Общероссийский математический портал

В. В. Голышев, Вариации Римана–Роха, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 5, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/im355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 08:47:05

УДК 512.725.4+512.732.6

В. В. Голышев

Вариации Римана–Роха

Построено зеркальное соответствие, сопоставляющее парам вида (V, C) , где V – многообразие и C – комплекс плотно фильтрованных расслоений на нем, вариации, т.е. локальные системы, D -модули или l -адические пучки. Рассматриваются многообразия Калаби–Яо – полные пересечения гиперповерхностей в проективном пространстве. В частном случае комплекса, квазиизоморфного касательному расслоению на общем полном пересечении типа Калаби–Яо, такая конструкция дает вариацию относительных когомологий в зеркально двойственном пучке, называемую в настоящей работе вариацией Римана–Роха. Локальная система Римана–Роха некоммутативно кодирует сведения об эйлеровых характеристиках всех пучков вида $\mathcal{O}(i)$, т.е. отражает содержание теоремы Римана–Роха для дивизориальной подрешетки в K -группе.

Библиография: 34 наименования.

Введение

0.1. Два формализма. Любая теория зеркальной симметрии (при том, что она исходит из своей частной эмпирики и преследует свои специфические цели) так или иначе соотносит два взгляда на когомологии алгебраического многообразия, зависящего от параметра, две группы алгебро-геометрических теорий.

Одна теория – *конструктивная*. Это теория вырождения многообразия, варьирующегося по параметру. Ее проявления в конкретных теориях когомологий – теория вырождения структур Ходжа, теория локальной монодромии в l -адических пучках. Если рассматривать вариации по одномерному параметру, то в каждой из этих теорий на когомологиях возникает действие алгебры sl_2 (в комплексном случае она “горизонтально” действует на ромбе Ходжа).

Другая теория – *когерентная* (с точки зрения ромба Ходжа – “вертикальная”). Согласно сильной теореме Лефшеца с (очень обильным) классом дивизоров связано действие алгебры sl_2 на когомологиях многообразия.

Центральным феноменом зеркальной симметрии можно считать именно это сходство двух sl_2 -формализмов (отмеченное давно [14], но до сих пор не проясненное).

Частью чего являются эти sl_2 -формализмы в каждой из двух теорий? В конструктивной теории, если рассматривать вариации с многомерным параметром, каждому направлению подхода к точке самого глубокого вырождения соответствует своя алгебра sl_2 . Эти sl_2 организуются в редуктивную алгебру Ли, связанную с группой глобальной монодромии вариации.

Ответ на вопрос, можно ли расширить теорему Лефшеца в когерентной теории до больших алгебр Ли или до групп Ли, в принципе положительный (см. [26], [13]):

Работа выполнена при частичной поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития для государств – членов СНГ (грант № RM1-2089).

в когерентной теории имеются зеркальные двойники алгебр Ли и групп Ли из конструктивной теории. Однако эти алгебры Ли и группы Ли вторичны: первичный объект, из которого они извлекаются, – сама вариация. Главный вопрос зеркальной симметрии – *как правильно построить по когерентным данным на многообразии абстрактную вариацию?*

0.2. Семейство многообразий или абстрактная вариация. Обратимся к исторически первому примеру – квинтик в $\mathbb{P}^4$ (см., например, [12]). Наиболее распространенная постановка вопроса такова: *какая конструкция сопоставляет семейству всех квинтиков в $\mathbb{P}^4$ однопараметрическое семейство вырожденных многообразий Калаби–Яо, задаваемых уравнением*

$$\sum_{i=0}^4 x_i^5 + 5\psi \prod_{i=0}^4 x_i = 0?$$

Можно сформулировать задачу иначе: *указать конструкцию, сопоставляющую комплексам векторных расслоений на квинтике Q вариации так, что комплекс*

$$0 \rightarrow \text{касательное расслоение к } \mathbb{P}^4|_Q \rightarrow \text{нормальное расслоение к } Q \text{ в } \mathbb{P}^4 \rightarrow 0 \quad (0.2.1)$$

переходит в мотивную вариацию, реализующуюся в средних когомологиях слоя семейства (0.2.1).

С точки зрения когерентной теории мы расширили постановку вопроса: аргумент зеркального преобразования раньше сводился к инварианту многообразия, а теперь пробегает целый класс объектов. Однако с точки зрения конструктивной теории мы проиграли в конкретности: построить абстрактную вариацию и доказать, что она мотивная, т.е. может быть реализована в каком-либо геометрическом семействе, еще не значит избрать из семейств, в которых она может быть реализована, единственное на роль зеркального партнера для исходного когерентного комплекса.

0.3. Требования к конструкции. Желательно, чтобы искомая конструкция:

а) не выходила “за пределы алгебраической геометрии”, т.е. не привлекала без острой необходимости аналитической, дифференциальной, симплектической и др. геометрий;

б) не использовала понятий, введенных в обиход самой теорией зеркальной симметрии (квантовые когомологии, фробениусовы многообразия и пр.);

в) для частного случая комплекса, подобного комплексу (0.2.1), давала вариации, предсказанные другими картинками зеркальной симметрии.

Основная цель настоящей работы – указать в случае полных пересечений такую конструкцию зеркальных вариаций (см. п. 1.4) и продемонстрировать, как она согласуется с другими известными построениями: с гипотетическим *категорным соответствием*, предсказывающим свойства монодромии в зеркальных семействах (см. [25]); с *исчислением рациональных кривых* (это подход исчислительной алгебраической геометрии, и одновременно теоретико-полевой подход); с *торической зеркальной симметрией*, явно (в терминах линейно-геометрической двойственности) строящей по одному семейству другое.

0.4. Обзор результатов. В § 1 с алгебраическим многообразием Калаби–Яо (полным пересечением гиперповерхностей в проективном пространстве) связывается некоторая вариация – локальная система Римана–Роха. Приведенные локальные системы Римана–Роха являются неприводимыми, жесткими и квазиунипотентными (п. 1.4.3). Н. Катц [23] изучил такие системы; он доказал, что они (следовательно, и их подъемы) геометричны, т.е. реализуются в послойных когомологиях некоторого пучка алгебраических многообразий.

Работа с локальными системами Римана–Роха, введенными в § 1, была бы затруднительна, так как локальные системы не образуют теорию с шестью операциями. В § 2 введены антиканонические D -модули Римана–Роха многообразий Фано. Они гипергеометрические и согласно философии Катца–Лозера–Сабба–Габбера следуют по простоте за модулями эйлеровой характеристики 0. Их монодромии дают антиканонические локальные системы Римана–Роха. Следовательно, антиканонический D -модуль Римана–Роха многообразия Фано геометричен, т.е. происходит из уравнения Пикара–Фукса. Рассмотрим теперь D -модуль, считающий рациональные кривые (эта дивизориальная вытяжка из квантовых когомологий сообщена Д. О. Орловым). Установим соответствие между одним D -модулем и другим. В простейшем случае считают только прямые (в п. 2.3 мы приводим стандартное вычисление с грассманианами; см. [2]), и ответ дается в теореме 2.2.4. (Справедливость общего утверждения должна вытекать из результатов Гивенталля [11].) Затем вводим собственно D -модули Римана–Роха многообразий Калаби–Яо и Фано. Связь считающего модуля и модуля Римана–Роха для многообразий Фано описывается теоремой 2.4.3. Монодромия D -модуля Римана–Роха многообразия Калаби–Яо дает локальную систему Римана–Роха этого многообразия. В случае же многообразия Фано D -модуль Римана–Роха иррегулярен, не сводится к своей монодромии (что и служит главной причиной перехода от локальных систем к D -модулям) и не геометричен. *Многообразиям Фано сопоставляются дикie вариации.*

В § 3 введены “пучки Римана–Роха” – гипергеометрические превратные l -адические пучки на торе, являющиеся аналогами D -модулей Римана–Роха. Согласно основному результату Катца из [23, гл. 8] такие пучки геометричны, т.е. реализуются как композиционные факторы прямого образа постоянного пучка в некотором однопараметрическом семействе многообразий. Торическая зеркальная симметрия (см. [1], [3], [4]) связывает с полными пересечениями в проективных пространствах однопараметрическое семейство полных пересечений в торическом многообразии, двойственном к проективному пространству. Необходимо установить связь пучка Римана–Роха с прямым образом постоянного пучка в *этом* однопараметрическом семействе. Теорема 3.5.1 устанавливает такую связь на уровне следовых функций в случае одной гиперповерхности, а теорема 3.5.5 – в общем случае.

0.5. Как следует обобщать конструкцию из п. 1.4. Для унификации рассуждений удобно использовать язык E -объектов Катца [20]. (Теория E -объектов существует лишь гипотетически, но это не мешает ей кодировать однотипные законные действия в D -модульной и l -адической теориях. Объект-экспонента E реализуется в первой теории как D -модуль $\mathcal{D}/\mathcal{D}(\frac{\partial}{\partial z} - 1)$, во второй – как пучок Артина–Шрайера на $\mathbf{G}_a$.)

Последовательно определим операцию $\mathcal{M}$ на расширяющихся классах объектов.

1. *Линейные расслоения.* Пусть $T = \text{Hom}(\text{NS}^\vee(X), \mathbf{G}_m)$ – тор, двойственный к тору Нерона–Севери многообразия X . Класс линейного расслоения L определяет элемент $\text{NS}(X)$, т.е. функционал на $\text{NS}^\vee(X)$, и, следовательно, морфизм

$$\kappa(L): \mathbf{G}_m \rightarrow T.$$

Пучковая зеркальная симметрия $\mathcal{M}$ сопоставляет расслоению L подходящий прямой образ ограничения объекта-экспоненты E на $\mathbf{G}_m$ относительно морфизма κ :

$$\mathcal{M}(L) = \kappa(L)_?(E|_{\mathbf{G}_m}).$$

(В примере с полными пересечениями пучку $\mathcal{O}(1)$ соответствует ограничение объекта-экспоненты на $\mathbf{G}_m$, пучку $\mathcal{O}(d_j)$ соответствует его прямой образ при d_j -листном куммеровом накрытии и т.д.)

Введем “дуальную” операцию $\mathcal{M}^\vee$; для этого двойственный объект-экспоненту $E^\vee$ будем отображать подходящим прямым образом относительно морфизма $\kappa^\vee(L) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa(L^\vee)$:

$$\mathcal{M}^\vee(L) = \kappa^\vee(L)_?(E^\vee | \mathbf{G}_m).$$

2. *Фильтрованные векторные расслоения.* Структура флага на векторном расслоении F на X определяет набор линейных расслоений F_i (присоединенные факторы), а каждое из них – некий E -объект E_i . Расслоению F будем сопоставлять свертку всех E_i на T .

3. *Комплекс фильтрованных векторных расслоений.* Пусть

$$F^\bullet = \dots \rightarrow F^{2j} \rightarrow F^{2j+1} \rightarrow \dots$$

Комплексу $F^\bullet$ сопоставим объект

$$\mathcal{M}(F^\bullet) = *_j \mathcal{M}(F^{2j}) * *_j \mathcal{M}^\vee(F^{2j+1}).$$

В §3 эта конструкция применяется, с необходимыми уточнениями, в l -адической реализации к комплексу

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \bigoplus_j \mathcal{O}(d_j) \rightarrow 0$$

фильтрованных векторных расслоений на многообразии Калаби–Яо X – полным пересечением гиперповерхностей степеней d_j в $\mathbb{P}^d$. Результат назван там *скрученным неприведенным пучком Римана–Роха*.

В настоящей работе не даются окончательные ответы на многие вопросы, например: как уточнить нашу конструкцию? каким прямым образом лучше пользоваться (или $\kappa_!$, или κ_*)? какой сверткой пользоваться? по какой подкатегории факторизовать конструктивную категорию на T , чтобы получить правильную область значений для зеркальной симметрии $\mathcal{M}$? как сделать дальнейшие шаги и определить (используя принцип расщепления) $\mathcal{M}$ на *расслоениях без структуры фильтраций*, на *комплексах расслоений* и т.д.?

0.6. Замечания. Идея конструирования геометрических вариаций из элементарных строительных блоков – вариаций Куммера и вариаций Артина–Шрайера – восходит к работам Вейля–Ленга. Это направление было систематически разработано Катцем (см. [20], [22]).

Мысль, что геометрическую вариацию зеркальной симметрии можно строить формально как преобразование Меллина от когерентных инвариантов многообразия, принадлежит, по-видимому, Аспинуоллу, Грину и Моррисону.

Задача систематического поиска и исследования семейств многообразий, исчезающие циклы в которых соответствовали бы элементам исключительных наборов, была поставлена уже давно. М. Концевич заметил, что именно такое соответствие и реализует зеркальная симметрия.

Автор приносит благодарность А. Бондалу, А. Городенцеву, В. Лунцу и Д. Орлову за ценные замечания и объяснения, особая благодарность – В. Острику, который внимательно прочел рукопись работы и сделал много критических замечаний и предложений, и М. Цфасману за постоянную поддержку. Автор выражает также благодарность Независимому Московскому университету за поддержку семинара “Представления Галуа – зеркальная симметрия”.

§ 1. Локальные системы

1.1. Катцевы локальные системы. В настоящей работе рассмотрены многообразия, определенные над полем $\mathbb{C}$.

Пусть G – группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Назовем представление $\phi: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ *жестким относительно совокупности* $\{g_0, \dots, g_n\} \subset G$, если для всякого представления $\phi': G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ такого, что

$$\forall i \quad \phi(g_i) \text{ сопряжен } \phi'(g_i),$$

имеем

$$\phi \text{ сопряжено } \phi'.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2. Назовем представление $\phi: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ *локально жестким относительно совокупности* $\{g_0, \dots, g_n\} \subset G$, если для всякого достаточно близкого к ϕ представления $\phi': G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ такого, что

$$\forall i \quad \phi(g_i) \text{ сопряжен } \phi'(g_i),$$

имеем

$$\phi \text{ сопряжено } \phi'.$$

Пусть U – непустое открытое подмножество полной кривой C над $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3. Назовем локальную систему $\mathcal{F}$ на U^{an} *локально жесткой* (соответственно, *жесткой*), если представление монодромии

$$\pi_1(U^{\mathrm{an}}) \rightarrow \mathrm{GL}(\text{слой } \mathcal{F})$$

локально жестко (соответственно, жестко) относительно множества обходов вокруг точек из $C^{\mathrm{an}} \setminus U^{\mathrm{an}}$.

ТЕОРЕМА 1.1.4 [23, п. 1.1.2]. Пусть S – непустое конечное подмножество $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, U – соответствующее открытое дополнение, j – открытое вложение. Пусть $\mathcal{F}$ – неприводимая локальная система на U^{an} ранга не меньше 1. Тогда $\mathcal{F}$ жесткая в том и только том случае, когда

$$\chi((\mathbb{P}^1)^{\text{an}}, j_*(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}))) = 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.5. Как видно из доказательства этой теоремы, требование жесткости в ее формулировке можно ослабить до требования локальной жесткости. В частности, верно

СЛЕДСТВИЕ 1.1.6. Нетривиальная неприводимая локальная система на непустом аффинном подмножестве $\mathbb{P}^1$ жестка тогда и только тогда, когда она локально жестка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.7. Неприводимая локальная система $\mathcal{L}$ на U называется *катцевой*, если она жесткая и все ее локальные монодромии (т.е. образы обходов вокруг точек из $C^{\text{an}} \setminus U^{\text{an}}$ в представлении монодромии) квазиунипотентны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.8. Локальная система $\mathcal{L}_0$ на U_0 называется *квазикатцевой*, если найдутся катцева локальная система $\mathcal{L}$ на аффинной кривой U и неразветвленное накрытие $\pi: U_0 \rightarrow U$ такие, что $\mathcal{L}_0 \cong \pi^*(\mathcal{L})$. (Подъем локальной системы, разумеется, соответствует ограничению представления монодромии на подгруппу $\pi_1(U_0)$ в $\pi_1(U)$.)

Используя формулу Римана–Роха, свяжем с многообразиями Калаби–Яо, являющимися полными пересечениями в проективных пространствах, катцевы локальные системы.

1.2. Формула H -рядов. Пусть V – линейное пространство над полем k , $\dim V = n + 1$. Пусть в пространстве V действуют два оператора T и S такие, что:

- i) $\text{rk}(1 - S) = 1$, т.е. S – псевдоотражение;
- ii) $\sum T^i(1 - S)(V) = V$.

Иначе говоря, если вектор v – образующая одномерного пространства $(1 - S)V$, то требуется, чтобы v был циклическим вектором для T .

Определим ряд $H_{T,S}$ следующим образом:

$$H_{T,S}(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - S)T^i v}{v} t^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} h_i t^i \in k[[t]].$$

ТЕОРЕМА 1.2.1 (формула H -рядов). Выполнено равенство рядов

$$H_{T,S}(t) \det(1 - tT) = \det(1 - tST).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} H_{T,S}(t) &= \frac{(1 + (1 - S)tT(1 - tT)^{-1})v}{v} \\ &= \frac{(1 - tT + tT - tST)(1 - tT)^{-1}v}{v} = \frac{(1 - tST)(1 - tT)^{-1}v}{v}. \end{aligned}$$

Оператор $(1 - tST)(1 - tT)^{-1}$ есть сумма тождественного оператора и оператора ранга 1, образом которого является прямая, порожденная вектором v . Следовательно, его детерминант равен его собственному числу, соответствующему v . Значит,

$$((1 - tST)(1 - tT)^{-1}v)/v = \det((1 - tST)(1 - tT)^{-1}).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2.2. Пусть V – линейное пространство размерности $n + 1$ над полем, снабженное невырожденной симметрической (или косой) формой $(;)$, T – невырожденный оператор, действующий в V . Пусть v – циклический вектор для оператора T и S – отражение относительно v :

$$S: x \mapsto x - (x, v)v.$$

Тогда

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} (T^i v; v) t^i = \frac{\det(1 - tTS)}{\det(1 - tT)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.3. Пусть заданы два произвольных многочлена $P(t)$, $Q(t)$ степени $n + 1$ со свободными членами, равными 1. Пусть W – линейное пространство размерности $n + 1$. Существует единственная с точностью до сопряжения пара операторов $T, S \in \text{GL}(W, k)$ такая, что:

- i) $\det(1 - tT) = P(t)$;
- ii) $\det(1 - tST) = Q(t)$;
- iii) S – псевдоотражение;
- iv) $\sum T^i \text{Im}(1 - S) = W$, т.е. прямая $\text{Im}(1 - S)$ является циклической для оператора T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 1.2.1 показывает, что в базисе $\{T^i(v_0) \mid i = 0, \dots, n\}$, где v_0 – нетривиальный вектор на прямой $\text{Im}(1 - S)$, операторы T и S (точнее, их матрицы)

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -v_{n+1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -v_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -v_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v_1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 - h_0 & -h_1 & -h_2 & \dots & -h_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \\ ST &= \begin{pmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 & \dots & -(1 - h_0)v_{n+1} + \sum_{i_1, i_2 > 0, i_1 + i_2 = n+1} h_{i_1} v_{i_2} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -v_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -v_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -v_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

определяются однозначно по $P(t)$ и $Q(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2.4. Пусть $F_2 = \langle s, t \rangle$ – свободная группа от двух образующих. Рассмотрим представление $\phi: F_2 \rightarrow \mathrm{GL}(W)$, определяемое тем, что $\phi(s) = S$, $\phi(t) = T$. Тогда ϕ локально жестко относительно $\{s, t, st\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.5. Пусть многочлены P и Q взаимно просты. Тогда W неприводимо как F_2 -представление.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W_0 – нетривиальное подпредставление W . Тогда образующая s индуцирует на W_0 тождественный оператор, иначе $(1 - S)W_0 \neq 0$ и $\sum T^i(1 - S)W_0 = W_0 = W$. Значит, ограничения S и ST на W_0 совпадают, следовательно, операторы S и ST имеют общее собственное число.

1.3. Полные пересечения в проективных пространствах. Пусть V – гладкое многообразие в $\mathbb{P}^r$, являющееся полным пересечением гиперповерхностей степеней d_j . Мы будем предполагать, что его размерность больше 2.

Числа Ходжа $H^{p,q}$ многообразия V могут отличаться от чисел Ходжа проективного пространства той же размерности лишь на горизонтали $p + q = \dim V$. Действительно, по теореме Лефшеца когомологии при каждом сечении гиперповерхностью могут меняться только в средней размерности.

Имеем $\mathrm{Pic}(V) = \mathbb{Z}$ (теорема Лефшеца), и канонический класс V по формуле присоединения равен $\theta(-r + \sum d_j - 1)$. Таким образом, V – многообразие Фано тогда и только тогда, когда $\sum d_j \leq r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.1. Пусть V – многообразие Фано. Имеет место формула для производящего ряда для значений многочлена Гильберта в неотрицательных целых точках:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \chi(\theta(i)) t^i = (1 - t)^{-r-1} \prod_j (1 - t^{d_j}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать формулу Римана–Роха–Хирцебруха. Род Тогда представляется как формальный ряд от образующей Пикара:

$$\mathrm{td}(\mathcal{S}) = \frac{g^{\dim V + 1}}{\prod d_j} \frac{\prod (1 - e^{-d_j g})}{(1 - e^{-g})^{r+1}},$$

где $g = c_1(\theta(1))$.

Производящий (по t) ряд, который вычисляется, – это $\dim(V)$ -й коэффициент ряда

$$\frac{1}{1 - te^g} g^{\dim V + 1} \prod (1 - e^{-d_j g}) / (1 - e^{-g})^{r+1},$$

или, что важнее, это вычет

$$\mathrm{Res}_{g=0} \frac{1}{1 - te^g} \frac{\prod (1 - e^{-d_j g})}{(1 - e^{-g})^{r+1}} dg.$$

После экспоненциальной замены переменной $z = e^{-g}$ имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \chi(\theta(i)) t^i = \mathrm{Res}_{z=1} \left(-\frac{1}{1 - t/z} \frac{\prod (1 - z^{d_j})}{(1 - z)^{r+1}} \frac{1}{z} dz \right) = \mathrm{Res}_{z=1} \left(-\frac{1}{z - t} \frac{\prod (1 - z^{d_j})}{(1 - z)^{r+1}} dz \right).$$

Заметим, что при фиксированном t выражение, от которого берется вычет, не имеет особенностей на бесконечности, так как V – многообразие Фано, и, значит, выполняется $\sum d_j < r + 1$. Следовательно, вычет в 1 равен вычету в t с противоположным знаком, и окончательно имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \chi(\mathcal{O}(i)) t^i = \frac{\prod(1 - t^{d_j})}{(1 - t)^{r+1}}.$$

Если же V – многообразие Калаби–Яо, то, как легко проверить, у правой части в бесконечности появляется вычет, равный 1 или -1 . Значит, верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.2. *Для производящего ряда по значениям в целых точках многочлена Гильберта многообразия Калаби–Яо – полного пересечения гиперповерхностей степеней d_j в $\mathbb{P}^r$ – выполняется*

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \chi(\mathcal{O}(i)) t^i = \frac{\prod(1 - t^{d_j})}{(1 - t)^{r+1}}.$$

1.4. Построение локальных систем по расслоениям. Пусть V – многообразие такое, что $\text{Pic } V = \mathbb{Z}$. Через $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)_V$ обозначим положительную образующую в группе Пикара, через $\mathcal{O}(i)$ – ее i -ю тензорную степень. Это обозначение не приведет к путанице, так как речь всегда будет идти о пучках на V , а не на объемлющем проективном пространстве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.1. *Размерность подпространства в $K_0(V) \otimes \mathbb{Q}$, порожденного пучками $\mathcal{O}(i)$, равна $\dim(V) + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\text{ch } \mathcal{O}(i) = e^{ig}$. Из рассмотрения определителя Вандермонда следует, что это пространство имеет размерность не меньше $\dim(V) + 1$, но и не больше $\dim(V) + 1$, так как оно порождается степенями g .

Пусть $C^\bullet$ – комплекс расслоений на V :

$$C^\bullet = \dots \rightarrow C^i \rightarrow C^{i+1} \rightarrow \dots, \quad (1.4.1)$$

такой, что для всякого i расслоение C^i – это последовательное расширение полубильных линейных расслоений. Любому такому комплексу можно сопоставить элемент a свободной абелевой группы $\mathcal{A}$, порожденной обильными линейными расслоениями $\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2), \dots$; таким образом сложим все обильные линейные расслоения, входящие композиционными факторами в $\oplus C^{\text{чет}}$, и вычтем все обильные линейные расслоения, входящие композиционными факторами в $\oplus C^{\text{нечет}}$.

Положим

$$a = \sum_i a_i^+ \mathcal{O}(i) - \sum_i a_i^- \mathcal{O}(i), \quad a_i^+ \geq 0, \quad a_i^- \geq 0.$$

Пусть первый класс Чженя этого комплекса равен нулю, иначе говоря, выполняется условие

$$\sum_i i(a_i^+ - a_i^-) = 0.$$

Положим

$$X_0^+(t) = \prod_{i>0} (1 - t^i)^{a_i^+},$$

$$X_0^-(t) = \prod_{i>0} (1 - t^i)^{a_i^-}.$$

Избавимся от общих делителей $X_0^+(t)$ и $X_0^-(t)$. Положим

$$X^+(t) \stackrel{\text{def}}{=} X_0^+(t) / \text{НОД}(X_0^+(t), X_0^-(t)),$$

$$X^-(t) \stackrel{\text{def}}{=} X_0^-(t) / \text{НОД}(X_0^+(t), X_0^-(t)),$$

где НОД однозначно определяется так, чтобы его свободный член был равен 1.

Пусть W – пространство размерности

$$\begin{aligned} \dim W &= \deg X^+(t) - \deg \text{НОД}(X_0^+(t), X_0^-(t)) \\ &= \deg X^-(t) - \deg \text{НОД}(X_0^+(t), X_0^-(t)). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.2. *Существует единственная с точностью до одно-временного сопряжения пара операторов $\mathbf{X}^-, \mathbf{X}^+ \in \text{GL}(W)$ таких, что:*

- i) $\det(1 - t\mathbf{X}^-) = X^-(t)$;
- ii) $\det(1 - t\mathbf{X}^+) = X^+(t)$;
- iii) $\text{rk}(1 - \mathbf{X}) = 1$, где $\mathbf{X} = \mathbf{X}^+(\mathbf{X}^-)^{-1}$;
- iv) $\sum_j (\mathbf{X}^-)^j (\text{Im}(1 - \mathbf{X})) = W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя обозначения $\mathbf{X}_0^-$ на T и $\mathbf{X}_0^+$ на ST , приходим к условиям п. 1.2. Теперь воспользуемся предложением 1.2.3.

Пусть $U = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Будем отождествлять локальные системы на U с представлениями свободной группы $F_2 = \langle s_0, s_\infty \rangle$. Рассмотрим представление $\rho: F_2 \rightarrow \text{GL}(W)$ такое, что

$$\rho(s_\infty) = \mathbf{X}^-, \quad \rho(s_1) = \mathbf{X}, \quad \rho(s_0) = (\mathbf{X}^+)^{-1}.$$

Таким образом, по комплексу расслоений специального вида построена локальная система. Рассмотрим один частный случай этой конструкции.

Пусть, как и в п. 1.3, V – многообразие Калаби–Яо – полное пересечение гиперповерхностей степеней d_j в $\mathbb{P}^r$. Такому многообразию можно сопоставить следующий комплекс вида (1.4.1) (квазиизоморфный касательному расслоению на V):

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}(d_j) \rightarrow 0, \quad (1.4.2)$$

для которого имеем

$$a = -(d+1)\mathcal{O}(1) + \sum_j \mathcal{O}(d_j).$$

Такая конструкция сопоставит комплексу (1.4.2) локальную систему; назовем ее *локальной системой Римана–Роха* многообразия V и обозначим $\mathcal{L}_{RR}(V)$.

ТЕОРЕМА 1.4.3. *Локальные системы Римана–Роха $\mathcal{L}_{RR}(V)$ неприводимы, жестки и квазиунипотентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость следует из предложения 1.2.5. Жесткость следует из следствий 1.1.6, 1.2.4 и неприводимости. Квазиунипотентность видна из определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.4. Пусть M – многообразие Фано. *Антиканонической локальной системой Римана–Роха $\mathcal{AL}_{RR}(M)$ называется локальная система Римана–Роха общего сечения V антиканонического класса на M :*

$$\mathcal{AL}_{RR}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{RR}(V).$$

1.5. Подкрутка и отражение. Пусть V – многообразие Калаби–Яо – полное пересечение гиперповерхностей степеней d_j в $\mathbb{P}^r$. По-прежнему пишем $\theta(i)$ вместо $\theta(i)_V$.

Пусть W_θ – подпространство в $K_0(V) \otimes \mathbb{Q}$, порожденное классами пучков $\theta(i)$. Согласно предложению 1.4.1 его размерность равна $\dim(V) + 1$. Эйлерова характеристика $([A], [B]) = \sum (-1)^i \text{Hom}^i(A, B)$ пары когерентных пучков A и B на V задает билинейную форму $(,)$ на W_θ ; назовем ее *формой Римана–Роха*. (Квадратными скобками здесь обозначен класс объекта в $K_0(X) \otimes \mathbb{Q}$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.1. *Форма Римана–Роха является в зависимости от размерности V либо симметричной (в четномерном случае), либо косой (в нечетномерном случае).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это легко следует из двойственности Серра.

На пространстве W_θ естественно действуют операторы T и S . Первый оператор, T , – это оператор умножения на класс $\theta(1)$ (назовем его *подкруткой*),

$$T: [\mathcal{F}] \mapsto [\mathcal{F} \otimes \theta(1)];$$

здесь $[\]$ обозначает класс пучка. Вторым оператор, S , – это отражение

$$x \mapsto x - (x, [\theta])[\theta]$$

относительно $[\theta] = 1$.

Существует единственная с точностью до изоморфизма локальная система $\mathcal{L}(S, T, W_\theta)$ на $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ такая, что ее слой равен W_θ , а монодромии обхода вокруг ∞ и 1 действуют операторами T и S соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.2. *Локальная система $\mathcal{L}(S, T, W_\theta)$ изоморфна локальной системе Римана–Роха:*

$$\mathcal{L}(S, T, W_\theta) \cong \mathcal{L}_{RR}(V).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение условий предложения 1.4.2. Условие п. iii) выполнено потому, что S – (псевдо)отражение. Условие п. i) выполнено потому, что

$$\det(1 - tT) = \det(1 - t\mathbf{X}^-) = (1 - t)^{\dim V + 1},$$

так как оператор подкрутки является унитарным: фильтрация на W стабильна относительно подкрутки, и ее действие на присоединенных факторах тривиально. Условие п. iv) выполнено потому, что по построению $\sum T^i(\text{Im}(1 - S)) = W_\emptyset$. Наконец, запишем операторы T и S в базисе, состоящем из классов пучков $\mathcal{O}(i)$. Элементы верхней строки матрицы оператора S – это $h_i = (\emptyset, \mathcal{O}(i))$. Из теоремы 1.2.1 и предложения 1.3.2 следует, что выполняется условие п. ii).

1.6. Исключительные наборы. Пусть X – алгебраическое многообразие. Обозначим через $\text{coh}(X)$ категорию когерентных пучков на X , через $\mathcal{D}^b(X)$ – ограниченную производную категорию $\text{coh}(X)$.

Любая производная категория $\mathcal{D}$ является триангулированной. Это значит, что заданы:

- а) функтор сдвига $[1]: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ – аддитивная автоэквивалентность;
- б) класс выделенных треугольников

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1],$$

удовлетворяющий определенным аксиомам (см. [31]).

Аддитивный функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ из одной триангулированной категории в другую называется *точным*, если он коммутирует с функтором сдвига и переводит выделенные треугольники в выделенные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.1. Группа классов изоморфизма точных эквивалентностей $F: \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(X)$ называется *группой автоэквивалентностей категории* $\mathcal{D}^b(X)$ и обозначается $\text{Auteq}(\mathcal{D}^b(X))$.

Далее, в пп. 1.6.2–1.6.6, использован материал из работы [6].

Через $\text{Hom}^i(X, Y)$ обозначим $\text{Hom}(X, Y[i])$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.2. Объект $E \in \text{Ob}(\mathcal{D}^b(X))$ называется *исключительным*, если он удовлетворяет условиям

$$\text{Hom}^i(E, E) = 0 \quad \text{при } i > 0, \quad \text{Hom}^0(E, E) = \mathbb{C}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.3. Упорядоченный набор исключительных объектов $E_0, \dots, E_n$ называется *исключительным*, если для всякого i

$$\text{Hom}^i(E_j, E_k) = 0 \quad \text{при } j > k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.4 (см. [5], [18]). *На проективных пространствах и квадриках существуют исключительные наборы.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.5. Исключительный набор называется *полным*, если он порождает всю производную категорию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6.6. Мы назовем базис $v_0, \dots, v_n$ линейного пространства V , снабженного билинейной формой χ , *полуортонормированным*, если $\chi(v_i, v_j) = 0$ при $i > j$ и $\chi(v_k, v_k) = 1$ для всех k .

Классы элементов полного исключительного набора образуют полуортонормированный базис в $K_0(X) \otimes \mathbb{Q}$ относительно формы Римана–Роха.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.7. Пусть A – матрица билинейной формы χ в полуортонормированном базисе $v_0, \dots, v_n$ пространства V . Пусть χ_s – симметризация формы χ , т.е.

$$\chi_s(w_1, w_2) = \chi(w_1, w_2) + \chi(w_2, w_1),$$

и пусть $I_0, \dots, I_n$ – отражения относительно векторов $v_0, \dots, v_n$ в ортогональном пространстве (V, χ_s) ,

$$I_j: v \mapsto v - \chi_s(v, v_j)v_j.$$

Тогда имеем

$$I_0 I_1 \dots I_n = -A^{-1} A^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (устное сообщение В. Острика). Введем следующие обозначения:

$A_{[0,j]}$ – матрица, получаемая из A пересечением первых $j + 1$ строк и первых $j + 1$ столбцов;

$A_{[j+1,n]}$ – матрица, получаемая из A пересечением последних $n - j$ строк и последних $n - j$ столбцов;

$a_{[0,j]}$ – подстолбец j -го столбца матрицы A , состоящий из элементов, расположенных строго выше диагонали;

$a_{[j,n]}$ – подстрока j -ой строки матрицы A , состоящая из элементов, расположенных строго правее диагонали.

Будем рассматривать произведения

$$\begin{aligned} AI_0 &= \begin{pmatrix} 1 & A_{01} & A_{02} & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -A_{01} & -A_{02} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad AI_0 I_1, \dots \end{aligned}$$

По индукции имеем

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -A_{[0,j]}^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{[j+1,n]} \\ 0 & 0 & A_{[j+2,n]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{[0,j+1]}^t & -1 & -a_{[j+1,n]} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A_{[0,j]}^t & 0 & 0 \\ -a_{[0,j+1]}^t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{[j+2,n]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{[0,j+1]}^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{[j+2,n]} \\ 0 & 0 & A_{[j+3,n]} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и в результате получим

$$AI_0 I_1 \dots I_n = -A^t.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.8. Пусть A – матрица билинейной формы χ в полунормированном базисе $v_0, \dots, v_n$ пространства W . Пусть χ_a – кососимметризация формы χ , т.е.

$$\chi_a(w_1, w_2) = \chi(w_1, w_2) - \chi(w_2, w_1),$$

и пусть $I_0, \dots, I_n$ – отражения относительно векторов $v_0, \dots, v_n$ в симплектическом пространстве (V, χ_a) . Тогда имеем

$$I_0 I_1 \dots I_n = A^{-1} A^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью аналогично доказательству предложения 1.6.7.

Заметим теперь, что в случае, когда $W = K_0(X) \otimes \mathbb{Q}$, формула Римана–Роха дает для любой пары объектов $O_1, O_2 \in \text{Ob } D^b(X)$

$$\chi(O_1, O_2) = \chi(O_2, O_1 \otimes K_X[m]).$$

Пусть A – матрица формы χ в базисе из классов элементов исключительного набора. Тогда равенство

$$x^t A y = y^t A (A^{-1} A^t) x$$

показывает, что в этом же базисе матрица оператора, который задается на $K_0 \otimes \mathbb{Q}$ функтором $\otimes K_X[m]$, есть $A^{-1} A^t$. Следовательно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.9. В пространстве $K_0 \otimes \mathbb{Q}$:

а) в случае когда X – нечетномерное проективное пространство или нечетномерная квадрака, произведение всех ортогональных отражений относительно классов элементов исключительного набора совпадает с умножением на $[K_X]$;

б) в случае когда X – четномерное проективное пространство, произведение всех симплектических отражений относительно классов элементов исключительного набора совпадает с умножением на $[K_X]$.

1.7. Квазикатцевы многообразия. Пусть задано нечетномерное (соответственно, четномерное) многообразие X , обладающее полным исключительным набором $\mathbf{E} = \langle E_0, E_1, \dots, E_n \rangle$. Пусть $\chi_\bullet$ – симметризованная (соответственно, кососимметризованная) форма Римана–Роха. Рассмотрим линейное пространство $W = (K_0(X) \otimes \mathbb{Q}) / \text{Ker } \chi_\bullet$.

Ограничение $\chi_\bullet$ на W также будем обозначать через $\chi_\bullet$.

Пусть $\mathbf{x} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ – набор различных точек на $\mathbb{A}^1$. Положим $U = \mathbb{A}^1 \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ и рассмотрим представление

$$\phi_{\mathbf{E}, \mathbf{x}}: \pi_1(U) \rightarrow \text{SO}(W, \chi_\bullet) \quad (\text{соответственно, } \pi_1(U) \rightarrow \text{Sp}(W, \chi_\bullet)),$$

определенное тем условием, что образующая, соответствующая обходу вокруг i -й точки, действует отражением относительно $[E_i]$. Это представление определяет локальную систему $\mathcal{L}_{\mathbf{E}, \mathbf{x}}$ на U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.1. Назовем исключительный набор $\mathbf{E}$ *квазикатцевым*, если найдется такой набор точек $\mathbf{x} = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{A}^1$, что локальная система $\mathcal{L}_{\mathbf{E}, \mathbf{x}}$ квазикатцева. Назовем многообразие X *квазикатцевым*, если оно обладает квазикатцевым исключительным набором.

Пусть $X = \mathbb{P}^n$, ζ – первообразный корень степени $\text{ind}(\mathbb{P}^n) = n + 1$ из 1. Рассмотрим набор $\mathbf{E} = \langle \theta, \dots, \theta(n) \rangle$. Обозначим через $[n + 1]$ накрытие Куммера:

$$[n + 1]: \mathbf{G}_{\mathbf{m}} \xrightarrow{n+1} \mathbf{G}_{\mathbf{m}}, \quad z \mapsto z^{n+1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7.2. *Ограничение локальной системы $\mathcal{L}_{\mathbf{E}, \langle 1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n \rangle}$ на $\mathbf{G}_{\mathbf{m}} \setminus \{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n\}$ изоморфно $[n + 1]^* \mathcal{AL}_{RR}(\mathbb{P}^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва заметим, что собственные числа локальной монодромии $\mathcal{AL}_{RR}(\mathbb{P}^n)$ в 0 – это различные корни степени $n + 1$ из 1, следовательно, $[n + 1]^* \mathcal{AL}_{RR}(\mathbb{P}^n)$ продолжается в 0, т.е. существует единственная локальная система на $\mathbb{A}^1 \setminus \{1, \zeta, \dots, \zeta^n\}$ такая, что ее ограничение на $\mathbf{G}_{\mathbf{m}} \setminus \{1, \zeta, \dots, \zeta^n\}$ изоморфно $[n + 1]^* \mathcal{AL}_{RR}(\mathbb{P}^n)$.

Монодромия $[n + 1]^* \mathcal{AL}_{RR}(\mathbb{P}^n)$ задается ограничением представления ϕ_{E_i, x_i} на нормальную подгруппу индекса $n + 1$, порождаемую оператором T^{n+1} (т.е. подкруткой на антиканонический класс, или монодромией в бесконечности) и операторами $S, TST^{-1}, T^2ST^{-2}, \dots, T^nST^{-n}$, которые и соответствуют обходам вокруг ζ^i . С другой стороны, T^iST^{-i} – результат сопряжения отражения относительно θ с помощью подкрутки на $\theta(i)$ – не что иное, как отражение относительно $\theta(i)$.

Следствием этого предложения является

ТЕОРЕМА 1.7.3 (ср. [15]). *Набор $\mathbf{E} = \langle \theta, \dots, \theta(n) \rangle$ квазикатцев. Проективное пространство $\mathbb{P}^n$ квазикатцево.*

Пусть X – нечетномерная квадрика Q_n , ζ – первообразный корень степени $\text{ind}(Q_n) = n$ из 1. На Q_n существует исключительный набор $\mathbf{E} = \langle S \otimes \theta(-1), \theta, \dots, \theta(n) \rangle$, где S – спинорное расслоение (см. [18]).

Обозначим через $[n]$ накрытие Куммера:

$$[n]: \mathbf{G}_{\mathbf{m}} \xrightarrow{n} \mathbf{G}_{\mathbf{m}}, \quad z \mapsto z^n.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7.4. *Локальная система $\mathcal{L}_{\mathbf{E}, \langle 0, 1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1} \rangle}$ изоморфна $[n]^* \mathcal{AL}_{RR}(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и выше, монодромия локальной системы $[n]^* \mathcal{AL}_{RR}(Q)$ задается ограничением представления $\phi_{\mathbf{E}, \mathbf{x}}$ на нормальную подгруппу индекса n . Она порождается оператором T^n и операторами $S, TST^{-1}, T^2ST^{-2}, \dots, T^{n-1}ST^{n-1}$, которые соответствуют обходам вокруг ζ^i , т.е. отражениям относительно $\theta(i)$.

В предложении 1.6.9 отражение относительно спинорного расслоения определено как (левое) частное оператора подкрутки на канонический класс и оператора, равного последовательному произведению отражений относительно прочих элементов исключительного набора. Но при таком соответствии отражения относительно прочих элементов исключительного набора переходят в локальные монодромии вокруг корней из единицы, а подкрутка на канонический класс переходит в

локальную монодромию вокруг бесконечности. Следовательно, отражение относительно спинорного расслоения соответствует локальной монодромии вокруг 0.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1.7.5. *Набор $\mathbf{E} = \langle S \otimes \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}(n) \rangle$ квазикатцев. Нечетномерная квадрика Q_n квазикатцева.*

§ 2. D -модули

2.1. Гипергеометрические дифференциальные операторы. Все определения и утверждения этого пункта взяты из [22].

Рассмотрим гипергеометрические D -модули на одномерном торе $\mathbf{G}_m = \text{Spec } \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Через $\mathcal{D}$ обозначим алгебру дифференциальных операторов на $\mathbf{G}_m$, через D – дифференциальный оператор $z \frac{\partial}{\partial z}$. Имеем $\mathcal{D} = \mathbb{C}[z, z^{-1}, D]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1 [22, п. 3.1]. Пусть n и m – пара неотрицательных целых чисел, P и Q – многочлены степеней n и m соответственно. Определим *гипергеометрический оператор* типа (n, m) :

$$\text{Hyp}(P, Q) = P(D) - zQ(D),$$

и *гипергеометрический D -модуль*:

$$\mathcal{H}(P, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}/\mathcal{D} \text{Hyp}(P, Q).$$

Если $P(t) = p \prod_i (t - a_i)$, $Q(t) = q \prod_j (t - b_j)$, $\lambda = p/q$, запишем

$$\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}/\mathcal{D} \left(\lambda \prod_i (D - a_i) - z \prod_j (D - b_j) \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.2 [22, п. 3.2.1]. $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$ – неприводимый D -модуль на $\mathbf{G}_m$ тогда и только тогда, когда P и Q не имеют общих нулей по mod $\mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.3 [22, п. 2.11.9]. Пусть $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$ – неприводимый гипергеометрический D -модуль. Если $\text{card}\{a_i\} \neq \text{card}\{b_j\}$, то $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$ гладок на $\mathbf{G}_m$. Если $\text{card}\{a_i\} = \text{card}\{b_j\}$, положим $U = \mathbf{G}_m \setminus \{\lambda\}$, $j: U \rightarrow \mathbf{G}_m$ – соответствующее вложение. Тогда $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$ гладок на U , $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j) = j_* j^* \mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$, и локальная монодромия его решений вокруг λ является псевдоотражением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.4 [22, п. 3.2(1)]. Пусть λ фиксировано. Пусть $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j) = \mathcal{H}(P, Q)$ – неприводимый D -модуль на $\mathbf{G}_m$. Тогда класс изоморфизма $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$ зависит только от наборов $a_i \bmod \mathbb{Z}$ и $b_j \bmod \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.5 [22, п. 3.2.2 (iii)]. Пусть $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j) = \mathcal{H}(P, Q)$ – неприводимый D -модуль на $\mathbf{G}_m$ типа (n, m) . Тогда если $n \geq m$ (соответственно, $m \geq n$), то собственные числа локальной монодромии его решений в регулярной особой точке 0 – это $\exp(2\pi i a)_{P(a)=0}$ (соответственно, собственные числа локальной монодромии в регулярной особой точке ∞ – это $\exp(2\pi i b)_{Q(b)=0}$), и каждому собственному значению локальной монодромии в 0 (соответственно, в ∞) соответствует единственная жорданова клетка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.6 [22, п. 3.3]. Класс изоморфизма $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$ определяет его тип (n, m) , наборы с кратностями $\{a_i \bmod \mathbb{Z}\}$, $\{b_j \bmod \mathbb{Z}\}$ и, в случае $n = m$, скаляр λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.7 (см. [22, п. 3.5.4], ср. предложение 1.2.3). Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ – две неприводимые локальные системы на $(\mathbf{G}_m \setminus \{\lambda\})^{\text{an}}$ одного ранга $n \geq 1$. Предположим, что:

- i) локальные монодромии обеих систем в точке λ являются псевдоотражениями;
- ii) характеристические многочлены локальных монодромий систем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в 0 совпадают;
- iii) характеристические многочлены локальных монодромий систем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ в ∞ совпадают.

Тогда существует изоморфизм $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$.

Введем операцию $^{\text{red}}$ на гипергеометрических D -модулях. Пусть $\mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)$ – приводимый D -модуль, т.е. такой, что множества $\{a_i \bmod \mathbb{Z}\}$ и $\{b_j \bmod \mathbb{Z}\}$ пересекаются. Пусть $\{a_{i'}\}, \{b_{j'}\}$ – наборы, полученные из $\{a_i\}, \{b_j\}$ выбрасыванием общих по $\bmod \mathbb{Z}$ элементов. Тогда по определению $\mathcal{H}_\lambda^{\text{red}}(a_i, b_j) = \mathcal{H}_\lambda(a_{i'}, b_{j'})$.

Пусть $j: \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbb{A}^1$ – открытое вложение. Через $j_!^* \mathcal{F}$ обозначим D -модуль, являющийся образом морфизма

$$j_! \mathcal{F} \rightarrow j_* \mathcal{F}$$

(“среднее продолжение”). Через FT обозначим преобразование Фурье D -модулей на $\mathbb{A}^1$. Как обычно, если $\mathcal{F} = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\sum f_i(x)\partial^i)$, то $\text{FT } \mathcal{F} = \mathcal{D}/\mathcal{D}(\sum f_i(\partial)(-x)^i)$.

ТЕОРЕМА 2.1.8 [22, п. 6.4.2]. Пусть d – целое число. Рассмотрим неприводимый гипергеометрический D -модуль типа (n, m)

$$H = \mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j) = \mathcal{H}(P, Q).$$

Тогда имеются изоморфизмы неприводимых D -модулей на $\mathbb{A}^1$:

- 1) $\text{FT}(j_!^*[d]^* \mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j)) \cong j_!^*[d]^* \mathcal{H}_{(-1)^{n+m} \frac{(-d)^d}{\lambda}}^{\text{red}}(1/d, 2/d, \dots, d/d, -b_j; -a_i);$
- 2) $j_!^*[d]^* \mathcal{H}_\lambda(a_i, b_j) \cong \text{FT}\left(j_!^*[d]^* \mathcal{H}_{(-1)^{n+m} \frac{(-d)^d}{\lambda}}^{\text{red}}(1/d, 2/d, \dots, d/d, -b_j; -a_i)\right):$

$$\begin{array}{ccccc} D\text{-mod}(\mathbf{G}_m) & \xrightarrow{j_!^*} & D\text{-mod}(\mathbb{A}^1) & \xrightarrow{\text{FT}} & D\text{-mod}(\mathbb{A}^1) & \xleftarrow{j_!^*} & D\text{-mod}(\mathbf{G}_m) \\ [d]^* \uparrow & & & & & & [d]^* \uparrow \\ D\text{-mod}(\mathbf{G}_m) & & & & & & D\text{-mod}(\mathbf{G}_m) \end{array}$$

2.2. Считающий D -модуль и антиканонический D -модуль Римана–Роха.

Пусть F – многообразие Фано, являющееся полным пересечением гиперповерхностей степеней d_j , $j = 1, 2, \dots, J$, в $\mathbb{P}^{n+1}$. Для однообразия будем полагать, что $\dim F \geq 3$ и все $d_j > 1$.

Пусть $d = n + 2 - \sum d_j$ – индекс F , $d' = \sum d_j - J$. Имеем $\dim F = n + 1 - J$ и $\dim F + 1 = d + d'$.

В п. 2.1 мы связали с таким многообразием “антиканоническую локальную систему Римана–Роха”. Это неприводимая локальная система на $\mathbf{G}_m \setminus \{1\}$, определяемая условиями на свои локальные монодромии M_z , $z = 0, 1, \infty$:

- i) $\det(1 - tM_0) = \frac{1-t^d}{1-t} \prod_{j=1}^J \frac{1-t^{d_j}}{1-t}$;
- ii) $\det(1 - tM_\infty) = (1-t)^{\dim F}$;
- iii) локальная монодромия вокруг 1 – псевдоотражение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Пусть $\lambda \in \mathbf{G}_m(\mathbb{C})$. Положим

$$\begin{aligned} \text{Нур}_{\lambda, RR}^a(F) &= \lambda \left(D - \frac{1}{d} \right) \left(D - \frac{2}{d} \right) \dots \left(D - \frac{d-1}{d} \right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^J \left[\left(D - \frac{1}{d_j} \right) \left(D - \frac{2}{d_j} \right) \dots \left(D - \frac{d_j-1}{d_j} \right) \right] - z D^{\dim F}. \end{aligned}$$

D -модуль на торе вида $\mathcal{D}/\mathcal{D}\text{Нур}_{\lambda, RR}^a(F)$ (зависящий от параметра λ) назовем *антиканоническим D -модулем Римана–Роха* многообразия F и обозначим $\mathcal{H}_{\lambda, RR}^a(F)$.

Ясно, что антиканонический D -модуль Римана–Роха $\mathcal{H}_{\lambda, RR}^a(F)$ получен из антиканонического D -модуля Римана–Роха $\mathcal{H}_{1, RR}^a(F)$ обратным образом при гомотетии $z \mapsto \frac{1}{\lambda}z$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.2. *Антиканонический D -модуль $\mathcal{H}_{\lambda, RR}^a(F)$ неприводим. Монодромия D -модуля $\mathcal{H}_{1, RR}^a(V)$ совпадает с монодромией антиканонической локальной системы Римана–Роха.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость следует из предложения 2.1.2. Утверждение о монодромии является следствием предложений 2.1.3, 2.1.5 и 2.1.7.

Рассмотрим (ср. [15]) дифференциальное уравнение на $\mathbf{G}_m$ ранга $\dim F + 1 = d + \sum d_j - J = n + 2 - J$ следующего вида:

$$D\zeta(z) = \zeta(z)M(z) = \zeta(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & * & 0 & \dots & * & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & * & 0 & \dots & * & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & * & 0 & \dots & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}; \quad (2.2.1)$$

здесь $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{\dim F})$; $m_{k,l} = 0$, если $k \neq l + 1 - id$ ни для какого $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$; $m_{l+1,l} = 1$; для $i \in \mathbb{Z}$, $i > 0$, имеем $m_{l+1-id,l} = \frac{1}{\deg(F)} \cdot z^{id} \cdot i \cdot [\text{число}$

рациональных кривых степени i , проходящих через H^{l+1-id} и $H^{\dim F-l}$] (здесь H – образующая в $H^2(F)$, т.е. класс гиперплоского сечения).

Нумерация строк и столбцов начинается с 0. В частности, в нулевой строчке первый нетривиальный элемент расположен в $(d-1)$ -м столбце; число элементов в первой ненулевой диагонали составляет $\sum d_j - J + 1$. Однако соответствующий объект должен быть определен более точно.

Перейдем к дифференциальному уравнению $(\dim F + 1)$ -го порядка, полученному из системы (2.2.1) выбором ζ_0 в качестве циклического вектора.

Далее мы будем полагать, что $d > \frac{\dim F}{2} + 1$ (следовательно, $d' < \frac{\dim F}{2}$) и в системе (2.2.1) присутствуют только числа прямых.

Положим $D' = D + d$ и введем обозначения для чисел прямых:

$$a_0 = \frac{\deg(F)}{z^d} m_{0,d-1}, \quad a_1 = \frac{\deg(F)}{z^d} m_{1,d}, \quad \dots$$

Последовательно найдем результаты применения степеней оператора D к ζ_0 и получим выражение

$$[\lambda_0 D^{\dim F+1} - z^d (a_{d'} D^{d'} + a_{d'-1} D^{d'-1} D' + \dots + a_0 (D')^{d'})](\zeta_0) = 0 \quad (2.2.2)$$

с некоторой константой λ_0 (не будем вычислять ее точное значение).

Дифференциальный оператор в левой части этого равенства не является гипергеометрическим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.3. Дифференциальный оператор $\text{Нур}_{\lambda,c}(F)$ (зависящий от параметра λ) на торе $\mathbf{G}_m$, задаваемый формулой

$$\text{Нур}_{\lambda,c}(F) = \lambda D^{\dim F+1} - z (a_{d'} D^{d'} + a_{d'-1} (D)^{d'-1} (D+1) + \dots + a_0 (D+1)^{d'}),$$

назовем *считающим дифференциальным оператором*. D -модуль

$$\mathcal{H}_{\lambda,c} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \text{Нур}_{\lambda,c}(F)$$

на торе $\mathbf{G}_m$ назовем *считающим D -модулем*.

Отсюда видим, что оператор, стоящий в левой части (2.2.2), является d -куммеровым подъемом оператора $\mathcal{H}_{\lambda,c}$ для некоторого λ .

Необходимо выяснить, как считающий D -модуль связан с антиканоническим D -модулем Римана–Роха.

ТЕОРЕМА 2.2.4. *Преобразование Фурье среднего продолжения d -куммерова подъема (всякого) считающего модуля изоморфно среднему продолжению d -куммерова подъема (некоторого) антиканонического модуля Римана–Роха:*

$$\forall \lambda \quad \exists \lambda': \quad \text{FT} j_{!*} [d]^* \mathcal{H}_{\lambda,c}(F) \cong j_{!*} [d]^* \mathcal{H}_{\lambda',RR}^a(F)$$

(см. диаграмму в теореме 2.1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1.8 достаточно показать, что корни многочленов

$$(a_{d'} D^{d'} + a_{d'-1} D^{d'-1} (D+1) + \dots + a_0 (D+1)^{d'}) \quad (2.2.3)$$

и

$$\prod_{j=1}^J \left(D + \frac{1}{d_j} \right) \dots \left(D + \frac{d_j - 1}{d_j} \right) \quad (2.2.4)$$

совпадают по mod $\mathbb{Z}$.

Обозначим через $F(t)$ производящий многочлен последовательности чисел a_i :

$$F(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{d'} t^{d'}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.5. Очевидно, что если $\{r_i \mid i = 1, \dots, d'\}$ – неединичные корни $F(t)$, то корни многочлена (2.2.3) – это $\left\{ \frac{r_i}{1-r_i} \right\}$.

Следующий шаг – вычисление многочлена $F(t)$ (ср. с вычислением в [2]).

2.3. Клетки Шуберта. Пусть $J = 1$, а $G = G(2, n+2)$ – грассманиан 2-плоскостей в $(n+2)$ -мерном пространстве V и S – универсальное подрасслоение. Фиксируем полный флаг $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n+2}$ в V . Тогда по определению $\sigma_{i,k}$ – когомологический класс в G (замкнутой) подсхемы точек, отвечающих плоскостям P таким, что

$$\begin{aligned} \dim P \cap F_{n+1-i} &\geq 1, \\ P &\subset F_{n+2-k}. \end{aligned}$$

Положим $\sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{i,0}$. Имеем

$$d_1^2 F(t) = \sum_{i=0}^{d_1-1} [c_{d_1+1}(\text{Sym}^{d_1} S^*) \cdot \sigma_{n-d_1+i} \cdot \sigma_{n-i-1} \big|_{\text{фунд. класс } G}] t^i. \quad (2.2.5)$$

Действительно, правая часть выражения (2.2.5) – это число плоскостей в V , лежащих на конусе F и пересекающих общие линейные подпространства размерностей d_1+1-i и $i+2$, или число прямых, лежащих на F и пересекающих проективные подпространства $\mathbb{P}(V)$ размерностей d_1-i и $i+1$. Каждое из этих подпространств высекает на F соответствующую степень класса H .

Для удобства перепишем тройное произведение в правой части (2.2.5) как коэффициент, с которым класс, двойственный к третьему сомножителю, входит в разложение по клеткам Шуберта произведения первого и второго (см. [34]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.1. *Имеем*

$$d_1^2 F(t) = \sum_{i=0}^{d_1-1} \langle c_{d_1+1}(\text{Sym}^{d_1} S^*) \cdot \sigma_{n-d_1+i}; \sigma_{n,i+1} \rangle t^i. \quad (2.2.6)$$

Приведем некорректное рассуждение, которое поможет воспользоваться формулой (2.2.6), а затем сделаем его корректным.

Некорректное рассуждение. Разложим формально (“принцип расщепления”) расслоение S в прямую сумму двух виртуальных линейных расслоений:

$$S = S_1 \oplus S_2.$$

Положим $s_1 = c_1(S_1)$, $s_2 = c_1(S_2)$. Тогда старший класс Чженя расслоения $c_{d_1+1}(\text{Sym}^{d_1} S^*)$ равен $\prod_{i=0}^{d_1} (is_1 + (d_1 - i)s_2)$. Умножим это произведение на клетки Шуберта множитель за множителем. Условимся, что

$$\begin{aligned} s_1 \cdot \sigma_{a,b} &= -\sigma_{a+1,b}, \\ s_2 \cdot \sigma_{a,b} &= -\sigma_{a,b+1}. \end{aligned}$$

Это согласуется с правилом Литтлвуда–Ричардсона в том, что (по крайней мере, при $a \gg b$, а только эта ситуация и рассматривается) $s_1 + s_2$ действительно умножается на классы Шуберта так же, как и $c_1(S)$, а $s_1 s_2$ – как $c_2(S)$.

Умножив класс $\prod_{i=0}^{d_1} (is_1 + (d_1 - i)s_2)$ на “длинную строку” σ_x , $x \geq d_1 - 1$, и рассмотрев последовательность коэффициентов разложения по клеткам Шуберта, получим производящий многочлен в следующем виде:

$$d_1^2 \prod_{i=1}^{d_1-1} (i\tau^{-1} + (d_1 - i)\tau).$$

Степени при τ отвечает выражение

$$l_1 - l_2 - x,$$

где l_1 – длина верхней строки, l_2 – длина нижней строки.

Нетрудно убедиться в том, что производящий многочлен в правой части выражения (2.2.6) образован той же самой последовательностью коэффициентов. Следовательно, $F(t) = \prod_{i=1}^{d_1-1} (i + (d_1 - i)t)$.

Как сделать некорректное рассуждение корректным. Например, разбить все сомножители на пары: первый с последним, второй с предпоследним. Получившиеся произведения – симметрические многочлены от s_1 и s_2 , следовательно, они выражаются через c_1 и c_2 .

При $J > 1$ необходимо Sym^{d_1} везде заменить на $\oplus \text{Sym}^{d_j}$. Фундаментальный класс прямой суммы будет равен произведению фундаментальных классов слагаемых, производящий многочлен будет равен произведению производящих многочленов.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.2.4. Воспользуемся замечанием 2.2.5. Замена $r \mapsto \frac{r}{1-r}$ взаимно однозначно отображает множество корней многочлена $F(t)$, равное $\{-\frac{i}{d_j-i} \mid j = 1, \dots, J; i = 1, \dots, d_j - 1\}$, на $\{\frac{-i}{d_j}\}$.

2.4. D -модули Римана–Роха многообразий Калаби–Яо и Фано.

В пп. 2.2–2.4 рассмотрен исключительно *антиканонический* D -модуль многообразия Фано. Определим собственно D -модуль Римана–Роха для полных пересечений в проективных пространствах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1. Пусть X – многообразие Калаби–Яо или Фано, являющееся полным пересечением гиперповерхностей степеней d_j , $j = 1, 2, \dots, J$, в $\mathbb{P}^{n+1}$.

Положим

$$\text{Нур}_{\lambda, RR}(X) = \lambda \prod_j \left(D - \frac{1}{d_j}\right) \left(D - \frac{2}{d_j}\right) \dots \left(D - \frac{d_j-1}{d_j}\right) - z D^{\dim X + 1}.$$

Всякий D -модуль на торе вида $\mathcal{D}/\mathcal{D} \text{Нур}_{\lambda, RR}(X)$ мы будем называть D -модулем Римана–Роха многообразия X и обозначать $\mathcal{H}_{\lambda, RR}(X)$.

Таким образом, антиканонический D -модуль Римана–Роха многообразия Фано X совпадает с D -модулем Римана–Роха многообразия Калаби–Яо V , являющегося общим сечением пучка K_X^{-1} :

$$\mathcal{H}_{\lambda, RR}^a(X) = \mathcal{H}_{\lambda, RR}(V).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.2. i) D -модули Римана–Роха многообразий Калаби–Яо имеют только регулярные особенности.

ii) D -модули Римана–Роха многообразий Фано имеют иррегулярную особенность в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из предложений 2.1.5 и 2.1.3.

ТЕОРЕМА 2.4.3. Пусть выполняется ограничение $\text{ind } X > \frac{\dim X}{2} + 1$. Тогда (всякий) считающий модуль многообразия X изоморфен обратному образу (некоторого) модуля Римана–Роха многообразия X при морфизме inv обращения координаты $z \mapsto z^{-1}$:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \quad \exists \lambda': \quad \mathcal{H}_{\lambda, c}(X) &\cong \text{inv}^* \mathcal{H}_{\lambda', RR}(X), \\ D\text{-mod}(\mathbf{G}_m) &\xrightarrow{\text{inv}^*} D\text{-mod}(\mathbf{G}_m). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисление корней многочлена (2.2.3) является доказательством этой теоремы.

§ 3. l -адические пучки

Дополнительные сведения об l -адических пучках можно получить в [10] (также см. библиографию к этой работе). Напомним только, что конструктивные $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -адические пучки образуют “теорию с шестью операциями” и что всякий конструктивный $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -пучок $\mathcal{G}$ на схеме X над конечным полем $k = \mathbb{F}_q$ характеристики p задает следовую функцию на $X(k)$ следующим образом: если

$$x: \operatorname{Spec}(k) \rightarrow X$$

– элемент из $X(k)$, то обратный образ $x^*\mathcal{G}$ есть конечномерное непрерывное представление $\operatorname{Gal}(k)$ в $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -векторном пространстве; положим

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{G}, x) = \operatorname{Tr}(F_k),$$

где F_k – элемент $\operatorname{Gal}(k)$, который обратен стандартной образующей

$$s \rightarrow s^q$$

этой группы. Функцию Tr можно продолжить по линейности на объекты производной категории.

3.1. Приблизительное равенство. Пусть $k = \mathbb{F}_q$ – конечное поле характеристики p , $\mathbf{G}_m = k[t, t^{-1}]$ – одномерный тор над k и $D_c^b(\mathbf{G}_m, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ – триангулированная категория когомологически ограниченных комплексов $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -адических пучков на торе $\mathbf{G}_m$ с конструктивными когомологиями.

Пусть $\mathcal{L} \in \operatorname{Ob} D_c^b(\mathbf{G}_m, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Через $\operatorname{Tr}_{k'}(\mathcal{L}, \lambda)$, где k'/k – конечное расширение и $\lambda \in \mathbf{G}_m(k')$, обозначим следовую функцию объекта $\mathcal{L}$ относительно k' -фробениуса $F_{k'}$. Вместо $\operatorname{Tr}_k(\mathcal{L}, \lambda)$ будем писать просто $\operatorname{Tr}(\mathcal{L}, \lambda)$, вместо F_k – просто F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in D_c^b(\mathbf{G}_m, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Следовые функции этих объектов *приблизительно равны* ($\operatorname{Tr} \mathcal{L}_1 \approx \operatorname{Tr} \mathcal{L}_2$), если найдется гомотетия $c: \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$ такая, что для всякого конечного расширения k' поля k и для всякой точки $\lambda \in \mathbf{G}_m(k')$ со значением в k' справедливо равенство

$$\operatorname{Tr}_{k'}(\mathcal{L}_2, \lambda) = a \operatorname{Tr}_{k'}(\mathcal{L}_1, c\lambda) + b$$

с константами $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}_l$, $a \neq 0$, зависящими, вообще говоря, от k' .

Напомним формулу следа Лефшеца.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.2. Пусть X – *отделимая схема конечного типа над k* ; E – $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -конструктивный пучок на X ; $\overline{X} = X \otimes_k \bar{k}$ – *схема, полученная из X расширением основного поля*; $\overline{E}$ – *соответствующий пучок*. Тогда

$$\sum_{x \in X(k)} \operatorname{Tr}(E, x) = \sum_r (-1)^r \operatorname{Tr}(F \mid H_c^r(\overline{X}, \overline{E})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [28, п. 6.13.4].

Поскольку (триангулированные) прямые образы с компактным носителем коммутируют с заменой базы, верен и относительный вариант формулы Лефшеца, которым будем пользоваться далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.3. Пусть $X \xrightarrow{\pi} S$ – морфизм многообразий над k , $\mathcal{E}$ – объект $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Тогда для всякого $s \in S(k)$ имеем

$$\sum_{x \in X_s(k)} \mathrm{Tr}(\mathcal{E}, x) = \mathrm{Tr}(R\pi_!(\mathcal{E}), s),$$

где X_s – слой морфизма π над s , $R\pi_!$ – триангулированный функтор прямого образа с компактным носителем.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.4. Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathrm{Ob} D_c^b(\mathbf{G}_m, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Обозначим через ι морфизм умножения $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$, через π_1, π_2 – морфизмы проекции $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$ на сомножители. Следовая функция свертки с компактным носителем двух объектов $\mathcal{L}_1 *! \mathcal{L}_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} R\iota_!(\pi_1^*(\mathcal{L}_1) \overset{L}{\otimes} \pi_2^*(\mathcal{L}_2))$ равна свертке их следовых функций:

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_1 *! \mathcal{L}_2) = \mathrm{Tr} \mathcal{L}_1 * \mathrm{Tr} \mathcal{L}_2.$$

Свертка функций на группе определена обычным образом:

$$(f * g)(\lambda) = \sum_{x, y \in \mathbf{G}_m^2(k), xy = \lambda} f(x) g(y).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.5. Пусть

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_1) \approx \mathrm{Tr}(\mathcal{L}'_1), \quad \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_2) \approx \mathrm{Tr}(\mathcal{L}'_2).$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_1 *! \mathcal{L}_2) \approx \mathrm{Tr}(\mathcal{L}'_1 *! \mathcal{L}'_2).$$

3.2. Гипергеометрические объекты и гипергеометрические суммы над конечными полями. Материал этого пункта взят из [22].

Через AS обозначим накрытие Артина–Шрайера,

$$\mathrm{AS}: \mathbf{G}_a \rightarrow \mathbf{G}_a, \quad x \mapsto x - F(x),$$

а через K обозначим накрытие Куммера,

$$\mathrm{K}: \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m, \quad x \mapsto x/F(x).$$

Известно, что прямой образ постоянного пучка при накрытии Артина–Шрайера (соответственно, Куммера) разлагается в прямую сумму локально постоянных

пучков ранга 1 на $\mathbf{G}_a$ (соответственно, на $\mathbf{G}_m$), каждый из которых соответствует аддитивному (соответственно, мультипликативному) характеру поля k :

$$\mathrm{AS}_*(\overline{\mathbb{Q}}_l) = \bigoplus_{\psi_i \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_a(k), \overline{\mathbb{Q}}_l^*)} \mathcal{L}_{\psi_i}$$

и

$$\mathrm{K}_*(\overline{\mathbb{Q}}_l) = \bigoplus_{\chi_i \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m(k), \overline{\mathbb{Q}}_l^*)} \mathcal{L}_{\chi_i},$$

таим образом, что

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{\psi_i}, \lambda) = \psi_i(\lambda)$$

и

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{\chi_i}, \lambda) = \chi_i(\lambda).$$

Выберем ψ – нетривиальный $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -значный аддитивный характер поля k . Обозначим через $\mathcal{L}_\psi$ соответствующий ему пучок.

Пусть $j: \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_a$ – открытое вложение, $\mathrm{inv}: \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$ – морфизм обращения координаты. Через $\overline{\psi}, \overline{\chi}, \dots$ обозначим характеры, сопряженные $\psi, \chi, \dots$

Пусть (n, m) – пара неотрицательных целых чисел. Пусть $\chi_1, \dots, \chi_n$ и $\rho_1, \dots, \rho_m$ – наборы $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -значных мультипликативных характеров поля k .

Определим [22, п. 8.2] объект

$$\mathrm{Нур}(!, \psi; \chi_1, \dots, \chi_n; \rho_1, \dots, \rho_m)$$

как свертку с компактным носителем “элементарных объектов”

$$\mathrm{Нур}(!, \psi; \chi_i, \emptyset) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (j^* \mathcal{L}_\psi) \otimes \mathcal{L}_{\chi_i}[1]$$

и

$$\mathrm{Нур}(!, \psi; \emptyset, \rho_j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{inv}^*((j^* \mathcal{L}_{\overline{\psi}}) \otimes \mathcal{L}_{\overline{\rho}_j})[1].$$

Определим отображение сдвига

$$\lambda: \mathbf{G}_m \xrightarrow{\cdot \lambda} \mathbf{G}_m$$

и сдвинутый объект

$$\mathrm{Нур}_\lambda(!, \psi; \chi_1, \dots, \chi_n; \rho_1, \dots, \rho_m) = \lambda_* \mathrm{Нур}(!, \psi; \chi_1, \dots, \chi_n; \rho_1, \dots, \rho_m).$$

Рассмотрим случай алгебраически замкнутого поля $\bar{k}$ (см. [22, п. 8.3]). Выбрав пучок $\mathcal{L}_\psi$, определенный с помощью $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -значного аддитивного характера некоторого конечного подполя k поля $\bar{k}$, и набор пучков $\mathcal{L}_\chi, \mathcal{L}_\rho$, построенных по $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -значным ручным характеристам $\pi_1(\mathbf{G}_m \otimes \bar{k})$ и параметру сдвига $\lambda \in \mathbf{G}_m(\bar{k})$, можно по тем же правилам, что и выше, построить объект. Этот объект, если λ и все χ, ρ определены над k , получается из объекта, определенного выше над k , расширением скаляров с k до $\bar{k}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.1 [22, п. 8.4.1]. Наборы χ_i и ρ_j называются *разделенными*, если они непусты и никакой из χ_i не совпадает с каким-либо из ρ_j .

ТЕОРЕМА 3.2.2 [22, п. 8.4.2]. *Предположим, что наборы χ_i и ρ_j разделены. Тогда:*

i) *существует (неприводимый) пучок $\mathcal{H}_\lambda(!, \psi; \chi_1, \dots, \chi_n; \rho_1, \dots, \rho_m)$ на $\mathbf{G}_m$ такой, что*

$$\text{Нур}_\lambda(!, \psi; \chi_1, \dots, \chi_n; \rho_1, \dots, \rho_m) = \mathcal{H}_\lambda(!, \psi; \chi_1, \dots, \chi_n; \rho_1, \dots, \rho_m)[1];$$

ii) *если $n = m$, то $\mathcal{H}_\lambda(!, \psi; \chi_1, \dots, \chi_n; \rho_1, \dots, \rho_m)$ – локально постоянный пучок ранга n на $\mathbf{G}_m \setminus \{\lambda\}$.*

Группа инерции точки λ действует через свой ручной фактор псевдоотображением. Группы инерции I_0, I_∞ действуют через свои ручные факторы; соответствующие представления изоморфны соответственно

$$\bigoplus_{\text{по различным } \chi_{i_0}} \chi_{i_0} \otimes U_{\chi_{i_0}},$$

где $U_{\chi_{i_0}}$ – унитарная жорданова клетка размера, равного кратности χ_{i_0} в наборе χ_i , и

$$\bigoplus_{\text{по различным } \rho_{j_0}} \rho_{j_0} \otimes U_{\rho_{j_0}},$$

где $U_{\rho_{j_0}}$ – унитарная жорданова клетка размера, равного кратности ρ_{j_0} в наборе ρ_j .

3.3. Пучок Римана–Роха. Пусть многообразие Калаби–Яо $H(d_0, \dots, d_J)$ – полное пересечение (общих) гиперповерхностей степеней $d_0, \dots, d_J$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^d$. Имеем $d + 1 = d_0 + d_1 + \dots + d_J$.

Пусть $\chi_i^{(j)}$, $j = 0, \dots, J$, $i = 0, \dots, d_j - 1$, – все мультипликативные характеры поля k порядков d_j .

Будем полагать, что

$$p = 1 \pmod{d_0 d_1 \dots d_J},$$

и, следовательно,

$$q = 1 \pmod{d_0 d_1 \dots d_J}.$$

При этом условии все блоки $\chi_i^{(j)}$ для построения рассматриваемых гипергеометрических объектов определены над основным полем. (Это условие по сути не обязательно: любой блок входит в эти конструкции вместе со своими сопряженными – но оно позволяет избежать дополнительных рассуждений о $\bar{k}/k$ -формах пучков.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. *Пучком Римана–Роха $\mathcal{L}_{RR}(H(d_0, \dots, d_J))$ для многообразия $H(d_0, \dots, d_J)$ назовем гипергеометрический объект*

$$\text{Нур}_1(!, \psi; \text{все } \chi_i^{(j)} \text{ такие, что } \chi_i^{(j)} \neq \underbrace{1; 1, \dots, 1}_{d-J \text{ раз}}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.2. Теорема 3.2.2 показывает, что пучок Римана–Роха – некое продолжение на $\mathbf{G}_m$ l -адического варианта локальной системы Римана–Роха.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.3. *Неприведенным пучком Римана–Роха* $\mathcal{L}_{RR}^{\text{non-red}}(H(d_0, \dots, d_J))$ для многообразия $H(d_0, \dots, d_J)$ назовем гипергеометрический объект

$$\text{Нур}_1(!, \psi; \text{все } \chi_i^{(j)}; \underbrace{1, \dots, 1}_{d+1 \text{ раз}}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.4. *Следовая функция объекта $\text{Нур}_1(!, \psi; 1; 1)$ приблизительно равна следовой функции пучка δ_1 , т.е. характеристической функции точки 1 на $\mathbf{G}_m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по формуле следа Лефшеца

$$\text{Tr } \text{Нур}_1(!, \psi; 1; 1) = \sum_{x/y=\lambda} \psi(x-y) = \sum_{y \in k^*} \psi((\lambda-1)y) = \begin{cases} -1, & \lambda \neq 1, \\ q-1, & \lambda = 1. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3.5. *Следовые функции приведенного и неприведенного пучков Римана–Роха приблизительно равны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательно свертываем неприведенный пучок с объектами $\text{Нур}_1(!, \psi; 1; 1)$ и применяем предложения 3.1.5 и 3.3.4.

Через $[d_j]$ обозначим изогению $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$ степени d_j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.6. *Скрученным неприведенным пучком Римана–Роха* $\mathcal{L}_{RR}^{\text{tw}}(H(d_0, \dots, d_J))$ назовем объект

$$\text{Нур}_1(!, \psi; \underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{d+1 \text{ раз}}) * [d_0] * \text{Нур}_1(!, \psi; 1; \emptyset) * \dots * [d_J] * \text{Нур}_1(!, \psi; 1; \emptyset).$$

Следующее предложение – аналог соотношений Давенпорта–Хассе (см. [21, п. 5.6.2], [22, п. 8.7.2] и [22, п. 8.7.4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.7. *Пусть d' – число, $\chi_0, \dots, \chi_{d'-1}$ – все мультипликативные характеры k^* порядка d' . Тогда объекты $[d'_*] \text{Нур}_1(!, \psi; 1; \emptyset)$ и $\text{Нур}_1(!, \psi; \chi_0, \dots, \chi_{d'-1}; \emptyset)$ можно получить один из другого композицией подкрутки на геометрически постоянный пучок ранга 1 и обратного образа при некоторой гомотетии.*

СЛЕДСТВИЕ 3.3.8. *Следовые функции неприведенного пучка Римана–Роха и скрученного неприведенного пучка Римана–Роха приблизительно равны:*

$$\text{Tr } \mathcal{L}_{RR}^{\text{non-red}}(H(d_0, \dots, d_J)) \approx \text{Tr } \mathcal{L}_{RR}^{\text{tw}}(H(d_0, \dots, d_J)).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3.9. *Следовые функции пучка Римана–Роха и скрученного неприведенного пучка Римана–Роха приблизительно равны:*

$$\mathrm{Tr} \mathcal{L}_{RR}(H(d_0, \dots, d_J)) \approx \mathrm{Tr} \mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_0, \dots, d_J)).$$

3.4. Зеркальное однопараметрическое семейство. Пусть $d+1 = d_0 + d_1 + \dots + d_J$ – разбиение $d+1$ в сумму натуральных чисел. Рассмотрим многообразие $M(d_0, d_1, \dots, d_J)$ в $\mathbf{G}_{\mathbf{m}}^{d+2}$, определяемое семейством уравнений

$$\begin{aligned} \prod_{j,i} y_i^{(j)} &= \lambda, \\ y_1^{(0)} + \dots + y_{d_0}^{(0)} - 1 &= 0, \\ y_1^{(1)} + \dots + y_{d_1}^{(1)} - 1 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ y_1^{(J)} + \dots + y_{d_J}^{(J)} - 1 &= 0; \end{aligned}$$

здесь $0 \leq j \leq J$ и $1 \leq i \leq d_j$.

В силу этого определения имеется морфизм

$$m(d_0, \dots, d_J): M(d_0, \dots, d_J) \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{m}} = k[\lambda, \lambda^{-1}].$$

Его слой обозначим через $M_\lambda(d_0, \dots, d_J)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4.1. Семейство $M_\lambda(d_0, \dots, d_J)$ – это небольшое видоизменение “пучка полных пересечений, зеркально-двойственных общему полному пересечению гиперповерхностей степеней $d_0, \dots, d_J$, в $\mathbb{P}^d$ ” из работы [1]. (В [1] рассматриваются компактификации наших $M_\lambda(d_0, \dots, d_J)$.)

3.5. Основные теоремы.

ТЕОРЕМА 3.5.1. *Следовая функция $\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_0)), \lambda)$ скрученного неприведенного пучка Римана–Роха многообразия $H(d_0)$ (т.е. общего сечения антиканонического расслоения на $\mathbb{P}^{d_0-1}$) приблизительно равна следовой функции объекта $\mathrm{inv}^* Rm(d_0)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, т.е., согласно формуле следа Лефшеца, числу точек на $M_{\frac{1}{\lambda}}(d_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Лефшеца следовая функция скрученного неприведенного пучка Римана–Роха многообразия $H(d_0)$ равна

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_0)), \lambda) = (-1)^{d_0+1} \sum \psi(-x_1) \dots \psi(-x_{d_0}) \psi(y),$$

где сумма берется по подмножеству

$$V = \left\{ (x_1, \dots, x_{d_0}, y) \in (\mathbf{G}_{\mathbf{m}}^{d_0} \times \mathbf{G}_{\mathbf{m}})(k) \mid \frac{y^{d_0}}{x_1 \dots x_{d_0}} = \lambda \right\}.$$

Имеем

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_0)), \lambda) = (-1)^{d_0+1} \sum_{\frac{x_1 \cdots x_{d_0}}{y^{d_0}} = \frac{1}{\lambda}} \psi(f(p)), \quad (3.5.1)$$

где

$$f(p) = -x_1 - \cdots - x_{d_0} + y;$$

здесь p – точка на $\mathbf{G}_{\mathbf{m}}^{d_0}(k) \times \mathbf{G}_{\mathbf{m}}(k)$.

Отметим, что f – линейная форма и, следовательно, принимает либо все ненулевые, либо только нулевые значения на k -точках любой прямой, проходящей через $0 \in \mathbb{A}^{d_0+1} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\mathbf{m}}^{d_0} \times \mathbf{G}_{\mathbf{m}}$.

Преобразуем теперь сумму в правой части (3.5.1):

$$\sum_{\frac{x_1 \cdots x_{d_0}}{y^{d_0}} = \frac{1}{\lambda}} \psi(f(p)) = \sum_{\substack{\frac{x_1 \cdots x_{d_0}}{y^{d_0}} = \frac{1}{\lambda} \\ f(p)=0}} \psi(f(p)) + \sum_{\substack{\frac{x_1 \cdots x_{d_0}}{y^{d_0}} = \frac{1}{\lambda} \\ f(p) \neq 0}} \psi(f(p)).$$

Первый член, очевидно, равен

$$(q-1) |M_{\frac{1}{\lambda}}(d_0)(k)|.$$

Второй член равен

$$-(|\mathbf{G}_{\mathbf{m}}^{d_0-1}(k)| - |M_{\frac{1}{\lambda}}(d_0)(k)|).$$

В итоге получим

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{RR}, \lambda) = (-1)^{d_0+1} (q |M_{\frac{1}{\lambda}}(d_0)(k)| - |\mathbf{G}_{\mathbf{m}}^{d_0-1}(k)|),$$

причем второй член в сумме не зависит от λ . Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.2. Пусть K – групповая схема над k , $\phi: \Phi \rightarrow K$, $\psi: \Psi \rightarrow K$ – два морфизма. Их *сверткой* назовем морфизм-композицию

$$\phi * \psi: \Phi \times_k \Psi \rightarrow K \times_k K \rightarrow K;$$

здесь второй морфизм – групповой закон.

ЛЕММА 3.5.3. Морфизм $m(d_0, \dots, d_J)$ – это свертка морфизмов $m(d_j)$:

$$m(d_0, \dots, d_J) = m(d_0) * \cdots * m(d_J).$$

Доказательство леммы очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 3.5.4. Объект $Rm(d_0, \dots, d_J)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ изоморфен свертке объектов $Rm(d_j)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l)$:

$$Rm(d_0, \dots, d_J)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l) = *_! Rm(d_j)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l).$$

ТЕОРЕМА 3.5.5. Следовая функция объекта $\mathrm{inv}^* Rm(d_0, \dots, d_J)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ приблизительно равна следовой функции скрученного неприведенного пучка Римана–Роха $\mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_0, \dots, d_J))$:

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{inv}^* Rm(d_0, \dots, d_J)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l) \approx \mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_0, \dots, d_J)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_0, \dots, d_J))$ есть свертка всех $\mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_j))$. Согласно теореме 3.5.1

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{inv}^* Rm(d_j)_! \approx \mathrm{Tr} \, \mathcal{L}_{RR}^{\mathrm{tw}}(H(d_j)).$$

Поскольку отношение приблизительного равенства стабильно относительно свертки (следствие 3.1.5), утверждение теоремы вытекает из следствия 3.5.4.

ТЕОРЕМА 3.5.6. Следовая функция объекта $\mathrm{inv}^* Rm(d_0, \dots, d_J)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ приблизительно равна следовой функции Римана–Роха $\mathcal{L}_{RR}(H(d_0, \dots, d_J))$:

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{inv}^* Rm(d_0, \dots, d_J)_!(\overline{\mathbb{Q}}_l) \approx \mathcal{L}_{RR}(H(d_0, \dots, d_J)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 3.5.5 и утверждения следствия 3.3.9.

Список литературы

1. Batyrev V. V. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties // J. Alg. Geom. 1994. V. 3. № 3. P. 493–535.
2. Beauville A. Quantum cohomology of complete intersections // Mat. Fiz. Anal. Geom. 1995. V. 2. № 3–4. P. 384–398.
3. Batyrev V. V., Borisov L. Dual cones and mirror symmetry for generalized Calabi–Yau manifolds // Mirror Symmetry II. Studies in Advanced Mathematics. V. 1 / Eds. B. R. Greene, S.-T. Yau. American Math. Soc. International Press, 1997.
4. Batyrev V. V., Borisov L. On Calabi–Yau complete intersections. alg-geom/9412017.
5. Бейлинсон А. А. Когерентные пучки на $\mathbb{P}^n$ и проблемы линейной алгебры // Функци. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 3. С. 68–69.
6. Бондал А. И. Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки // Изв. АН СССР. 1989. Т. 53. № 1. С. 25–44.
7. Bondal A., Orlov D. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences. Preprint MPI/97-36 (see also alg-geom/9712029).
8. Candelas P., De la Ossa X. C., Green P. S., Parkes L. A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory // Phys. Lett. B. 1991. V. 258. P. 118–126.
9. Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories // LNM. 1996. V. 1620. P. 120–348.
10. Ekedahl T. On the adic formalism // The Grothendieck Festschrift. Progress on Mathematics. V. 87. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990.
11. Givental A. Equivariant Gromov–Witten invariants // Internat. Math. Res. Notices. 1996. № 13. P. 613–663.
12. Givental A. The mirror formula for quintic threefolds // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1999. V. 196.
13. Golyshhev V., Lunts V., Orlov D. Mirror symmetry for abelian varieties // J. Alg. Geom. 2001. V. 10. P. 433–496.
14. Griffiths Ph. et al. Topics in transcendental algebraic geometry // Annals of Math. Studies. V. 106. Princeton Univ. Press, 1984.
15. Guzzetti D. Stokes Matrices and Monodromy of the Quantum Cohomology of Projective Spaces // Comm. Math. Phys. 1999. V. 207. № 2. P. 341–383.

16. Mirror Symmetry II. Studies in Advanced Mathematics. V. 1 / Eds. Greene B.R., Yau S.-T.. American Math. Soc. International Press, 1997.
17. *Horja R. P.* Hypergeometric functions and mirror symmetry in toric varieties. alg-geom/9912109.
18. *Kapranov M. M.* On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces // Invent. Math. 1988. V. 92. P. 479–508.
19. *Katz N.* On the calculation of some differential Galois groups // Inv. Math. 1987. V. 87. P. 13–61.
20. *Katz N.* Exponential sums over finite fields and differential equations over the complex numbers: some interactions // Bull. AMS (New Series). 1990. V. 23. № 2.
21. *Katz N.* Gauss Sums, Kloosterman Sums and Monodromy Groups // Annals of Math. Study. V. 116. Princeton Univ. Press, 1988.
22. *Katz N.* Exponential Sums and Differential Equations // Annals of Math. Study. V. 124. Princeton Univ. Press, 1990.
23. *Katz N.* Rigid Local Systems // Annals of Math. Study. V. 139. Princeton Univ. Press, 1996.
24. *Kleiman S.* Algebraic cycles and the Weil conjectures // Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 359–386.
25. *Kontsevich M.* Homological algebra of mirror symmetry // Proc. Intern. Congr. Math. Zürich. 1994 / Ed. S.D. Chatterji. V. 1. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 1995. P. 120–139.
26. *Looijenga E., Lunts V.* A Lie algebra attached to a projective variety // Invent. Math. 1997. V. 129. P. 361–412.
27. *Manin Yu.* Problems on rational points and rational curves on algebraic varieties // Surveys of Diff. Geometry / Eds. C.C. Hsiung, S.-T. Yau. V. II. Int. Press, 1995. P. 214–245.
28. *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
29. *Orlov D.* Equivalences of derived categories and K3 surfaces // J. of Math. Sciences. Plenum Publ. Corp. V. 34. Alg. geom.(5). 1997. V. 85. № 6.
30. *Orlov D.* On equivalences of derived categories of coherent sheaves on abelian varieties. Preprint MPI/97-49 (see also alg-geom/9712017).
31. *Verdier J.-L.* Catégories dérivées // Lect. Notes Math. 1977. V. 569. P. 262–311.
32. *Grothendieck A., Dieudonné J.* Éléments de géométrie algébrique // Publ. Math. I.H.E.S. № 11, 17.
33. *Berthelot P., Grothendieck A., Illusie L.* Théorie des intersections et théoreme de Riemann–Roch // Springer Lect. Notes Math. 1971. V. 225.
34. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.

Поступило в редакцию
12.X.2000