Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, Линейные алгоритмы аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0, 1]$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 5, 115–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im3562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:30:16

УДК 517.51+517.98

П. А. Терехин

Линейные алгоритмы аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0, 1]$

Доказано, что не существует линейных алгоритмов аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0, 1]$ по аффинной системе относительно модельного пространства ℓ^1 , хотя соответствующая задача аффинного синтеза имеет положительное решение при самых общих условиях. В то же время при дополнительных условиях, налагаемых на порождающую функцию аффинной системы, явно указан линейный алгоритм аффинного синтеза в пространстве Лебега, в котором модельным пространством является пространство коэффициентов аффинной системы. Этот линейный алгоритм является обобщением ортогонального разложения в ряд Фурье–Хаара.

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: аффинная система, аффинный синтез, фреймы в банаховом пространстве, система представления, ряды Фурье–Хаара, примарное пространство.

§ 1. Основные определения и результаты

Пусть функция $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, имеет носитель $\text{supp } \psi$ на единичном отрезке. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по стандартному представлению $n = 2^k + j$, где k, j – целые числа, удовлетворяющие неравенствам $k \geq 0$ и $0 \leq j \leq 2^k - 1$, положим

$$\psi_n(x) = \psi_{k,j}(x) = 2^k \psi(2^k x - j). \quad (1)$$

Система функций $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ называется *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов функции ψ* на отрезке $[0, 1]$.

Задача *аффинного синтеза*, т. е. задача о представлении функций рядами по элементам аффинной системы, исследовалась разными авторами в различных вариантах ее постановки. Классическими примерами аффинных систем служат система Хаара [1] и система Фабера–Шаудера [2], [3]. В последнее время интерес к изучению представляющих свойств аффинных систем обусловлен, в первую очередь, развитием теории периодических всплесков (см., например, [4], [5]), а также рассмотрением некоторых вопросов гармонического анализа (дискретизация сверток) и функционального анализа (банаховы фреймы, операторные алгебры). В настоящей статье мы будем обсуждать задачи аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0, 1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программ Президента РФ “Поддержка молодых российских ученых” (грант МК-346.2009.1) и “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-4383.2010.1), а также РФФИ (грант № 10-01-00097).

Пусть $L^1 = L^1[0, 1]$ – пространство всех измеримых и суммируемых на отрезке $[0, 1]$ функций $f(x)$, снабженное нормой

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Принципиальная возможность аффинного синтеза в пространстве Лебега L^1 была установлена в [6]. В частности, в работе [6] была доказана следующая

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $\psi \in L^1$ имеет отличный от нуля интеграл

$$\int_0^1 \psi(x) dx \neq 0. \quad (2)$$

Тогда для любой функции $f \in L^1$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n. \quad (3)$$

Здесь представляющий ряд сходится к функции f по норме пространства L^1 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\|_{L^1} = 0.$$

Теорема А показывает, что аффинная система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ образует систему представления в пространстве L^1 . Однако метод, использованный в работе [6], не дает информации о коэффициентах представляющего ряда (3). Наличие такой информации о коэффициентах, во-первых, могло бы уточнить тип сходимости представляющего функцию ряда и, во-вторых, позволило бы поставить задачу о нахождении алгоритма вычисления коэффициентов.

Пусть X – банахово пространство числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$. Скажем, что X – *модельное пространство*, если система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ образует базис пространства X . Здесь, как обычно, i -й канонический орт есть $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ *системой сходимости* в пространстве L^1 относительно пространства X , если для каждой числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из пространства X ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n \psi_n$ сходится по норме пространства L^1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ *системой представления* в пространстве L^1 относительно пространства X , если для любой функции $f \in L^1$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, принадлежащая пространству X и такая, что справедливо представление (3), сходящееся по норме пространства L^1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что имеет место *аффинный синтез* в пространстве L^1 по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ относительно модельного пространства X , если, во-первых, для любой числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из пространства X ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n \psi_n$ сходится и, во-вторых, для любой функции

$f \in L^1$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^\infty$, принадлежащая пространству X и такая, что справедливо представление $f = \sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n$.

Другими словами, аффинный синтез имеет место в том и только в том случае, когда аффинная система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ является одновременно и системой сходимости, и системой представления в пространстве L^1 относительно модельного пространства последовательностей X .

Будем говорить, что аффинный синтез в пространстве L^1 по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ относительно модельного пространства X допускает *линейный алгоритм* вычисления коэффициентов, если существует последовательность непрерывных линейных функционалов $\{l_n\}_{n=1}^\infty$ на пространстве L^1 таких, что для любой функции $f \in L^1$ числовая последовательность $\{l_n(f)\}_{n=1}^\infty$ принадлежит пространству X и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^\infty l_n(f) \psi_n. \quad (4)$$

Пусть $L^\infty = L^\infty[0, 1]$ – пространство всех измеримых и существенно ограниченных на отрезке $[0, 1]$ функций $g(x)$, снабженное нормой

$$\|g\|_{L^\infty} = \operatorname{vrai\,sup}_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|.$$

Хорошо известно, что $L^\infty = (L^1)^*$ – сопряженное пространство и что

$$l(f) = \int_0^1 f(x)g(x) dx = (f, g)$$

– общий вид непрерывного линейного функционала l на пространстве L^1 . Поэтому представление (4) может быть записано следующим образом:

$$f = \sum_{n=1}^\infty (f, \psi_n^*) \psi_n, \quad (5)$$

где $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty$ – некоторая последовательность измеримых и существенно ограниченных на отрезке $[0, 1]$ функций. Заметим, что $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty$, вообще говоря, не является аффинной системой, порожденной какой-либо функцией ψ^* . Представление (5) известно как *производящая формула*, при этом система $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty$ не обязана быть биортогонально сопряженной системой к $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$.

В настоящей работе установлено, что хотя при выполнении условия (2) аффинный синтез в пространстве L^1 имеет место относительно модельного пространства ℓ^1 (что усиливает теорему А), однако для такого аффинного синтеза не существует линейного алгоритма. Напомним, что пространство ℓ^1 состоит из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\psi \in L^1$ имеет отличный от нуля интеграл (2). Тогда имеет место аффинный синтез в пространстве L^1 по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ относительно модельного пространства ℓ^1 .

Сформулированная теорема показывает, что аффинная система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве L^1 абсолютно сходящимися рядами, поскольку представляющий функцию $f \in L^1$ ряд $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$ с коэффициентами $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ из пространства ℓ^1 сходится абсолютно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n \psi_n\|_{L^1} = \|\psi\|_{L^1} \|c\|_{\ell^1} < \infty,$$

ввиду нормировки $\|\psi_n\|_{L^1} = \|\psi\|_{L^1}$ аффинной системы (1). В этом смысле теорема 1 усиливает теорему А из [6], где без доказательства отмечается безусловная сходимость представляющего ряда.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\psi \in L^1$ имеет отличный от нуля интеграл (2). Тогда не существует линейного алгоритма аффинного синтеза в пространстве L^1 по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно модельного пространства ℓ^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на следующих двух леммах.

ЛЕММА 1. Пусть $\psi \in L^1$ и $g \in L^{\infty}$. Тогда для коэффициентов Фурье

$$(g, \psi_n) = \int_0^1 g(x) \psi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

функции g по элементам аффинной системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняется соотношение

$$\left| \int_0^1 \psi(x) dx \right| \operatorname{vrai\,sup}_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} |(g, \psi_n)|. \quad (6)$$

Можно показать, что нижний предел в правой части (6) нельзя заменить на предел и, с другой стороны, знак неравенства в (6) нельзя заменить на знак равенства.

Пусть ℓ^{∞} – пространство всех ограниченных числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|y\|_{\ell^{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|.$$

ЛЕММА 2. Пусть $\psi \in L^1$. Тогда для любой функции $g \in L^{\infty}$ последовательность ее коэффициентов Фурье $\{(g, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ по элементам аффинной системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет рамочным неравенствам

$$A \|g\|_{L^{\infty}} \leq \| \{(g, \psi_n)\} \|_{\ell^{\infty}} \leq B \|g\|_{L^{\infty}} \quad (7)$$

с рамочными константами

$$A = \left| \int_0^1 \psi(x) dx \right|, \quad B = \int_0^1 |\psi(x)| dx. \quad (8)$$

Следует отметить, что условие (2) отличия от нуля интеграла от порождающей функции аффинной системы в теоремах 1, 2 нельзя исключить, так как оно является необходимым условием полноты аффинной системы в пространстве L^1 .

Тем не менее, теорема 2 оставляет открытым вопрос о существовании линейных алгоритмов аффинного синтеза в пространстве L^1 относительно других

модельных пространств. В настоящей работе построен линейный алгоритм аффинного синтеза относительно максимально возможного модельного пространства – пространства коэффициентов аффинной системы. Этот алгоритм основан на разложении функций в биортогональный ряд, обобщающий ортогональный ряд Фурье–Хаара. Показано, что построенный биортогональный ряд сходится для всех суммируемых функций, если порождающая функция ψ достаточно гладкая и в определенном смысле близка к характеристической функции единичного отрезка. Таким образом, линейный алгоритм аффинного синтеза в пространстве L^1 относительно пространства коэффициентов аффинной системы существует при дополнительных условиях, налагаемых на порождающую функцию. Перейдем к точным определениям.

Пусть $X(\psi)$ – пространство коэффициентов аффинной системы $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, т. е. множество всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которых ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n \psi_n$ сходится по норме пространства L^1 . Ясно, что $X(\psi)$ – линейное пространство, причем полное относительно нормы

$$\|x\|_{X(\psi)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \psi_k \right\|_{L^1}$$

(см., например, [4, приложение 1, § 3]). Возможность выбора пространства коэффициентов $X(\psi)$ в качестве модельного пространства непосредственно вытекает из следующей по существу известной леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – система ненулевых элементов банахова пространства F и X – пространство коэффициентов этой системы. Тогда последовательность канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ образует базис пространства X .

Теперь, рассматривая аффинную систему $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, построим новую систему функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$. Для этого положим

$$\varphi(x) = \psi(2x) - \psi(2x - 1). \quad (9)$$

По определению система $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ состоит из аффинной системы

$$\varphi_n(x) = \varphi_{k,j}(x) = 2^k \varphi(2^k x - j), \quad (10)$$

порожденной функцией φ , заданной равенством (9), и присоединенной к ней функции $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$ (в равенствах (10), напомним, $n = 2^k + j$ – стандартное представление). Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\varphi_n = \frac{1}{2}(\psi_{2n} - \psi_{2n+1}). \quad (11)$$

Действительно, с учетом (10), (9) и (1) находим

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= 2^k \varphi(2^k x - j) = 2^k (\psi(2(2^k x - j)) - \psi(2(2^k x - j) - 1)) \\ &= \frac{1}{2} (\psi_{k+1,2j}(x) - \psi_{k+1,2j+1}(x)) = \frac{1}{2} (\psi_{2n}(x) - \psi_{2n+1}(x)). \end{aligned}$$

Система функций Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ состоит из функции $\chi_0(x) \equiv 1$, тождественно равной единице на отрезке $[0, 1]$, и функций

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \left[2^{-k}j, 2^{-k}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right], \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \left[2^{-k}\left(j + \frac{1}{2}\right), 2^{-k}(j+1)\right], \\ 0 & \text{при } x \notin [2^{-k}j, 2^{-k}(j+1)], \end{cases}$$

где $n = 2^k + j$ – стандартное представление.

Пусть $\psi^H = \chi_{[0,1]}$ – характеристическая функция единичного отрезка. Согласно (9) имеем $\varphi^H = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$. Следовательно, система $\{\varphi_n^H\}_{n=0}^\infty$ совпадает с системой Хаара с точностью до нормирующих множителей: $\varphi_n^H = 2^{k/2}\chi_n$. При этом система $\{\varphi_n^H\}_{n=0}^\infty$ нормирована в пространстве L^1 , а система Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ является ортонормированной.

Далее, можно показать, что для любой ненулевой функции $\psi \in L^1$ соответствующая система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ является минимальной в пространстве L^1 . Не теряя общности, будем предполагать, что функция ψ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \psi(x) dx = 1. \quad (12)$$

Укажем явный вид биортогонально сопряженной системы $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^\infty$ к системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$. Сначала рассмотрим простейший случай функции ψ^H . Из сказанного выше непосредственно вытекает, что биортогонально сопряженная система $\{\tilde{\varphi}_n^H\}_{n=0}^\infty$ к нормированной в пространстве L^1 системе Хаара $\{\varphi_n^H\}_{n=0}^\infty$ будет снова системой Хаара, но только нормированной в пространстве L^∞ . Таким образом, $\tilde{\varphi}_0^H = \chi_{[0,1]}$, и для натурального $n = 2^k + j$ имеем

$$\tilde{\varphi}_n^H = 2^{-k/2}\chi_n = \chi_{[2^{-k}j, 2^{-k}(j+1/2)]} - \chi_{[2^{-k}(j+1/2), 2^{-k}(j+1)]}.$$

Теперь разложим функцию ψ в биортогональный ряд:

$$\psi = \sum_{n=0}^\infty u_n \varphi_n^H, \quad u_n = (\psi, \tilde{\varphi}_n^H), \quad (13)$$

общий член которого совпадает с общим членом ряда Фурье–Хаара функции ψ :

$$u_n \varphi_n^H = (\psi, \tilde{\varphi}_n^H) \varphi_n^H = (\psi, 2^{-k/2}\chi_n) 2^{k/2}\chi_n = (\psi, \chi_n)\chi_n.$$

Заметим, что коэффициенты $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ биортогонального ряда (13) вычисляются по следующим формулам:

$$u_0 = \int_0^1 \psi(x) dx = 1, \quad u_n = \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} \psi(x) dx - \int_{2^{-k}(j+1/2)}^{2^{-k}(j+1)} \psi(x) dx, \quad (14)$$

где $n = 2^k + j$ – стандартное представление числа $n \in \mathbb{N}$.

Далее нам потребуются следующие обозначения: $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ – множество из двух элементов 0 и 1; $\mathbb{D}^k = \mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D}$ – декартова k -я степень множества $\mathbb{D}$,

$k = 0, 1, \dots$; $\mathbb{A} = \mathbb{D}^\infty = \bigcup_{k=0}^\infty \mathbb{D}^k$ – семейство всех конечных последовательностей $a = (a_1, \dots, a_k)$, состоящих из нулей и единиц, включая при $k = 0$ пустую последовательность; $|a|$ – длина последовательности $a \in \mathbb{A}$, т. е. $|a| = k$ для $a \in \mathbb{D}^k$, причем длину пустой последовательности полагаем равной нулю; ab – конкатенация последовательностей $a, b \in \mathbb{A}$: если $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $b = (b_1, \dots, b_l)$, то $ab = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$.

Укажем на естественное взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и семейством $\mathbb{A}$. Пусть $n = 2^k + j$ – стандартное представление натурального числа $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим двоичное разложение $j = \sum_{\nu=1}^k 2^{k-\nu} a_\nu$ числа $j = 0, \dots, 2^k - 1$. Набору $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{A}$ поставим в соответствие натуральное число n .

В дальнейшем мы будем использовать указанное взаимно однозначное соответствие для замены индекса $x_n = x_{k,j} = x(a_1, \dots, a_k) = x_a$, где на месте семейства x может оказаться как числовая последовательность, так и система функций.

Исходя из последовательности $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ коэффициентов биортогонального ряда (13) построим новую числовую последовательность $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ следующим образом. Положим $v_0 = 1$ и для натуральных n воспользуемся заменой индекса $u_n = u_a$ и $v_n = v_a$. Члены искомой последовательности определяем из рекуррентных соотношений

$$v(a_1, \dots, a_k) = -u(a_1, \dots, a_k) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} u(a_1, \dots, a_{\nu-1}) v(a_{\nu+1}, \dots, a_k). \quad (15)$$

Наконец, определим систему функций $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^\infty$ посредством равенств

$$\tilde{\varphi}_n = \tilde{\varphi}(a_1, \dots, a_k) = \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1}) \quad (16)$$

для натурального числа n , кроме того, $\tilde{\varphi}_0 = \chi_{[0,1]}$.

ЛЕММА 4. Система функций $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^\infty$ является биортогонально сопряженной к системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$.

Равенства (16) показывают, что функции биортогонально сопряженной системы $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^\infty$ являются полиномами по системе Хаара, т. е. кусочно ступенчатыми функциями, постоянными на двоично-рациональных интервалах соответствующего ранга. Поэтому для любой функции $f \in L^1$ корректно определены коэффициенты биортогонального разложения по системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$:

$$f \sim \sum_{n=0}^\infty (f, \tilde{\varphi}_n) \varphi_n. \quad (17)$$

Теперь наша задача состоит в нахождении условий, при выполнении которых биортогональный ряд (17) сходится к функции f .

В простейшем случае, когда функция $\psi^H = \chi_{[0,1]}$ является порождающей и $\varphi^H = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$ – функция Хаара, общий член биортогонального разложения (17) совпадает с общим членом ортогонального ряда Фурье–Хаара функции f :

$$f = \sum_{n=0}^\infty (f, \tilde{\varphi}_n^H) \varphi_n^H = \sum_{n=0}^\infty (f, \chi_n) \chi_n. \quad (18)$$

В этом смысле биортогональное разложение (17) является обобщением ортогонального ряда Фурье–Хаара (18).

Пусть $A(L^1)$ – пространство абсолютно сходящихся по норме пространства L^1 рядов Фурье–Хаара, снабженное нормой

$$\|f\|_{A(L^1)} = \sum_{n=0}^{\infty} |(f, \tilde{\varphi}_n^H)|,$$

и пусть

$$\omega(\delta, f) = \sup_{0 < h \leq \delta} \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)| dx$$

– интегральный модуль непрерывности функции $f \in L^1$. Тогда всякая функция f , удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(1/n, f)}{n} < \infty, \quad (19)$$

принадлежит пространству $A(L^1)$. Этот факт следует из классических оценок коэффициентов Фурье–Хаара, полученных в [7].

ЛЕММА 5. *Предположим, что порождающая функция ψ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \log_2 n) \omega(1/n, \psi)}{n} < \infty \quad (20)$$

и, кроме того, выполняется неравенство

$$\|\psi - \psi^H\|_{A(L^1)} < 1. \quad (21)$$

Тогда для любой функции $f \in L^1$ справедливо представление

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \tilde{\varphi}_n) \varphi_n. \quad (22)$$

Утверждение леммы 5 означает, что система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис пространства L^1 .

Теперь приведем линейный алгоритм аффинного синтеза по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Входными данными являются, во-первых, порождающая функция $\psi \in L^1$ аффинной системы, удовлетворяющая условию нормировки (12), и, во-вторых, суммируемая функция f , которую требуется представить в виде ряда по аффинной системе посредством производящей формулы (4), (5).

Первый шаг состоит в образовании числовой последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ по формулам (14). Для этого требуется вычисление интегралов от функции ψ по двоично-рациональным отрезкам. При этом для получения конечной последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{2^N-1}$ из 2^N членов достаточно вычислить 2^N интегралов по двоично-рациональным отрезкам ранга N :

$$\int_{2^{-N}n}^{2^{-(N+1)}(n+1)} \psi(x) dx, \quad n = 0, \dots, 2^N - 1.$$

На втором шаге исходя из последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ строится новая числовая последовательность $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ с использованием рекуррентных соотношений (15). Для получения конечной последовательности $\{v_n\}_{n=0}^{2^N-1}$ достаточно конечного набора значений $\{u_n\}_{n=0}^{2^N-1}$ исходной последовательности. Более того, как видно из (16), для получения конкретного значения $v_n = v(a_1, \dots, a_k)$ необходимы лишь $k+1$ чисел $u(a_1, \dots, a_{\nu-1})$, $1 \leq \nu \leq k+1$, и k чисел $v(a_{\nu+1}, \dots, a_k)$, $1 \leq \nu \leq k$. Другими словами, для определения новых значений по дереву $\{v_a\}_{a \in \mathbb{A}}$ надо знать предшествующие значения “на той же ветке”, а не вообще на всех вершинах меньшего ранга.

Третий шаг заключается в построении числовой последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ по функции f . Именно,

$$f_n = (f, \tilde{\varphi}_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где система функций $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана равенствами (16). На практике удобнее сначала вычислить так же, как и на первом шаге для функции ψ , интегралы

$$f_0^H = \int_0^1 f(x) dx = 1, \quad f_n^H = \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} f(x) dx - \int_{2^{-k}(j+1/2)}^{2^{-k}(j+1)} f(x) dx,$$

а потом на основании равенств (16) найти

$$\begin{aligned} f_n &= f(a_1, \dots, a_k) \\ &= f^H(a_1, \dots, a_k) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) f^H(a_1, \dots, a_{\nu-1}) \end{aligned}$$

для натурального числа n и, кроме того, положить $f_0 = f_0^H$. Снова для определения конечной последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{2^N-1}$ достаточно лишь конечных наборов значений $\{f_n^H\}_{n=0}^{2^N-1}$ и $\{v_n\}_{n=0}^{2^N-1}$.

Наконец, на четвертом шаге остается получить на выходе последовательность значений функционалов $\{l_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ по формулам

$$l_1(f) = f_0, \quad l_{2n}(f) = -l_{2n+1}(f) = \frac{1}{2}(f_n + v_n f_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Представляющая функционалы $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ система функций $\{\psi_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$ имеет вид

$$\psi_1^* = \tilde{\varphi}_0, \quad \psi_{2n}^* = -\psi_{2n+1}^* = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_n + v_n \tilde{\varphi}_0), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

так что $l_n(f) = (f, \psi_n^*)$, $n = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\psi \in L^1$ удовлетворяет нормировке (12) и условиям (20), (21). Тогда аффинный синтез в пространстве L^1 по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно пространства коэффициентов $X(\psi)$ допускает линейный алгоритм вычисления коэффициентов.

При доказательстве теоремы 3 будет показано, что для любой функции $f \in L^1$ справедливо представление (4) и производящая формула (5), в которых последовательность непрерывных линейных функционалов $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ на пространстве L^1 и система существенно ограниченных измеримых функций $\{\psi_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$ задаются равенствами (23) и (24) соответственно.

В завершение обсуждения описанного линейного алгоритма аффинного синтеза следует отметить, что сопутствующие его реализации вычисления являются значительно более громоздкими по сравнению с реализацией разложения в ряд Фурье–Хаара. Однако указанный алгоритм предоставляет некоторую свободу выбора порождающей функции, что дает возможность рассматривать разложения по аффинным системам, функции которых имеют требуемую гладкость.

§ 2. Фреймы в банаховом пространстве

Базисом Рисса, или *базисом*, *эквивалентным ортонормированному*, называется система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H , для которой существуют ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H и обратимый оператор $J: H \rightarrow H$ такие, что $\varphi_n = Je_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Фреймом называется система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов гильбертова пространства H , для которой существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого вектора $h \in H$ последовательность коэффициентов Фурье $\{(h, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|h\|_H \leq \|\{(h, \psi_n)\}\|_{\ell^2} \leq B\|h\|_H, \quad (25)$$

где ℓ^2 – гильбертово пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Понятие фрейма было введено Р. Дж. Даффинном и А. Шеффером в 1952 г. (см. [8]). Следует отметить, что несколькими годами ранее другая терминология была предложена Н. К. Бари [9], [10].

Фрейм $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H называется *фреймом Парсеваля*, если $A = B = 1$ в неравенствах (25), т.е. для любого вектора $h \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(h, \psi_n)|^2 = \|h\|_H^2.$$

М. А. Наймарк в 1940 г. [11] доказал теорему о том, что всякий фрейм Парсеваля $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H является ортогональной проекцией ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего гильбертова пространства $H' \supset H$:

$$\psi_n = \pi e_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\pi: H' \rightarrow H$ – оператор ортогонального проектирования из H' на H .

Проекционное описание фреймов общего вида было получено независимо в [12] и [13]. Именно, всякий фрейм $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H является ортогональной проекцией базиса Рисса $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего гильбертова пространства $H' \supset H$:

$$\psi_n = \pi \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\pi: H' \rightarrow H$ – оператор ортогонального проектирования из H' на H .

Близкие результаты о проекционных характеристиках систем функций имеются в работах [14], [15].

При распространении понятия фрейма на системы элементов банаховых пространств возникает неоднозначность в прочтении двойственности (h, ψ_n) : либо мы говорим о выборке значений функционалов ψ_n на элементе h , либо рассматриваем коэффициенты Фурье функционала h на элементах ψ_n . Эти подходы к определению фрейма не эквивалентны, даже если мы ограничимся рассмотрением рефлексивных банаховых пространств. Первый вариант прочтения двойственности был положен К. Х. Грошенигом [16] в основу определения понятий банахова фрейма (Banach frame) и атомарного разложения (atomic decomposition).

Пусть F – банахово пространство и $G = F^*$ – сопряженное пространство к F . Пусть, далее, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty$ – системы ненулевых элементов банаховых пространств F и G соответственно. Фиксируем модельное пространство X числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$. Поскольку система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ образует базис пространства X , каждый непрерывный линейный функционал l на X однозначно определяется последовательностью своих значений $\{l(e_n)\}_{n=1}^\infty$ на элементах базиса. Поэтому сопряженное пространство X^* можно отождествить с некоторым пространством Y числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$ так, что

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

– общий вид непрерывного линейного функционала на модельном пространстве X .

Банаховым фреймом называется пара систем $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ и $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty \subset G \setminus \{0\}$, для которых существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого вектора $f \in F$ выборка значений $\{(f, \psi_n^*)\}_{n=1}^\infty$ функционалов $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty$ на векторе f удовлетворяет неравенствам

$$A\|f\|_F \leq \| \{(f, \psi_n^*) \} \|_X \leq B\|f\|_F, \quad (26)$$

и, кроме того, справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n^*) \psi_n.$$

Заметим, что фактически мы воспроизвели здесь определение атомарного разложения по Грошенигу [16]. Однако, как показано в [12], для модельных пространств X понятия банахова фрейма и атомарного разложения эквивалентны. Многие результаты о банаховых фреймах можно найти в [17, гл. 17].

В случае, когда $F = G = H$ – гильбертово пространство и $X = \ell^2$, неравенства (26) принимают вид (25).

Другое определение фрейма, основанное на двойственных к (26) неравенствах, было предложено автором в статье [18].

Скажем, что система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ образует *фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X* , если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного

функционала $g \in G$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(g, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \| \{(g, \psi_n)\} \|_Y \leq B\|g\|_G. \quad (27)$$

Назовем неравенства (27) *рамочными неравенствами*, а постоянные A и B – *рамочными константами*.

В случае, когда $F = G = H$ – гильбертово пространство и $X = \ell^2$, рамочные неравенства (27) принимают вид (25). Это означает, что фрейм Даффина–Шеффера является фреймом в гильбертовом пространстве H относительно модельного пространства ℓ^2 .

Анализирующий оператор $R: G \rightarrow Y$ определим посредством равенства

$$Rg = \{(g, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}, \quad g \in G.$$

Рамочные неравенства (27), записанные в виде

$$A\|g\|_G \leq \|Rg\|_Y \leq B\|g\|_G,$$

показывают, что анализирующий оператор R ограничен и является инъекцией.

Синтезирующий оператор $S: X \rightarrow F$ определим с помощью равенства

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X.$$

В частности, $Se_n = \psi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Нетрудно проверить корректность определения синтезирующего оператора S . В самом деле, для любой финитной числовой последовательности x имеем

$$(Sx, g) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (g, \psi_n) = (x, Rg),$$

откуда, во-первых, находим

$$\|Sx\|_F = \sup_{\|g\|_G \leq 1} |(Sx, g)| = \sup_{\|g\|_G \leq 1} |(x, Rg)| \leq \|x\|_X \sup_{\|g\|_G \leq 1} \|Rg\|_Y \leq B\|x\|_X,$$

что означает ограниченность оператора S и, с учетом всюду плотности линейного многообразия финитных последовательностей в модельном пространстве X (это следует из базисности системы канонических ортов), корректность его определения, во-вторых, видим, что анализирующий оператор является сопряженным к синтезирующему оператору: $R = S^*$.

ЛЕММА 6. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X . Тогда для любого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n.$$

Сформулированная лемма показывает, что всякий фрейм в смысле определения (27) автоматически является системой представления в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X . Заметим, что для банаховых фреймов (26) это не так.

Следующие утверждения раскрывают содержание понятия фрейма в банаховом пространстве с точки зрения задачи представления функций рядами.

ЛЕММА 7. Система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ образует фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X в том и только в том случае, когда она является и системой сходимости, и системой представления в F относительно X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякая система представления $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ является фреймом в банаховом пространстве F относительно своего пространства коэффициентов $X(\psi)$.

Итак, всякий фрейм является системой представления, и, наоборот, всякая система представления является фреймом, но, возможно, относительно разных модельных пространств. Таким образом, чтобы доказать, что некоторая система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ образует систему представления в некотором банаховом пространстве F , достаточно установить рамочные неравенства вида (27). При этом, подбирая модельное пространство, можно получить дополнительную информацию о коэффициентах представляющего ряда.

Перейдем к решению задачи о существовании линейного алгоритма разложения по фрейму. Так же, как и для аффинных систем, под *линейным алгоритмом* вычисления коэффициентов разложения по фрейму $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X понимаем существование системы $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty$ непрерывных линейных функционалов на пространстве F таких, что для любого вектора $f \in F$ числовая последовательность $\{(f, \psi_n^*)\}_{n=1}^\infty$ принадлежит пространству X и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n^*) \psi_n.$$

В терминах синтезирующего оператора это означает, что $S: X \rightarrow F$ является *ретракцией*, т.е. существует ограниченный линейный оператор $T: F \rightarrow X$, называемый *коретракцией*, для которого $ST = I$ – тождественный оператор в пространстве F . Этот факт составляет содержание следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для существования линейного алгоритма вычисления коэффициентов разложения по фрейму $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X необходимо и достаточно, чтобы синтезирующий оператор $S: X \rightarrow F$ являлся ретракцией.

Нам потребуется следующий факт учебного характера, доказательство которого приводится для полноты изложения.

ЛЕММА 8. Пусть $S: F_1 \rightarrow F_2$ – ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство F_1 на банахово пространство F_2 . Тогда следующие условия равносильны:

- (а) оператор S является ретракцией;
- (б) оператор S является проекцией изоморфизма, т.е. существуют банахово пространство F_3 , включающее в себя F_2 в качестве замкнутого подпространства, изоморфизм $J: F_1 \rightarrow F_3$ и непрерывный линейный проектор $P: F_3 \rightarrow F_2$ такие, что $S = PJ$;
- (с) ядро $\text{Ker}(S)$ оператора S дополняемо в пространстве F_1 , т.е. существует замкнутое подпространство $F \subset F_1$ такое, что $F_1 = \text{Ker}(S) \oplus F$.

Пусть

$$N = N(X) = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n = 0 \right\}$$

– пространство коэффициентов нуль-рядов фрейма $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что N – замкнутое подпространство модельного пространства X .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X . Тогда следующие условия равносильны:

(а) существует линейный алгоритм вычисления коэффициентов разложения по фрейму $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$;

(б) фрейм $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является проекцией базиса объемлющего банахова пространства, т. е. существуют банахово пространство $F' \supset F$, базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства F' , пространство коэффициентов которого совпадает с модельным пространством фрейма $X(\varphi) = X$, и непрерывный линейный проектор $P: F' \rightarrow F$ такие, что

$$\psi_n = P\varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots;$$

(с) пространство коэффициентов нуль-рядов N дополняемо в модельном пространстве X .

Теорема 4 обобщает упомянутые в начале параграфа проекционные результаты о фреймах Даффина–Шеффера, поскольку в этом случае всякое подпространство модельного пространства $X = \ell^2$ дополняемо и базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ объемлющего пространства, имеющий пространство коэффициентов $X(\varphi) = X = \ell^2$, суть базис Рисса (кроме того, ортогональность соответствующего проектора будет видна из доказательства этой теоремы).

§ 3. Доказательства лемм, предложений и теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Заметим, что искомое предельное соотношение (6) однородно по ψ и тривиально выполняется при условии $\int_0^1 \psi(x) dx = 0$. Поэтому без ограничения общности мы предположим, что функция ψ удовлетворяет условию $\int_0^1 \psi(x) dx = 1$.

Пусть $\omega(x)$ – 1-периодическая функция, которая является продолжением исходной функции $\psi(x)$ с единичного отрезка $[0, 1]$. Для такой функции $\omega(x)$ и произвольной функции $g \in L^{\infty}$ справедливо утверждение леммы Фейера (см., например, [19, с. 64]):

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) \omega(\lambda x) dx = \int_0^1 g(x) dx \int_0^1 \omega(x) dx.$$

Пусть $m \geq 0$, $0 \leq i \leq 2^m - 1$ и $\lambda = 2^k$. Применим лемму Фейера к функции $gX_{[2^{-m}i, 2^{-m}(i+1)]}$ вместо g . Получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{2^{-m}i}^{2^{-m}(i+1)} g(x) \omega(2^k x) dx = \int_{2^{-m}i}^{2^{-m}(i+1)} g(x) dx.$$

Оценим допредельное выражение в левой части последнего равенства при $k > m$. Для этого разобьем отрезок $[2^{-m}i, 2^{-m}(i+1)]$ на 2^{k-m} двоично-рациональных отрезков длины 2^{-k} :

$$[2^{-m}i, 2^{-m}(i+1)] = \bigcup_{j=2^{k-m}i}^{2^{k-m}(i+1)-1} [2^{-k}j, 2^{-k}(j+1)].$$

С учетом 1-периодичности функции $\omega(x)$ и включения $\text{supp } \psi_{k,j} \subset [2^{-k}j, 2^{-k}(j+1)]$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{2^{-m}i}^{2^{-m}(i+1)} g(x)\omega(2^k x) dx &= \sum_{j=2^{k-m}i}^{2^{k-m}(i+1)-1} \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1)} g(x)\omega(2^k x) dx \\ &= 2^{-k} \sum_{j=2^{k-m}i}^{2^{k-m}(i+1)-1} \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1)} g(x)2^k \omega(2^k x - j) dx \\ &= 2^{-k} \sum_{j=2^{k-m}i}^{2^{k-m}(i+1)-1} \int_0^1 g(x)2^k \psi(2^k x - j) dx = 2^{-k} \sum_{j=2^{k-m}i}^{2^{k-m}(i+1)-1} (g, \psi_{k,j}), \end{aligned}$$

откуда получаем искомую оценку допредельного выражения

$$\begin{aligned} \left| \int_{2^{-m}i}^{2^{-m}(i+1)} g(x)\omega(2^k x) dx \right| &\leq 2^{-k} \sum_{j=2^{k-m}i}^{2^{k-m}(i+1)-1} |(g, \psi_{k,j})| \\ &\leq 2^{-k} 2^{k-m} \max_{2^{k-m}i \leq j < 2^{k-m}(i+1)} |(g, \psi_{k,j})| \leq 2^{-m} \max_{0 \leq j \leq 2^k-1} |(g, \psi_{k,j})|. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, находим

$$\left| 2^m \int_{2^{-m}i}^{2^{-m}(i+1)} g(x) dx \right| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq 2^k-1} |(g, \psi_{k,j})|.$$

Поскольку для почти всех $x \in [0, 1]$ выполняется предельное соотношение

$$g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2^m \int_{2^{-m}i}^{2^{-m}(i+1)} g(x) dx,$$

где при каждом фиксированном m число $i = i(x)$ выбирается из условия принадлежности $x \in [2^{-m}i, 2^{-m}(i+1)]$, то

$$\text{vrai sup}_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq 2^k-1} |(g, \psi_{k,j})|.$$

Этим установлено неравенство (6). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Понятно, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \max_{2^k \leq n < 2^{k+1}} |(g, \psi_n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |(g, \psi_n)|.$$

Поэтому оценка снизу $A\|g\|_{L^\infty} \leq \|\{(g, \psi_n)\}\|_{\ell^\infty}$ в рамочных неравенствах (7) прямо следует из леммы 1. Оценка сверху $\|\{(g, \psi_n)\}\|_{\ell^\infty} \leq B\|g\|_{L^\infty}$ очевидна, так как $|(g, \psi_n)| \leq \|\psi_n\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} = \|\psi\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} = B\|g\|_{L^\infty}$. Рамочные неравенства (7) установлены с рамочными константами (8). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Во-первых, требуется доказать, что для каждой числовой последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из пространства коэффициентов X справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_X = 0.$$

Принадлежность $x \in X$ означает по определению, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ сходится по норме пространства F . Согласно критерию Коши сходимости ряда для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что для всех $n \geq n_0$ и $p \geq 1$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k f_k \right\|_F < \varepsilon.$$

Для числовой последовательности $x^{[n]} = x - \sum_{k=1}^n x_k e_k$ имеем

$$x_k^{[n]} = \begin{cases} x_k, & \text{если } k > n, \\ 0, & \text{если } k \leq n. \end{cases}$$

Поэтому при $n \geq n_0$ получаем

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_X = \|x^{[n]}\|_X = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^m x_k^{[n]} f_k \right\|_F = \sup_{p \geq 1} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k f_k \right\|_F \leq \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Итак, для любого $x \in X$ справедливо представление

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Осталось показать единственность такого представления. Для этого достаточно установить непрерывность координатных функционалов $l_n(x) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$. В самом деле, для любого $x \in X$ будем иметь

$$\begin{aligned} |l_n(x)| &= |x_n| = \frac{1}{\|f_n\|_F} \|x_n f_n\|_F = \frac{1}{\|f_n\|_F} \left\| \sum_{k=1}^n x_k f_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k f_k \right\|_F \\ &\leq \frac{2}{\|f_n\|_F} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n x_k f_k \right\|_F = \frac{2}{\|f_n\|_F} \|x\|_X. \end{aligned}$$

Непрерывность функционалов l_n на пространстве коэффициентов X установлена. Далее, нетрудно видеть, что система координатных функционалов $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ является биортогонально сопряженной к системе канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, так как $l_i(e_j) = \delta_{ij}$. Окончательно, если $x = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n e_n$ – некоторое представление, то $x_n = l_n(x) = x'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Для натурального числа n в силу равенства (11) имеем

$$\int_0^1 \varphi_n(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \psi_{2n}(x) dx - \int_0^1 \psi_{2n+1}(x) dx \right) = 0,$$

поскольку $\int_0^1 \psi_n(x) dx$ не зависит от n по определению аффинной системы (1). С другой стороны, в силу равенства (16) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{\varphi}_n(x) dx &= \int_0^1 \tilde{\varphi}(a_1, \dots, a_k)(x) dx = \int_0^1 \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k)(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) \int_0^1 \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1})(x) dx = 0, \end{aligned}$$

так как интеграл от каждой функции Хаара $\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1})$, $1 \leq \nu \leq k$, и $\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k)$ обращается в нуль. Полученные соотношения означают, что

$$(\tilde{\varphi}_0, \varphi_n) = 0, \quad (\tilde{\varphi}_n, \varphi_0) = 0, \quad (\tilde{\varphi}_0, \varphi_0) = 1$$

согласно равенствам $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 = \chi_{[0,1]}$. Таким образом, далее требуется доказать справедливость соотношений

$$(\tilde{\varphi}_a, \varphi_b) = \delta_{ab}, \quad a, b \in \mathbb{A}.$$

Для этого рассмотрим операторную структуру мультисдвига в пространстве L^1 , аналогичную структуре мультисдвига в гильбертовом пространстве, введенной в работе автора [20]. Для удобства обозначений мы будем считать, что каждая функция $f \in L^1$ продолжена нулем за пределы единичного отрезка, так что $\text{supp } f \subset [0, 1]$. Определим изометрические в пространстве L^1 операторы D_0 и D_1 посредством равенств

$$D_0 f(x) = 2f(2x), \quad D_1 f(x) = 2f(2x - 1).$$

Отметим, что $\text{supp } D_0 f \subset [0, 1/2]$ и $\text{supp } D_1 f \subset [1/2, 1]$. Для $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{A}$ положим

$$D^a = D_{a_1} \cdots D_{a_k}$$

– произведение операторов в следующем порядке: первым действует оператор D_{a_k} , последним – D_{a_1} , причем пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I . В принятых обозначениях имеем

$$\begin{aligned} D^a f(x) &= D_{a_1} \cdots D_{a_k} f(x) = 2 \cdots 2f(2 \cdots (2x - a_1) - \cdots - a_{k-1}) - a_k) \\ &= 2^k f(2^k x - 2^{k-1} a_1 - \cdots - 2a_{k-1} - a_k) = 2^k f(2^k x - j) \\ &= f_{k,j}(x) = f_n(x), \end{aligned}$$

где $n = 2^k + j$ – стандартное представление и $j = \sum_{\nu=1}^k a_\nu 2^{k-\nu}$.

Итак, семейство $\{D^a f\}_{a \in \mathbb{A}}$, полученное действием степеней (всевозможных произведений) операторов мультисдвига D_0 и D_1 на функцию f , совпадает с аффинной системой $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, порожденной этой функцией. Теперь мы можем записать разложение (13) следующим образом:

$$\psi = \sum_{n=0}^\infty u_n \varphi_n^H = \psi^H + \sum_{a \in \mathbb{A}} u_a D^a \varphi^H.$$

Ввиду того, что $\varphi = \frac{1}{2}(D_0 - D_1)\psi$ и, в частности, $\varphi^H = \frac{1}{2}(D_0 - D_1)\psi^H$, находим разложение функции φ в биортогональный ряд:

$$\varphi = \varphi^H + \frac{1}{2} \sum_{a \in \mathbb{A}} u_a (D_0 - D_1) D^a \varphi^H.$$

Здесь и далее суммирование по индексу $a \in \mathbb{A}$ понимаем следующим образом: $\sum_{a \in \mathbb{A}} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} \dots$. Наконец, заменяя в разложении функции φ индекс a на c и применяя к обеим частям этого разложения оператор D^b , получаем представление

$$\varphi_b = D^b \varphi = D^b \varphi^H + \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathbb{A}} u_c D^b (D_0 - D_1) D^c \varphi^H.$$

В то же время, разложение функции φ_b в биортогональный ряд имеет вид

$$\varphi_b = \sum_{a \in \mathbb{A}} (\tilde{\varphi}_a^H, \varphi_b) \varphi_a^H = \sum_{a \in \mathbb{A}} (\tilde{\varphi}_a^H, \varphi_b) D^a \varphi^H.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях операторов мультисдвига и учитывая единственность биортогонального разложения, устанавливаем равенства

$$(\tilde{\varphi}_a^H, \varphi_b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b, \\ \frac{u_c}{2}, & \text{если } a = b0c, \\ -\frac{u_c}{2}, & \text{если } a = b1c, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Видим, что если $|a| < |b|$, то $(\tilde{\varphi}_a^H, \varphi_b) = 0$. Перейдем к вычислению величины $(\tilde{\varphi}_a, \varphi_b)$. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $b = (b_1, \dots, b_l)$. Используя равенства (16), находим

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_a, \varphi_b) &= (\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k), \varphi(b_1, \dots, b_l)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) (\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1}), \varphi(b_1, \dots, b_l)). \end{aligned}$$

Если $k \leq l$, то $\nu - 1 < l$, и поэтому $(\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1}), \varphi(b_1, \dots, b_l)) = 0$. При $k < l$, кроме того, $(\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k), \varphi(b_1, \dots, b_l)) = 0$. Наконец, при $k = l$ имеем, что $(\tilde{\varphi}_a, \varphi_b) = (\tilde{\varphi}_a^H, \varphi_b)$ равно 1, если $a = b$, и равно 0 иначе. Следовательно,

$$(\tilde{\varphi}_a, \varphi_b) = \delta_{ab}, \quad |a| \leq |b|.$$

Предположим, что $k > l$. Тогда, устраняя заведомо равные нулю слагаемые, соответствующие индексам $\nu = 1, \dots, l$, запишем уточненное представление

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_a, \varphi_b) &= (\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k), \varphi(b_1, \dots, b_l)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=l+1}^k (-1)^{a_\nu} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) (\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1}), \varphi(b_1, \dots, b_l)). \end{aligned}$$

Если в правой части последнего представления хотя бы одно скалярное произведение отлично от нуля, то $a_1 = b_1, \dots, a_l = b_l$, т.е. последовательность b

является начальным фрагментом последовательности a . В этом случае рассматриваемые ненулевые скалярные произведения имеют вид

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k), \varphi(b_1, \dots, b_l)) &= \frac{(-1)^{a_{l+1}}}{2} u(a_{l+2}, \dots, a_k), \\(\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_l), \varphi(b_1, \dots, b_l)) &= 1, \\(\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1}), \varphi(b_1, \dots, b_l)) &= \frac{(-1)^{a_{l+1}}}{2} u(a_{l+2}, \dots, a_{\nu-1});\end{aligned}$$

здесь второе равенство соответствует индексу $\nu = l + 1$, в последнем равенстве $\nu = l + 2, \dots, k$. Отделяя слагаемое, соответствующее индексу $\nu = l + 1$, окончательно получаем

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}_a, \varphi_b) &= \frac{(-1)^{a_{l+1}}}{2} u(a_{l+2}, \dots, a_k) + \frac{(-1)^{a_{l+1}}}{2} v(a_{l+2}, \dots, a_k) \\&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=l+2}^k (-1)^{a_\nu} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) \frac{(-1)^{a_{l+1}}}{2} u(a_{l+2}, \dots, a_{\nu-1}) \\&= \frac{(-1)^{a_{l+1}}}{2} \left\{ u(a_{l+2}, \dots, a_k) + v(a_{l+2}, \dots, a_k) \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\nu=l+2}^k (-1)^{a_\nu} u(a_{l+2}, \dots, a_{\nu-1}) v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) \right\} = 0.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из рекуррентных соотношений (15), в которых последовательность $(a_1, \dots, a_k)$ следует заменить на $(a_{l+2}, \dots, a_k)$:

$$\begin{aligned}v(a_{l+2}, \dots, a_k) &= -u(a_{l+2}, \dots, a_k) \\&\quad - \frac{1}{2} \sum_{\nu=l+2}^k (-1)^{a_\nu} u(a_{l+2}, \dots, a_{\nu-1}) v(a_{\nu+1}, \dots, a_k).\end{aligned}$$

Тем самым полностью установлены соотношения биортогональности

$$(\varphi_i, \tilde{\varphi}_j) = \int_0^1 \varphi_i(x) \tilde{\varphi}_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Для $k = 0, 1, \dots$ положим

$$U_k = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |u_n| = \sum_{|a|=k} |u_a|,$$

где по-прежнему $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность коэффициентов биортогонального ряда (13). Используя соотношения (14), получаем

$$\begin{aligned}U_k &= \sum_{j=0}^{2^k-1} \left| \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} \psi(x) dx - \int_{2^{-k}(j+1/2)}^{2^{-k}(j+1)} \psi(x) dx \right| \\&\leq \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} |\psi(x) - \psi(x + 2^{-(k+1)})| dx \leq \omega(2^{-(k+1)}, \psi).\end{aligned}$$

Отсюда и из условия (20) леммы находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)U_k &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\omega(2^{-k+1}, \psi) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (1 + \log_2 n)\omega\left(\frac{1}{n}, \psi\right) \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \log_2 n)\omega(1/n, \psi)}{n} < \infty. \end{aligned}$$

Тем более, конечна величина

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |(\psi, \tilde{\varphi}_n^H)| < \infty,$$

откуда $\psi \in A(L^1)$. Впрочем, это вытекает из импликации (20) $\Rightarrow$ (19). Более того, условие (21) леммы показывает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k = \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi - \psi^H, \tilde{\varphi}_n^H)| = \|\psi - \psi^H\|_{A(L^1)} < 1,$$

поскольку $(\psi^H, \tilde{\varphi}_n^H) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $(\psi, \tilde{\varphi}_0^H) = (\psi^H, \tilde{\varphi}_0^H) = 1$, что следует из нормировки (12). Итак, имеют место соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)U_k < \infty.$$

Поэтому аналитическая функция

$$U(z) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} U_k z^{k+1}$$

не обращается в нуль в единичном круге ($|z| \leq 1$), причем как сама функция $U(z)$, так и ее производная $U'(z)$ имеют абсолютно сходящийся ряд Тейлора. Согласно аналогу теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье [21] аналитическая функция

$$V(z) = \frac{1}{U(z)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} V_k z^{k+1}$$

снова имеет абсолютно сходящийся ряд Тейлора. Такова же будет и ее производная

$$V'(z) = -\frac{U'(z)}{U^2(z)} = -U'(z)V^2(z),$$

то есть

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)V_k < \infty,$$

причем числовая последовательность $\{V_k\}_{k=0}^{\infty}$ определяется с помощью рекуррентных соотношений

$$V_0 = U_0, \quad V_{k+1} = U_{k+1} + \sum_{\nu=0}^k U_{k-\nu} V_{\nu}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Индукцией по $k = 0, 1, \dots$ установим оценку

$$\sum_{|a|=k} |v_a| \leq V_k.$$

При $k = 0$ для пустой последовательности a имеем $v_a = -u_a$, поэтому

$$\sum_{|a|=0} |v_a| = \sum_{|a|=0} |u_a| = U_0 = V_0.$$

Предположим, что искомая оценка выполняется с заменой индекса k на индекс $\nu \leq k$. Тогда ввиду рекуррентных соотношений (15) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|a|=k+1} |v(a_1, \dots, a_{k+1})| &\leq \sum_{|a|=k+1} |u(a_1, \dots, a_{k+1})| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k+1} \sum_{|a|=k+1} |u(a_1, \dots, a_{\nu-1})| |v(a_{\nu+1}, \dots, a_{k+1})| \\ &= U_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k+1} \sum_{a_\nu=0}^1 \sum_{|b|=\nu-1} |u_b| \sum_{|c|=k+1-\nu} |v_c| \\ &\leq U_{k+1} + \sum_{\nu=1}^{k+1} U_{\nu-1} V_{k+1-\nu} = U_{k+1} + \sum_{\nu=0}^k U_\nu V_{k-\nu} = V_{k+1}. \end{aligned}$$

Индукция завершена. Пусть, далее,

$$S_N f = \sum_{n=0}^{2^{N+1}-1} (f, \tilde{\varphi}_n) \varphi_n = (f, \tilde{\varphi}_0) \varphi_0 + \sum_{|a| \leq N} (f, \tilde{\varphi}_a) \varphi_a$$

– частная сумма порядка 2^{N+1} биортогонального разложения (17) функции f по системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ и

$$S_N^H f = \sum_{n=0}^{2^{N+1}-1} (f, \tilde{\varphi}_n^H) \varphi_n^H = (f, \tilde{\varphi}_0^H) \varphi_0^H + \sum_{|a| \leq N} (f, \tilde{\varphi}_a^H) \varphi_a^H$$

– частная сумма порядка 2^{N+1} ряда Фурье–Хаара (18) функции f . Пусть

$$E_N = \|\varphi^H - S_N \varphi^H\|_{L^1}, \quad N = 0, 1, \dots,$$

– уклонение частных сумм биортогонального разложения от функции Хаара φ^H . Наконец, для $f \in L^1$ и $k = 0, 1, \dots$ положим

$$F_k = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \tilde{\varphi}_n^H)| = \sum_{|a|=k} |(f, \tilde{\varphi}_a^H)|.$$

Заметим, что $F_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в силу необходимого условия сходимости ряда Фурье–Хаара функции f :

$$f = (f, \tilde{\varphi}_0^H) \varphi_0^H + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \tilde{\varphi}_n^H) \varphi_n^H,$$

откуда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \tilde{\varphi}_n^H) \varphi_n^H \right\|_{L^1} = 0.$$

Теперь покажем, что

$$\sum_{N=0}^{\infty} E_N < \infty.$$

Для этого запишем биортогональное разложение функции Хаара φ^H по системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ в виде

$$\varphi^H \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} (\varphi^H, \tilde{\varphi}_a) \varphi_a$$

и найдем коэффициенты этого разложения, пользуясь определением (16) биортогонально сопряженной системы $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} (\varphi^H, \tilde{\varphi}(a_1, \dots, a_k)) &= (\varphi^H, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\alpha_{\nu}} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) (\varphi^H, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1})). \end{aligned}$$

Видим, что для всех $k = 0, 1, \dots$ и $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{A}$

$$\begin{aligned} (\varphi^H, \tilde{\varphi}(0, a_1, \dots, a_k)) &= \frac{1}{2} v(a_1, \dots, a_k), \\ (\varphi^H, \tilde{\varphi}(1, a_1, \dots, a_k)) &= -\frac{1}{2} v(a_1, \dots, a_k), \end{aligned}$$

а в случае пустой последовательности $|a| = 0$ имеем $(\varphi^H, \tilde{\varphi}_a) = 1$. Это означает, что

$$\varphi^H \sim \varphi + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} v_a (D_0 - D_1) \varphi_a = \varphi + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} v_a \psi_a.$$

Полученное представление биортогонального ряда функции Хаара φ^H по системе $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ позволяет установить его абсолютную сходимость. Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} |(\varphi^H, \tilde{\varphi}_a)| = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} |v_a| \leq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} V_k < \infty.$$

Тот факт, что рассматриваемый биортогональный ряд сходится именно к функции Хаара φ^H , следует из свойства тотальности системы $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Для доказательства этого свойства предположим, что функция $f \in L^1$ такова, что $(f, \tilde{\varphi}_n) = 0$ для всех $n = 0, 1, \dots$, и покажем, что $f = 0$. В самом деле, проверим равенства $(f, \tilde{\varphi}_n^H) = 0$, $n = 0, 1, \dots$. Очевидно, что $(f, \tilde{\varphi}_0^H) = (f, \tilde{\varphi}_0) = 0$. Далее воспользуемся индукцией по длине $k = |a|$ последовательности $a \in \mathbb{A}$, соответствующей натуральному числу n . При $k = 0$ для пустой последовательности a имеем $(f, \tilde{\varphi}_a^H) = (f, \tilde{\varphi}_a) = 0$. Если равенства $(f, \tilde{\varphi}_a^H) = 0$ уже проверены при $|a| < k$, то при $|a| = k$ на основании равенств (16) получаем

$$\begin{aligned} (f, \tilde{\varphi}(a_1, \dots, a_k)) &= (f, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\alpha_{\nu}} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) (f, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1})) = 0. \end{aligned}$$

Равенства $(f, \tilde{\varphi}_n^H) = 0$, $n = 0, 1, \dots$, проверены. Отсюда в силу базисности системы Хаара в пространстве L^1 заключаем, что $f = 0$. Свойство тотальности системы $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^\infty$ доказано. Следовательно,

$$\varphi^H = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|a|=k} (\varphi^H, \tilde{\varphi}_a) \varphi_a = \varphi + \sum_{k=0}^\infty \sum_{|a|=k} v_a \psi_a.$$

Тогда

$$\varphi^H - S_N \varphi^H = \sum_{k=N+1}^\infty \sum_{|a|=k} (\varphi^H, \tilde{\varphi}_a) \varphi_a = \sum_{k=N}^\infty \sum_{|a|=k} v_a \psi_a,$$

откуда имеем

$$E_N = \|\varphi^H - S_N \varphi^H\|_{L^1} \leq \sum_{k=N}^\infty \sum_{|a|=k} \|v_a \psi_a\|_{L^1} \leq \|\psi\|_{L^1} \sum_{k=N}^\infty V_k.$$

Окончательно находим

$$\sum_{N=0}^\infty E_N = \|\psi\|_{L^1} \sum_{N=0}^\infty \sum_{k=N}^\infty V_k = \|\psi\|_{L^1} \sum_{k=0}^\infty (k+1) V_k < \infty.$$

Установим равенство

$$S_N f = S_N S_N^H f.$$

Заметим, что $(f, \tilde{\varphi}_0) \varphi_0 = (S_N^H f, \tilde{\varphi}_0) \varphi_0$. Далее, для $|a| = k \leq N$ вычислим

$$\begin{aligned} (f, \tilde{\varphi}_a) - (S_N^H f, \tilde{\varphi}_a) &= (f - S_N^H f, \tilde{\varphi}_a) = \sum_{l=N+1}^\infty \sum_{|b|=l} (f, \tilde{\varphi}_b^H) (\varphi_b^H, \tilde{\varphi}_a) \\ &= \sum_{l=N+1}^\infty \sum_{|b|=l} (f, \tilde{\varphi}_b^H) \left\{ (\varphi_b^H, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} v(a_1, \dots, a_k) (\varphi_b^H, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1})) \right\} = 0; \end{aligned}$$

здесь мы учли определение (16) системы $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^\infty$ и соотношения биортонormalности $(\varphi_b^H, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1})) = 0$ при $\nu - 1 \leq k \leq N < |b|$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} S_N f - S_N S_N^H f &= (f, \tilde{\varphi}_0) \varphi_0 + \sum_{|a| \leq N} (f, \tilde{\varphi}_a) \varphi_a - (S_N^H f, \tilde{\varphi}_0) \varphi_0 - \sum_{|a| \leq N} (S_N^H f, \tilde{\varphi}_a) \varphi_a \\ &= \sum_{|a| \leq N} ((f, \tilde{\varphi}_a) - (S_N^H f, \tilde{\varphi}_a)) \varphi_a = 0. \end{aligned}$$

Теперь установим, что при $|a| = k \leq N$ выполняется равенство

$$S_N \varphi_a^H = (S_{N-k} \varphi^H)_a.$$

Для этого рассмотрим частную сумму

$$S_N \varphi_a^H = \sum_{l=0}^N \sum_{|b|=l} (\varphi_a^H, \tilde{\varphi}_b) \varphi_b$$

и, пользуясь равенствами (16), вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned}
 (\varphi_a^H, \tilde{\varphi}_b) &= (\varphi_a^H, \tilde{\varphi}^H(b_1, \dots, b_l)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^l (-1)^{b_\nu} v(b_{\nu+1}, \dots, b_l) (\varphi_a^H, \tilde{\varphi}^H(b_1, \dots, b_{\nu-1})) \\
 &= \begin{cases} 1, & \text{если } b = a, \\ \frac{v_c}{2}, & \text{если } b = a0c, \\ -\frac{v_c}{2}, & \text{если } b = a1c, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Поясним последнее равенство. Из ортогональности функций Хаара следует, что если $l < k$, то $\nu - 1 < k$ и все скалярные произведения равны нулю. Далее, если $l = k$, то по-прежнему $\nu - 1 < k$ и единственным отличным от нуля скалярным произведением будет $(\varphi_a^H, \tilde{\varphi}_b^H) = 1$, причем $a = b$. Наконец, если $l > k$, то единственным ненулевым скалярным произведением является $(\varphi_a^H, \tilde{\varphi}^H(b_1, \dots, b_{\nu-1})) = 1$, причем $\nu = k + 1$ и $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$, т. е. последовательность $(a_1, \dots, a_k)$ является начальным фрагментом последовательности $(b_1, \dots, b_l)$. В этом последнем случае положим $c = (b_{k+2}, \dots, b_l)$ и увидим, что коэффициент при ненулевом скалярном произведении равен $(-1)^{b_{k+1}} v_c / 2$.

С другой стороны, как уже было показано,

$$\begin{aligned}
 (\varphi^H, \tilde{\varphi}_c) &= 1, \quad |c| = 0, \\
 (\varphi^H, \tilde{\varphi}(0, c_1, \dots, c_m)) &= \frac{v_c}{2}, \quad (\varphi^H, \tilde{\varphi}(1, c_1, \dots, c_m)) = -\frac{v_c}{2}.
 \end{aligned}$$

Итак, справедливо равенство

$$(\varphi_a^H, \tilde{\varphi}_b) = \begin{cases} (\varphi^H, \tilde{\varphi}_c), & \text{если } b = ac, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 S_N \varphi_a^H &= \sum_{|b| \leq N} (\varphi_a^H, \tilde{\varphi}_b) \varphi_b = \sum_{|c| \leq N-k} (\varphi^H, \tilde{\varphi}_c) \varphi_{ac} \\
 &= D^a \sum_{|c| \leq N-k} (\varphi^H, \tilde{\varphi}_c) \varphi_c = D^a S_{N-k} \varphi^H = (S_{N-k} \varphi^H)_a.
 \end{aligned}$$

На основании доказанного выше перейдем к доказательству равносходимости частных сумм $S_N f$ и $S_N^H f$. Будем иметь

$$\begin{aligned}
 \|S_N^H f - S_N f\|_{L^1} &= \|S_N^H f - S_N S_N^H f\|_{L^1} = \left\| \sum_{|a| \leq N} (f, \tilde{\varphi}_a^H) (\varphi_a^H - S_N \varphi_a^H) \right\|_{L^1} \\
 &\leq \sum_{|a| \leq N} |(f, \tilde{\varphi}_a^H)| \|\varphi_a^H - S_N \varphi_a^H\|_{L^1} = \sum_{k=0}^N \sum_{|a|=k} |(f, \tilde{\varphi}_a^H)| \|\varphi_a^H - (S_{N-k} \varphi^H)_a\|_{L^1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^N \sum_{|a|=k} |(f, \tilde{\varphi}_a^H)| \|D^a(\varphi^H - (S_{N-k}\varphi^H))\|_{L^1} = \sum_{k=0}^N E_{N-k} F_k \\
&= \sum_{k=0}^{[N/2]-1} E_{N-k} F_k + \sum_{k=[N/2]}^N E_{N-k} F_k \leq \sum_{k=[N/2]}^{\infty} E_k \sup_{k \geq 0} F_k + \sum_{k=0}^{\infty} E_k \sup_{k \geq [N/2]} F_k.
\end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, и вместе с ним

$$\|f - S_N f\|_{L^1} \leq \|f - S_N^H f\|_{L^1} + \|S_N^H f - S_N f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Поэтому для любой функции $f \in L^1$ имеем

$$f = (f, \tilde{\varphi}_0)\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \tilde{\varphi}_n)\varphi_n.$$

В частности, ввиду необходимого условия сходимости ряда имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} (f, \tilde{\varphi}_n)\varphi_n \right\|_{L^1} = \|\varphi\|_{L^1} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \tilde{\varphi}_n)| = 0.$$

Докажем справедливость представления (22). Пусть $2^N \leq n < 2^{N+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=0}^{n-1} (f, \tilde{\varphi}_k)\varphi_k \right\|_{L^1} &\leq \left\| f - \sum_{k=0}^{2^N-1} (f, \tilde{\varphi}_k)\varphi_k \right\|_{L^1} + \left\| \sum_{k=2^N}^{n-1} (f, \tilde{\varphi}_k)\varphi_k \right\|_{L^1} \\
&\leq \|f - S_{N-1}f\|_{L^1} + \|\varphi\|_{L^1} \sum_{k=2^N}^{2^{N+1}-1} |(f, \tilde{\varphi}_k)| \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Как уже отмечалось в § 2, анализирующий оператор $R: G \rightarrow Y$ является инъекцией. Согласно двойственности для операторных инъекций и сюръекций (см., например, [22, с. 18–20]) синтезирующий оператор $S: X \rightarrow F$ будет сюръекцией, поскольку $R = S^*$. Поэтому для любого вектора $f \in F$ найдется числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из модельного пространства X такая, что $f = Sx$. По определению синтезирующего оператора будем иметь

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Необходимость. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X . Тот факт, что $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система сходимости в F относительно X , следует из корректности определения синтезирующего оператора $S: X \rightarrow F$. Кроме того, в силу леммы 6 получаем, что $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система представления в F относительно X .

Достаточность получаем непосредственным применением принципа равномерной ограниченности Банаха–Штейнгауза. В самом деле, пусть некоторая

система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ является системой сходимости и системой представления в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X . Тогда равенство $Sx = \sum_{n=1}^\infty x_n \psi_n$ корректно определяет линейный оператор $S: X \rightarrow F$, причем этот оператор сюръективен. Покажем, что оператор S ограниченный. Рассмотрим операторы $S_n x = \sum_{k=1}^n x_k \psi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n x = Sx$, нормы $\|S_n x\|_F$ ограничены по n для каждого x . Следовательно, $\|S_n\| \leq C$ для всех n . Отсюда $\|Sx\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n x\|_F \leq C\|x\|_X$, так что оператор S ограниченный. Согласно двойственности для операторных инъекций и сюръекций сопряженный оператор $S^*: G \rightarrow Y$ является инъекцией. Это означает, что справедливы неравенства

$$A\|g\|_G \leq \|S^*g\|_Y \leq B\|g\|_G.$$

Осталось заметить, что $S^*g = \{(g, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$. Таким образом, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ – фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ – система представления в банаховом пространстве F и $X(\psi)$ – пространство коэффициентов этой системы. Очевидно, что $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ является и системой сходимости, и системой представления в F относительно $X(\psi)$. По лемме 7 система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ образует фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства $X(\psi)$. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Необходимость. Предположим, что существует линейный алгоритм вычисления коэффициентов разложения по фрейму $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, и пусть $\{\psi_n^*\}_{n=1}^\infty$ – система непрерывных линейных функционалов на пространстве F такая, что для любого вектора $f \in F$ числовая последовательность $\{(f, \psi_n^*)\}_{n=1}^\infty$ принадлежит модельному пространству X и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^\infty (f, \psi_n^*) \psi_n.$$

Рассмотрим оператор $T: F \rightarrow X$, определяемый равенством

$$Tf = \{(f, \psi_n^*)\}_{n=1}^\infty, \quad f \in F.$$

Отсюда видим, что $STf = f$ для всех $f \in F$, где $S: X \rightarrow F$ – синтезирующий оператор, ассоциированный с фреймом $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$. Поэтому оператор S будет ретракцией, как только мы установим ограниченность оператора T . Для этого положим $T_n f = \{(f, \psi_k^*)\}_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$. Имеем $Tf = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n f$ ввиду базисности системы канонических ортов модельного пространства X . Поэтому нормы $\|T_n f\|_X$ ограничены по n для каждого f . В силу принципа равномерной ограниченности Банаха–Штейнгауза имеем $\|T_n\| \leq C$. Следовательно, $\|Tf\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f\|_X \leq C\|f\|_F$. Установлена ограниченность оператора T .

Достаточность. Предположим, что синтезирующий оператор $S: X \rightarrow F$ является ретракцией, и пусть $T: F \rightarrow X$ – соответствующая коретракция, так что $ST = I$ – тождественный оператор в пространстве F . Обозначим через $l_n(x) = x_n$, $n = 1, 2, \dots$, $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, координатные функционалы на модельном пространстве X . Тогда $l_n(Tf)$ – непрерывный линейный функционал на

пространстве F . Положим $(f, \psi_n^*) = l_n(Tf)$, $n = 1, 2, \dots$. Будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n^*) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} l_n(Tf) \psi_n = STf = f.$$

Таким образом, существует линейный алгоритм вычисления коэффициентов разложения по фрейму $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $S: F_1 \rightarrow F_2$ – ретракция и $T: F_2 \rightarrow F_1$ – соответствующая коректрация, так что $STy = y$, $y \in F_2$. Обозначим через $F_0 = \text{Ker}(S) \subset F_1$ ядро оператора S . Пусть $F_3 = F_0 \oplus F_2$ – прямая сумма банаховых пространств F_0 и F_2 и $P: F_3 \rightarrow F_2$ – естественная проекция прямой суммы на второй множитель. Определим операторы $J: F_1 \rightarrow F_3$ и $J^{-1}: F_3 \rightarrow F_1$ с помощью равенств

$$\begin{aligned} Jx &= (x - TSx, Sx), & x \in F_1, \\ J^{-1}(x_0, y) &= x_0 + Ty, & x_0 \in F_0, \quad y \in F_2. \end{aligned}$$

Заметим, что определение оператора J корректно ввиду $x - TSx \in F_0$. Действительно,

$$S(x - TSx) = Sx - STSx = Sx - Sx = 0.$$

Далее, для всех $x \in F_1$ имеем

$$J^{-1}Jx = J^{-1}(x - TSx, Sx) = x - TSx + TSx = x,$$

а для всех $x_0 \in F_0$, $y \in F_2$ имеем

$$JJ^{-1}(x_0, y) = J(x_0 + Ty) = (x_0 - TSx_0 + Ty - TSTy, Sx_0 + STy) = (x_0, y).$$

Следовательно, $J: F_1 \rightarrow F_3$ – изоморфизм. Наконец, находим

$$PJx = P(x - TSx, Sx) = Sx, \quad x \in F_1.$$

Итак, ретракция S является проекцией изоморфизма.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть $F_3 \supset F_2$ – объемлющее банахово пространство, $P: F_3 \rightarrow F_2$ – непрерывный линейный проектор из F_3 на F_2 и $J: F_1 \rightarrow F_3$ – изоморфизм такие, что $S = PJ$. Тогда $F_3 = F_0 \oplus F_2$, где $F_0 = \text{Ker}(P)$. Действуя изоморфизмом $J^{-1}: F_3 \rightarrow F_1$, получаем разложение F_1 в прямую сумму:

$$F_1 = J^{-1}F_3 = J^{-1}F_0 \oplus J^{-1}F_2.$$

Осталось заметить, что $J^{-1}F_0 = \text{Ker}(S)$. В самом деле,

$$x \in J^{-1}F_0 \Leftrightarrow Jx \in F_0 \Leftrightarrow PJx = 0 \Leftrightarrow Sx = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(S).$$

Таким образом, ядро $\text{Ker}(S)$ дополняемо в пространстве F_1 .

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть $F_1 = \text{Ker}(S) \oplus F$. Поскольку оператор $S: F_1 \rightarrow F_2$ отображает банахово пространство F_1 на банахово пространство F_2 , сужение $S|_F$ оператора S на замкнутое подпространство $F \subset F_1$ будет изоморфизмом. Значит, композиция вложения $i: F \rightarrow F_1$ и обратного оператора $(S|_F)^{-1}: F_2 \rightarrow F$ будет искомой коретракцией $T = i \circ (S|_F)^{-1}: F_2 \rightarrow F_1$, так что $STy = y$ для всех $y \in F_2$ и оператор S является ретракцией. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В утверждении леммы 8 положим $F_1 = X$, $F_2 = F$ и $S: X \rightarrow F$ – синтезирующий оператор, отображающий X на F согласно лемме 6. Тогда из предложения 2 следует эквивалентность условий (а) леммы 8 и теоремы. Эквивалентность условий (с) леммы 8 и теоремы очевидна, так как $N = \text{Ker}(S)$. Покажем, что условия (b) леммы 8 и теоремы тоже эквивалентны. Пусть синтезирующий оператор S является проекцией изоморфизма. Это означает, что существуют объемлющее банахово пространство $F' \supset F$, непрерывный линейный проектор $P: F' \rightarrow F$ из F' на F и изоморфизм $J: X \rightarrow F'$ такие, что $S = PJ$. Образ $\{\varphi_n = Je_n\}_{n=1}^\infty$ естественного базиса $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ модельного пространства X будет базисом пространства F' , причем эквивалентным исходному. Поэтому его пространство коэффициентов $X(\varphi)$ совпадает с X . Кроме того, $P\varphi_n = PJ e_n = Se_n = \psi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Получаем, что фрейм $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ является проекцией базиса объемлющего банахова пространства. Обратно, пусть $\psi_n = P\varphi_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – базис объемлющего пространства $F' \supset F$ такой, что $X(\varphi) = X$, и $P: F' \rightarrow F$ – непрерывный линейный проектор. Определим оператор $J: X \rightarrow F'$ посредством равенства

$$Jx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in X.$$

Тогда J – изоморфизм, для которого

$$PJx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n = Sx,$$

т.е. оператор S является проекцией изоморфизма. Эквивалентность условий (b) леммы 8 и теоремы показана. Поэтому (а) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (с) как для условий леммы 8, так и для попарно эквивалентных им условий теоремы. Таким образом, теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение леммы 2 означает, что аффинная система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ образует фрейм в банаховом пространстве L^1 относительно модельного пространства ℓ^1 . По леммам 6, 7 фрейм $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ является и системой сходимости, и системой представления в L^1 относительно ℓ^1 . Следовательно, имеет место аффинный синтез по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве L^1 относительно модельного пространства ℓ^1 . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим противное, а именно пусть существует линейный алгоритм аффинного синтеза по аффинной системе $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве L^1 относительно модельного пространства ℓ^1 . Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1, система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ образует фрейм в L^1 относительно ℓ^1 . Значит, существует линейный алгоритм вычисления коэффициентов разложения по этому фрейму. Согласно теореме 4 пространство коэффициентов нуль-рядов N дополняемо в ℓ^1 . Пусть $\ell^1 = N \oplus K$. Поскольку синтезирующий оператор $S: \ell^1 \rightarrow L^1$ отображает ℓ^1 на L^1 , то сужение $S|_K$ – изоморфизм. Итак, $K \simeq L^1$. Пространство ℓ^1 является примарным (см. [23]), т.е. каждое его бесконечномерное дополняемое подпространство изоморфно ℓ^1 . Следовательно, $K \simeq \ell^1$, но тогда $\ell^1 \simeq L^1$. Противоречие. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По лемме 5 система $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ является базисом пространства L^1 . Пусть $f \in L^1$. Положим $f' = f - \psi \int_0^1 f(x) dx$. Запишем

представление (22) для функции f' . Учитывая, что $\int_0^1 f'(x) dx = 0$, и полагая $f_n = (f, \tilde{\varphi}_n)$, $n = 0, 1, \dots$, получим

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} (f', \tilde{\varphi}_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_0(\psi, \tilde{\varphi}_n)) \varphi_n.$$

На основании равенств (16), (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned} (\psi, \tilde{\varphi}(a_1, \dots, a_k)) &= (\psi, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) (\psi, \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{\nu-1})) \\ &= u(a_1, \dots, a_k) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{a_\nu} u(a_1, \dots, a_{\nu-1}) v(a_{\nu+1}, \dots, a_k) \\ &= -v(a_1, \dots, a_k), \end{aligned}$$

т. е. $(\psi, \tilde{\varphi}_n) = -v_n$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n + f_0 v_n) \varphi_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n + f_0 v_n) (\psi_{2n} - \psi_{2n+1}).$$

Окончательно, с учетом формул (23) и (24), находим

$$f = \psi \int_0^1 f(x) dx + f' = \sum_{n=1}^{\infty} l_n(f) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n^*) \psi_n.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что лемма 6 имеется в недавно опубликованной работе автора [24], а лемма 8 и теорема 4 анонсированы без полных доказательств в [18].

Список литературы

1. A. Haar, "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371.
2. G. Faber, "Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar", *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.*, **19** (1910), 104–112.
3. J. Schauder, "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen", *Math. Z.*, **26**:1 (1927), 47–65.
4. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
5. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
6. V. I. Filippov, P. Oswald, "Representation in L_p by series of translates and dilates of one function", *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.
7. П. Л. Ульянов, "О рядах по системе Хаара", *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.

8. R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**:2 (1952), 341–366.
9. Н. К. Бари, “О базисах в гильбертовом пространстве”, *Докл. АН СССР*, **54**:5 (1946), 383–386.
10. Н. К. Бари, “Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве”, *Ученые записки МГУ*, **148**(4) (1951), 69–107.
11. М. А. Наймарк, “Спектральные функции симметрического оператора”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **4**:3 (1940), 277–318.
12. P. G. Casazza, D. Han, D. R. Larson, “Frames for Banach spaces”, *The functional and harmonic analysis of wavelets and frames*, Proceedings of the AMS special session (San Antonio, TX, USA, 1999), *Contemp. Math.*, **247**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 149–182.
13. Б. С. Капин, Т. Ю. Куликова, “Замечание об описании фреймов общего вида”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 941–945; англ. пер.: B. S. Kashin, T. Yu. Kulikova, “Note on the description of frames of general form”, *Math. Notes*, **72**:5–6 (2002), 863–867.
14. С. Я. Новиков, “Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 893–903; англ. пер.: S. Ya. Novikov, “Bessel sequences as projections of orthogonal systems”, *Math. Notes*, **81**:5–6 (2007), 800–809.
15. W. Czaaja, “Remarks on Naimark’s duality”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**:3 (2008), 867–871.
16. K. Gröchenig, “Describing functions: atomic decompositions versus frames”, *Monatsh. Math.*, **112**:1 (1991), 1–42.
17. O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
18. П. А. Терехин, “Системы представления и проекции базисов”, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 944–947; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Representation systems and projections of bases”, *Math. Notes*, **75**:5–6 (2004), 881–884.
19. Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 1, Мир, М., 1985; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Fourier series. A modern introduction*, v. 1, Grad. Texts in Math., **64**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979.
20. П. А. Терехин, “Мультидвиг в гильбертовом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 69–81; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Multishifts in Hilbert spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:1 (2005), 57–67.
21. N. Wiener, “Tauberian theorems”, *Ann. of Math.* (2), **33**:1 (1932), 1–100.
22. А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: A. Pietsch, *Operator ideals*, Math. Monogr., **16**, VEB, Berlin, 1978.
23. A. Pelczyński, “Projections in certain Banach spaces”, *Studia Math.*, **19** (1960), 209–228.
24. П. А. Терехин, “Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза”, *Матем. сб.*, **200**:9 (2009), 127–146; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Banach frames in the affine synthesis problem”, *Sb. Math.*, **200**:9 (2009), 1383–1402.

П. А. ТЕРЕХИН (P. A. TEREKHIN)
 Саратовский государственный университет
 им. Н. Г. Чернышевского
 E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
 05.08.2008