n p_n(B_{n+1}) = p_n(\sup_{n+1} B_{n+1}),$$

где $\sup_n$ – операция т.в.г. на X_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный проективный предел векторных решеток X_n . Тогда:

- 1) если $B \subset X$, для каждого n проекции $\text{pr}_n B$ конечны в X_n и $v_n = \sup_n \text{pr}_n B$, то существует т.в.г. в множестве B в X , причем $\text{pr}_n v = v_n$ и $\sup B$ в X совпадает с т.в.г. B в $\prod_n X_n$;
- 2) X – векторная решетка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода утверждения 1) положим $v = (v_n) \in \prod_n X_n$. Очевидно, v – т.в.г. множества B в $\prod_n X_n$. В силу сохранения т.в.г. отображениями p_n , учитывая (1.2), имеем

$$p_n(v_{n+1}) = p_n(\sup_{n+1} \text{pr}_{n+1} B) = \sup_n p_n(\text{pr}_{n+1} B) = \sup \text{pr}_n B = v_n,$$

т.е. для $x = v$ справедливо (1.1) и, значит, $v \in X$. Так как порядок на X индуцирован с у.в.п. $\prod_n X_n$, то v – т.в.г. множества B в X и первое утверждение доказано. Второе утверждение легко следует из первого, так как пространство-произведение векторных решеток есть векторная решетка [6], [21, гл. II, § 1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный проективный предел векторных решеток X_n . Тогда все у.в.п. $\text{pr}_n X$ с индуцированным с X_n отношением порядка $\leq_n$ есть векторные решетки и сужения отображений p_n на $\text{pr}_{n+1} X$ сохраняют т.в.г. для конечных множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n, x'_n \in \text{pr}_n X$, т.е. существуют $x, x' \in X$ такие, что $\text{pr}_n x = x_n$, $\text{pr}_n x' = x'_n$. По предложению 1.1 X – векторная решетка и существует т.в.г. v пары элементов x, x' в X , для которой $\sup_n \{x_n, x'_n\} = \text{pr}_n v \in \text{pr}_n X$. Таким образом, $\text{pr}_n v$ – т.в.г. элементов x_n, x'_n в $\text{pr}_n X$ и $\text{pr}_n X$ – векторная решетка. Более того, установлено, что т.в.г. $\sup_n^* \{x_n, x'_n\}$ в $\text{pr}_n X$ совпадает с $\sup_n \{x_n, x'_n\}$ в X_n . Отсюда для сужений p_{n-1}^* , $n > 1$, отображений p_{n-1} на $\text{pr}_{n-1} X$ имеем

$$\begin{aligned} p_{n-1}^*(\sup_n^* \{x_n, x'_n\}) &= p_{n-1}(\sup_n \{x_n, x'_n\}) = \sup_{n-1} \{p_{n-1}(x_n), p_{n-1}(x'_n)\} \\ &= \sup_n^* \{p_{n-1}^*(x_n), p_{n-1}^*(x'_n)\}, \end{aligned}$$

т.е. все отображения p_n^* сохраняют т.в.г. для конечных множеств. Предложение доказано.

Проективный предел $X = \varprojlim X_n p_n$ называем *приведенным*, если для каждого n проекция $\text{pr}_n X$ совпадает с X_n (ср. [22, гл. IV, § 4]). Без ограничения общности можно считать любой проективный предел приведенным: обозначая p_n^* сужения p_n на $\text{pr}_{n+1} X$ и учитывая (1.2), получаем

$$X = \varprojlim X_n p_n = \varprojlim (\text{pr}_n X) p_n^*.$$

При этом все отображения p_n^* в силу (1.2) оказываются сюръективными. Более того, если первоначально рассматривался проективный предел векторных решеток и все отображения p_n сохраняли т.в.г. для конечных множеств, то по предложению 1.2 после перехода к приведенному проективному пределу мы по-прежнему имеем дело с проективным пределом векторных решеток относительно отображений p_n^* , сохраняющих т.в.г. для конечных множеств.

Каждый правильный приведенный проективный предел $X = \varprojlim X_n p_n$ векторных решеток решеточно изоморфен такому же пределу по подпоследовательности $X = \varprojlim X_{n_k} q_k$, где q_k – суперпозиции

$$p_{n_{k-1}} \circ p_{n_{k-1}-1} \circ \cdots \circ p_{n_k-1}: X_{n_k} \longrightarrow X_{n_{k-1}}.$$

Примерами классических у.в.п., которые можно рассматривать как проективный предел, являются пространства $C(G)$ и $L^1_{\text{loc}}(G, \mu)$ (над полем $\mathbb{R}$) соответственно непрерывных и локально интегрируемых по положительной мере Радона μ функций на локально компактном хаусдорфовом σ -компактном пространстве G с каноническими отношениями порядка. Действительно, существует последовательность $\{G_n\}$ относительно компактных в G множеств, образующих покрытие G , таких, что $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$C(G) = \varprojlim C(\overline{G}_n)p_n, \quad L^1_{\text{loc}}(G, \mu) = \varprojlim L^1(\overline{G}_n, \mu)p_n \quad (1.3)$$

– правильные приведенные пределы векторных решеток относительно операторов сужения p_n функций с $\overline{G}_{n+1}$ на $\overline{G}_n$.

§ 2. Линейные положительные функционалы на проективном пределе векторных решеток

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный приведенный проективный предел векторных решеток X_n . Для любого функционала $T \in L^+(X)$ существуют свой номер $n(T) \in \mathbb{N}$ и последовательность положительных функционалов $T_n \in L^+(X_n)$, $n \geq n(T)$, такие, что

$$T(x) = T_n(\text{pr}_n x), \quad x \in X, \quad (2.1)$$

для всех $n \geq n(T)$.

Обратно, если T_n – некоторый функционал из $L^+(X)$, то соотношение (2.1) определяет линейный положительный функционал T на X .

Последняя часть этого предложения очевидна. Функционал $T_n \in L^+(X_n)$, связанный с функционалом T по правилу (2.1), будем называть *представителем функционала T* (из $L^+(X_n)$) и обозначать это как $T = \overline{T}_n$. Первое утверждение предложения 2.1 означает, что существует последовательность представителей T_n функционала T в $L^+(X_n)$, $n \geq n(T)$, связанных для любого $x = (x_n) \in X$ соотношениями

$$T_n(p_{n,m}(x_m)) = T_m(x_m), \quad m \geq n \geq n(T), \quad (2.2)$$

где $p_{n,m}$ – суперпозиция $p_n \circ p_{n+1} \circ \dots \circ p_{m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Допустим сначала, что найдется номер n такой, что $T(x) = T(x')$, как только $\text{pr}_n x = \text{pr}_n x'$. Тогда функционал T_n однозначно определяется по правилу (2.1). Он линейный в силу линейности отображений pr_n и T . Кроме того, он положителен. Действительно, если $x_n \in \text{pr}_n X$, $0 \leq_n x_n$, то существует $x \in X$ такое, что $\text{pr}_n x = x_n$. По первому утверждению предложения 1.1 $x_n = \text{pr}_n x^+$, где $x^+ = \sup\{x, 0\} \geq 0$ в X и $T_n(x_n) = T_n(\text{pr}_n x^+) = T(x^+) \geq 0$.

Теперь можно положить $n(T) = n$, а остальные представители T_m функционала T в $L^+(X_m)$ однозначно определяются при $m \geq n$ соотношениями (2.2).

2. Покажем, что условие п. 1 выполнено. Предположим, что такого номера n не существует. Тогда для любого $m = 1, 2, \dots$ найдется элемент $x^{(m)} \in X$ такой, что

$$\text{pr}_m x^{(m)} = 0, \quad T(x^{(m)}) \neq 0. \quad (2.3)$$

Домножая, если это необходимо, $x^{(m)}$ на действительные числа, можно считать, что

$$T(x^{(m)}) = m. \quad (2.4)$$

В силу (2.3) и линейности отображений $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ для каждого $x^{(m)}$ имеем $\text{rg}_n x^{(m)} = 0$, $n \leq m$, т.е. при фиксированном n лишь конечное число элементов последовательности $\{\text{rg}_n x^{(m)} : m = 1, 2, \dots\}$ отлично от нуля в векторной решетке X_n . Следовательно, по первому утверждению предложения 1.1 последовательность $\{x^{(m)}\}$ ограничена сверху в X (элементом из X) и для положительного функционала T справедливо соотношение $\sup\{T(x^{(m)}) : m = 1, 2, \dots\} < +\infty$, что приводит к противоречию с (2.4). Предложение доказано.

Для классических у.в.п. из (1.3) предложение 2.1 отражает тот известный факт, что линейные положительные функционалы на этих пространствах имеют компактный носитель.

Отметим также, что по общей схеме из работы [23, гл. 3] можно определить проективный предел несчетного семейства у.в.п. При этом аналогии фактов предыдущего параграфа нетрудно получить и в этом более общем случае. В то же время нам не известно естественное обобщение предложения 2.1 в таком варианте.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через $L^r(X)$ пространство всех регулярных линейных функционалов на у.в.п. X , т.е. $L^r(X) = L^+(X) - L^+(X)$ [6]. По теореме Рисса–Канторовича $L^r(X)$ – векторная решетка (и даже K -пространство) с положительным конусом $L^+(X)$ [6, теорема 6(3.1)], если X – векторная решетка. Предложение 2.1 означает, что у.в.п. $L^r(X)$, где $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный приведенный проективный предел векторных решеток X_n , решеточно изоморфно индуктивному пределу $\varinjlim i_n L^r(X_n)$ относительно положительных линейных отображений $i_n : L^r(X_n) \rightarrow L^r(X_{n+1})$, сопряженных к линейным отображениям p_n . Не останавливаясь подробно на соответствующих определениях, отметим, что они легко конструируются по общей схеме, изложенной в книге [23, гл. 3, § 2], и по аналогии с индуктивными пределами топологических векторных пространств [24], [22, гл. II и гл. IV, § 4].

§ 3. Двойственное представление для суперлинейного функционала на проективном пределе

Функционал $q : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ на векторном пространстве X (над полем $\mathbb{R}$) называется *суперлинейным*, если он супераддитивный, т.е.

$$q(x_1 + x_2) \geq q(x_1) + q(x_2), \quad x_1, x_2 \in X,$$

и положительно однородный, т.е.

$$q(\lambda x) = \lambda q(x), \quad x \in X, \quad \lambda \geq 0.$$

Заметим, что в этом определении вместо положительной однородности q достаточно требовать выполнения последнего соотношения лишь для $\lambda > 0$ (*строго положительная однородность*) и конечности $q(0)$. Действительно, в этом случае $q(0) = q(2 \cdot 0) = 2q(0)$ и $q(0) = 0$.

Пусть q – суперлинейный функционал на у.в.п. X . Следующее утверждение тривиально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для любого линейного подпространства $Y \subset X$ и для любого $y \in Y$

$$q(y) \leq \inf\{S(y): S \in L(Y), q \leq S \text{ на } Y\}. \quad (3.1)$$

Если правая часть (3.1) равна $-\infty$, то $q(y) = -\infty$.

Перейдем к рассмотрению той ситуации, когда правая часть в (3.1) конечна, т.е. существует $c \in \mathbb{R}$, для которого

$$c < \inf\{S(y): S \in L(Y), q \leq S \text{ на } Y\}. \quad (3.2)$$

Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный приведенный проективный предел векторных решеток X_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Последовательность функционалов q_n на X_n , $n = 1, 2, \dots$, определенных по правилу

$$q_n(x_n) = \sup\{q(x): x \in X, \text{pr}_n x = x_n\}, \quad x_n \in X_n, \quad (3.3)$$

будем называть *последовательностью функционалов, ассоциированной с суперлинейным функционалом q* .

Вообще говоря, функционалы q_n могут принимать значение $+\infty$. Отметим следующие свойства ассоциированной с q последовательности $\{q_n\}$.

1) Функционал q_n , не принимающий значения $+\infty$, суперлинеен.

Супераддитивность следует из соотношений

$$\begin{aligned} q_n(x_n + y_n) &\geq \sup\{q(x + y): \text{pr}_n x = x_n, \text{pr}_n y = y_n\} \\ &\geq \sup\{q(x) + q(y): \text{pr}_n x = x_n, \text{pr}_n y = y_n\} \\ &= \sup\{q(x): \text{pr}_n x = x_n\} + \sup\{q(y): \text{pr}_n y = y_n\} = q_n(x_n) + q_n(y_n). \end{aligned}$$

Из определения 3.1 в силу линейности отображений pr_n легко следует строго положительная однородность q_n . Кроме того, по определению 3.1 имеем

$$0 = q(0) \leq q_n(0) < +\infty,$$

т.е. $q_n(0)$ конечно, а значит, q_n – суперлинейный функционал.

2) Для любых $x = (x_n) \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$q_n(x_n) \geq q_{n+1}(x_{n+1}) \geq q(x).$$

Последнее неравенство сразу следует из определения 3.1, а первое – из (3.3) и определения (1.1) элементов проективного предела.

3) Пусть Y – линейное подпространство в X , $Y_n = \text{pr}_n Y$, $y = (y_n) \in Y$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\inf\{S(y): S \in L(Y), q \leq S \text{ на } Y\} \leq \inf\{S_n(y_n): S_n \in L(Y_n), q_n \leq S_n \text{ на } Y_n\}. \quad (3.4)$$

Действительно, если справа стоит $+\infty$ (по определению $\inf \emptyset = +\infty$), то неравенство очевидно. Допустим, $q_n \leq S_n$ на Y_n , $S_n \in L(Y_n)$. Тогда для линейного функционала $S = S_n \circ \text{pr}_n \in L(Y)$ по определению 3.1 при всех $y = (y_n) \in Y$ имеем $q(y) \leq q_n(y_n) \leq S_n(y_n) = S(y)$, значит, $q \leq S$ на Y и $S_n(y_n)$ не меньше левой части (3.4). Переходя к $\inf$ по всем $S_n \geq q_n$, получаем (3.4).

Пусть $x^{(k)}$ – последовательность элементов у.в.п. X . *Верхний предел* этой последовательности определяется как

$$\overline{\lim}_k x^{(k)} = \inf_n \sup_{k \geq n} x^{(k)},$$

если все супремумы и инфимум в правой части существуют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Последовательность $\{x^{(k)}\} \subset X = \varprojlim X_n p_n$ называем *стабилизирующейся к элементу* $x \in X$, если $\text{pr}_n x^{(k)} = \text{pr}_n x$ при всех $k \geq n$.

Для того чтобы последовательность $x^{(k)}$ стабилизировалась к элементу x , достаточно в силу (1.1) выполнения условия $\text{pr}_n x^{(n)} = \text{pr}_n x$ для некоторой бесконечной последовательности номеров n .

Если X – правильный приведенный проективный предел векторных решеток, то из предложения 1.1 следует, что для любой стабилизирующейся к $x \in X$ последовательности $\{x^{(k)}\} \subset X$ существует $\overline{\lim}_k x^{(k)} = x$, так как при фиксированном n среди $\text{pr}_n x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, лишь конечное число отличается от x_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть Y – линейное подпространство в у.в.п. X . Суперлинейный функционал q на у.в.п. X *допускает двойственное представление на элементе* $y \in Y$ *относительно* Y , если

$$q(y) = \inf\{S(y): S \in L(Y), q \leq S \text{ на } Y\}. \quad (3.5)$$

Функционал q *допускает двойственное представление на подпространстве* $Y \subset X$, если он допускает двойственное представление на каждом элементе $y \in Y$ относительно Y .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный приведенный проективный предел векторных решеток X_n , Y – линейное подпространство в X , $Y_n = \text{pr}_n Y$ и $y = (y_n) \in Y$, q – суперлинейный функционал на X , а $\{q_n\}$ – ассоциированная с ним последовательность функционалов и при некотором n функционал q_n не принимает значение $+\infty$. Если начиная с некоторого n каждый суперлинейный функционал q_n допускает двойственное представление на y_n относительно Y_n и для любой стабилизирующейся к y последовательности $\{x^{(k)}\} \subset X$ выполнено

$$\overline{\lim}_k q(x^{(k)}) \leq q(\overline{\lim}_k x^{(k)}), \quad (3.6)$$

то q допускает двойственное представление на Y относительно Y .

Если q еще и монотонный функционал, то вместо (3.6) достаточно требовать, чтобы для любой убывающей и стабилизирующейся к y последовательности $\{w^{(k)}\} \subset X$ выполнялось

$$\inf_k q(w^{(k)}) \leq q(\inf_k w^{(k)}). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойствам 2) и 1) ассоциированной с q последовательности $\{q_n\}$ и по условию теоремы все функционалы q_n при $n > n_0$ суперлинейны.

Пусть выполнено неравенство (3.2). Тогда по свойству 3) и из двойственного представления функционалов q_n на y_n при $n > n_0$ имеем

$$c < \inf\{S_n(y_n): S_n \in L(Y_n), q_n \leq S_n \text{ на } Y_n\} = q_n(y_n). \quad (3.8)$$

Отсюда по определению 3.1 функционалов q_n при любом $n > n_0$ найдется элемент $x^{(n)} \in X$ такой, что

$$c < q(x^{(n)}), \quad \text{pr}_n x^{(n)} = y_n. \quad (3.9)$$

При этом последовательность $\{x^{(n)}\}$ стабилизируется к элементу y ввиду последнего равенства и $\varlimsup_k x^{(k)} = y$. По условию (3.6) и из (3.9) получаем

$$c \leq \varlimsup_k q(x^{(k)}) \leq q(\varlimsup_k x^{(k)}) = q(y).$$

Отсюда и из (3.2) следует неравенство, противоположное (3.1), т.е. q допускает двойственное представление на элементе y относительно Y .

Допустим, q — еще и монотонный функционал. Покажем, что соотношение (3.7) влечет (3.6). Последовательность $x^{(k)}$, стабилизирующаяся к y , по предложению 1.1 ограничена. Значит, существуют точные верхние грани

$$w^{(k)} = \sup_{n \geq k} x^{(n)}.$$

По построению $\{w^{(k)}\}$ — убывающая последовательность, которая по предложению 1.1 также стабилизируется к y , и $\inf_k w^{(k)} = y$.

Если выполнено условие (3.7), то в силу монотонности q по определению верхнего предела имеем

$$q(\varlimsup_n x^{(n)}) = q(\inf_k w^{(k)}) \geq \inf_k q(w^{(k)}) \geq \inf_k \sup_{n \geq k} q(x^{(n)}) = \varlimsup_n q(x^{(n)}),$$

т.е. выполнено (3.6). Теорема доказана.

§ 4. Супремальный функционал

Пусть H – выпуклый конус из у.в.п. X с отношением порядка $\leq$ (не обязательно $0 \in H$). С каждым функционалом $T \in L^+(X)$ свяжем, как и в (0.7), монотонный функционал

$$q_{H,T}: x \longrightarrow \sup\{T(h): h \leq x, h \in H\}, \quad x \in X. \quad (4.1)$$

Функционал $q_{H,T}$ называем *супремальным функционалом, порожденным функционалом T относительно конуса H* [6].

Для дальнейшего применения возникает необходимость выяснения условий возможности двойственного представления супремального функционала в терминах конуса H и функционала T . Одна из составных частей этой проблемы – описание в этих терминах линейных функционалов, мажорирующих супремальный функционал.

Пусть Y – линейное подпространство у.в.п. X с индуцированным на нем с X отношением порядка $\leq$. Для функционалов $S \in L^+(Y)$ на у.в.п. Y введем *отношение $T \prec_H S$* , означающее, что

$$T(h) \leq S(y) \quad \text{для всех } h \in H \text{ при } h \leq y \in Y. \quad (4.2)$$

Интервал $\{S \in L^+(Y): T \prec_H S\}$, следуя [6], называем *положительным ростком в $L^+(Y)$ функционала T на конусе H* и обозначаем этот интервал как $\text{Spr}_Y(T, H)$. Если $Y = X$, то отношение $\prec_H$ наводит на $L^+(X)$ предпорядок, называемый *упорядоченностью Шоке* [6, с. 294], [12], [13, гл. XI]. В некоторых специальных случаях элементы из положительного ростка называют *выметаниями* или *представляющими мерами* функционала T относительно конуса H [13, гл. XI], [25].

Далее вместо символа $\prec_H$ иногда будем писать просто $\prec$, если из контекста ясно, какой конус H имеется в виду.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть Y – линейное подпространство у.в.п. X и H – выпуклый конус в X , содержащий отрицательный элемент. Тогда $q_{H,T}$ – суперлинейный функционал и справедливо равенство*

$$\{S \in L(Y): q_{H,T} \leq S \text{ на } Y\} = \text{Spr}_Y(T, H).$$

Частный случай этого утверждения, когда $Y = X$ и H – выпуклый конус с вершиной в нуле, доказан в [6, с. 299]. Приведенное там простое доказательство легко переносится и на сформулированный выше вариант.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Супераддитивность и строго положительная однородность супремального функционала легко следует из выпуклости конуса H . Кроме того, в силу существования в H отрицательного элемента имеем $q_{H,T}(0) > -\infty$, значит, $q_{H,T}$ – суперлинейный функционал.

Покажем, что левая часть равенства включена в правую. Пусть

$$q_{H,T} \leq S \text{ на } Y. \quad (4.3)$$

Если $0 \leq y \in Y$, то из (4.3) следует

$$0 = q_{H,T}(0) \leq q_{H,T}(y) \leq S(y), \quad (4.4)$$

значит, S – положительный функционал.

Допустим, что $h \in H$ и $h \leq y \in Y$. Тогда по определению супремального функционала в силу его монотонности из (4.3) имеем

$$T(h) = q_{H,T}(h) \leq q_{H,T}(y) \leq S(y),$$

т.е. $S \in \text{Spr}_Y(T, H)$.

Обратно, пусть $S \in \text{Spr}_Y(T, H)$, $y \in Y$. Тогда по определениям супремального функционала и положительного роста для $y \in Y$ имеем

$$q_{H,T}(y) = \sup\{T(h) : h \leq y, h \in H\} \leq S(y).$$

Предложение доказано.

Дадим в терминах H и T описание последовательности всех функционалов q_n , ассоциированных в смысле определения 3.1 с супремальным функционалом $q_{H,T}$ на правильном приведенном проективном пределе векторных решеток $X = \varprojlim X_n p_n$.

Для функционала $T \in L^+(X)$ по предложению 2.1 существует последовательность функционалов $\{T_n \in L^+(X_n) : n \geq n(T)\}$, являющихся представителем функционала T . Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *При $n \geq n(T)$ все q_n – супремальные функционалы на X_n , порожденные функционалами T_n относительно конусов $H_n = \text{pr}_n H$, т.е.*

$$q_n(x_n) = \sup\{T_n(h_n) : h_n \leq_n x_n, h_n \in H_n\}, \quad x_n \in X_n, \quad (4.5)$$

где $\leq_n$ – отношение порядка на X_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n \geq n(T)$ необходимо показать, что при каждом фиксированном $x_n \in X_n$ выполнено равенство (4.5).

По определению 3.1 и из (4.1) имеем

$$q_n(x_n) = \sup\{T(h) : h \leq x, h \in H, \text{pr}_n x = x_n\}.$$

Поскольку T_n – представитель T из $L^+(X_n)$, то из последнего равенства следует

$$q_n(x_n) = \sup\{T_n(\text{pr}_n h) : h \in H, h \leq x, \text{pr}_n x = x_n\}. \quad (4.6)$$

Покажем, что множество

$$\{h_n : h \in H, h \leq x, h_n = \text{pr}_n h, \text{pr}_n x = x_n\} \quad (4.7)$$

совпадает с множеством

$$\{h_n : h_n \leq_n x_n, h_n \in H_n\}. \quad (4.8)$$

Если h_n из (4.7), то $h_n \leq_n x_n$, следовательно, множество (4.7) включается в (4.8).

Обратно, пусть h_n из (4.8). Существуют элементы $h \in H$ и $x' \in X$ такие, что $h_n = \text{pr}_n h$, $\text{pr}_n x' = x_n$. Полагаем $x = \sup\{h, x'\}$. Тогда $\text{pr}_n x = x_n$ и, очевидно, $h \leq x$. Следовательно, (4.8) содержится в (4.7) и эти множества совпадают. Супремум в правой части (4.5) берется по множеству (4.8), а в (4.6) – по множеству (4.7), значит, из (4.6) следует (4.5). Предложение доказано.

В заключение параграфа приведем примеры положительных ростков функционала.

Пусть G – область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$.

ПРИМЕР 1. В у.в.п. $X = C(G)$ в качестве функционала T при $z \in G$ рассмотрим функционал Дирака δ_z , определяемый равенством $\delta_z(f) = f(z)$; конус H – пространство $PH(G)$ всех *плюригармонических* в G функций. Тогда при $Y = X$ положительный росток меры δ_z – это все положительные меры Радона μ с компактным носителем в G , удовлетворяющие условию

$$h(z) \leq \int h d\mu, \quad h \in PH(G). \quad (4.9)$$

Так как в данном случае H – подпространство, то условие (4.9) можно заменить на условие

$$h(z) = \int h d\mu, \quad h \in PH(G). \quad (4.10)$$

Меры μ , удовлетворяющие (4.10), далее называются *представляющими мерами* (для точки z) [11], [12], [26].

ПРИМЕР 2. Пусть по-прежнему $X = Y = C(G)$, $T = \delta_z$, а конус H – пересечение $PSH(G) \cap C(G)$, где $PSH(G)$ – конус всех *плюрисубгармонических* в G функций (исключая тождественную $-\infty$). Тогда положительный росток $\text{Spr}_Y(T, H)$ состоит из всех положительных мер Радона μ с компактным носителем в G , удовлетворяющих условию

$$v(z) \leq \int v d\mu, \quad v \in PSH(G) \cap C(G). \quad (4.11)$$

Такие меры далее называются *мерами Йенсена* (для точки z) [11], [4], [14], [15].

ПРИМЕР 3. Пусть $X = L^1_{\text{loc}}(G)$ – пространство (над полем $\mathbb{R}$) всех локально интегрируемых по мере Лебега функций в области G , $Y = C(G)$. В качестве конуса H рассмотрим конус $PSH(G)$, а в роли функционала T – некоторую положительную меру Радона ν с компактным носителем в G , абсолютно непрерывную относительно меры Лебега. Тогда положительный росток $\text{Spr}_Y(T, H)$ состоит из всех положительных мер Радона μ с компактным носителем в G , удовлетворяющих условию

$$\int v d\nu \leq \int v d\mu, \quad v \in PSH(G). \quad (4.12)$$

Меры μ , удовлетворяющие условию (4.12), далее называются *выметаниями меры ν* , и обозначается это как $\nu \prec \mu$ [12], [13].

§ 5. Двойственное представление для супремального функционала на проективном пределе

Пусть Y – подмножество в у.в.п. X . Конус H называется *минорирующим* для Y , если для любого $y \in Y$ существует $h \in H$ такое, что $h \leq y$, где $\leq$ – отношение порядка на X .

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный приведенный проективный предел векторных решеток X_n и Y – линейное подпространство у.в.п. X с индуцированным на нем с у.в.п. X отношением порядка $\leq$, $T \in L^+(X)$, выпуклый конус $H \subset X$ содержит отрицательный элемент.

Допустим, что для каждого n конус $H_n = \text{pr}_n H$ – минорирующий для $Y_n = \text{pr}_n Y$ и выполнены следующие условия:

- 1) для любой ограниченной сверху в X последовательности $\{h^{(n)}\} \subset H$ существует т.в.г. $\sup_n h^{(n)} \in H$;
- 2) для любой убывающей ограниченной снизу в X последовательности $\{v^{(k)}\} \subset H$ существует т.н.г. $\inf_k v^{(k)} \in H$;
- 3) для любой убывающей в X последовательности $\{v^{(k)}\} \subset H$ выполнено

$$T(\inf_k v^{(k)}) \geq \inf_k T(v^{(k)}),$$

где для неограниченной снизу последовательности $\{v^{(k)}\} \subset H$ полагаем $\inf_k v^{(k)} = -\infty$ и $T(-\infty) = -\infty$.

Тогда супремальный функционал $q_{H,T}$ допускает двойственное представление на Y , т.е.

$$q_{H,T}(y) = \inf\{S(y) : S \in \text{Spr}_Y(T, H)\}, \quad y \in Y. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ассоциированные с $q_{H,T}$ функционалы q_n по предложению 4.2 можно определить равенством (4.5) при $n \geq n(T)$. Так как конусы H_n минорирующие в Y_n , то q_n принимают на Y_n при $n \geq n(T)$ только конечные значения. Следовательно (см. введение), каждый функционал q_n при $n \geq n(T)$ допускает двойственное представление на у.в.п. $Y_n \subset X_n$ с индуцированным на нем с X_n отношением порядка $\leq_n$.

Супремальные функционалы монотонны, поэтому по теореме 3.1 достаточно показать, что для любой убывающей и стабилизирующей к $y = (y_n) \in Y$ последовательности $\{w^{(k)}\} \subset X$ выполнено (3.7) (с заменой x на y и q на $q_{H,T}$). Напомним, что при этом

$$\inf_k w^{(k)} = y. \quad (5.2)$$

Пусть

$$q_{H,T}(w^{(k)}) = \sup\{T(h) : h \leq w^{(k)}, h \in H\} = a_k, \quad (5.3)$$

где $a_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Последовательность $\{a_k\}$ убывающая. При $\inf_k a_k = -\infty$ условие (3.7) выполнено автоматически.

Далее, пусть $\inf_k a_k > -\infty$. Для $\varepsilon > 0$ из (5.3) следует существование при каждом $k \geq n(T)$ элемента $h^{(k)} \in H$ такого, что

$$T(h^{(k)}) \geq a_k - \varepsilon, \quad h^{(k)} \leq w^{(k)}. \quad (5.4)$$

Так как последовательность $h^{(k)}$ ограничена сверху, то по условию 1) существует

$$v^{(k)} = \sup_{n \geq k} h^{(n)} \in H, \quad k \geq n(T).$$

По построению $\{v^{(k)}\}$ – убывающая последовательность и согласно (5.4) ввиду стабилизации $\{w^{(k)}\}$ к $y = (y_n)$ имеем

$$\text{pr}_n v^{(k)} \leq_n \text{pr}_n w^{(k)} = y_n, \quad n \leq k, \quad (5.5)$$

$$T(v^{(k)}) \geq T(h^{(k)}) \geq a_k - \varepsilon. \quad (5.6)$$

Допустим, последовательность $\{v^{(k)}\}$ ограничена снизу. Тогда по условию 2) существует элемент

$$h = \inf_k v^{(k)} \in H, \quad (5.7)$$

причем из (5.5) следует, что

$$h \leq y. \quad (5.8)$$

Из условия 3) доказываемой теоремы и из (5.6) по построению (5.7) элемента h вытекает

$$T(h) = T(\inf_k v^{(k)}) \geq \inf_k T(v^{(k)}) \geq \inf_k a_k - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно, согласно (5.3) и (5.8) для некоторого $h \in H$, $h \leq y$, выполнено

$$T(h) \leq \inf_k q_{H,T}(w^{(k)}).$$

По определению супремального функционала $q_{H,T}$ и ввиду (5.2) это означает, что

$$\inf_k q_{H,T}(w^{(k)}) \leq q_{H,T}(\inf_k w^{(k)}). \quad (5.9)$$

Таким образом, в этом случае выполнено (3.7).

Если же последовательность $\{v^{(k)}\}$ не ограничена снизу, то $\inf_k v^{(k)}$ обозначается символом $-\infty$, и по условию 3) теоремы имеем

$$-\infty = T(-\infty) = T(\inf_k v^{(k)}) \geq \inf_k T(v^{(k)}).$$

Согласно (5.6) это влечет $\inf_k a_k = -\infty$. В силу определения (5.3) последовательности $\{a_k\}$ получаем

$$\inf_k q_{H,T}(w^{(k)}) = -\infty,$$

т.е. (5.9) выполнено, как и в предыдущем случае.

По теореме 3.1 заключаем, что функционал $q_{H,T}$ допускает двойственное описание на Y :

$$q_{H,T}(y) = \inf\{S(y) : S \in L(Y), \quad q_{H,T} \leq S \text{ на } Y\}, \quad y \in Y.$$

По предложению 4.1 правая часть здесь совпадает с правой частью (5.1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия 1) и 2) в теореме 5.1 можно заменить на одно условие:

(L) для любой ограниченной (одновременно и сверху, и снизу) последовательности $\{h^{(n)}\} \subset H$ существует $\overline{\lim}_n h^{(n)} \in H$.

Действительно, если h и h' – элементы из H , то, рассматривая последовательность $B = \{h, h', h, h', \dots\}$, получим $\sup\{h, h'\} = \overline{\lim} B \in H$, т.е. т.в.г. любого конечного множества из H лежит в H . Отсюда если $\{h^{(n)}\}$ – ограниченная сверху последовательность из H , то последовательность $\{\sup_{n \leq k} h^{(n)}\} \subset H$ ограничена и

$$\sup_n \{h^{(n)}\} = \sup_k \left\{ \sup_{n \leq k} h^{(n)} \right\} = \overline{\lim}_k \sup_{n \leq k} h^{(n)} \in H,$$

т.е. выполнено условие 1) теоремы 5.1. Условие 2) сразу следует из того, что для любой убывающей ограниченной снизу последовательности ее верхний предел (если он существует) равен ее т.н.г.

§ 6. Топологический вариант теоремы о двойственном представлении

Для формулировки топологического варианта теоремы о двойственном представлении супремального функционала нам потребуется понятие решетки Фреше [22].

Пусть X – векторная решетка. Для $x \in X$, как обычно, полагаем $|x| = \sup\{-x, x\}$ – абсолютная величина элемента x . Если к тому же X – полное метризуемое локально выпуклое пространство, т.е. пространство Фреше, обладающее базисом окрестностей нуля таким, что для любой окрестности нуля V из этого базиса при любом $x \in V$ неравенство $|y| \leq |x|$ влечет $y \in V$, то X называется *решеткой Фреше*. Известно, что решетка Фреше – упорядоченное локально выпуклое пространство, т.е. конус положительных элементов в нем замкнут [22, гл. V, 7.2]. Кроме того, если p – линейное отображение решетки Фреше в решетку Фреше, то p непрерывно [22, гл. V, 6.4, 6.1] (в частности, непрерывны линейные положительные функционалы на решетке Фреше).

Таким образом, если $X = \varprojlim X_n p_n$ – приведенный проективный предел решеток Фреше как у.в.п., то отображения p_n непрерывны и порождают на X топологию проективного предела [22, гл. II], [24]. Топология на X определяется как топология, индуцированная с топологического произведения $\prod_n X_n$. Если проекции pr_n рассматривать как определенные на X , то pr_n – линейные непрерывные отображения и в качестве базиса окрестностей нуля в X можно взять прообразы $\text{pr}_n^{-1}(V_n)$ всевозможных окрестностей нуля V_n пространств X_n . Пространство X как топологический проективный предел локально выпуклых хаусдорфовых пространств также будет локально выпуклым и хаусдорфовым.

Конус положительных элементов в X замкнут в X . Действительно, если K_n – конусы положительных элементов в решетках Фреше X_n , то они замкнуты в X_n . Конус положительных элементов K в X – это пересечение $\bigcap_n \text{pr}_n^{-1}(K_n)$ замкнутых в силу непрерывности отображений pr_n множеств $\text{pr}_n^{-1}(K_n)$, т.е. конус K замкнут в X . Следовательно, X – упорядоченное локально выпуклое пространство.

Всюду далее проективный предел решеток Фреше рассматривается одновременно и как упорядоченное локально выпуклое пространство с топологией проективного предела, описанной выше.

Подмножество H в локально выпуклом пространстве называется *секвенциально замкнутым*, если для любой сходящейся последовательности элементов из H предел последовательности принадлежит H .

Подмножество B в локально выпуклом пространстве называется *секвенциально предкомпактным*, если любая последовательность элементов из B содержит сходящуюся подпоследовательность.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $X = \varprojlim X_n p_n$ – правильный приведенный проективный предел решеток Фреше X_n и Y – линейное подпространство у.в.п. X с индуцированным на нем с у.в.п. X отношением порядка $\leq$, $T \in L^+(X)$, выпуклый конус $H \subset X$ секвенциально замкнут в X и содержит отрицательный элемент.

Допустим, что для каждого n конус $H_n = \text{pr}_n H$ – минорирующий для $Y_n = \text{pr}_n Y$ и выполнено следующее условие:

(R) для любого не более чем счетного подмножества $B \subset H$, ограниченного сверху и удовлетворяющего условию $\inf T(B) > -\infty$, при каждом $n \geq n(T)$ проекция $\text{pr}_n B$ секвенциально предкомпактна в X_n .

Тогда супремальный функционал $q_{H,T}$ допускает двойственное представление (5.1) на Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в начале доказательства теоремы 5.1, убеждаемся в том, что все ассоциированные с $q_{H,T}$ функционалы q_n суперлинейны и допускают двойственное представление на Y_n при $n \geq n(T)$. Проверим выполнение условия (3.7) теоремы 3.1 для убывающей стабилизирующей к $y = (y_n) \in Y$ последовательности $\{w^{(k)}\} \subset X$, для которой автоматически выполнено (5.2). Если для последовательности $\{a_k\}$, определенной в (5.3), $\inf_k a_k = -\infty$, то условие (3.7) выполнено очевидным образом.

Пусть

$$\inf_k a_k = a > -\infty. \quad (6.1)$$

Тогда согласно (5.3) найдется последовательность $\{h^{(k)}\} \subset H$, $k \geq n(T)$, такая, что выполнено (5.4). При этом ввиду (6.1) для ограниченного сверху множества $B = \{h^{(k)} : k \geq n(T)\}$ выполнено условие (R), значит, все проекции $\text{pr}_n B$ секвенциально предкомпактны в X_n для всех $n \geq n(T)$. Следовательно, в множестве B можно выбрать последовательность $\{h^{(1,n)}\}$, сходящуюся в $X_{n(T)}$; из последовательности $\{h^{(1,n)}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{h^{(2,n)}\}$, сходящуюся в $X_{n(T)+1}$, и т.д. Диагональный процесс дает последовательность $\{h^{(n,n)}\}$, сходящуюся в каждом X_k , $k \geq n(T)$. Из этого по определению топологии проективного предела вытекает сходимость последовательности $\{h^{(n,n)}\}$ в каждом X_k , $k = 1, 2, \dots$, а значит, эта последовательность сходится и в X .

Так как по построению $\{h^{(n,n)}\} \subset H$, то в силу секвенциальной замкнутости H в X предел h последовательности $\{h^{(n,n)}\}$ лежит в H . Из включения

$$\{h^{(n,n)}\} \subset \{h^{(n)}\} \quad (6.2)$$

и неравенств $h^{(k)} \leq w^{(k)}$ из (5.4) ввиду стабилизации $\{w^{(k)}\}$ к $y = (y_n)$ имеем

$$\operatorname{pr}_k h^{(n,n)} \leq_k \operatorname{pr}_k w^{(k)} = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда ввиду замкнутости конуса положительных элементов в каждом X_k и непрерывности проекций pr_k получаем $\operatorname{pr}_k h \leq_k \operatorname{pr}_k y$, $k = 1, 2, \dots$. Последнее означает, что $h \leq y$ в X .

Пусть T_k – представитель функционала T на одной из решеток Фреше X_k , который существует по предложению 2.1. Так как T_k – линейный положительный функционал на решетке Фреше, то T_k – непрерывный функционал. Следовательно, используя (2.1), получаем

$$T(h) = T_k(\operatorname{pr}_k h) = T_k(\operatorname{pr}_k \lim_n h^{(n,n)}) = \lim_n T_k(\operatorname{pr}_k h^{(n,n)}) = \lim_n T(h^{(n,n)}).$$

Отсюда в силу включения (6.2) и выполнения первого неравенства из (5.4) имеем $T(h) \geq a$, и, как показано выше, $h \in H$, $h \leq y$. Следовательно, $q_{H,T}(y) \geq a$. В силу определения величины a из (6.1) и (5.3), а также (5.2) видим, что выполнено (5.9). По теореме 3.1 и предложению 4.1 функционал $q_{H,T}$ допускает двойственное представление вида (5.1), что и требовалось показать.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Топологическое условие, близкое по смыслу к условию (R) и означающее, что все отображения p_n вполне непрерывны (или относительно компакты), участвует в определении проективных пределов нормированных пространств типа (M^*) (ср. [24]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Условие того, что конусы H_n минорирующие для Y_n как в теореме 6.1, так и в теореме 5.1, применяется при доказательстве этих теорем только для выявления возможности двойственного представления на Y_n для супремальных функционалов q_n , ассоциированных с функционалом $q_{H,T}$ и определенных по правилу (3.3). Следовательно, это условие в теоремах 5.1 и 6.1 можно заменить на любое другое, обеспечивающее двойственное представление на Y_n для супремальных функционалов q_n . Например, в теореме 6.1 можно в силу теоремы Хёрмандера (см. введение) заменить условие “конусы H_n минорирующие” полунепрерывностью сверху функционалов q_n при достаточно больших n .

Список литературы

1. Ронкин Л. И. Целые функции // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–36.
2. Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.
3. Beurling A., Malliavin P. On Fourier transforms of measures with compact support // Acta Math. 1962. V. 107. № 3–4. P. 291–309.
4. Koosis P. The logarithmic integral. II. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
5. Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // ДАН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 270–273.
6. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.
7. Рубинов А. М. Сублинейные операторы и их применения // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 113–174.

8. Hörmander L. Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace lokalement convexe // Arkiv för Math. 1955. V. 3. № 2. P. 180–186.
9. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976.
10. Фельдман М. М. О сублинейных операторах, определенных на конусе // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1308–1321.
11. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
12. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968.
13. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
14. Koosis P. La plus petite majorante surharmonique et son rapport avec l'existence des fonctions entieres de type exponentiel jouant le rôle de multiplicateurs // Ann. Inst. Fourier. 1983. V. 33. № 1. P. 67–107.
15. Koosis P. Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Université McGill, 1996.
16. Хабибуллин Б. Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций. I // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 1. С. 173–178.
17. Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 129–146.
18. Bu S., Schachermayer W. Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331. № 2. P. 585–608.
19. Poletsky E. A. Plurisubharmonic Functions as Solution of Variational Problems // Proceedings of Symposia in Pure Math. 1991. V. 52. Part 1. P. 163–171.
20. Poletsky E. A. Holomorphic Currents // Indiana U. Math. J. 1993. V. 42. № 1. P. 85–144.
21. Бурбаки Н. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
22. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
23. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.
24. Себастьян-и-Силва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. I. № 1. С. 60–77.
25. Fuchssteiner B., Lusky W. Convex cones. North-Holland math. studies. Notas de Math. V. 82. Amsterdam, 1981.
26. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

Россия, 450074, Уфа, ул. Фрунзе 32,
 Башкирский государственный университет,
 математический факультет
 Россия, 450074, Уфа, ул. Чернышевского 112,
 Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
E-mail: algeom@bsu.bashedu.ru

Поступило в редакцию
 25.VI.1997
 3.XI.2000