Общероссийский математический портал

М. В. Карасёв, А. В. Перескоков, Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. I. Модель с логарифмической особенностью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 5, 33–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/im356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:31:32

УДК 517.946

М. В. Карасев, А. В. Перескоков

**Асимптотические решения уравнений Хартри,
сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий.
I. Модель с логарифмической особенностью**

Рассматривается двумерное модельное уравнение Шрёдингера, содержащее логарифмическую интегральную нелинейность. Найдены асимптотические разложения для его решений (эйри-поляронов), которые экспоненциально убывают на “полубесконечности” и осциллируют вдоль одного направления. Их можно рассматривать как новые специальные функции, в чем-то аналогичные функции Эйри. Они применяются для построения глобальных асимптотических решений уравнений Шрёдингера с малым параметром при производных, содержащих интегральную нелинейность типа Хартри.

Библиография: 75 наименований.

§ 1. Введение

В работе рассматривается спектральная задача для нелинейного уравнения Шрёдингера в $\mathbb{R}^3$, содержащего помимо обычного потенциала еще и потенциал самосогласованного поля кулоновского типа. Точнее, рассматривается система уравнений

$$(-\hbar^2 \Delta + V + U)\psi = \lambda\psi, \quad \|\psi\|_{L^2} = 1, \quad (1.1)$$

$$\Delta U = |\psi|^2, \quad (1.2)$$

в которых V – это гладкая потенциальная яма (обеспечивающая дискретность спектра), $\hbar \rightarrow 0$ – малый параметр, а λ и ψ – искомое собственное значение и собственная функция.

Потенциал самосогласованного поля U может быть выражен из (1.2) в виде интеграла:

$$U(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(y)|^2}{|x-y|} dy. \quad (1.3)$$

Подставив (1.3) в (1.1), получим дифференциальное уравнение для ψ с интегральной нелинейностью. Такие уравнения называются *уравнениями типа Хартри* [1]. Они играют фундаментальную роль в некоторых квантовомеханических моделях, а также в нелинейной оптике (см., например, [2]–[10]).

Математическая теория этих уравнений развита особенно глубоко для нестационарного случая (задача Коши) [11]–[23]. Важные результаты были получены

также и в спектральной теории таких уравнений [24]–[41]. Теория квазиклассического приближения при $\hbar \rightarrow 0$ для этого типа нелинейных уравнений начала систематически разрабатываться в [42]–[44].

Помимо функции $\psi(x)$ можно рассмотреть также функцию Вигнера $\rho_\psi(x, p)$, определяемую как вейлевский символ L^2 -проектора на направление ψ , т.е.

$$\rho_\psi\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) \stackrel{\text{def}}{=} (u, \psi)\psi(x).$$

Тогда для классического предела (в смысле обобщенных функций)

$$\rho = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \rho_\psi$$

будут формально выполнены *уравнения Власова* [45]

$$(p^2 + V + U)\rho = \lambda\rho, \quad 2p\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(V + U)\frac{\partial\rho}{\partial p} = 0, \quad \Delta U(x) = \int \rho(x, p) dp. \quad (1.4)$$

Нелинейная система уравнений (1.4) может рассматриваться как “система бихарактеристик” для (1.1), (1.2) (см. подробнее в [42]–[44]). Она служит предметом исследования не только в квантовой механике и оптике [46], [47], [8], но и в электронной оптике [48]–[51], [4], в гидродинамике, пылевой и звездной динамике [52]–[55]. Большой список частных решений системы (1.4) приведен в [52].

В случае радиально-симметричного внешнего потенциала $V = V(|x|)$ система (1.4) допускает простейшие радиально-симметричные решения, сосредоточенные по переменной x в шаре (система (1.4) в этом случае редуцируется к известному уравнению Лэнгмюра и ее интегрирование проводится в квадратурах; это было показано в [44]). Такие радиально-симметричные решения ρ были “квазиклассически проквантованы” в [44], т.е. были построены асимптотические (при $\hbar \rightarrow 0$) решения ψ квантовой задачи (1.1), (1.2), для которых предел функции Вигнера ρ_ψ совпадает с ρ .

Отметим, что эти функции $\rho = \rho(x, p)$ на фазовом пространстве переменных x, p имеют вид δ -функций с носителями на некоторых *лагранжевых* подмногообразиях Λ . Лагранжевость Λ означает, что

$$dp \wedge dx|_\Lambda = 0 \quad (1.5)$$

и что размерность $\dim \Lambda$ равна половине размерности фазового пространства.

В то же время в списке частных решений системы (1.4) имеются δ -функции с носителем на *изотропных* подмногообразиях Λ , т.е. таких, для которых свойство (1.5) выполнено, но чья размерность меньше половины размерности фазового пространства. Примером служат решения, сосредоточенные по переменной x в плоских дисках (в случае $x \in \mathbb{R}^3$). Такого вида решения системы (1.4) играют важную роль в физических приложениях [52], [53] (скажем, плотность распределения вещества в плоских галактиках – пример такого решения).

В теории линейных псевдодифференциальных операторов наличие у “системы бихарактеристик” инвариантного изотропного подмногообразия Λ устойчивого

типа всегда означает возможность построения серии асимптотических собственных функций (квазимод) ψ и серии приближенных собственных значений λ данного оператора [56]. При этом функция Вигнера $\rho_\psi(x, p)$ в пределе $\hbar \rightarrow 0$ имеет носителем данное подмногообразие Λ , а по переменной x она сосредоточена в проекции Λ на x -пространство. Эта проекция является маломерным подмножеством в x -пространстве.

Таким образом, наличие инвариантных изотропных подмногообразий у власовской “системы бихарактеристик” (1.4) наводит на мысль о возможном существовании подобного типа не радиально-симметричных квазимод у исходной квантовой задачи (1.1), (1.2). Подобные квазимоды могли бы быть сосредоточены на маломерных подмножествах в x -пространстве, например в плоских дисках внутри $\mathbb{R}^3$.

Конечно, задача (1.1), (1.2) нелинейна и формально не попадает в рамки теории линейных псевдодифференциальных операторов. Тем не менее, в [42], [43] было показано, что к уравнениям с унитарной нелинейностью типа Хартри могут быть успешно применены квазиклассические методы, разработанные для линейных уравнений. При этом предполагалось, что интегральное ядро в потенциале взаимодействия типа (1.3) достаточно гладкое. Случай сингулярного ядра, возникающий в реальных физических моделях, вначале не рассматривался. В таком гладком случае квазимоды, сосредоточенные вблизи точки, для уравнения Хартри были впервые построены в [56, с. 378] и в [43], [57]. Здесь асимптотические решения задавались обычными гауссовыми пакетами, как в обычном методе ВКБ [56].

Затем в работе [44] была предпринята попытка теми же методами изучить случай сингулярного ядра взаимодействия. А именно, в [44] в главном приближении были построены квазимоды задачи (1.1), (1.2), отвечающие лагранжевым “радиально-симметричным” подмногообразиям $\Lambda^3 \subset \mathbb{R}_x^3 \oplus \mathbb{R}_p^3$, проекции которых на $\mathbb{R}^3$ являются шаром¹.

Тогда же, т.е. в 1979 г., были начаты попытки сделать то же самое для изотропных подмногообразий $\Lambda^2 \subset \mathbb{R}_x^3 \oplus \mathbb{R}_p^3$, проекции которых на $\mathbb{R}_x^3$ являются плоскими дисками. Однако случай дисков оказался намного сложнее. И основным препятствием, как стало ясно, здесь служит логарифмический характер особенности ядра двумерного кулоновского взаимодействия.

В случае шара особенность ядра трехмерного кулоновского взаимодействия, конечно, тоже доставляет свои трудности, но не изменяет стандартного вида главной части асимптотики. Это и было показано в [44]. В случае диска логарифмическая особенность доставляет гораздо более сложную проблему и не позволяет перенести результаты [44] на этот случай. Даже в главном приближении квазимоды здесь построить не удавалось.

В этой связи в работе [64] заново был рассмотрен радиальный случай шара, но с большей, чем в [44], точностью по $\hbar$. Оказалось, что в младших членах асимптотики уже полностью проявляется сингулярность ядра трехмерного кулоновского взаимодействия, и это приводит к существенному изменению, например, условий квантования (т.е. изменению формул для собственных чисел λ) по сравнению с теорией обычного ВКБ-приближения. Разработанная в [64] “сингулярная” версия ВКБ-метода, а также методы, развитые в [65]–[68], позволяли надеяться, что от

¹Затем был рассмотрен целый ряд приложений и обобщений этих решений [58]–[62]. Одномерный случай был разобран в [63].

случая шара все-таки удастся перейти к случаю диска.

В данной работе мы, наконец, приводим решение задачи о квази модах уравнений типа Хартри для случая плоских дисков. Это решение потребовало очень кропотливого изучения модельных уравнений с сингулярными ядрами. При этом аналогия с картиной, характерной для обычного ВКБ-приближения [56], здесь почти полностью утрачивается.

Первое отличие состоит в том, что по нормали к диску квази мода уже не является простым гауссовским пакетом, т.е. не задается уравнением осциллятора, как в обычной ВКБ-версии. Оказалось, что *по нормали к диску асимптотика собственной функции задачи (1.1), (1.2) определяется уравнением одномерного полярона Боголюбова*. Это замечательное нелинейное модельное уравнение заменяет собой стандартный осциллятор.

Второе отличие состоит в том, что на самом диске вблизи каустик (точек поворота) модельным уравнением для (1.1), (1.2) служит не обычное уравнение Эйри, а его нелинейная модификация с дополнительным логарифмическим ядром взаимодействия, т.е. *эйри-версия двумерного уравнения полярона*.

Именно эти два новых нелинейных модельных уравнения определяют характер убывания квази мода соответственно либо при удалении от диска по нормали, либо в плоскости диска при удалении от его границы.

На самом диске квази мода в главном задается обычными ВКБ-формулами, но *поправки к главной части уже определяются нелинейным взаимодействием с полароном по нормали и с эйри-полароном вблизи точек поворота*. В результате правило квантования, определяющее асимптотику собственных значений λ , имеет вид, весьма далекий от стандартного правила Бора–Зоммерфельда, и, например, содержит разложения по *дробным степеням параметра $\hbar$* .

Эти фундаментальные факты являются новыми для теории квазиклассического приближения и не имеют аналога ни для гладкой “некулоновской” версии уравнений Хартри, ни для обычного ВКБ-приближения над маломерными подмножествами.

Работа состоит из двух частей. В настоящей ч. I мы рассматриваем модельное уравнение

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \left(\xi - \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right] G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right) G = 0 \quad (1.6)$$

(эйри-версия уравнения двумерного полярона). Здесь проявляются все главные аналитические трудности. Нас интересует асимптотика решений (1.6) $G = G(\xi, \eta)$, которые экспоненциально убывают при $|\eta| \rightarrow \infty$, а также при $\xi \rightarrow -\infty$. Такие решения можно рассматривать как новые, требующие отдельного изучения специальные функции, в чем-то аналогичные функциям Эйри. Мы найдем ниже их асимптотические разложения при $\xi \rightarrow \pm\infty$.

В следующей части II работы решения уравнения (1.6) будут использованы для построения квази мод задачи (1.1), (1.2) в духе метода Лангера [69] или метода согласования асимптотических разложений [70]. А именно, в части II мы рассмотрим трехмерную задачу с нелинейностью (1.3) и построим для нее квази моды, сосредоточенные в плоских дисках. Здесь будет получено правило квантования для вычисления соответствующей спектральной серии λ и выяснен вклад в него, вносимый сингулярностью и модельным нелинейным уравнением (1.6).

§ 2. Уравнения для амплитуды и фазы эйри-полярона

В этом параграфе мы рассмотрим модельное уравнение (1.6) с позиций адиабатического приближения, считая η “быстрой”, а ξ “медленной” переменными. Более точно это означает следующее.

Будем называть *эйри-поляроном* решение G уравнения (1.6), которое экспоненциально убывает при $\xi \rightarrow -\infty$, при $|\eta| \rightarrow \infty$, а также в области

$$\xi > 0, \quad |\eta| \xi^{-1/6} \rightarrow \infty, \quad (A)$$

и, кроме того, в области

$$\xi \rightarrow +\infty, \quad \eta = O(\xi^{1/6}(\ln \xi)^{2/3}) \quad (B)$$

оно имеет представление вида

$$G(\xi, \eta) = T(\xi, \eta) \cos \Phi(\xi, \eta), \quad (2.1)$$

где $\Phi(\xi, \eta) = S(\xi) + \varphi(\xi, \eta)$. Здесь функции S, T, φ вещественные, гладкие; причем в области (A) амплитуда $T(\xi, \eta)$ экспоненциально убывает, а часть фазы $\varphi(\xi, \eta)$ имеет степенной рост; кроме того, $T = O(\xi^{-1/3})$, $\varphi T = O(\xi^{-1/2})$ при $\xi \rightarrow +\infty$.

Мы выведем ниже уравнения, которым удовлетворяют амплитуда и фаза эйри-полярона, т.е. функции T, S, φ .

Дифференцируя (2.1), получаем

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \cos \Phi - \left[2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right] \sin \Phi, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = & - \left[T(S')^2 + 2TS' \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] \cos \Phi - \left[2 \frac{\partial T}{\partial \xi} S' + TS'' \right] \sin \Phi \\ & + O\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) + O\left(T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right) + O\left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + O\left(T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть константа α удовлетворяет неравенству $0 < \alpha < 1$, а гладкая функция $\chi = \chi(\xi', \xi^\alpha)$ такова, что $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 1$ при $\xi' > 2\xi^\alpha$, $\chi \equiv 0$ при $\xi' < \xi^\alpha$. Тогда, поскольку G и T экспоненциально убывают в области (A), в области (B) мы имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right) G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ &= 2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| (1 - \chi(\xi', \xi^\alpha)) \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &+ \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| \chi(\xi', \xi^\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &+ \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) (1 - \chi(\xi', \xi^\alpha)) G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &+ \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) \chi(\xi', \xi^\alpha) \frac{T^2(\xi', \eta')}{2} d\eta' d\xi' \\ &+ \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right) \chi(\xi', \xi^\alpha) \frac{T^2(\xi', \eta')}{2} \cos 2\Phi(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &+ O(\xi^{-\infty}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Изучим входящие в (2.4) интегралы. Определим

$$F(\xi', \eta', \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta')/2.$$

ЛЕММА 2.1. В области (B) имеет место следующая асимптотика:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) F(\xi', \eta', \xi) d\eta' d\xi' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |\eta - \eta'| F(\xi, \eta', \xi) d\eta' + O \left(\frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 F(\xi, \eta', \xi) d\eta' \right) \\ &+ O \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{v.p.} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \{ F(\xi', \eta', \xi) - F(\xi, \eta', \xi) \} d\xi' d\eta' \right) \\ &+ O \left(\xi^{2/3} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 \frac{\partial^2 F}{(\partial \xi')^2}(\xi, \eta', \xi) d\eta' \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta = \xi^{2/3}$, $\mu = [\xi^\alpha, \xi - \delta] \cup [\xi + \delta, \infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) F(\xi', \eta', \xi) d\eta' d\xi' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) \left\{ F(\xi, \eta', \xi) + (\xi' - \xi) \frac{\partial F}{\partial \xi'}(\xi, \eta', \xi) \right. \\ &+ O \left((\xi - \xi')^2 \frac{\partial^2 F}{(\partial \xi')^2}(\xi, \eta', \xi) \right) \left. \right\} d\xi' d\eta' \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mu}^{\infty} \left[\frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} + O \left(\frac{(\eta - \eta')^4}{(\xi - \xi')^4} \right) \right] F(\xi, \eta', \xi) d\xi' d\eta' \\ &+ O \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mu}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} [F(\xi', \eta', \xi) - F(\xi, \eta', \xi)] d\xi' d\eta' \right). \end{aligned}$$

При $|\eta'| < |\xi|^{1/6+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < 1/2$, имеем $\delta/|\eta - \eta'| \gg 1$ и, следовательно, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) d\xi' = 2|\eta - \eta'| \int_0^{\delta/|\eta - \eta'|} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= 2|\eta - \eta'| \left\{ x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right\} \Big|_{x=\delta/|\eta - \eta'|} \\ &= 2|\eta - \eta'| \left\{ \pi - \frac{1}{x} + O \left(\frac{1}{x^3} \right) \right\} \Big|_{x=\delta/|\eta - \eta'|}. \end{aligned}$$

Далее, в силу ограниченности функции $x^2 \ln(1 + 1/x^2)$

$$\int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} (\xi' - \xi)^2 \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) d\xi' = O(|\eta - \eta'|^2 \delta).$$

Кроме того,

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} (\xi' - \xi) \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) d\xi' = 0, \quad \int_{\mu} \frac{d\xi'}{(\xi - \xi')^2} = \frac{2}{\delta} + O\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) F(\xi', \eta', \xi) d\eta' d\xi' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |\eta - \eta'| F(\xi, \eta', \xi) d\eta' - \frac{2}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 F(\xi, \eta', \xi) d\eta' \\ & \quad + O\left(\frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^4 F(\xi, \eta', \xi) d\eta'\right) \\ & \quad + O\left(\delta \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 \frac{\partial^2 F}{(\partial \xi')^2}(\xi, \eta', \xi) d\eta'\right) \\ & \quad + \frac{2}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 F(\xi, \eta', \xi) d\eta' + O\left(\frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 F(\xi, \eta', \xi) d\eta'\right) \\ & \quad + O\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mu} \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} [F(\xi', \eta', \xi) - F(\xi, \eta', \xi)] d\xi' d\eta'\right). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^4 F(\xi, \eta', \xi) d\eta' = O\left(\frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 F(\xi, \eta', \xi) d\eta'\right), \\ & \text{v.p.} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} [F(\xi', \eta', \xi) - F(\xi, \eta', \xi)] d\eta' d\xi' \\ &= O\left(\delta \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 \frac{\partial^2 F}{(\partial \xi')^2}(\xi, \eta', \xi) d\eta'\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Далее, поскольку функция G^2 экспоненциально убывает при $\xi \rightarrow -\infty$, то

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \right) (1 - \chi(\xi', \xi^\alpha)) G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &= O\left(\frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta'\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

И, наконец, последний из входящих в (2.4) интегралов содержит быстро осциллирующую функцию $\cos 2\Phi$ и в силу этого является малым. Мы включим его в остаточный член. (Точные оценки см. в § 5.)

Из формул (2.4)–(2.6) вытекает

ЛЕММА 2.2. *Справедлива асимптотика*

$$\begin{aligned}
& \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right) G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\
&= 2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| (1 - \chi(\xi', \xi^\alpha)) \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\
&\quad + \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| \chi(\xi', \xi^\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\
&\quad + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| T^2(\xi, \eta') d\eta' + r,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где остаточный член r имеет оценку

$$\begin{aligned}
r &= O \left(\frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 T^2(\xi, \eta') d\eta' \right) \\
&\quad + O \left(\frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right) \\
&\quad + O \left(\int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta') \cos 2\Phi(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Теперь подставим (2.1)–(2.3), (2.7) в (1.6). Тогда придем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 - T(S')^2 - 2TS' \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] \cos \Phi \\
&\quad - \left[2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial \xi} S' + TS'' \right] \sin \Phi \\
&\quad + \left[\xi - 2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| (1 - \chi(\xi', \xi^\alpha)) \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \right. \\
&\quad - \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| \chi(\xi', \xi^\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\
&\quad \left. - \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| T^2(\xi, \eta') d\eta' \right] T \cos \Phi + r_1 = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$r_1 = O \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) + O \left(T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right) + O \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + O \left(T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) + O(rT). \tag{2.10}$$

Чтобы выполнялось (2.9), вначале приравняем к нулю выражение, стоящее перед $\sin \Phi$. После умножения на T получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(T^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (T^2 S'(\xi)) = 0. \tag{2.11}$$

Так как при $|\eta| \rightarrow \infty$ T экспоненциально убывает, а φ растет лишь степенным образом, то $\lim_{|\eta| \rightarrow \infty} T^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$. Поэтому условием разрешимости (2.11) в указанном классе функций будет равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi, \eta) d\eta = k/S'(\xi), \quad (2.12)$$

где k – константа.

Обратим далее в нуль слагаемые перед $\cos \Phi$ в (2.9). Пусть экспоненциально убывающая при $|\eta|/\sqrt[6]{\xi} \rightarrow \infty$ амплитуда $T(\xi, \eta)$, а также $L(\xi)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| T^2(\xi, \eta') d\eta' + L(\xi) \right) T(\xi, \eta) \\ &= \left[\left(\frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right)^2 + 2S'(\xi) \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right] T(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тогда для нахождения функции S получаем уравнение

$$\begin{aligned} & - (S'(\xi))^2 + \xi - 2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| (1 - \chi(\xi', \xi^\alpha)) \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ & - \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi'} \right| \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) k}{S'(\xi')} d\xi' + L(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

(уравнение для фазы).

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть функции $S(\xi)$, $T(\xi, \eta)$, $\varphi(\xi, \eta)$, $L(\xi)$ удовлетворяют уравнениям (2.11)–(2.14). Тогда при $\xi \rightarrow +\infty$ эйри-полярон (2.1) является решением уравнения (1.6) с точностью r_1 , где r_1 имеет вид (2.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В уравнении для амплитуды (2.13) слагаемые, собранные в правой части, как будет показано ниже, малы. Таким образом, в первом приближении задача (2.13), (2.12) – это хорошо известная задача на собственные значения для одномерного полярона Боголюбова.

Отметим, что уравнение полярона инвариантно относительно сдвигов по η . Чтобы устранить связанную с этим неоднозначность в определении T , дополним (2.13), (2.12) условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta T^2(\xi, \eta) d\eta = 0. \quad (2.15)$$

Наконец, для эйри-полярона G определим $\cos$ -амплитуду

$$B = T \cos \varphi \quad (2.16)$$

и $\sin$ -амплитуду

$$I = -T \sin \varphi, \quad (2.17)$$

которые позволяют записать равенство (2.1) в виде

$$G = B \cos S + I \sin S. \quad (2.18)$$

Оказывается, что технически более удобно строить асимптотические разложения не для пары $T(\xi, \eta)$, $\varphi(\xi, \eta)$, а для функций $B(\xi, \eta)$, $I(\xi, \eta)$, через которые выражаются T и φ . Ниже мы получим задачу для нахождения cos- и sin-амплитуд.

Пусть функция S удовлетворяет уравнению (2.14). Приравнявая к нулю в равенстве (2.9) слагаемые перед $\cos S$ и $\sin S$ и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} \cos S + \frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} \sin S &= \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \cos \Phi - \left[2 \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right] \sin \Phi, \\ \frac{\partial B}{\partial \xi} \sin S - \frac{\partial I}{\partial \xi} \cos S &= \frac{\partial T}{\partial \xi} \sin \Phi + T \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \cos \Phi, \end{aligned}$$

приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| (B^2(\xi, \eta') + I^2(\xi, \eta')) d\eta' + L(\xi) \right) B + 2S' \frac{\partial I}{\partial \xi} + S'' I = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \eta^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| (B^2(\xi, \eta') + I^2(\xi, \eta')) d\eta' + L(\xi) \right) I - 2S' \frac{\partial B}{\partial \xi} - S'' B = 0. \quad (2.20)$$

Кроме того, в силу (2.12), (2.15) $B(\xi, \eta)$ и $I(\xi, \eta)$ должны удовлетворять условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} (B^2(\xi, \eta) + I^2(\xi, \eta)) d\eta = k/S'(\xi), \quad (2.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta (B^2(\xi, \eta) + I^2(\xi, \eta)) d\eta = 0. \quad (2.22)$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть функция S является решением уравнения (2.14), а B , I (а также L) – решение задачи (2.19)–(2.22) для cos- и sin-амплитуд. Тогда при $\xi \rightarrow +\infty$ эйри-полярон (2.18) удовлетворяет уравнению (1.6) с точностью r_1 , где r_1 имеет вид (2.10).

§ 3. Асимптотическое решение задачи для cos- и sin-амплитуд эйри-полярона

В этом параграфе мы построим асимптотическое решение задачи (2.19)–(2.22) при $|\eta| \ll \xi^{1/4}$ в виде

$$B(\xi, \eta) = B_0(\xi, \eta) + B_1(\xi, \eta) + B_2(\xi, \eta) + O(B_3(\xi, \eta)), \quad (3.1)$$

$$I(\xi, \eta) = I_0(\xi, \eta) + I_1(\xi, \eta) + O(I_2(\xi, \eta)), \quad (3.2)$$

$$L(\xi) = \ell_0(\xi) + \ell_1(\xi) + \ell_2(\xi) + O(\ell_3(\xi)), \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} B_j(\xi, \eta) &= O(\xi^{-(1+j)/3}), \quad j = 0, 1, 2, \quad B_3(\xi, \eta) = O(\xi^{-7/6}), \quad \xi \rightarrow +\infty, \\ I_j(\xi, \eta) &= O(\xi^{-(3+2j)/6}), \quad j = 0, 1, 2, \quad \xi \rightarrow +\infty, \\ \ell_j(\xi) &= O(\xi^{-(1+j)/3}), \quad j = 0, 1, 2, \quad \ell_3(\xi) = O(\xi^{-7/6}), \quad \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Функции B_j ($j = 0, 1, 2, 3$), I_j ($j = 0, 1, 2$), ℓ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) в (3.1)–(3.3) вещественные, гладкие, причем в области (A) $B_j(\xi, \eta)$ и $I_j(\xi, \eta)$ экспоненциально убывают.

Отметим, что используемая при построении разложений техника характерна для метода Уизема [71], [72].

3.1. Формулы для главных членов асимптотики B_0, I_0, ℓ_0 . Подставляя ряды для B, I, L в (2.19), (2.21), (2.22), для главного члена разложения cos-амплитуды получаем задачу

$$\frac{\partial^2 B_0(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0^2(\xi, \eta') d\eta' + \ell_0(\xi) \right) B_0(\xi, \eta) = 0, \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0^2(\xi, \eta) d\eta = k/S'(\xi), \quad (3.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0^2(\xi, \eta) d\eta = 0. \quad (3.6)$$

Решения (3.4)–(3.6) выражаются через решения следующей, не зависящей от дополнительных параметров, задачи на собственные значения для одномерного полярона

$$\frac{d^2 t(\tau)}{d\tau^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' + \rho \right) t(\tau) = 0, \quad (3.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2(\tau) d\tau = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tau t^2(\tau) d\tau = 0. \quad (3.8)$$

Обозначим через $t_i(\tau)$, ρ_i , $i = 1, 2, \dots$, собственные функции и собственные значения (3.7), (3.8). Для упрощения обозначений мы опустим индекс i в формулах, приведенных ниже.

Функцию B_0 будем искать в виде

$$B_0(\xi, \eta) = y(\xi) t(\tau), \quad (3.9)$$

где $\tau = \beta(\xi)\eta + \varkappa(\xi)$.

ЛЕММА 3.1. *Если*

$$y = (k/S')^{2/3}, \quad \beta = (k/S')^{1/3}, \quad \varkappa = 0, \quad (3.10)$$

то задаваемая формулой (3.9) функция $B_0(\xi, \eta)$ является решением задачи (3.4)–(3.6). При этом

$$\ell_0 = \rho(k/S')^{2/3}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (3.9) в (3.4)–(3.6), имеем

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{d^2 t(\tau)}{d\tau^2} - \left(\frac{y^2}{\beta^2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' + \ell_0 \right) t(\tau) &= 0, \\ \frac{y^2}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} t^2(\tau) d\tau &= \frac{k}{S'}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - \kappa(\xi)) t^2(\tau) d\tau = 0, \end{aligned}$$

а значит,

$$\frac{y^4}{\beta^4} = 1, \quad \frac{\ell_0}{\beta^2} = \rho, \quad \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{k}{S'}, \quad \kappa = 0.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В формуле для $y = \pm(k/S')^{2/3}$ мы для определенности выбрали знак плюс. Кроме того, ниже будем считать, что $k > 0$, $S' > 0$ (случай $k < 0$, $S' < 0$ рассматривается аналогично).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Непосредственным дифференцированием проверяется, что для решения задачи (3.7), (3.8) справедливы равенства $(t''/t)'' = 2\pi t^2$ и

$$((t''/t)')^2 = \pi^2 + 4\pi(t''t - (t')^2). \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) допускает понижение порядка на 1. Если $x \stackrel{\text{def}}{=} (t''/t)'$, то после замены $x' = Y(x)$ имеем

$$Y^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} = x^2 - \pi^2, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad Y(-\pi) = Y(\pi) = 0.$$

Интегрирование этой нелинейной задачи эквивалентно решению задачи (3.7), (3.8) для одномерного полярона.

Покажем теперь, что функция $B_0(\xi, \eta)$ (3.9) экспоненциально убывает при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Для этого найдем асимптотику собственных функций $t(\tau)$ задачи (3.7), (3.8) при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Пусть $\tau \rightarrow +\infty$. Тогда уравнение (3.7) примет вид

$$\frac{d^2 t(\tau)}{d\tau^2} + \left[-\pi\tau - \rho + O\left(\tau \int_{\tau}^{\infty} t^2(\tau') d\tau'\right) + O\left(\int_{\tau}^{\infty} \tau' t^2(\tau') d\tau'\right) \right] t(\tau) = 0. \quad (3.13)$$

Если пренебречь в (3.13) экспоненциально малыми поправками, то получится уравнение, которое после замены $z = \sqrt[3]{\pi}(\tau + \rho/\pi)$ совпадает с уравнением Эйри. Асимптотики функций Эйри хорошо известны [73]. В результате при $\tau \rightarrow +\infty$ имеем

$$t(\tau) = \frac{c_+}{\sqrt[4]{\tau}} \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\pi}\tau^{3/2} - \frac{\rho\tau^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\right),$$

где c_+ – константа. Аналогично, при $\tau \rightarrow -\infty$

$$t(\tau) = \frac{c_-}{\sqrt[4]{|\tau|}} \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\pi}|\tau|^{3/2} - \frac{\rho|\tau|^{1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\right)\right),$$

где c_- – константа. Отметим, что экспоненциальное убывание собственных функций задачи (3.7), (3.8) вытекает из теоремы сравнения для одномерного уравнения Шрёдингера [74].

Итак, главный член асимптотики $\cos$ -амплитуды эйри-полярона определяется формулой (3.9), в которой $t = t_i(\tau)$ – собственная функция одномерного полярона, а $y = y(\xi)$ задана в (3.10).

Подставим теперь ряды для B , I , L в (2.20). Тогда для нахождения главного члена разложения $\sin$ -амплитуды $I_0(\xi, \eta)$ получаем уравнение

$$\widehat{R}I_0 = 2S' \frac{\partial B_0}{\partial \xi} + S'' B_0. \quad (3.14)$$

Здесь линейный оператор $\widehat{R}$ задан формулой

$$\widehat{R}I_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \eta^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0^2 d\eta' + \ell_0 \right) I_0. \quad (3.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Для упрощения обозначений в (3.15), а также в последующих формулах § 3, мы не будем выписывать аргументы функций B_j ($j = 0, 1, 2$), I_0 , I_1 , φ_0 , Ψ , T_1 , T_2 , $T_{1,0}$, Z и их производных. В указанных формулах первый аргумент данных функций равен ξ , а второй либо равен η , если функция не стоит под знаком интеграла, либо, в противном случае, совпадает с переменной, по которой производится интегрирование.

Определим

$$\varphi_0(\xi, \eta) = S''(\xi) \eta^2 / 6. \quad (3.16)$$

ЛЕММА 3.2. *Функция*

$$I_0 = -B_0 \varphi_0 \quad (3.17)$$

удовлетворяет уравнению (3.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\widehat{R}B_0 = 0$, то после подстановки (3.17) в (3.14) получаем соотношение

$$-B_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial B_0}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 2S' \frac{\partial B_0}{\partial \xi} + S'' B_0,$$

которое в силу (3.16), (3.9) записывается в виде

$$-y \frac{S''}{3} t(\tau) - 2y \frac{S''}{3} \tau \frac{dt}{d\tau}(\tau) = 2S' y' t(\tau) + 2S' \frac{\beta'}{\beta} y \tau \frac{dt}{d\tau}(\tau) + S'' y t(\tau). \quad (3.18)$$

Поскольку из (3.10) вытекает, что

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{3} \frac{S''}{S'}, \quad \frac{\beta'}{\beta} = -\frac{1}{3} \frac{S''}{S'}, \quad (3.19)$$

то (3.18) имеет место. Лемма доказана.

Отметим, что в формулах (3.9)–(3.11), (3.16), (3.17) фаза S пока остается неизвестной. Вычислению S посвящен § 4.

3.2. Формулы для поправок B_1 , ℓ_1 . Так как в силу (2.14) $S'(\xi) \sim \sqrt{\xi}$ при $\xi \rightarrow +\infty$, то из (2.19), (2.21), (2.22) для нахождения первых поправок $B_1(\xi, \eta)$, $\ell_1(\xi)$ получаем задачу

$$\hat{N}B_1 = \pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| I_0^2 d\eta' \right) B_0 + \ell_1 B_0 - 2S' \frac{\partial I_0}{\partial \xi} - S'' I_0, \quad (3.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (I_0^2 + 2B_0 B_1) d\eta = 0, \quad (3.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta (I_0^2 + 2B_0 B_1) d\eta = 0. \quad (3.22)$$

Здесь линейный оператор $\hat{N}$ задан формулой

$$\hat{N}B_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 B_1}{\partial \eta^2} - \pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0^2 d\eta' \right) B_1 - 2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0 B_1 d\eta' \right) B_0 - \ell_0 B_1, \quad (3.23)$$

а аргументы функций опущены в соответствии с замечанием 3.3.

Вместо B_1 мы будем искать функцию

$$T_1 = B_1 + I_0^2/(2B_0) = B_1 + \varphi_0^2 B_0/2, \quad (3.24)$$

задача для которой имеет более простой вид.

ЛЕММА 3.3. *Функции $T_1(\xi, \eta)$, $\ell_1(\xi)$ удовлетворяют задаче*

$$\hat{N}T_1 = \left[\ell_1 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right] B_0, \quad (3.25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0 T_1 d\eta = 0, \quad (3.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0 T_1 d\eta = 0. \quad (3.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (3.26), (3.27) вытекают непосредственно из (3.24) и (3.21), (3.22). Для доказательства (3.25) подставим $B_1 = T_1 - \varphi_0^2 B_0/2$ в уравнение (3.20). Учитывая (3.16), (3.17), имеем

$$\begin{aligned} \hat{N}T_1 &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\varphi_0^2}{2} B_0 \right) - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0^2 d\eta' + \ell_0 \right) \frac{\varphi_0^2}{2} B_0 \\ &\quad + \ell_1 B_0 + 2S' \frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi_0 B_0) + S'' \varphi_0 B_0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Так как задаваемая формулой (3.9) функция B_0 удовлетворяет (3.4), то уравнение (3.28) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{N}T_1 &= \left[\ell_1 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right] B_0 + \left\{ \frac{(S'')^2 \eta^2}{6} B_0 + \frac{(S'')^2 \eta^2}{6} B_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(S'')^2}{9} \eta^3 y \beta \frac{dt(\tau)}{d\tau} + \frac{S' S'' \eta^2}{3} \eta^2 \left[y' t(\tau) + y \beta' \eta \frac{dt}{d\tau}(\tau) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, воспользовавшись (3.10), (3.19), приходим к (3.25). Лемма доказана.

Перейдем к изучению задачи (3.25)–(3.27). Ядро входящего в (3.25) оператора $\hat{N}$ содержит гладкую, экспоненциально убывающую при $|\tau| \rightarrow \infty$ функцию $\frac{\partial B_0}{\partial \eta}$. Действительно, дифференцируя по η уравнение (3.4), имеем $\hat{N} \frac{\partial B_0}{\partial \eta} = 0$. Предположим, что выбрано такое решение задачи (3.4)–(3.6), при котором ядро оператора $\hat{N}$ одномерно. Тогда условием разрешимости уравнения (3.25) будет условие ортогональности в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1)$ функции $\frac{\partial B_0}{\partial \eta}$ правой части (3.25) (см. дополнение):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\ell_1 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right] B_0 \frac{\partial B_0}{\partial \eta} d\eta = 0. \quad (3.29)$$

Если в (3.29) вместо φ_0 подставить выражение (3.16) и проинтегрировать по частям, то условие разрешимости (3.29) примет вид

$$\left(\frac{(S'')^2}{9} + \frac{S' S'''}{3} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0^2 d\eta = 0. \quad (3.30)$$

Равенство (3.30) выполнено в силу (3.6). Поэтому уравнение (3.25) разрешимо.

Изучим далее условия (3.26), (3.27), первое из которых позволяет найти $\ell_1(\xi)$. Нам потребуется

ЛЕММА 3.4. Пусть $\Psi(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} B_0 + \frac{\eta}{2} \frac{\partial B_0}{\partial \eta}$. Тогда справедливо равенство

$$\hat{N}(\Psi/\ell_0) = B_0. \quad (3.31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Функция $\ell_0(\xi) = \rho(k/S')^{2/3} < 0$, так как собственные значения ρ задачи (3.7), (3.8) отрицательные. Действительно, если бы $\rho \geq 0$, то в силу (3.7) $t^{-1} \frac{d^2 t}{d\tau^2} > 0$. Однако не существует непрерывных экспоненциально убывающих при $\tau \rightarrow \pm\infty$ функций таких, что t выпукла вниз при $t > 0$ и выпукла вверх при $t < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Сравнивая (3.4) и (3.23), имеем

$$\hat{N}B_0 = -2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0^2 d\eta' \right) B_0. \quad (3.32)$$

Так как $\hat{N} \frac{\partial B_0}{\partial \eta} = 0$, то, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \hat{N} \left(\frac{\eta}{2} \frac{\partial B_0}{\partial \eta} \right) &= \frac{\partial^2 B_0}{\partial \eta^2} - \pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| (\eta' - \eta) \frac{\partial}{\partial \eta'} (B_0^2) d\eta' \right) \frac{B_0}{2} \\ &= \ell_0 B_0 + 2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0^2 d\eta' \right) B_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Наконец, складывая (3.32), (3.33), приходим к (3.31). Лемма доказана.

Получим формулу для $\ell_1(\xi)$. Введем константы

$$\sigma = \sigma_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 t_i^2(\tau) d\tau > 0,$$

характеризующие собственные функции задачи (3.7), (3.8). Справедлива

ЛЕММА 3.5. *Имеет место равенство*

$$\ell_1(\xi) = -\frac{\sigma}{27} \left(\frac{S'}{k} \right)^{2/3} ((S'')^2 + 3S'S'''). \quad (3.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.26), (3.31), (3.25), (3.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \ell_0 \int_{-\infty}^{\infty} B_0 T_1 d\eta = \ell_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{N} \left(\frac{\Psi}{\ell_0} \right) T_1 d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{N} T_1 d\eta \\ &= \ell_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(B_0^2 + \frac{\eta}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} (B_0^2) \right) d\eta + \frac{(S'')^2 + 3S'S'''}{9} \int_{-\infty}^{\infty} \left(B_0^2 + \frac{\eta}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} (B_0^2) \right) \eta^2 d\eta \\ &= \ell_1 \frac{3}{4} \frac{k}{S'} + \frac{(S'')^2 + 3S'S'''}{36} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 B_0^2 d\eta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 B_0^2 d\eta = \frac{y^2}{\beta^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 t^2(\tau) d\tau = \left(\frac{k}{S'} \right)^{1/3} \sigma,$$

то (3.34) вытекает из (3.35). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь условие (3.27). Если $T_{1,0}$ – некоторое частное решение уравнения (3.25), то в силу одномерности ядра оператора $\hat{N}$ общее решение (3.25) имеет вид

$$T_1 = T_{1,0} + c_1(\xi) \frac{\partial B_0}{\partial \eta},$$

где $c_1(\xi)$ – произвольная функция. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_0 \frac{\partial B_0}{\partial \eta} d\eta = 0,$$

то (3.26) будет выполнено при всех $c_1(\xi)$. Функция $c_1(\xi)$ находится из условия (3.27). Учитывая, что

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0 T_1 d\eta = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0 \frac{\partial B_0}{\partial \eta} d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0 T_{1,0} d\eta, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0 \frac{\partial B_0}{\partial \eta} d\eta &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_0^2 d\eta = -\frac{k}{2S'}, \end{aligned}$$

имеем

$$c_1(\xi) = \frac{2S'(\xi)}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \eta B_0 T_{1,0} d\eta.$$

Таким образом, задача (3.25)–(3.27) однозначно определяет $T_1(\xi, \eta)$ и $\ell_1(\xi)$.

Отметим, что функция T_1 представима в виде

$$T_1(\xi, \eta) = y_1(\xi) p(\tau), \quad (3.36)$$

где

$$y_1(\xi) = (S'/k)^{2/3} [3S'S''' + (S'')^2]/9, \quad (3.37)$$

$\tau = \beta(\xi)\eta$, а $p = p(\tau)$ является решением задачи

$$\hat{n}p = (\tau^2 - \sigma/3)t(\tau), \quad (3.38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau t(\tau) p(\tau) d\tau = 0. \quad (3.39)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{n}p &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 p(\tau)}{d\tau^2} - \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' p(\tau) \\ &\quad - 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t(\tau') p(\tau') d\tau' t(\tau) - \rho p(\tau). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Действительно, подставляя (3.36), (3.34), (3.16), (3.9) в (3.25), приходим к (3.38).
Условие (3.39) вытекает из (3.27).

Итак, для B_1 получена формула

$$B_1 = y_1(\xi)p(\tau) - \varphi_0^2 y(\xi)t(\tau)/2, \quad (3.41)$$

где φ_0 имеет вид (3.16).

3.3. Формулы для поправок B_2 , I_1 , ℓ_2 . Для нахождения функций $B_2(\xi, \eta)$, $I_1(\xi, \eta)$ и $\ell_2(\xi)$ из (2.19)–(2.22) получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \hat{R}I_1 &= \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| (I_0^2 + 2B_0B_1) d\eta' + \ell_1 \right) I_0 + 2S' \frac{\partial B_1}{\partial \xi} + S'' B_1, \\ \hat{N}B_2 &= \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| (I_0^2 + 2B_0B_1) d\eta' + \ell_1 \right) B_1 \\ &\quad + \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| (B_1^2 + 2I_0I_1) d\eta' + \ell_2 \right) B_0 - 2S' \frac{\partial I_1}{\partial \xi} - S'' I_1, \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} (B_1^2 + 2B_0B_2 + 2I_0I_1) d\eta = 0, \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta (B_1^2 + 2B_0B_2 + 2I_0I_1) d\eta = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Здесь операторы $\hat{R}$ и $\hat{N}$ заданы формулами (3.15), (3.23), а аргументы у функций опущены в соответствии с замечанием 3.3.

Будем искать $I_1(\xi, \eta)$ в виде

$$I_1 = Z - \varphi_0 T_1 + \varphi_0^3 B_0/6. \quad (3.43)$$

Справедлива

ЛЕММА 3.6. Функция $Z(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{R}Z = y^2 \psi p(\tau), \quad (3.44)$$

где

$$\psi(\xi) = 2 \left(\frac{S'}{k} \right)^2 \left[S' S'' S''' + \frac{4}{27} (S'')^3 + \frac{1}{3} (S')^2 S^{IV} \right], \quad (3.45)$$

$$\tau = \beta(\xi) \eta. \quad (3.46)$$

Пусть

$$Z(\xi, \eta) = y(\xi) \psi(\xi) z(\tau). \quad (3.47)$$

Тогда из (3.44) вытекает, что экспоненциально убывающая при $|\tau| \rightarrow \infty$ функция $z(\tau)$ должна удовлетворять уравнению

$$\hat{r}z = p(\tau), \quad (3.48)$$

где

$$\hat{r}z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} - \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t^2(\tau') d\tau' + \rho \right) z(\tau),$$

а $p(\tau)$ – решение задачи (3.38), (3.39).

Уравнение (3.48) является линейным неоднородным о.д.у. 2-го порядка. Так как $\hat{r}t = 0$, то, согласно методу вариации постоянных, на каждом интервале, где $t(\tau) \neq 0$, общее решение (3.48) выписывается в квадратурах. Из анализа формул для $z(\tau)$ вытекает

ЛЕММА 3.7. Пусть функция $p(\tau)$ гладкая и экспоненциально убывает при $|\tau| \rightarrow \infty$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (3.48) в классе гладких, экспоненциально убывающих при $|\tau| \rightarrow \infty$ функций является равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) t(\tau) d\tau = 0. \quad (3.49)$$

В случае, если волновая функция полярона t не обращается в нуль, решения из указанного класса представимы в виде

$$z(\tau) = \left(c_1 + \int_{\tau_i}^{\tau} t^{-2}(\tau') \int_{-\infty}^{\tau'} p(x) t(x) dx d\tau' \right) t(\tau), \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

где c_1 – произвольная константа. Если же t имеет конечное число простых нулей $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, то для гладких, экспоненциально убывающих при $|\tau| \rightarrow \infty$ решений (3.48) справедливы формулы

$$z(\tau) = \left(c_i + \int_{\tau_i}^{\tau} t^{-2}(\tau') \int_{-\infty}^{\tau'} p(x) t(x) dx d\tau' \right) t(\tau),$$

$$\alpha_{i-1} < \tau < \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Здесь $\alpha_0 = -\infty$, $\alpha_{n+1} = +\infty$, точки $\tau_i \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, c_1 – произвольная константа, а константы c_i при $i > 1$ выражаются через c_1 . (При этом используется условие непрерывности $dz/d\tau$ в нулях $t(\tau)$.) Кроме того,

$$z(\alpha_i) = - \int_{-\infty}^{\alpha_i} p(\tau)t(\tau) d\tau \Big/ \frac{dt}{d\tau}(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.48), где $p(\tau)$ – решение (3.38), (3.39). В силу (3.26) соотношение (3.49) выполнено. Поэтому уравнение (3.48) в классе гладких, экспоненциально убывающих при $|\tau| \rightarrow \infty$ функций разрешимо. Однако (3.48) определяет $z(\tau)$ лишь с точностью до слагаемого $c_1 t(\tau)$, где c_1 – произвольная константа.

Дополним (3.48) условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt}{d\tau}(\tau) + t(\tau) \right) z(\tau) d\tau = 0, \quad (3.50)$$

которое, как мы увидим ниже, необходимо для выполнения соотношения (3.42).

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt}{d\tau}(\tau) + t(\tau) \right) t(\tau) d\tau = \frac{3}{4}, \quad (3.51)$$

то задача (3.48), (3.50) в классе гладких, экспоненциально убывающих при $|\tau| \rightarrow \infty$ функций будет иметь уже единственное решение.

Таким образом, $I_1(\xi, \eta)$ полностью определяется формулами (3.43), (3.47), где $z(\tau)$ – решение задачи (3.48), (3.50).

Перейдем к нахождению $B_2(\xi, \eta)$. Функцию B_2 будем искать в виде

$$B_2 = T_2 - \varphi_0^2 T_1 / 2 + \varphi_0 Z + \varphi_0^4 B_0 / 4!. \quad (3.52)$$

Аналогично лемме 3.3 доказывается

ЛЕММА 3.8. *Функции $T_2(\xi, \eta)$ и $\ell_2(\xi)$ являются решением задачи*

$$\begin{aligned} \hat{N}T_2 = \ell_1 T_1 + \ell_2 B_0 + 2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| B_0 T_1 d\eta' \right) T_1 + \pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta - \eta'| T_1^2 d\eta' \right) B_0 \\ + \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right)^2 + 2S' \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right] T_1 - 2S' y \psi' z(\tau), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (2B_0 T_2 + T_1^2) d\eta = 0, \quad (3.54)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta (2B_0 T_2 + T_1^2) d\eta = 0. \quad (3.55)$$

Здесь оператор $\hat{N}$ задан формулой (3.23).

Решение задачи (3.53)–(3.55) будем искать в виде

$$T_2(\xi, \eta) = y_1^2 t_{2,1}(\tau) / y + 2S' \psi' t_{2,2}(\tau), \quad (3.56)$$

$$\ell_2(\xi) = -4(S'/k)^{2/3} y_1^2 u / 3, \quad (3.57)$$

где функции $t_{2,1}(\tau)$, $t_{2,2}(\tau)$, а также константа u подлежат определению; τ задана формулой (3.46). Подставим (3.56), (3.57) в (3.53)–(3.55) и учтем (3.9), (3.10), (3.34), (3.36), (3.37). В результате получаем следующие задачи для нахождения $t_{2,1}(\tau)$ и $t_{2,2}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \hat{n}t_{2,1} = & -\frac{\sigma}{3}p(\tau) - \frac{4}{3}ut(\tau) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'|t(\tau')p(\tau') d\tau' p(\tau) \\ & + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'|p^2(\tau') d\tau' t(\tau) + \tau^2 p(\tau), \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau(2t_{2,1}(\tau)t(\tau) + p^2(\tau)) d\tau = 0; \quad (3.59)$$

$$\hat{n}t_{2,2} = -z(\tau), \quad (3.60)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau t_{2,2}(\tau)t(\tau) d\tau = 0, \quad (3.61)$$

а также равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_{2,2}(\tau)t(\tau) d\tau = 0, \quad (3.62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (2t_{2,1}(\tau)t(\tau) + p^2(\tau)) d\tau = 0. \quad (3.63)$$

Здесь оператор $\hat{n}$ задан формулой (3.40), $p(\tau)$ – решение (3.38), (3.39), а $z(\tau)$ – решение (3.48), (3.50).

Изучим равенства (3.62), (3.63). Используя вытекающее из (3.31) соотношение

$$\hat{n}\left(\frac{\tau}{2}\frac{dt}{d\tau}(\tau) + t(\tau)\right) = \rho t(\tau), \quad (3.64)$$

находим, что (3.62) имеет место в силу условия (3.50), наложенного на $z(\tau)$:

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} t_{2,2}(\tau)t(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2}\frac{dt}{d\tau}(\tau) + t(\tau)\right) \hat{n}t_{2,2} d\tau = 0.$$

Равенство же (3.63) позволяет определить входящую в (3.57), (3.58) константу u . Действительно, из (3.63), (3.64), (3.58) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (2t_{2,1}(\tau)t(\tau) + p^2(\tau)) d\tau = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\rho} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt}{d\tau}(\tau) + t(\tau) \right) \left[-\frac{\sigma}{3}p(\tau) - \frac{4}{3}ut(\tau) \right. \right. \\ & + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'|t(\tau')p(\tau') d\tau' p(\tau) \\ & \left. \left. + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'|p^2(\tau') d\tau' t(\tau) + \tau^2 p(\tau) \right] + p^2(\tau) \right\} d\tau = 0, \end{aligned}$$

откуда в силу (3.51)

$$\begin{aligned} u = u_i &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2} \frac{dt_i(\tau)}{d\tau} + t_i(\tau) \right) \left\{ -\frac{\sigma_i}{3} p(\tau) \right. \\ &\quad + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t_i(\tau') p(\tau') d\tau' p(\tau) \\ &\quad \left. + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| p^2(\tau') d\tau' t_i(\tau) + \tau^2 p(\tau) \right\} d\tau + \frac{\rho_i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Докажем, наконец, разрешимость полученных для $t_{2,1}(\tau)$ и $t_{2,2}(\tau)$ задач. Для этого достаточно проверить ортогональность правых частей уравнений (3.58) и (3.60) в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1)$ функции $\frac{dt}{d\tau}$ (см. дополнение). Из соотношения

$$\frac{d}{d\tau} \left(2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t(\tau') p(\tau') d\tau' + \tau^2 - \frac{\sigma}{3} \right) = 4\pi \int_{-\infty}^{\tau} t(\tau') p(\tau') d\tau' + 2\tau$$

вытекает

ЛЕММА 3.9. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\sigma}{3} p(\tau) - \frac{4}{3} u t(\tau) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t(\tau') p(\tau') d\tau' p(\tau) \right. \\ \left. + \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| p^2(\tau') d\tau' t(\tau) + \tau^2 p(\tau) \right\} \frac{dt}{d\tau}(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся формулами для $z(\tau)$, приведенными в лемме 3.7. Интегрируя по частям, имеем следующую лемму.

ЛЕММА 3.10. *Справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \frac{dt}{d\tau}(\tau) d\tau = 0.$$

Здесь $z(\tau)$ – решение задачи (3.48), (3.50).

Таким образом, $B_2(\xi, \eta)$ полностью определяется формулами (3.52), (3.56), где $t_{2,1}(\tau)$, $t_{2,2}(\tau)$ – решения задач (3.58), (3.59) и (3.60), (3.61). Для функции $\ell_2(\xi)$ справедлива формула (3.57), где константа u задана (3.65).

§ 4. Асимптотика фазы эйри-полярона при $\xi \rightarrow +\infty$

После того как определено разложение функции $L(\xi)$ с точностью $O(\xi^{-7/6})$, $\xi \rightarrow +\infty$, асимптотику функции $S'(\xi)$ с точностью $O(\xi^{-5/3})$ можно найти из уравнения (2.14) для фазы. Это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} - (S'(\xi))^2 + \xi - 2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} \ln \left| 1 - \frac{\xi}{\xi'} \right| (1 - \chi(\xi', \xi^\alpha)) \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ - \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{\xi}{\xi'} \right| \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) k}{S'(\xi')} d\xi' \\ + \rho \left(\frac{k}{S'(\xi)} \right)^{2/3} + \ell_1(\xi) + \ell_2(\xi) + O(\xi^{-7/6}) = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь ℓ_1, ℓ_2 задаются формулами (3.34), (3.57).

Так как в силу (2.1), (2.12)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi, \eta') d\eta' &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi, \eta') d\eta' \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi, \eta') \cos(2S(\xi) + 2\varphi(\xi, \eta')) d\eta' \\ &= \frac{k}{2S'(\xi)} + W(\xi), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} W(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{1}{2} \left(\cos(2S(\xi)) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi, \eta') \cos(2\varphi(\xi, \eta')) d\eta' \right. \\ & \left. - \sin(2S(\xi)) \int_{-\infty}^{\infty} T^2(\xi, \eta') \sin(2\varphi(\xi, \eta')) d\eta' \right) \end{aligned}$$

– быстро осциллирующая при $\xi \rightarrow +\infty$ часть асимптотики $\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi, \eta') d\eta'$, то из (4.1) вытекает уравнение

$$\begin{aligned} (S'(\xi))^2 &= \xi - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{\xi}{\xi'} \right| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') \right\} d\xi' \\ &\quad + \rho \left(\frac{k}{S'(\xi)} \right)^{2/3} + \ell_1(\xi) + \ell_2(\xi) + O(\xi^{-7/6}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Поэтому задачу нахождения асимптотики $S'(\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$ можно рассматривать как задачу нахождения асимптотики при $\xi \rightarrow +\infty$ неосциллирующей части функции $\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi, \eta') d\eta'$.

Перейдем к построению асимптотического разложения. Так как при $\xi \rightarrow +\infty$ $S' \sim \sqrt{\xi}$, то $\sqrt{\xi}$ можно подставить в правую часть равенства (4.3) и вычислить возникающие интегралы. Таким образом будут найдены следующие члены разложения для S' . Подставляя затем эту, уже более точную, асимптотику S' в правую часть (4.3), можно еще более уточнить асимптотику S' . И так далее, пока не будет достигнута требуемая точность.

Определим

$$A_{-1} = A_{-1}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \frac{k\theta(\xi')}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi', \quad (4.4)$$

$$A_0 = A_0(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\xi'| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \frac{k\theta(\xi')}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi', \quad (4.5)$$

где

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > 0, \\ 0 & \text{при } \xi \leq 0. \end{cases}$$

ЛЕММА 4.1. При $\xi \rightarrow +\infty$ справедливы разложения

$$S'(\xi) = \sqrt{\xi} - A_{-1} \frac{\ln \xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{A_0}{\sqrt{\xi}} + O\left(\frac{1}{\xi^{5/6}}\right), \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{S'(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} + A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi^{3/2}} - \frac{A_0}{\xi^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\xi^{11/6}}\right). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\int_0^\infty \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \left(\sqrt{x} \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right| \right) \Big|_0^\infty = 0,$$

а в силу интегрирования по частям

$$\int_{\xi^\alpha}^\infty \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') d\xi' = O(\xi^{-\infty}), \quad \int_{\xi^\alpha}^\infty (\ln \xi') \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') d\xi' = O(\xi^{-\infty}),$$

при $\xi \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \ln \left| 1 - \frac{\xi}{\xi'} \right| \left\{ \int_{-\infty}^\infty G^2(\xi', \eta') d\eta' - \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') \right\} d\xi' \\ &= A_{-1} \ln |\xi| - A_0 + \int_{-\infty}^\infty \ln \left| 1 - \frac{\xi'}{\xi} \right| \\ & \quad \times \left\{ \int_{-\infty}^\infty G^2(\xi', \eta') d\eta' - \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') - \frac{k\theta(\xi')}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi' + O(\xi^{-\infty}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где A_{-1} , A_0 определены равенствами (4.4), (4.5).

Подставим (4.8) в (4.3). Пренебрегая малыми слагаемыми, находим

$$(S'(\xi))^2 = \xi - 2A_{-1} \ln \xi + 2A_0 + O(\xi^{-1/3}), \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

откуда вытекают разложения (4.6), (4.7). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В силу (4.6), (4.7), (4.2) входящие в (4.4), (4.5) интегралы сходятся. При фиксированном k константы A_{-1} , A_0 характеризуют разность между средними от квадратов точного решения G и главного члена асимптотики.

Для дальнейших преобразований нам потребуется ряд интегралов. Во-первых, заметим, что

$$\int_0^\infty \ln |1 - x| \frac{dx}{x^{3/2}} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \ln |1 - x| + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right| \right) \Big|_0^\infty = 0. \quad (4.9)$$

Кроме того,

$$\int_0^\infty \ln |1 - x| \frac{\ln x}{x^{3/2}} dx = 8 \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = 2\pi^2, \quad (4.10)$$

так как [75]

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Уточним теперь формулы (4.6), (4.7).

ЛЕММА 4.2. При $\xi \rightarrow +\infty$ имеют место разложения

$$S'(\xi) = \sqrt{\xi} - A_{-1} \frac{\ln \xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{A_0}{\sqrt{\xi}} + \frac{\rho k^{2/3}}{2\xi^{5/6}} - \frac{k\pi^2 A_{-1}}{\xi} + \frac{\sigma}{108k^{2/3}\xi^{7/6}} + O\left(\frac{1}{\xi^{4/3}}\right), \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{S'(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} + A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi^{3/2}} - \frac{A_0}{\xi^{3/2}} - \frac{\rho k^{2/3}}{2\xi^{11/6}} + \frac{k\pi^2 A_{-1}}{\xi^2} - \frac{\sigma}{108k^{2/3}\xi^{13/6}} + O\left(\frac{1}{\xi^{7/3}}\right). \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.7), (4.9), (4.10)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{\xi'}{\xi} \right| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') - \frac{\theta(\xi')k}{2\sqrt{\xi'}} \right\} d\xi' \\ &= \frac{k\pi^2 A_{-1}}{\sqrt{\xi}} + \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{\xi'}{\xi} \right| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') \right. \\ & \quad \left. - \frac{\theta(\xi')k}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\xi'}} + \frac{A_{-1} \ln \xi'}{(\xi')^{3/2}} - \frac{A_0}{(\xi')^{3/2}} \right] \right\} d\xi', \end{aligned} \quad (4.13)$$

а из (4.6), (3.34), (3.57) следует, что при $\xi \rightarrow +\infty$

$$\rho \left(\frac{k}{S'(\xi)} \right)^{2/3} = \frac{\rho k^{2/3}}{\xi^{1/3}} + O\left(\frac{\ln \xi}{\xi^{4/3}}\right), \quad (4.14)$$

$$\ell_1(\xi) = \frac{\sigma}{54k^{2/3}\xi^{2/3}} + O\left(\frac{\ln \xi}{\xi^{5/3}}\right), \quad (4.15)$$

$$\ell_2(\xi) = -\frac{u}{243k^2\xi} + O\left(\frac{\ln \xi}{\xi^2}\right). \quad (4.16)$$

Подставляя (4.13), (4.8), (4.14), (4.15) в (4.3), получаем уравнение

$$\begin{aligned} (S'(\xi))^2 &= \xi - 2A_{-1} \ln \xi + 2A_0 + \frac{\rho k^{2/3}}{\xi^{1/3}} - \frac{2k\pi^2 A_{-1}}{\sqrt{\xi}} \\ & \quad + \frac{\sigma}{54k^{2/3}\xi^{2/3}} + O\left(\frac{1}{\xi^{5/6}}\right), \quad \xi \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

откуда находим (4.11), (4.12). Лемма доказана.

Для дальнейшего уточнения асимптотики S' вычислим следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln |1-x| \frac{dx}{x^{11/6}} &= \left\{ -\frac{6}{5} \frac{\ln |1-x|}{x^{5/6}} - \frac{18}{5} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1-x+x^2)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right] \right] \right\} \Big|_0^\infty = -\frac{6\sqrt{3}}{5} \pi, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \ln \left| 1 - \frac{\xi'}{\xi} \right| \frac{d\xi'}{(\xi')^2} &= \frac{1}{\xi} \left\{ -\frac{1}{x} \ln |1-x| + \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right\} \Big|_{1/\xi}^\infty \\ &= -\frac{\ln \xi}{\xi} - \frac{1}{\xi} + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Обозначим

$$K(\xi', \xi^\alpha, k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') - \frac{\theta(\xi')k}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\xi'}} + \frac{A_{-1} \ln \xi'}{(\xi')^{3/2}} - \frac{A_0}{(\xi')^{3/2}} - \frac{\rho k^{2/3}}{2(\xi')^{11/6}} \right] - \theta(\xi' - 1) \frac{k^2 \pi^2 A_{-1}}{2(\xi')^2}. \quad (4.19)$$

Тогда в силу (4.12), (4.17), (4.18)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| 1 - \frac{\xi'}{\xi} \right| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' - \chi(\xi', \xi^\alpha) W(\xi') - \frac{\theta(\xi')k}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\xi'}} + \frac{A_{-1} \ln \xi'}{(\xi')^{3/2}} - \frac{A_0}{(\xi')^{3/2}} \right] \right\} d\xi' \\ &= \frac{3\sqrt{3}\pi\rho k^{5/3}}{10\xi^{5/6}} - \frac{k^2 \pi^2 A_{-1}}{2} \left(\frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{1}{\xi} \right) - \frac{A_1^*}{\xi} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \left| 1 - \frac{\xi'}{\xi} \right| + \frac{\xi'}{\xi} \right] K(\xi', \xi^\alpha, k) d\xi'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь

$$A_1^* = A_1^*(k, \xi^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \xi' K(\xi', \xi^\alpha, k) d\xi'. \quad (4.21)$$

Далее, интегрируя в (4.21) по частям, получим следующую лемму.

ЛЕММА 4.3. *Справедливо равенство*

$$A_1^* = A_1 + O(\xi^{-\infty}), \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = A_1(k) \stackrel{\text{def}}{=} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \int_0^{\xi'} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(z, \eta') d\eta' dz \right. \\ & + \theta(\xi') \frac{k}{2} \int_0^{\xi'} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{A_{-1} \ln z}{z^{3/2}} - \frac{A_0}{z^{3/2}} - \frac{\rho k^{2/3}}{2z^{11/6}} \right] dz \\ & \left. + \theta(\xi') \int_1^{\xi'} \frac{k^2 \pi^2 A_{-1}}{2z^2} dz \right\} d\xi'. \end{aligned}$$

Оценим, наконец, последний интеграл в (4.20). Учитывая (4.12), а также соотношение $\ln |1 - x| + x = O(x^2)$, $x \rightarrow 0$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \left| 1 - \frac{\xi'}{\xi} \right| + \frac{\xi'}{\xi} \right] K(\xi', \xi^\alpha, k) d\xi' = O\left(\frac{1}{\xi^{7/6}}\right), \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (4.23)$$

Формулы (4.20), (4.22), (4.23), (4.16) позволяют записать решение уравнения (4.1) в виде

$$\begin{aligned} (S'(\xi))^2 = & \xi - 2A_{-1} \ln \xi + 2A_0 + \frac{\rho k^{2/3}}{\xi^{1/3}} - \frac{2k\pi^2 A_{-1}}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sigma}{54k^{2/3}\xi^{2/3}} \\ & - \frac{3\sqrt{3}\pi\rho k^{5/3}}{5\xi^{5/6}} + k^2 \pi^2 A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi} + \frac{D}{\xi} + O\left(\frac{1}{\xi^{7/6}}\right), \quad \xi \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} k^2 \pi^2 A_{-1} + 2A_1 - u/(243k^2)$. Асимптотика (4.24) получена с той же точностью, что и само уравнение (4.1).

По формуле Тейлора из (4.24) находим

$$\begin{aligned} S'(\xi) = & \sqrt{\xi} - A_{-1} \frac{\ln \xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{A_0}{\sqrt{\xi}} + \frac{\rho k^{2/3}}{2\xi^{5/6}} - \frac{k\pi^2 A_{-1}}{\xi} + \frac{\sigma}{108k^{2/3}\xi^{7/6}} \\ & - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\pi \rho k^{5/3}}{\xi^{4/3}} - \frac{A_{-1}^2}{2} \frac{(\ln \xi)^2}{\xi^{3/2}} + \left[A_0 + \frac{k^2 \pi^2}{2} \right] A_{-1} \frac{\ln \xi}{\xi^{3/2}} \\ & + \frac{(D - A_0^2)}{2} \frac{1}{\xi^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\xi^{5/3}}\right), \quad \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Интегрируя (4.25), получаем

$$\begin{aligned} S(\xi) = & \frac{2}{3} \xi^{3/2} - A_{-1} \sqrt{\xi} (2 \ln \xi - 4) + 2A_0 \sqrt{\xi} + 3\rho k^{2/3} \xi^{1/6} - k\pi^2 A_{-1} \ln \xi + \delta \\ & - \frac{\sigma}{18k^{2/3}\xi^{1/6}} + \frac{9\sqrt{3}}{10} \frac{\pi \rho k^{5/3}}{\xi^{1/3}} + \frac{A_{-1}^2}{\sqrt{\xi}} [(\ln \xi)^2 + 4 \ln \xi + 8] \\ & - \left[A_0 + \frac{k^2 \pi^2}{2} \right] \frac{A_{-1}}{\sqrt{\xi}} (2 \ln \xi + 4) - (D - A_0^2) \frac{1}{\sqrt{\xi}} + O\left(\frac{1}{\xi^{2/3}}\right), \quad \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь $\delta = \delta(k)$ – константа интегрирования (сдвиг фазы).

Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4.1. *Формула (4.26) определяет асимптотику фазы S эйри-полярона.*

§ 5. Оценка остаточных членов. Формулировка основной теоремы

Итак, асимптотические разложения для функций B , I , S , а значит, и для входящих в формулу (2.1) функций T , φ , S найдены. В этом параграфе мы оценим невязку, возникающую при подстановке асимптотического эйри-полярона (2.1) в уравнение (2.9). Невязка содержит несколько типов интегралов, требующих отдельного изучения. В результате будет определено, с какой точностью получены уравнения (2.19), (2.20), (4.1) для B , I и S .

При оценке невязки воспользуемся тем, что при $i \geq 0$, $j \geq 0$ функции

$$\tau^i \frac{d^j t(\tau)}{d\tau^j} \quad (5.1)$$

ограничены. В силу формул (2.16), (2.17), (3.9), (3.10), (3.16), (4.6) при $\xi \rightarrow +\infty$ имеем следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} &= O\left(\frac{1}{\xi^{7/3}}\right), & T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 &= O\left(\frac{1}{\xi^{8/3}}\right), \\ \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= O\left(\frac{1}{\xi^{5/2}}\right), & T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} &= O\left(\frac{1}{\xi^{5/2}}\right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Далее оценим слагаемое rT , где r задается равенством (2.8). При $\xi \rightarrow +\infty$ получаем

$$\frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 T^2(\xi, \eta') d\eta' T(\xi, \eta) = O\left(\frac{y^3}{\xi \beta^3}\right) = O\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right), \quad (5.3)$$

$$\xi^{2/3} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} T^2(\xi, \eta') d\eta' T(\xi, \eta) = O\left(\xi^{2/3} \frac{(y'')^2 y}{\beta^3}\right) = O\left(\frac{1}{\xi^{11/6}}\right), \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \eta')^2 \int_{-\infty}^{2\xi^\alpha} G^2(\xi', \eta') d\xi' d\eta' T(\xi, \eta) \\ &= O\left(\frac{y(\xi)}{\xi^2 \beta^2(\xi)} \int_1^{2\xi^\alpha} \frac{y^2(\xi')}{\beta(\xi')} d\xi'\right) + O\left(\frac{y(\xi)}{\xi^2} \int_1^{2\xi^\alpha} \frac{y^2(\xi')}{\beta^3(\xi')} d\xi'\right) + O\left(\frac{y}{\xi^2 \beta^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{\xi^{2-\alpha/2}}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^{7/3-5\alpha/6}}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right) = O\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь $0 < \alpha < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В (5.5) входят функции $y(\xi)$, $\beta(\xi)$, рассматриваемые на отрезке $[1, 2\xi^\alpha]$. Они выражаются через $S'(\xi)$ по формулам (3.10). Поэтому функция $S'(\xi)$ также должна быть определена при $\xi \geq 1$ (до сих пор была найдена лишь асимптотика $S'(\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$). Поскольку асимптотика входящих в (5.5) интегралов определяется поведением $S'(\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$, а значения $S'(\xi)$ при конечных ξ дают лишь малые поправки, в качестве $S'(\xi)$ в (5.5) можно взять любую строго положительную при $\xi \geq 1$ функцию, которая имеет асимптотику (4.25) при $\xi \rightarrow +\infty$.

ЛЕММА 5.1. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \text{v.p.} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \left\{ \chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta') - T^2(\xi, \eta') \right\} d\xi' d\eta' T(\xi, \eta) \\ &= O(\xi^{-3/2}), \quad \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограниченности функций (5.1), формул (3.8)–(3.10), (4.6), а также из сходимости интегралов

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = 1, \quad \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2} \left(\frac{1}{x^{1/6}} - 1 \right) dx = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \text{v.p.} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \left\{ \chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta') - T^2(\xi, \eta') \right\} d\xi' d\eta' T(\xi, \eta) \\ &= O\left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{v.p.} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^2}{(\xi - \xi')^2} \{ y^2(\xi') t^2(\beta(\xi') \eta') \right. \\ & \quad \left. - y^2(\xi) t^2(\beta(\xi) \eta') \} d\xi' d\eta' T(\xi, \eta) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O\left(\text{v.p.} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{1}{(\xi - \xi')^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi'}} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right\} d\xi'\right) \\
&\quad + O\left(\text{v.p.} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{1}{(\xi - \xi')^2} \left\{ \frac{1}{(\xi')^{1/6}} - \frac{1}{\xi^{1/6}} \right\} d\xi' \frac{1}{\xi^{1/3}}\right) = O\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдем к оценке интеграла

$$\begin{aligned}
J(\xi, \eta) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2}\right) \chi(\xi', \xi^\alpha) \\
&\quad \times T^2(\xi', \eta') \cos 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta')) d\eta' d\xi' T(\xi, \eta). \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, имеем $J = J_1 + J_2$, где

$$\begin{aligned}
J_1 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \left[\frac{2(\xi' - \xi)}{(\xi' - \xi)^2 + (\eta - \eta')^2} - \frac{2}{\xi'} \right] \\
&\quad \times \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta')}{2S'(\xi')} \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta')) d\xi' d\eta' T(\xi, \eta), \\
J_2 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \ln\left(\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2}\right) \\
&\quad \times \left[\sin 2S(\xi') \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta') \cos 2\varphi(\xi', \eta')}{2S'(\xi')} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos 2S(\xi') \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta') \sin 2\varphi(\xi', \eta')}{2S'(\xi')} \right) \right] d\xi' d\eta' T(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Функция J_2 имеет ту же структуру, что и J , но подынтегральная функция в ней в силу (4.7) содержит дополнительный малый множитель $1/S'$. Следовательно, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) T^2(\xi', \eta') \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta'))}{\xi' S'(\xi')} d\xi' d\eta' T(\xi, \eta) = O(\xi^{-\infty}),$$

то

$$\begin{aligned}
J &= O(J_1) = O\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi)}{[(\xi' - \xi)^2 + (\eta - \eta')^2]} \chi(\xi', \xi^\alpha) B_0^2(\xi', \eta') \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta'))}{S'(\xi')} d\xi' d\eta' T(\xi, \eta) \right) + O(\xi^{-\infty}), \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Подынтегральная функция в (5.8) имеет особенность при $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$. Вклад именно от этой точки определяет асимптотику входящего в (5.8) интеграла, который мы запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi)}{[(\xi' - \xi)^2 + (\eta - \eta')^2]} \\
&\quad \times \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) B_0^2(\xi', \eta') \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta'))}{S'(\xi')} d\xi' d\eta' T(\xi, \eta) = J_3 + J_4. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi) d\eta'}{[(\xi' - \xi)^2 + (\eta - \eta')^2]} \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) B_0^2(\xi', \eta)}{S'(\xi')} \\
&\quad \times \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta)) d\xi' T(\xi, \eta), \\
J_4 &= \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi)}{[(\xi' - \xi)^2 + (\eta - \eta')^2]} \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha)}{S'(\xi')} \left\{ B_0^2(\xi', \eta') \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta')) \right. \\
&\quad \left. - B_0^2(\xi', \eta) \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta)) \right\} d\eta' d\xi' T(\xi, \eta). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

ЛЕММА 5.2. При $\xi \rightarrow +\infty$ имеет место равенство

$$J_3 = O(\xi^{-2}). \tag{5.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta'}{(\xi' - \xi)^2 + (\eta - \eta')^2} = \frac{\pi}{|\xi - \xi'|},$$

то асимптотика J_3 вычисляется интегрированием по частям по переменной ξ' . Вклад в асимптотику даст лишь граничная точка $\xi' = \xi$. В силу (3.10) имеем

$$J_3 = O\left(\frac{y^3(\xi)}{(S'(\xi))^2}\right) = O\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

Лемма доказана.

Оценим, наконец, J_4 .

ЛЕММА 5.3. При $\xi \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$J_4 = O(\xi^{-3/2}). \tag{5.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям в (5.10) по переменной η' и учитывая, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x) = (\pi/2) \operatorname{sgn} x,$$

получаем

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_{\xi^\alpha}^{\infty} \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha)}{S'(\xi')} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(\xi' - \xi)}{(\eta' - \eta)} \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial \eta'} [B_0^2(\xi', \eta') \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta'))] d\eta' d\xi' T(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Пусть $\chi^* = \chi^*(\xi', \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условиям: $\chi^* \geq 0$, $\chi^* \equiv 1$ при $\xi' \in (\xi-1, \xi+1)$, $\chi^* \equiv 0$ при $\xi' \notin (\xi-2, \xi+2)$. Представим J_4 в виде $J_4 = J_{4,1} + J_{4,2}$, где

$$\begin{aligned} J_{4,1} &= \int_{\xi^\alpha}^\infty \frac{\chi(\xi', \xi^\alpha) - \chi^*(\xi', \xi)}{S'(\xi')} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{arctg} \frac{(\xi' - \xi)}{(\eta' - \eta)} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \eta'} [B_0^2(\xi', \eta') \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta'))] d\eta' d\xi' T(\xi, \eta), \\ J_{4,2} &= \int_{\xi-2}^{\xi+2} \frac{\chi^*(\xi', \xi)}{S'(\xi')} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{arctg} \frac{(\xi' - \xi)}{(\eta' - \eta)} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \eta'} [B_0^2(\xi', \eta') \sin 2(S(\xi') + \varphi(\xi', \eta'))] d\eta' d\xi' T(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Интегрируя в $J_{4,1}$ по частям по переменной ξ' , имеем $J_{4,1} = O(\xi^{-\infty})$, $\xi \rightarrow +\infty$. Наконец, используя ограниченность $\operatorname{arctg} x$, получаем

$$J_{4,2} = O\left(\frac{y^3(\xi)}{S'(\xi)} \int_{\xi-2}^{\xi+2} \left[\int_{-\infty}^\infty \left(|2t(\tau)t'(\tau)| + t^2(\tau) \frac{|S''(\xi')\tau|}{3\beta^2(\xi')} \right) d\tau \right] d\xi' \right) = O\left(\frac{1}{\xi^{3/2}}\right).$$

Лемма доказана.

Итак, в силу (5.8), (5.9), (5.11), (5.12) для заданной формулой (5.7) функции $J(\xi, \eta)$ имеем

$$J = O(\xi^{-3/2}), \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (5.13)$$

Оценка невязки в (2.9) закончена.

Пусть входящие в (2.18) функции B, I, S имеют вид (3.1), (3.2), (4.26), где члены разложений (3.1), (3.2) заданы формулами (3.7)–(3.10), (3.16), (3.17), (3.36)–(3.39), (3.41), (3.43), (3.45)–(3.48), (3.50), (3.52), (3.56), (3.58)–(3.61). Кроме того, пусть остаточные члены в (3.1), (3.2) таковы, что выполнено (2.21). Тогда из формул (5.2)–(5.6), (5.13) вытекает

ТЕОРЕМА 5.1. *Асимптотический эйри-полярон (2.18) удовлетворяет уравнению (1.6) с точностью $O(\xi^{-3/2})$ при $\xi \rightarrow +\infty$.*

Таким образом, для каждого решения t, ρ задачи на собственные значения (3.7), (3.8) мы построили однопараметрическое семейство (параметром является k) асимптотических решений G уравнения (1.6) для эйри-полярона. Наличие свободного параметра k связано с тем, что на функцию G здесь не накладывалось условие нормировки.

§ 6. Асимптотические разложения эйри-полярона при $\xi \rightarrow -\infty$

В этом параграфе для рассмотренного выше семейства решений уравнения (1.6) будет найдена асимптотика в области

$$\xi \rightarrow -\infty, \quad \eta = O(|\xi|^{1-\varepsilon}), \quad (C)$$

где $0 < \varepsilon < 1$ – произвольная константа.

Поскольку $G(\xi, \eta)$ экспоненциально убывает при $\xi \rightarrow -\infty$, то

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}{(\xi')^2} \right] G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \ln \left| 1 + \frac{|\xi|}{\xi'} \right| \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &+ \int_{-|\xi|^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^2}{(|\xi| + \xi')^2} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \\ &+ O \left(\int_{-|\xi|^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^4}{(|\xi| + \xi')^4} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' \right), \quad \xi \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь $0 < \alpha < 1$. Разложения G при $\xi \rightarrow +\infty$ позволяют вычислить асимптотику входящих в (6.1) интегралов.

Так как

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2 \sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \arctg \sqrt{x} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2},$$

то в силу (2.12), (2.15), (3.10) имеем

$$\int_{-|\xi|^\alpha}^{\infty} \frac{1}{(|\xi| + \xi')^2} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' = \frac{k\pi}{4|\xi|^{3/2}} + O\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right), \quad (6.2)$$

$$\int_{-|\xi|^\alpha}^{\infty} \frac{1}{(|\xi| + \xi')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta' G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' = O\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right), \quad (6.3)$$

$$\int_{-|\xi|^\alpha}^{\infty} \frac{1}{(|\xi| + \xi')^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta')^2 G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' = O\left(\frac{1}{|\xi|^{7/6}}\right), \quad (6.4)$$

$$\int_{-|\xi|^\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta - \eta')^4}{(|\xi| + \xi')^4} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi' = O\left(\frac{\eta^4}{|\xi|^{7/2}}\right) + O\left(\frac{1}{|\xi|^{17/6}}\right). \quad (6.5)$$

Далее вычислим асимптотику интеграла

$$M \stackrel{\text{def}}{=} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| 1 + \frac{|\xi|}{\xi'} \right| \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\xi', \eta') d\eta' d\xi'.$$

ЛЕММА 6.1. При $\xi \rightarrow -\infty$ справедливо разложение

$$M = U(|\xi|) + O(1/|\xi|), \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} U(|\xi|) &= 2\pi k \sqrt{|\xi|} + 2A_{-1} \ln |\xi| - 2A_0 + 2\pi k A_{-1} \frac{\ln |\xi|}{\sqrt{|\xi|}} \\ &+ \left(A_{-1} - \frac{A_0}{2} \right) \frac{4\pi k}{\sqrt{|\xi|}} - \frac{6\pi \rho k^{5/3}}{5|\xi|^{5/6}} + \frac{k^2 \pi^2 A_{-1} \ln |\xi|}{|\xi|}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, а также используя равенства [75]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \beta\pi}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2\pi, & \int_0^\infty \ln |1+x| \frac{dx}{x^{3/2}} &= 2\pi, \\ \int_0^\infty \ln |1+x| \frac{\ln x dx}{x^{3/2}} &= 4\pi, & \int_0^\infty \ln |1+x| \frac{dx}{x^{11/6}} &= \frac{12\pi}{5}, \\ \int_{|\xi|^{-1}}^\infty \ln |1+x| \frac{dx}{x^2} &= \ln |\xi| + O(1), & \xi &\rightarrow -\infty, \\ \int_{|\xi|^\alpha}^\infty \ln \left| 1 + \frac{\xi'}{|\xi|} \right| \chi(\xi', |\xi|^\alpha) W(\xi') d\xi' &= O(|\xi|^{-\infty}), & \xi &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M &= 2\pi k \sqrt{|\xi|} + 2A_{-1} \ln |\xi| - 2A_0 + 2 \int_{-\infty}^\infty \ln \left| 1 + \frac{\xi'}{|\xi|} \right| K(\xi', |\xi|^\alpha, k) d\xi' \\ &+ k \left[A_{-1} \frac{4\pi}{\sqrt{|\xi|}} + 2\pi A_{-1} \frac{\ln |\xi|}{\sqrt{|\xi|}} - A_0 \frac{2\pi}{\sqrt{|\xi|}} - \frac{6\pi \rho k^{2/3}}{5 |\xi|^{5/6}} \right] \\ &+ \frac{k^2 \pi^2 A_{-1}}{|\xi|} \ln |\xi| + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad \xi \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где функция K задается формулой (4.19). Наконец, используя (4.21), (4.22), (4.12), получаем

$$\int_{-\infty}^\infty \ln \left| 1 + \frac{\xi'}{|\xi|} \right| K(\xi', |\xi|^\alpha, k) d\xi' = O\left(\frac{1}{|\xi|}\right).$$

Лемма доказана.

Из уравнения (1.6) и разложений (6.1)–(6.6) вытекает, что в области (С)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial |\xi|^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \left\{ -|\xi| - U(|\xi|) + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \right. \\ \left. - \frac{\pi k}{4} \frac{\eta^2}{|\xi|^{3/2}} + O\left(\frac{\eta^2}{|\xi|^2}\right) + O\left(\frac{\eta^4}{|\xi|^{7/2}}\right) \right\} G = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Асимптотические решения уравнения (6.8) будем искать в виде

$$G(\xi, \eta) = \exp \left[-\Omega(|\xi|) + \frac{\gamma \eta^2}{|\xi|} + O\left(\frac{\eta^2}{|\xi|^{3/2}}\right) + O\left(\frac{\eta^4}{|\xi|^3}\right) \right]. \quad (6.9)$$

Здесь γ – константа, а $\Omega(|\xi|) = \frac{2}{3} |\xi|^{3/2} + O(|\xi|)$, $\xi \rightarrow -\infty$.

ТЕОРЕМА 6.1. В области (С) уравнение (1.6) имеет асимптотические решения вида (6.9), где $\gamma = \pi k/8$, а функция Ω задается формулой

$$\begin{aligned}\Omega(|\xi|) = & \frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \pi k|\xi| + 2A_{-1}\sqrt{|\xi|}(\ln|\xi| - 2) - (2A_0 + \pi^2 k^2)\sqrt{|\xi|} \\ & + \left(2\pi k A_{-1} + \frac{1}{4} + \frac{\pi^3 k^3}{2}\right) \ln|\xi| + \delta_1 + \frac{9\pi \rho k^{5/3}}{5|\xi|^{1/3}} + \frac{A_{-1}^2}{\sqrt{|\xi|}}(\ln^2|\xi| + 4\ln|\xi|) \\ & - 2(\pi^2 k^2 + A_0)A_{-1} \frac{\ln|\xi|}{\sqrt{|\xi|}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\right), \quad \xi \rightarrow -\infty.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Здесь $\delta_1 = \delta_1(k)$ не зависит от ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцировав (6.9) и подставив затем выражения для производных в (6.8), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\left(2\gamma - \frac{\pi k}{4}\right) \frac{\eta^2}{|\xi|^{3/2}} - |\xi| - U(|\xi|) + (\Omega'(|\xi|))^2 - \frac{1}{2\sqrt{|\xi|}} \\ + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) + O\left(\frac{\eta^2}{|\xi|^2}\right) + O\left(\frac{\eta^4}{|\xi|^{7/2}}\right) = 0,\end{aligned}$$

откуда $\gamma = \pi k/8$, а для определения $\Omega(|\xi|)$ получаем уравнение

$$(\Omega'(|\xi|))^2 = |\xi| + U(|\xi|) + \frac{1}{2\sqrt{|\xi|}} + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad (6.11)$$

где функция $U(|\xi|)$ задается формулой (6.7).

Из (6.11) по формуле Тейлора находим

$$\begin{aligned}\Omega'(|\xi|) = & \sqrt{|\xi|} + \pi k + \frac{A_{-1} \ln|\xi|}{\sqrt{|\xi|}} - \left(A_0 + \frac{\pi^2 k^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \\ & + \left(2\pi k A_{-1} + \frac{1}{4} + \frac{\pi^3 k^3}{2}\right) \frac{1}{|\xi|} - \frac{3\pi \rho k^{5/3}}{5|\xi|^{4/3}} - \frac{A_{-1}^2 \ln^2|\xi|}{2|\xi|^{3/2}} \\ & + (\pi^2 k^2 + A_0)A_{-1} \frac{\ln|\xi|}{|\xi|^{3/2}} + O\left(\frac{1}{|\xi|^{3/2}}\right), \quad \xi \rightarrow -\infty.\end{aligned}\quad (6.12)$$

Наконец, интегрируя (6.12), получаем (6.10). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. После построения асимптотик $G(\xi, \eta)$ в областях (В) и (С) возникает интересная проблема нахождения формул связи между константами в этих разложениях.

**Дополнение. О разрешимости уравнения в вариациях
для одномерного полярона. Явная формула для решения**

Рассмотрим уравнение

$$\hat{n}p = f, \quad (1)$$

где $f = f(\tau)$ – непрерывная, экспоненциально убывающая при $|\tau| \rightarrow \infty$ функция, а оператор $\hat{n}$ задан формулой (3.40). Входящие в оператор $\hat{n}$ функция t и число ρ являются решением задачи (3.7), (3.8) на собственные значения.

Изучим разрешимость уравнения (1). Мы ограничимся лишь формулировкой результатов, большинство из которых доказывается непосредственным дифференцированием.

Определим

$$g(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \tau'| t(\tau') p(\tau') d\tau'.$$

Тогда после замены

$$p = g''/(4\pi t) \quad (2)$$

для нахождения g получаем линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\left(\frac{g''}{4\pi t} \right)'' - \frac{t'' g''}{4\pi t^2} - t g = f, \quad (3)$$

а также условия

$$[g - \tau g'](-\infty) + [g - \tau g'](+\infty) = 0, \quad (4)$$

$$g'(-\infty) + g'(+\infty) = 0. \quad (5)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{g''}{4\pi t} \right)'' - \frac{t'' g''}{4\pi t^2} - t g = 0, \quad (6)$$

а сопряженное к (6) уравнение –

$$\left(\frac{\varphi''}{4\pi t} - \frac{t'' \varphi}{4\pi t^2} \right)'' - t \varphi = 0. \quad (7)$$

Отметим, что если g является решением (6), то $\varphi = g''/(4\pi t)$ удовлетворяет (7).

Из соотношения (3.12) вытекает

ЛЕММА 1. Пусть $g_1 = (t''/t)'$, $g_2 = \tau(t''/t)'/2 + t''/t$, а g_3, g_4 – линейно независимые решения уравнения

$$g'' - \left[\frac{d}{d\tau} \ln \left(\frac{3}{2} (t')^2 - t'' t \right) \right] g' + \frac{[2\pi t^4 - \frac{3}{2} t t' (\frac{t''}{t})']}{(t'' t - \frac{3}{2} (t')^2)} g = 0. \quad (8)$$

Тогда g_1, g_2, g_3, g_4 образуют фундаментальную систему решений (ф.с.р.) (6). Соответственно, если $\varphi_1 = t'$, $\varphi_2 = t + \tau t'/2$, а φ_3, φ_4 — линейно независимые решения уравнения

$$\varphi'' - \left\{ \frac{d}{d\tau} \ln \left[\frac{3\pi^2}{2} + 4\pi \left(t''t - \frac{3}{2}(t')^2 \right) \right] \right\} \varphi' + \frac{[-3\pi^2 t''/(2t) - 8\pi(t'')^2 + 6\pi t' t''']}{[3\pi^2/2 + 4\pi(t''t - 3(t')^2/2)]} \varphi = 0, \quad (9)$$

то $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ образуют ф.с.р. уравнения (7).

Введем операторы

$$\begin{aligned} \widehat{K} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(t'''t - 2t''t')}{t(t''t - 3(t')^2/2)} \frac{d}{d\tau} - \frac{(2\pi t^3 - 3t'(t''/t)'/2)}{(t''t - 3(t')^2/2)}, \\ \widehat{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(t'''t - 2t''t')}{t[3\pi/8 + tt'' - 3(t')^2/2]} \frac{d}{d\tau} - \frac{(3t'(t''/t)'/2 - (t'')^2/t)}{[3\pi/8 + tt'' - 3(t')^2/2]}. \end{aligned}$$

С их помощью уравнения (8), (9) могут быть записаны в симметричной форме

$$\widehat{E}(\widehat{K}g) - 4\pi g = 0, \quad \widehat{K}(\widehat{E}\varphi) - 4\pi\varphi = 0.$$

ЛЕММА 2. Если

$$g'_3 g_4 - g'_4 g_3 = \frac{32}{3} \left(t''t - \frac{3}{2}(t')^2 \right),$$

то функции $\varphi_3 = g'_3/(4\pi t)$, $\varphi_4 = g'_4/(4\pi t)$ имеют вронскиан

$$\varphi'_4 \varphi_3 - \varphi'_3 \varphi_4 = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{3\pi}{8} + t''t - \frac{3}{2}(t')^2 \right)$$

и связаны с g_3, g_4 соотношениями

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi} \widehat{K}g_3, \quad \varphi_4 = \frac{1}{4\pi} \widehat{K}g_4, \quad g_3 = \widehat{E}\varphi_3, \quad g_4 = \widehat{E}\varphi_4.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (3.12) вытекает неравенство

$$t''t - (t')^2 < 0. \quad (10)$$

Поэтому коэффициенты уравнения (9), а также оператора $\widehat{K}$ непрерывны.

Непосредственным дифференцированием проверяется, что общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned} g(\tau) = & \sum_{i=1}^4 c_i g_i(\tau) + \frac{8}{3\pi} \left\{ -g_1(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi_2(\tau') f(\tau') d\tau' + g_2(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi_1(\tau') f(\tau') d\tau' \right\} \\ & - g_3(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi_4(\tau') f(\tau') d\tau' + g_4(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi_3(\tau') f(\tau') d\tau', \end{aligned}$$

где c_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и τ_0 — произвольные константы. Далее, так как

$$[g_2 - \tau g'_2](-\infty) + [g_2 - \tau g'_2](+\infty) = 2\rho \neq 0, \quad g'_2(-\infty) + g'_2(+\infty) = 0,$$

то условие (4) выполняется за счет выбора константы c_2 . Выполнение же условия (5) связано с поведением на $\pm\infty$ решений уравнения (9). Здесь возможны два случая, в зависимости от выбора входящих в (9) решений (3.7), (3.8).

В случае 1 экспоненциально убывающее на $-\infty$ решение φ_3 ($\varphi_3 \sim c_- t$, $\tau \rightarrow -\infty$) экспоненциально возрастает на $+\infty$ ($\varphi_3 \sim c_+ / (\sqrt{\tau} t)$, $\tau \rightarrow +\infty$). Здесь c_- , c_+ – некоторые константы. Тогда φ_4 экспоненциально возрастает на $-\infty$ ($\varphi_4 \sim -1/(2\sqrt{\pi}c_- \sqrt{-\tau}t)$, $\tau \rightarrow -\infty$) и экспоненциально убывает на $+\infty$ ($\varphi_4 \sim -t/(2\sqrt{\pi}c_+)$, $\tau \rightarrow +\infty$).

В случае 2 решение φ_3 экспоненциально убывает на $\pm\infty$, а φ_4 экспоненциально возрастает на $\pm\infty$.

В случае 1 для выполнения (5) достаточно одного условия разрешимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} t'(\tau) f(\tau) d\tau = 0. \quad (11)$$

Тогда функция

$$\begin{aligned} g(\tau) = & c_1 g_1(\tau) + c_2 g_2(\tau) \\ & + \frac{8}{3\pi} \left\{ -g_1(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_2(\tau') f(\tau') d\tau' + g_2(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_1(\tau') f(\tau') d\tau' \right\} \\ & + g_3(\tau) \int_{\tau}^{\infty} \varphi_4(\tau') f(\tau') d\tau' + g_4(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_3(\tau') f(\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (12)$$

удовлетворяет задаче (3)–(5). Подставляя (12) в (2), находим

$$\begin{aligned} p(\tau) = & c_1 \varphi_1(\tau) + c_2 \varphi_2(\tau) \\ & + \frac{8}{3\pi} \left\{ -\varphi_1(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_2(\tau') f(\tau') d\tau' + \varphi_2(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_1(\tau') f(\tau') d\tau' \right\} \\ & + \varphi_3(\tau) \int_{\tau}^{\infty} \varphi_4(\tau') f(\tau') d\tau' + \varphi_4(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_3(\tau') f(\tau') d\tau', \end{aligned} \quad (13)$$

где c_1 – произвольная константа, а c_2 определяется из условия (4).

ЛЕММА 3. Если уравнение (9) не имеет экспоненциально убывающих на $\pm\infty$ нетривиальных решений, то для разрешимости (1) необходимо и достаточно выполнения условия (11). Тогда для решения (1) справедлива формула (13).

Аналогично рассматривается и случай 2, когда получаем уже два условия разрешимости уравнения (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} t'(\tau) f(\tau) d\tau = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_3(\tau) f(\tau) d\tau = 0,$$

а функция

$$\begin{aligned} p(\tau) = & c_1 \varphi_1(\tau) + c_2 \varphi_2(\tau) + c_3 \varphi_3(\tau) \\ & + \frac{8}{3\pi} \left\{ -\varphi_1(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_2(\tau') f(\tau') d\tau' + \varphi_2(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_1(\tau') f(\tau') d\tau' \right\} \\ & - \varphi_3(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi_4(\tau') f(\tau') d\tau' + \varphi_4(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} \varphi_3(\tau') f(\tau') d\tau' \end{aligned}$$

содержит две произвольные константы c_1 , c_3 .

В заключение изучим поведение решений уравнения (9) при условии, что $t \neq 0$.

ЛЕММА 4. Если $t \neq 0$, то уравнение (9) не имеет экспоненциально убывающих на $\pm\infty$ нетривиальных решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что имеет место случай 2. Тогда функции

$$\psi_1 = \frac{t^2}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\tau t^2}{4} + \frac{3}{8\pi} \left(\frac{t''}{t} \right)', \quad \psi_3 = \int_{-\infty}^{\tau} t(\tau') \varphi_3(\tau') d\tau'$$

такие, что $\psi'_i = t\varphi_i$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{1}{t} \left(\frac{\psi'}{t} \right)'' - \frac{t''\psi'}{t^3} \right)' - 4\pi\psi = 0,$$

которое имеет первый интеграл

$$\frac{t^3}{t'} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{(t')^2}{t^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\psi'}{t'} \right) \right) + \left(\frac{t''}{t} \right)' \left(\frac{\psi}{t^2} \right)' \right] = c.$$

Здесь c – произвольная константа.

Пусть $\omega = \psi + 4c\psi_2/(3\pi)$. Тогда для нахождения ω получаем уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{(t')^2}{t^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\omega'}{t'} \right) \right) + \left(\frac{t''}{t} \right)' \left(\frac{\omega}{t^2} \right)' = 0. \quad (14)$$

Так как ψ_1 является решением (14), то после замены $\omega = t^2 \int (y/t) d\tau$ приходим к линейному уравнению второго порядка

$$y'' + Uy = 0, \quad (15)$$

где $U = 5t''/t - 6(t'/t)^2$. В силу (10) $U < 0$.

Из существования экспоненциально убывающей на $\pm\infty$ функции φ_3 вытекает, что

$$y = \varphi_3(\tau) - \frac{2t'(\tau)}{t^2(\tau)} \int_{-\infty}^{\tau} t(\tau') \varphi_3(\tau') d\tau'$$

является экспоненциально убывающим на $\pm\infty$ решением уравнения (15). Действительно, поскольку уравнение $\hat{n}p = t$ разрешимо, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} t(\tau) \varphi_3(\tau) d\tau = 0,$$

и, следовательно, y экспоненциально убывает на $\pm\infty$ в силу асимптотик для φ_3 и t . Однако уравнение (15) не может иметь нетривиальных экспоненциально убывающих на $\pm\infty$ решений, для которых $\frac{y''}{y} > 0$. Если предположить, что такое решение существует, то немедленно приходим к противоречию:

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} (y'(\tau))^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau) y^2(\tau) d\tau < 0.$$

Лемма доказана.

Список литературы

1. *Hartree D. R.* The wave mechanics of an atom with a non-Coulomb central field. Parts I, II, III // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1928. V. 24. P. 89–110, 111–132, 426–437.
2. *Пекар С. И.* Исследования по электронной теории кристаллов. М.: Гостехиздат, 1951.
3. *Ring P., Schuck P.* The nuclear many-body problem. N. Y., 1980.
4. *Гадияк Г. В., Насыров К. А.* Распространение электромагнитного импульса в резонансной усиливающей среде // *Числ. методы мех. сплош. среды (Новосибирск)*. 1981. Т. 12. № 5. С. 3–13.
5. *Kurlandski J.* Nonlocal equation of nonlinear electrodynamics // *Bull. Acad. Pol. Sci.* 1982. V. 30. № 3–4. P. 135–153.
6. *Ольхов В. М.* Солитонные решения уравнения с инерционной нелинейностью // *ТМФ*. 1982. Т. 51. № 1. С. 150–152.
7. *Chudnovsky D. V.* Infinite component two-dimensional completely integrable systems of KdV type // *Lect. Notes Math.* 1982. V. 925. P. 71–84.
8. *Карамзин Ю. Н., Цветкова И. Л.* О сходимости спектрального метода решения одной задачи нелинейной оптики // *ЖВМ и МФ*. 1982. Т. 22. № 1. С. 235–240.
9. *Боголюбская А. А., Боголюбский И. Л.* Исследование барионоподобных связанных состояний нерелятивистских кварков в приближении самосогласованного поля // *ТМФ*. 1983. Т. 54. № 2. С. 258–267.
10. *Gogny D., Lions P. L.* Hartree–Fock theory in nuclear physics // *Model. Math. et Anal. Numer.* 1986. V. 20. № 4. P. 571–637.
11. *Bove A., Da Prato G., Fano G.* An existence proof for the Hartree–Fock time dependent problem with bounded two-body interaction // *Comm. Math. Phys.* 1974. V. 37. P. 183–192.
12. *Chadam J. M., Glassey R. T.* Global existence of solutions to the Cauchy problem for time-dependent Hartree equation // *J. Math. Phys.* 1975. V. 16. P. 1122–1130.
13. *Glassey R. T.* Asymptotic behavior of solutions to certain nonlinear Schrödinger–Hartree equations // *Comm. Math. Phys.* 1977. V. 53. № 1. P. 9–18.
14. *Delgado V.* Global solutions of the Cauchy problem for the classical coupled Maxwell–Dirac and other nonlinear Dirac equations in one space dimension // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1978. V. 69. № 2. P. 289–296.
15. *Fukuda I., Tsutsumi M.* On coupled Klein–Gordon–Schrödinger equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1978. V. 66. № 2. P. 358–378.
16. *Davies E. B.* Some time-dependent Hartree equations // *Ann. Inst. H. Poincaré*. 1979. V. A31. № 4. P. 319–337.
17. *Ginibre J., Velo G.* On a class of non-linear Schrödinger equations with non-local interaction // *Math. Z.* 1980. V. 170. № 2. P. 109–136.
18. *Dias J.-D., Figueira M.* Décroissance à l’infini de la solution d’une equation non lineaire du type Schrödinger–Hartree // *C. R. Acad. Sci.* 1980. V. AB290. № 19. P. A889–A892.
19. *Choquet-Bruhat Y.* Solutions globales des equations de Maxwell–Dirac–Klein–Gordon (masses nulles) // *C. R. Acad. Sci.* 1981. Ser. I. V. 292. № 2. P. 153–158.
20. *Horst E.* On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1981. V. 3. № 2. P. 229–248.
21. *Strauss W. A.* Nonlinear scattering theory at low energy: sequel // *J. Funct. Anal.* 1981. V. 43. № 3. P. 281–293.
22. *Menzala G. P., Strauss W. A.* On a wave equation with a cubic convolution // *Diff. Equat.* 1982. V. 43. № 1. P. 93–105.
23. *Nakamitsu K., Tsutsumi M.* The Cauchy problem for the coupled Maxwell–Schrödinger equations // *J. Math. Phys.* 1986. V. 27. № 1. P. 211–216.
24. *Reeken M.* General theorem on bifurcation and its application to the Hartree equation of the helium atom // *J. Math. Phys.* 1970. V. 11. P. 2505–2512.
25. *Gustafson K., Sather D.* A branching analysis of the Hartree equation // *Rand. Math.* 1971. V. 4. P. 723–734.
26. *Wolkowsky J.* Existence of solutions of the Hartree equation for N electrons, and application of the Schauder–Tychonoff theorem // *Indiana Univ. Math. J.* 1972. V. 22. P. 551–558.

27. *Stuart C.* Existence theory for the Hartree equation // Arch. Rat. Mech. Anal. 1973. V. 51. P. 60–69.
28. *Fonte G., Mignani R., Schiffrer G.* Solution of the Hartree–Fock equations // Comm. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 293–304.
29. *Lieb E. H., Simon B.* The Hartree–Fock theory for Coulomb systems // Comm. Math. Phys. 1977. V. 53. № 3. P. 185–194.
30. *Lieb E. H.* Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard’s nonlinear equation // Stud. Appl. Math. 1977. V. 57. P. 93–105.
31. *Bader P.* Variational method for the Hartree equation of the helium atom // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1978. V. A82. № 1–2. P. 27–39.
32. *Menzala G. P.* On a Hartree type equation: existence of regular solutions // Lect. Notes Math. 1980. V. 799. P. 277–288.
33. *Rosensteel G., Ihrig E.* Existence of Hartree–Fock solutions // J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 8. P. 2297–2301.
34. *Lions P. L.* The Choquard equation and related equations // Nonlinear Anal.: Theory, Meth., Appl. 1980. V. 4. № 6. P. 1063–1072.
35. *Bongers A.* Existenzaussagen für die Choquard–Gleichung: Ein nichtlineares Eigenwertproblem der plasma-physik // Z. angew. Math. Mech. 1980. V. 60. № 7. P. 240–242.
36. *Gegenberg J. D., Das A. J.* An exact stationary solution of the combined Einstein–Maxwell–Klein–Gordon equations // J. Math. Phys. 1981. V. 22. № 8. P. 1736–1739.
37. *Lions P. L.* Some remarks on Hartree equation // Nonlinear Anal.: Theory, Meth., Appl. 1981. V. 5. № 11. P. 1245–1256.
38. *Карасев М. В., Осипов Ю. В.* Собственные функции уравнения Хартри–Фока, не обладающие сферической симметрией // ТМФ. 1982. Т. 52. № 2. С. 263–269.
39. *Stuart C. A., Toland J. F., Williams P. G.* Excited states in the Hartree approximation for the hydrogen ion H^- // Proc. Roy. Soc. London. 1983. V. A388. № 1794. P. 229–246.
40. *Efinger H. J., Grosse H.* On bound state solutions for certain nonlinear Schrödinger equations // Lett. Math. Phys. 1984. V. 8. № 2. P. 91–95.
41. *Lions P. L.* Solutions of Hartree–Fock equations for Coulomb systems // Comm. Math. Phys. 1987. V. 109. № 1. P. 33–97.
42. *Маслов В. П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.
43. *Маслов В. П.* Уравнения самосогласованного поля // Соврем. пробл. матем. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 153–234.
44. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II. Операторные унитарно-нелинейные уравнения // Соврем. пробл. матем. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1979. С. 145–267.
45. *Власов А. А.* Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1978.
46. *Braun W., Hepp K.* The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ -limit of interacting classical particles // Comm. Math. Phys. 1977. V. 56. № 2. P. 101–113.
47. *Дорбушин Р. Л.* Уравнения Власова // Функци. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 2. С. 48–58.
48. *Langmuir I., Blodgett K.* Currents limited by space charge between concentric spheres // Phys. Rev. 1924. V. 24. № 1. P. 49–59.
49. *Мокин Ю. Н.* О двух моделях стационарного движения заряженных частиц в вакуумном диоде // Матем. сб. 1978. Т. 106. № 2. С. 234–265.
50. *Batt J.* Recent development in the mathematical investigation of the initial value problem of stellar dynamics and plasma physics // Ann. Nucl. Energy. 1980. V. 7. № 4–5. P. 213–217.
51. *Batt J., Faltenbacher W., Horst E.* Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1986. V. 93. № 2. P. 159–183.
52. *Поляченко В. Л., Фридман А. М.* Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.
53. *Lin C. C., Lau Y. Y.* Density wave theory of spiral structure of galaxies // Stud. Appl. Math. 1979. V. 60. № 2. P. 97–163.

54. *Bonnor W. B.* Equilibrium of charged dust in general relativity // *Gen. Relat. and Gravit.* 1980. V. 12. № 6. P. 453–465.
55. *Marsden J. E., Weinstein A.* The Hamilton structure of the Maxwell–Vlasov equations // *Physica. D.* 1982. V. 4. № 3. P. 394–406.
56. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
57. *Сименюк И. В.* Об асимптотике решения стационарного нелинейного уравнения Хартри // *ТМФ.* 1977. Т. 30. № 3. С. 408–411.
58. *Карасев М. В.* Асимптотика спектра смешанных состояний для уравнений самосогласованного поля // *ТМФ.* 1984. Т. 61. № 1. С. 118–127.
59. *Карасев М. В., Маслов В. П., Перескоков А. В.* Резонансные частоты вентилей в оптических средах с пространственной дисперсией // *ДАН СССР.* 1985. Т. 281. № 5. С. 1085–1088.
60. *Карасев М. В.* Скрытая симметрия системы уравнений нелинейной оптики // *ДАН СССР.* 1986. Т. 286. № 4. С. 852–856.
61. *Karasev M. V., Pereskokov A. V.* Quantization rules for self-consistent field equation with local and nonlocal nonlinearities // *Excited polaron states in condensed media.* Manchester: Manchester Union. Press, 1991. P. 157–170.
62. *Карасев М. В., Перескоков А. В.* Одномерные уравнения самосогласованного поля с кубической нелинейностью в квазиклассическом приближении // *Матем. заметки.* 1992. Т. 52. № 2. С. 66–82.
63. *Черных С. И.* Квазиклассическая частица в одномерном самосогласованном поле // *ТМФ.* 1982. Т. 52. № 3. С. 491–494.
64. *Карасев М. В., Перескоков А. В.* Логарифмические поправки в правиле квантования. Спектр полярона // *ТМФ.* 1993. Т. 97. № 1. С. 78–93.
65. *Перескоков А. В.* Правило квантования для нелинейного уравнения Шрёдингера во внешнем поле // *Матем. заметки.* 1988. Т. 44. № 1. С. 149–152.
66. *Karasev M. V., Pereskokov A. V.* Turning points and phase shifts in ordinary differential equations with saturating nonlinearity // *Asymptotic Analysis.* 1993. V. 7. № 1. P. 49–66.
67. *Карасев М. В., Перескоков А. В.* Точки поворота, набеги фаз, правила квантования в обыкновенных дифференциальных уравнениях с локальной быстроубывающей нелинейностью // *Тр. Моск. матем. об-ва.* 1995. Т. 56. С. 107–176.
68. *Карасев М. В., Перескоков А. В.* О формулах связи для второго трансцендента Пенлеве. Доказательство гипотезы Майлса и правило квантования // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1993. Т. 57. № 3. С. 92–151.
69. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
70. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
71. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
72. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях // *Соврем. пробл. матем.* Т. 15. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3–94.
73. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
74. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.
75. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Поступило в редакцию
13.III.1998