Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, выпуск 5, 91–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/im358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 06:48:02

УДК 512.732

Д. В. Осипов

Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий

Строятся новые адиклические резольвенты квазикогерентных пучков на проективных алгебраических схемах, связанные с многомерными локальными полями. Полученные резольвенты применяются затем для построения обобщения отображения Кричевера на алгебраические многообразия любой размерности.

Это отображение сопоставляет произвольным алгебраической n -мерной коэно-маколеевой проективной целой схеме X над полем k , флагу замкнутых целых подсхем $X = Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ (так что Y_i является обильным дивизором Картье на Y_{i-1} и Y_n есть гладкая точка на всех Y_i), формальным локальным параметрам данного флага в точке Y_n , векторному расслоению $\mathcal{F}$ ранга r на X и тривиализации $\mathcal{F}$ в формальной окрестности точки Y_n каноническим образом два k -подпространства $B \subset k((z_1)) \dots ((z_n))$ и $W \subset k((z_1)) \dots ((z_n))^{\oplus r}$, где n -мерное локальное поле $k((z_1)) \dots ((z_n))$ ассоциировано с флагом $Y_0 \supset \dots \supset Y_n$. При этом построенное отображение инъективно, т.е. можно однозначно восстановить все исходные геометрические данные. Кроме того, по подпространству B явно пишется комплекс, вычисляющий когомологии пучка $\mathcal{O}_X$ на X , и по подпространству W явно пишется комплекс, вычисляющий когомологии $\mathcal{F}$ на X .

Библиография: 19 наименований.

В 70-х годах И. М. Кричевером была предложена конструкция, сопоставляющая некоторым алгебро-геометрическим данным, связанным с алгебраическими кривыми и векторными расслоениями на них, бесконечномерное подпространство (фредгольмово) в пространстве $k((z))$ степенных рядов Лорана [5]. Эта конструкция нашла многочисленные применения в теории интегрируемых систем, в частности, в теории КП- и КдФ-уравнений (см. [5], [8], [4]). Были также найдены приложения этой конструкции к теории модулей алгебраических кривых [10], [11]. Кроме того, она оказалась связанной с описанием коммутативных подколец в кольцах псевдодифференциальных операторов [16], [4]. Теперь эту конструкцию называют *соответствием Кричевера* или *отображением Кричевера* (см. [10], [16], [12], [19]). Но в этих работах существенным является то, что алгебро-геометрические данные связаны с многообразиями размерности 1 и 1-мерным локальным полем $k((z))$.

Недавно в работах [7], [18] были указаны некоторые связи между теорией КП-уравнений и n -мерными локальными полями, а также был предложен вариант отображения Кричевера для алгебро-геометрических данных, связанных с алгебраическими поверхностями, векторными расслоениями на них и 2-мерными локальными полями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-01-00170).

Один из типичных примеров многомерного локального поля – это поле итерированных рядов Лорана $k((z_1)) \dots ((z_n))$.

Такие поля появляются естественным образом как локальные объекты на многомерных алгебраических многообразиях так же, как обычные ряды Лорана возникают из точек алгебраических кривых. Рассмотрим алгебраическую схему X размерности n . Пусть $Y_0 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем на X , так что $Y_0 = X$, Y_i – подсхема коразмерности 1 в Y_{i-1} , $Y_n = x$ – замкнутая точка. Тогда существует конструкция (см. [6], [2], [17]), сопоставляющая такому флагу каноническим способом некоторое кольцо, которое в случае, если x – гладкая точка на всех Y_i , является n -мерным локальным полем. Более того, если X – алгебраическое многообразие над полем k , x – рациональная точка над полем k и зафиксированы локальные параметры $z_1, z_2, \dots, z_n \in \hat{\mathcal{O}}_{x,X}$, так что $z_{n-i+1} = 0$ – уравнение многообразия Y_i на многообразии Y_{i-1} в формальной окрестности точки x , $1 \leq i \leq n$, то полученное n -мерное локальное поле можно отождествить с $k((z_1))((z_2)) \dots ((z_n))$.

Понятие многомерного локального поля появилось в середине 70-х годов, и первоначально такие поля использовались для развития обобщения теории полей классов на схемы высшей размерности. Позднее были найдены приложения многомерных локальных полей и ко многим задачам алгебраической геометрии, где имеет смысл говорить о локальных составляющих геометрических объектов (см. [13]).

В настоящей работе, используя многомерные локальные поля, мы строим соответствие Кричевера для многообразий произвольной размерности n : это некоторое инъективное отображение из алгебро-геометрических данных, связанных с проективными алгебраическими многообразиями, полными флагами обильных дивизоров и их локальными параметрами в формальной окрестности последней точки флага, векторными расслоениями и их тривиализациями в формальной окрестности последней точки флага, в некоторые k -подпространства конечномерного векторного пространства над n -мерным локальным полем $k((z_1)) \dots ((z_n))$.

Если $n = 1$, то построенное нами отображение есть вариант соответствия Кричевера для кривых.

Если $n = 2$, то построенное нами отображение совпадает с отображением, построенным в [18].

Работа организована следующим образом.

В § 1 приводятся различные технические леммы о когомологиях когерентных пучков, проективные и инъективные пределы, нужные нам далее.

В § 2 приводится конструкция семейства функторов, связанная с квазикогерентными пучками и фиксированным флагом подмногообразий, которую можно интерпретировать как когомологическую систему коэффициентов на стандартном симплексе.

В § 3, используя конструкцию § 2, мы строим комплексы пучков абелевых групп, являющиеся ациклическими резольвентами произвольных квазикогерентных пучков на схемах.

В § 4 доказываются некоторые теоремы о пересечениях среди компонент резольвент, построенных в § 3. В некоторых случаях всю резольвенту можно восстановить из одного k -подпространства конечномерного векторного пространства над

$k((z_1)) \dots ((z_n))$. Это позволяет построить отображение Кричевера для алгебраических многообразий высших размерностей.

Отметим, что резольвентам квазикогерентных пучков на схемах, связанных с n -мерными локальными полями, посвящены работы [2], [15]. В отличие от этих работ, резольвенты, появляющиеся здесь, связаны только с одним полным флагом подмногообразий и не являются резольвентами адельного типа.

Также отметим, что, в отличие от [18], все конструкции и доказательства здесь являются внутренними, т.е. не сводятся к адельным комплексам, ассоциированным с алгебраическими многообразиями высших размерностей.

На протяжении всей работы мы будем придерживаться следующих обозначений и соглашений.

Для любого конечного множества I пусть $\sharp I$ – количество элементов в множестве I .

Если X – схема, то $\text{Sh}(X)$ – категория пучков абелевых групп на X , $\text{CS}(X)$ – категория когерентных пучков на X , $\text{QS}(X)$ – категория квазикогерентных пучков на X ; Ab – категория абелевых групп.

Если $f: Y \rightarrow X$ – морфизм двух схем, то всегда f^* – функтор обратного образа в категории пучков абелевых групп, f_* – функтор прямого образа в категории пучков абелевых групп.

Если $\mathcal{U}$ – открытое покрытие X , $\mathcal{F}$ – пучок абелевых групп на X , то $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ – когомологии Чеха относительно покрытия $\mathcal{U}$.

Пусть $Y \hookrightarrow X$ – замкнутая подсхема схемы X с пучком идеалов J . Тогда $(Y, \mathcal{O}_X/J^k)$ будет обозначать схему, у которой топологическое пространство совпадает с топологическим пространством схемы Y , а структурный пучок есть $\mathcal{O}_X/J^k$ ($\mathcal{O}_X$ – структурный пучок схемы X).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А. Н. Паршину за постоянное внимание к работе.

§ 1. Технические леммы

ЛЕММА 1. *На нётеровой схеме X любая короткая точная последовательность квазикогерентных пучков является прямым пределом коротких точных последовательностей когерентных пучков, т.е. для любого отображения $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \in \text{Mor}(\text{QS}(X))$ существуют отображения $\phi_i: \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}_i \in \text{Mor}(\text{CS}(X))$, так что $\varinjlim \phi_i = \phi$, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [15, лемма 1.2.2] и [14, лемма 2.1.5].

ЛЕММА 2. *Пусть X – нётерова схема. Пусть $\psi: \text{CS}(X) \rightarrow \text{Sh}(X)$ – точный аддитивный функтор. Тогда ψ коммутирует с прямыми пределами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству [15, лемма 1.2.3] или [14, лемма 2.2.2].

Покажем сначала, что если мы имеем прямую систему пучков

$$\{\mathcal{F}_i: i \in I, \phi_{ij}: \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_j, i \leq j\}$$

с $\varinjlim \mathcal{F}_i = 0$, то $\varinjlim \psi(\mathcal{F}_i) = 0$.

Для этого покажем, что $\varinjlim H^0(U, \psi(\mathcal{F}_i)) = 0$ для любого открытого $U \subset X$. Пусть $x \in \varinjlim H^0(U, \psi(\mathcal{F}_i))$. Пусть этот x представим $x_i \in H^0(U, \psi(\mathcal{F}_i))$. Тогда из когерентности пучка $\mathcal{F}_i$ и нётеровости схемы X имеется некоторое $j \in I$ такое, что $\phi_{ij} = 0$. Так как ψ – аддитивный функтор, то $\psi(\phi_{ij}) = 0$. Поэтому

$$H^0(U, \psi(\mathcal{F}_i)) \xrightarrow{x_i \mapsto 0} H^0(U, \psi(\phi_{ij})(\psi(\mathcal{F}_i))).$$

Теперь рассмотрим общий случай: пусть $\varinjlim \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$, $\phi_i: \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}$ – канонические морфизмы. Рассмотрим точную последовательность когерентных пучков

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \phi_i \longrightarrow \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \text{Koker } \phi_i \longrightarrow 0.$$

Так как функтор ψ точен, то точна последовательность

$$0 \longrightarrow \psi(\text{Ker } \phi_i) \longrightarrow \psi(\mathcal{F}_i) \longrightarrow \psi(\mathcal{F}) \longrightarrow \psi(\text{Koker } \phi_i) \longrightarrow 0.$$

Поскольку $\varinjlim \text{Ker } \phi_i = 0$ и $\varinjlim \text{Koker } \phi_i = 0$, то, используя случай, рассмотренный выше, получаем $\varinjlim \psi(\text{Ker } \phi_i) = 0$ и $\varinjlim \psi(\text{Koker } \phi_i) = 0$. Инъективный предел переводит точные последовательности в точную последовательность. Поэтому $\varinjlim \psi(\mathcal{F}_i) = \psi(\mathcal{F})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть X – нётерова схема. Тогда точный аддитивный функтор $\psi: \text{CS}(X) \rightarrow \text{Sh}(X)$ может быть единственным способом расширен до функтора $\psi': \text{QS}(X) \rightarrow \text{Sh}(X)$, который будет коммутировать с прямыми пределами. Полученный таким образом функтор будет точным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично [15, лемма 1.2.4].

Пусть $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{QS}(X))$. По лемме 1 $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_i$, где $\mathcal{F}_i \in \text{Ob}(\text{CS}(X))$. Определим

$$\psi'(\mathcal{F}) = \varinjlim \psi(\mathcal{F}_i).$$

При этом имеем $\psi'(\mathcal{F}) = \psi(\mathcal{F})$ для $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{CS}(X))$ по лемме 2. По лемме 1 для любого $\phi \in \text{Mor}(\text{QS}(X))$ имеем $\phi = \varinjlim \phi_i$, где $\phi_i \in \text{Mor}(\text{CS}(X))$. Положим

$$\psi'(\phi) = \varinjlim \psi(\phi_i).$$

Из леммы 2 имеем, что $\psi'(\phi) = \psi(\phi)$ для $\phi \in \text{Mor}(\text{CS}(X))$. Ясно, что это определение единственно возможное, и его корректность следует из леммы 2. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть X – нётерова схема, $i: Y \hookrightarrow X$ – замкнутая подсхема с пучком идеалов J , $j: U \hookrightarrow Y$ – открытая подсхема в Y , так что для любой точки $x \in X$ существует аффинная окрестность $V \ni x$ такая, что $V \cap U$ – аффинная подсхема. Пусть пучки $\mathcal{F}_i \in \text{Sh}(X)$, $i = 1, 2, 3$, имеют носитель на Y и пучок $\mathcal{F}_1$ квазикогерентен относительно подсхемы $(Y, \mathcal{O}_X/J^k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда из точности последовательности пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \quad (1)$$

будет следовать точность последовательности

$$0 \longrightarrow i_* j_* j^* \mathcal{F}_1 \longrightarrow i_* j_* j^* \mathcal{F}_2 \longrightarrow i_* j_* j^* \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что для любой аффинной открытой подсхемы $W \subset U$ и для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{G}$ на схеме $(U, \mathcal{O}_X/J^k|_U)$ мы имеем

$$H^1(W, \mathcal{G}) = 0. \quad (2)$$

Действительно, если пучок $\mathcal{G}$ квазикогерентен относительно подсхемы $U = (U, \mathcal{O}_X/J|_U)$, то равенство (2) следует из аффинности схемы W . Если же пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен относительно подсхемы $(U, \mathcal{O}_X/J^k|_U)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, то рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow J\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/J\mathcal{F} \longrightarrow 0. \quad (3)$$

Пучки $J\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}/J\mathcal{F}$ квазикогерентны уже относительно подсхемы $(U, \mathcal{O}_X/J^{k-1}|_U)$. Поэтому можно применить индукцию, из которой следует, что

$$H^1(W, J\mathcal{F}) = 0, \quad H^1(W, \mathcal{F}/J\mathcal{F}) = 0.$$

Отсюда и из длинной точной когомологической последовательности, ассоциированной с последовательностью (3), получаем равенство (2).

Возвратимся к последовательности (1). Имеем точность следующей последовательности:

$$0 \longrightarrow j^* \mathcal{F}_1 \longrightarrow j^* \mathcal{F}_2 \longrightarrow j^* \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0.$$

Применяя функтор j_* , получаем

$$0 \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}_1 \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}_2 \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}_3 \longrightarrow R^1 j_*(j^* \mathcal{F}_1).$$

Покажем, что $R^1 j_*(j^* \mathcal{F}_1) = 0$. Так как пучок $j^* \mathcal{F}_1$ квазикогерентен относительно подсхемы $(U, \mathcal{O}_X/J^k|_U)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то пучок $R^1 j_*(j^* \mathcal{F}_1)$ квазикогерентен на схеме $(Y, \mathcal{O}_X/J^k)$ относительно того же $k \in \mathbb{N}$. Поэтому достаточно показать для аффинных открытых окрестностей V из условия леммы, что

$$H^0(V \cap Y, R^1 j_*(j^* \mathcal{F}_1)) = 0. \quad (4)$$

Но $H^0(V \cap Y, R^1 j_* (j^* \mathcal{F}_1)) = H^1(V \cap U, j^* \mathcal{F}_1)$, и равенство (4) следует из равенства (2). Поэтому мы имеем точность последовательности

$$0 \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}_1 \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}_2 \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0.$$

Так как $i: Y \hookrightarrow X$ – замкнутое вложение, то i_* – точный функтор. Поэтому точна последовательность

$$0 \longrightarrow i_* j_* j^* \mathcal{F}_1 \longrightarrow i_* j_* j^* \mathcal{F}_2 \longrightarrow i_* j_* j^* \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Пусть X – нётерова схема. Предположим, что задан точный и аддитивный функтор $\Phi: \text{QS}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X)$. Пусть $i: Y \hookrightarrow X$ – замкнутая подсхема схемы X , задаваемая пучком идеалов J . Пусть $j: U \hookrightarrow Y$ – открытая подсхема в Y . Определим тогда функтор $C_U \Phi: \text{CS}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X)$ как следующий: для любого пучка $\mathcal{F} \in \text{CS}(X)$ положим

$$C_U \Phi(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \Phi(i_* j_* j^* (\mathcal{F} / J^k \mathcal{F})).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно понять, что если пучок $\mathcal{F}$ когерентен на X , то для любого $k \in \mathbb{N}$ пучок $i_* j_* j^* (\mathcal{F} / J^k \mathcal{F})$ квазикогерентен на X . Действительно, пучок $\mathcal{F} / J^k \mathcal{F}$ когерентен на схеме X . Более того, можно считать, что пучок $\mathcal{F} / J^k \mathcal{F}$ когерентен на замкнутой подсхеме $(Y, \mathcal{O}_X / J^k)$ схемы X . Тогда $j^* (\mathcal{F} / J^k \mathcal{F})$ – когерентный пучок на схеме $(U, \mathcal{O}_X / J^k|_U)$, $j_* j^* (\mathcal{F} / J^k \mathcal{F})$ – квазикогерентный пучок на схеме $(Y, \mathcal{O}_X / J^k)$ и $i_* j_* j^* (\mathcal{F} / J^k \mathcal{F})$ – квазикогерентный пучок на X , так как i_* совпадает с функтором прямого образа из подсхемы $(Y, \mathcal{O}_X / J^k)$.

ЛЕММА 5. Пусть X – нётерова схема, $\Phi: \text{QS}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X)$ – точный аддитивный функтор, $i: Y \hookrightarrow X$ – замкнутая подсхема схемы X с пучком идеалов J . Пусть $j: U \hookrightarrow Y$ – открытая подсхема в Y . Кроме того, потребуем также следующее: для любой точки $x \in X$, для любого открытого $W \subset X$, $x \in W$, существует аффинная открытая подсхема $V \subset W$, $x \in V$, так что:

- 1) $V \cap U$ – аффинная подсхема;
- 2) для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X

$$H^1(V, \Phi(\mathcal{F})) = 0. \quad (5)$$

Тогда $C_U \Phi: \text{CS}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X)$ – точный и аддитивный функтор.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие 1) леммы 5 выполнено, например, в следующих случаях:

- а) X – отделимая схема, U – аффинная подсхема (так как на отделимой схеме пересечение двух аффинных открытых подсхем аффинно);
- б) X – отделимая схема и U является дополнением в Y к некоторому дивизору Картье в Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Аддитивность функтора $C_U\Phi$ ясна из конструкции. Покажем точность. Пусть

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

– точная короткая последовательность когерентных пучков на X .

Для любой точки $x \in X$, для любого открытого $W \subset X$ возьмем открытые аффинные подсхемы $V \subset W$, $V \ni x$, с условиями 1) и 2) из формулировки леммы. Тогда для доказательства точности функтора $C_U\Phi$ достаточно показать точность следующей последовательности:

$$0 \longrightarrow H^0(V, C_U\Phi(\mathcal{F}_1)) \longrightarrow H^0(V, C_U\Phi(\mathcal{F}_2)) \longrightarrow H^0(V, C_U\Phi(\mathcal{F}_3)) \longrightarrow 0. \quad (6)$$

С другой стороны, точна следующая последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1/J^k\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2/J^k\mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3/J^k\mathcal{F}_3 \longrightarrow 0.$$

Так как пучки в последней последовательности когерентны на схеме $(Y, \mathcal{O}_X/J^k)$, то по лемме 4 точна последовательность

$$0 \longrightarrow i_*j_*j^*(\mathcal{F}_1/J^k\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1) \longrightarrow i_*j_*j^*(\mathcal{F}_2/J^k\mathcal{F}_2) \longrightarrow i_*j_*j^*(\mathcal{F}_3/J^k\mathcal{F}_3) \longrightarrow 0.$$

Применяя точный функтор Φ к последней последовательности, получаем точность следующей последовательности из $\text{Sh}(X)$:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Phi(i_*j_*j^*(\mathcal{F}_1/J^k\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1)) &\longrightarrow \Phi(i_*j_*j^*(\mathcal{F}_2/J^k\mathcal{F}_2)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \Phi(i_*j_*j^*(\mathcal{F}_3/J^k\mathcal{F}_3)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь из (5) получаем точность следующей последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(V, \Phi(i_*j_*j^*(\mathcal{F}_1/J^k\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1))) &\rightarrow H^0(V, \Phi(i_*j_*j^*(\mathcal{F}_2/J^k\mathcal{F}_2))) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(V, \Phi(i_*j_*j^*(\mathcal{F}_3/J^k\mathcal{F}_3))) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Также для любых натуральных $k_1 \leq k_2$ имеем точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow J^{k_1}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1/J^{k_2}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1/J^{k_2}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1/J^{k_1}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1 \longrightarrow 0.$$

Отсюда, как и выше, пучок $J^{k_1}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1/J^{k_2}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1$ когерентен на схеме $(Y, \mathcal{O}_X/J^{k_2})$. Поэтому по лемме 4 точна последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow i_*j_*j^*(J^{k_1}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1/J^{k_2}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1) &\longrightarrow i_*j_*j^*(\mathcal{F}_1/J^{k_2}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1) \longrightarrow \\ &\longrightarrow i_*j_*j^*(\mathcal{F}_1/J^{k_1}\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Из точности функтора Φ имеем точность последовательности

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Phi(i_* j_* j^*(J^{k_1} \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1 / J^{k_2} \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1)) &\longrightarrow \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^{k_2} \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^{k_1} \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

И из (5) получаем сюръективность следующего отображения:

$$\Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^{k_2} \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1)) \longrightarrow \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^{k_1} \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1)). \quad (8)$$

Теперь, переходя к проективному пределу по всем $k \in \mathbb{N}$ и используя сюръективность отображения (8), откуда следует условие Миттаг-Лефлера (см. [9, гл. II, § 9]), получаем точность последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H^0(V, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1))) &\rightarrow \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H^0(V, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_2 / J^k \mathcal{F}_2))) \rightarrow \\ &\rightarrow \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H^0(V, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_3 / J^k \mathcal{F}_3))) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H^0(V, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1))) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow H^0(V, C_U \Phi(\mathcal{F}_2)) \longrightarrow H^0(V, C_U \Phi(\mathcal{F}_3)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы показать точность последовательности (6), осталось показать, что

$$H^0(V, C_U \Phi(\mathcal{F}_1)) = \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H^0(V, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1))). \quad (9)$$

Так как схема X нётерова, то согласно лемме Артина–Риса (см. [1, следствие 10.10]) существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k \leq l$

$$J^k \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1 = J^{k-l} (J^l \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1). \quad (10)$$

Из (10) получаем, что отображения

$$\mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 / J^{k-l} \mathcal{F}_1$$

корректно определены и сюръективны. Аналогично получаем то же самое для следующих отображений:

$$\mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1.$$

Далее, применяя последовательно функторы j^* , j_* , i_* , Φ и $H^0(V, \cdot)$ и используя лемму 4 и условие (5), получаем конфинальность проективных систем

$$H^0(V, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_1))) \quad \text{и} \quad H^0(V, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}_1 / J^k \mathcal{F}_1))).$$

Поэтому (9) выполняется и лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть X – нётерова схема, $\Phi: \text{QS}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X)$ – точный аддитивный функтор, $i: Y \hookrightarrow X$ – замкнутая подсхема схемы X с пучком идеалов J . Пусть $j: U \hookrightarrow Y$ – открытая подсхема в Y такая, что для любой точки $x \in X$ существует аффинная окрестность $V \ni x$, так что $V \cap U$ – аффинная подсхема. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ – аффинное открытое покрытие схемы X . Предположим, что для любого $k \geq 1$, для любого когерентного пучка $\mathcal{G}$ на схеме X верно:

$$\check{H}^m(\mathcal{U}, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{G}/J^k \mathcal{G}))) = 0 \quad \text{для любого } m \geq 1, \quad (11)$$

$$H^1\left(\bigcap_{i \in I_0} U_i, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{G}/J^k \mathcal{G}))\right) = 0 \quad \text{для любого подмножества } I_0 \subset I, \quad (12)$$

$$H^1(X, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{G}/J^k \mathcal{G}))) = 0. \quad (13)$$

Тогда $\check{H}^m(\mathcal{U}, C_U \Phi(\mathcal{F})) = 0$ для любого $m \geq 1$ и любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ – любой когерентный пучок на X . Пусть

$$\begin{aligned} p_n: \prod_{\substack{I_0 \subset I \\ \#I_0 = n+1}} H^0\left(\bigcap_{i \in I_0} U_i, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^k \mathcal{F}))\right) \longrightarrow \\ \longrightarrow \prod_{\substack{I_0 \subset I \\ \#I_0 = n+2}} H^0\left(\bigcap_{i \in I_0} U_i, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^k \mathcal{F}))\right) \end{aligned}$$

есть отображение, возникающее из комплекса Чеха по отношению к покрытию $\mathcal{U}$. Пусть $H_k^n \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } p_n$. При этом

$$H_k^0 = H^0(X, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^k \mathcal{F}))).$$

Из (11) мы сразу же получаем, что для любого $n \geq 1$

$$H_k^n = \text{Im } p_{n-1}.$$

Поэтому для любого $m \geq 0$ точна последовательность

$$0 \longrightarrow H_k^n \longrightarrow \prod_{\substack{I_0 \subset I \\ \#I_0 = n+1}} H^0\left(\bigcap_{i \in I_0} U_i, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^k \mathcal{F}))\right) \xrightarrow{p_n} H_k^{n+1} \longrightarrow 0. \quad (14)$$

Для любых натуральных $k_1 \leq k_2$ имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow J^{k_1} \mathcal{F}/J^{k_2} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/J^{k_2} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/J^{k_1} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Так как пучки из этой последовательности когерентны на схеме $(Y, \mathcal{O}_X/J^{k_2})$, то по лемме 4 точна следующая последовательность:

$$0 \longrightarrow i_* j_* j^*(J^{k_1} \mathcal{F}/J^{k_2} \mathcal{F}) \longrightarrow i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k_2} \mathcal{F}) \longrightarrow i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k_1} \mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

Далее, из точности функтора Φ и условия (13) мы получаем сюръективность следующих отображений для любых натуральных $k_1 \leq k_2$:

$$H^0(X, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k_2} \mathcal{F}))) \longrightarrow H^0(X, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k_1} \mathcal{F}))). \quad (15)$$

Учитывая условие (12), получаем также, что для любых $k_1 \leq k_2$ и любого $I_0 \subset I$ сюръективны отображения

$$H^0\left(\bigcap_{i \in I_0} U_i, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k_2} \mathcal{F}))\right) \longrightarrow H^0\left(\bigcap_{i \in I_0} U_i, \Phi(i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k_1} \mathcal{F}))\right). \quad (16)$$

Докажем, что для любого $n \geq 0$

$$H_{k_2}^n \longrightarrow H_{k_1}^n \quad (17)$$

— сюръективное отображение при любых $k_1 \leq k_2$. В случае $n = 0$ это есть утверждение (15). Для произвольного n это следует из сюръективности p_{n-1} в точной последовательности (14), а также из сюръективности отображения (16).

Переходя теперь к проективному пределу в (14), получим для любого $n \geq 0$ из сюръективности (17), т.е. выполнения условия Миттаг-Лефлера для проективных систем H_k^n , точность следующей последовательности:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_k H_k^n \longrightarrow \prod_{\substack{I_0 \in I \\ \sharp I_0 = n+1}} H^0\left(\bigcap_{i \in I_0} U_i, C_U \Phi(\mathcal{F})\right) \longrightarrow \varprojlim_k H_k^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Отсюда сразу следует, что $\check{H}^m(\mathcal{U}, C_U \Phi(\mathcal{F})) = 0$ для любого $m \geq 1$. Лемма доказана.

Далее нам будет полезен следующий вариант леммы А. Картана, связывающей когомологии Чеха с обычными когомологиями пучков. Для пучка $\mathcal{A}$ на топологическом пространстве V через $\check{H}^q(V, \mathcal{A})$ обозначается инъективный предел когомологий Чеха по всем открытым покрытиям пространства V .

ЛЕММА 7. Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{A}$ — пучок на X . Предположим, что можно покрыть X семейством $\mathbf{U}$ открытых множеств, обладающим следующими свойствами:

- 1) если $\mathbf{U}$ содержит U' и U'' , то оно содержит $U' \cap U''$;
- 2) $\mathbf{U}$ содержит произвольно малые открытые множества;
- 3) $\check{H}^q(U, \mathcal{A}) = 0$ для всех $q \geq 1$ и $U \in \mathbf{U}$.

В этих условиях мы имеем изоморфизм $\check{H}^q(X, \mathcal{A}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3, гл. 2, теорема 5.9.2].

ЛЕММА 8. Пусть X – нётерова отделимая схема, $j: U \hookrightarrow X$ – открытая аффинная подсхема. Тогда для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на U верно следующее:

$$H^0(X, j_*\mathcal{F}) = H^0(U, \mathcal{F}), \quad (18)$$

$$H^i(X, j_*\mathcal{F}) = 0, \quad \text{если } i > 0. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (18) следует из построения функтора j_* .

Докажем (19). Вложим квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ в вялый квазикогерентный пучок $\mathcal{G}$ на U (это всегда можно сделать [9, гл. III, § 3]):

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Теперь точна последовательность

$$0 \longrightarrow j_*\mathcal{F} \longrightarrow j_*\mathcal{G} \longrightarrow j_*(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \longrightarrow 0. \quad (20)$$

(Действительно, $R^1j_*\mathcal{F} = 0$, так как $R^1j_*\mathcal{F}$ – квазикогерентный пучок и для любого аффинного $V \subset X$ верно $H^0(V, R^1j_*\mathcal{F}) = H^1(V \cap U, \mathcal{F}) = 0$, поскольку $V \cap U$ – аффинная схема в силу отделимости X .) Кроме того, нетрудно понять, что пучок $j_*\mathcal{G}$ – тоже вялый пучок. Поэтому

$$H^i(X, j_*\mathcal{G}) = 0 \quad \text{для любого } i > 0. \quad (21)$$

Кроме того, отображение

$$H^0(X, j_*\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X, j_*(\mathcal{G}/\mathcal{F}))$$

сюръективно, так как $H^0(X, j_*\mathcal{G}) = H^0(U, \mathcal{G})$, $H^0(X, j_*(\mathcal{G}/\mathcal{F})) = H^0(U, \mathcal{G}/\mathcal{F})$. И из аффинности U следует, что $H^1(U, \mathcal{F}) = 0$, поэтому сюръективно отображение

$$H^0(U, \mathcal{G}) \longrightarrow H^0(U, \mathcal{G}/\mathcal{F}).$$

Отсюда и из (21) получаем

$$H^1(X, j_*\mathcal{F}) = 0.$$

Далее, если $i > 1$, то из (21) и из длинной точной когомологической последовательности, ассоциированной с (20), следует

$$H^i(X, j_*\mathcal{F}) = H^{i-1}(X, j_*(\mathcal{G}/\mathcal{F})).$$

Но пучок $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ квазикогерентен на U . Отсюда по индукции можно считать, что

$$H^{i-1}(X, j_*(\mathcal{G}/\mathcal{F})) = 0.$$

Поэтому $H^i(X, j_*\mathcal{F}) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть X – нётерова схема. Пусть $Y \hookrightarrow X$ – замкнутая подсхема, задаваемая пучком идеалов J , и $j: U \hookrightarrow X$ – открытая подсхема, являющаяся дополнением к подсхеме Y в X . Пусть пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен на X , и рассмотрим точную последовательность квазикогерентных пучков на X

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

индуцированную естественным отображением $\mathcal{F} \longrightarrow j_* j^* \mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{H} = \varinjlim_i \mathcal{H}_i$ и $\mathcal{G} = \varinjlim_i \mathcal{G}_i$, $i \in I$, где пучки $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{G}_i$ когерентны на схеме X для любого $i \in I$.

Тогда для любого $i \in I$ существует $l(i) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$J^{l(i)} \cdot \mathcal{H}_i = 0 \quad \text{и} \quad J^{l(i)} \cdot \mathcal{G}_i = 0. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow J^m \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/J^m \longrightarrow 0$$

получаем следующую последовательность квазикогерентных пучков на X :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X/J^m, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathcal{H}om_X(J^m, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_X/J^m, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

После перехода к инъективному пределу по m получим

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \varinjlim_m \mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X/J^m, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \varinjlim_m \mathcal{H}om_X(J^m, \mathcal{F}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \varinjlim_m \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_X/J^m, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Согласно [9, гл. III, упр. 3.7(a)] мы имеем

$$\varinjlim_m \mathcal{H}om_X(J^m, \mathcal{F}) = j_* j^* \mathcal{F}.$$

Теперь (22) следует из того, что

$$\mathcal{H} = \varinjlim_m \mathcal{H}om_X(\mathcal{O}_X/J^m, \mathcal{F}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G} \hookrightarrow \varinjlim_m \mathcal{E}xt_X^1(\mathcal{O}_X/J^m, \mathcal{F}).$$

Лемма доказана.

§ 2. Конструкция и ее первоначальные свойства

Пусть X – нётерова отделимая схема. Рассмотрим флаг замкнутых подсхем

$$X \supset Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_n$$

в схеме X . Пусть J_j – пучок идеалов подсхемы Y_j соответственно, $0 \leq j \leq n$. Пусть i_j – вложение подсхемы $Y_j \hookrightarrow X$. Пусть U_i – открытая подсхема в Y_i , являющаяся дополнением к замкнутой подсхеме Y_{i+1} , $0 \leq i \leq n-1$. Пусть $j_i: U_i \hookrightarrow Y_i$ – открытое вложение подсхемы U_i в схему Y_i , $0 \leq i \leq n-1$. Положим также по определению, что $U_n = Y_n$ и j_n – тождественный морфизм из U_n в Y_n .

Потребуем, чтобы для любой точки $x \in X$ существовала открытая аффинная окрестность $U \ni x$ такая, что $U \cap U_i$ – аффинная схема для любого $0 \leq i \leq n$. Далее флаг подсхем $\{Y_i, 0 \leq i \leq n\}$ с таким условием будем называть флагом с *локально аффинными дополнениями*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Последнее условие (локальная аффинность дополнений) выполняется, например, если:

- 1) Y_{i+1} является дивизором Картье на схеме Y_i для любого $0 \leq i \leq n-1$;
- 2) U_i – аффинная схема для любого $0 \leq i \leq n-1$ (на отделимой схеме пересечение двух открытых аффинных подсхем аффинно).

Рассмотрим n -мерный симплекс и связанное с ним стандартное симплициальное множество (без вырождений). Более точно, рассмотрим множество

$$(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\})$$

(все целые числа от 0 до n). Тогда симплициальное множество $S = \{S_k\}$ есть:

- 1) $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\eta \in \{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}\}$;
- 2) $S_k \stackrel{\text{def}}{=} \{(\eta_0, \dots, \eta_k), \text{ где } \eta_l \in S_0 \text{ и } \eta_{l-1} < \eta_l\}$.

Граничное отображение ∂_i , $0 < i < k$, задается удалением i -ой компоненты вектора $(\eta_0, \dots, \eta_k)$ (это взятие i -ой грани у $(\eta_0, \dots, \eta_k)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(\eta_0, \dots, \eta_k) \in S_k$ – любое. Определим функтор

$$V_{(\eta_0, \dots, \eta_k)}: \text{QS}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X),$$

как единственно определяемый следующими индуктивными условиями:

- 1) $V_{(\eta_0, \dots, \eta_k)}$ коммутирует с инъективными пределами;
- 2) если $\mathcal{F}$ – когерентный пучок и $\eta \in S_0$, то

$$V_{\eta}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} (i_{\eta})_*(j_{\eta})^*(j_{\eta})^*(\mathcal{F}/J_{\eta}^m \mathcal{F});$$

- 3) если $\mathcal{F}$ – когерентный пучок и $(\eta_0, \dots, \eta_k) \in S_k$, $k \geq 1$, то

$$V_{(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} V_{(\eta_1, \dots, \eta_k)}((i_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})).$$

Далее, когда будут появляться сразу несколько схем и флагов замкнутых подсхем и будет возможна путаница в обозначениях, мы будем иногда употреблять эквивалентное обозначение для $V_{(\eta_0, \dots, \eta_k)}(\mathcal{F})$, где явно выписаны замкнутые подсхемы:

$$V_{(\eta_0, \dots, \eta_k)}(\mathcal{F}) = V_{(Y_{\eta_0}, \dots, Y_{\eta_k})}(X, \mathcal{F}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\sigma = (\eta_0, \dots, \eta_k) \in S_k$. Тогда:

- 1) функтор $V_\sigma: \text{QS}(X) \longrightarrow \text{Sh}(X)$ определен корректно;
- 2) функтор V_σ точен и аддитивен;
- 3) функтор V_σ локален по X , т.е. для любого открытого $U \subset X$, для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X имеем

$$V_{(Y_{\eta_0}, \dots, Y_{\eta_k})}(X, \mathcal{F})|_U = V_{(Y_{\eta_0} \cap U, \dots, Y_{\eta_k} \cap U)}(U, \mathcal{F}|_U)$$

(здесь если $Y_j \cap U = \emptyset$, то $Y_j \cap U$ – пустая подсхема в U , определяемая пучком идеалов $\mathcal{O}_U$);

- 4) для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на схеме X пучок $V_{(\eta_0, \dots, \eta_k)}(\mathcal{F})$ – пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей с носителем на подсхеме Y_{η_k} (обычно этот пучок не квазикогерентен);
- 5) для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X

$$V_\sigma(\mathcal{F}) = V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F};$$

- 6) если все U_i аффинны, $0 \leq i \leq n$, то для любого аффинного покрытия $\mathcal{U}$ схемы X , для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X , для любого $m \geq 1$ имеем

$$\check{H}^m(\mathcal{U}, V_\sigma(\mathcal{F})) = 0;$$

- 7) если все U_i аффинны, $0 \leq i \leq n$, то для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X , для любого $m \geq 1$

$$H^m(X, V_\sigma(\mathcal{F})) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Корректность определения V_σ доказывается по индукции с использованием лемм 1–3, лемм 5–7. Проверим основание индукции для лемм 5 и 6 (когда функтор $\Phi = \text{id}$).

- а) Для любой аффинной схемы V и любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на V

$$H^1(V, \mathcal{F}) = 0.$$

- б) Покажем, что если $i: Y \hookrightarrow X$ – замкнутая подсхема с пучком идеалов J , $j: U \hookrightarrow Y$ – открытое вложение аффинной схемы U в Y , то для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X , для любого $k \geq 1$, для любого аффинного открытого покрытия $\mathcal{U}$ схемы X , для любого $m \geq 1$ имеем

$$\check{H}^m(\mathcal{U}, i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^k \mathcal{F})) = 0.$$

Так как покрытие $\mathcal{U}$ аффинно, то оно ациклично для квазикогерентных пучков, и, следовательно, когомологии Чеха относительно этого покрытия совпадают с

обычными когомологиями квазикогерентных пучков (см. [9, гл. 3, теорема 4.5]), поэтому достаточно доказать, что для любых целых $k \geq 1$

$$H^m(X, i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^k \mathcal{F})) = 0. \quad (23)$$

Если $k = 1$, то пучок $\mathcal{F}/J\mathcal{F}$ квазикогерентен относительно подсхемы Y и

$$H^m(X, i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J\mathcal{F})) = H^m(Y, j_*(j^*(\mathcal{F}/J\mathcal{F}))) = 0,$$

где последнее равенство следует из леммы 8.

Если $k > 1$, то по лемме 4 точна последовательность

$$0 \longrightarrow i_* j_* j^*(J^{k-1} \mathcal{F}/J^k \mathcal{F}) \longrightarrow i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^k \mathcal{F}) \longrightarrow i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k-1} \mathcal{F}) \longrightarrow 0. \quad (24)$$

При этом пучки $J^{k-1} \mathcal{F}/J^k \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}/J^{k-1} \mathcal{F}$ квазикогерентны относительно подсхемы $(Y, \mathcal{O}_X/J^{k-1})$. Поэтому можно по индукции считать, что

$$H^m(X, i_* j_* j^*(J^{k-1} \mathcal{F}/J^k \mathcal{F})) = 0 \quad \text{и} \quad H^m(X, i_* j_* j^*(\mathcal{F}/J^{k-1} \mathcal{F})) = 0.$$

Отсюда и из (24) следует (23).

2) Доказательство этого пункта проводится аналогично и параллельно п. 1) с использованием тех же лемм.

3) Локальность следует по индукции из способа конструкции функтора $V_{(\eta_0, \dots, \eta_k)}$.

4) Этот пункт следует по индукции из конструкции.

5) Мы имеем естественное отображение $\mathcal{F} \longrightarrow V_\sigma(\mathcal{F})$, которое индуцирует отображение

$$V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} V_\sigma(\mathcal{F}) \longrightarrow V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{V_\sigma(\mathcal{O}_X)} V_\sigma(\mathcal{F}) = V_\sigma(\mathcal{F}). \quad (25)$$

Покажем, что (25) устанавливает изоморфизм между $V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ и $V_\sigma(\mathcal{F})$. Так как функтор V_σ и тензорные произведения коммутируют с инъективными пределами, то можно предполагать, что $\mathcal{F}$ – когерентный пучок. Вследствие п. 3) этого предложения ограничимся локальной ситуацией, т.е. будем считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ для некоторого конечно порожденного A -модуля M . Тогда для некоторого $r \in \mathbb{N}$ существует точная последовательность пучков вида

$$0 \longrightarrow \widetilde{N} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus r} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0,$$

где N – некоторый конечно порожденный A -модуль. Отсюда получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} & \longrightarrow & V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\oplus r} & \longrightarrow & V_\sigma(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{M} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \\ 0 \longrightarrow & V_\sigma(\widetilde{N}) & \longrightarrow & V_\sigma(\mathcal{O}_X^{\oplus r}) & \xrightarrow{\delta} & V_\sigma(\widetilde{M}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

где нижняя строчка точна в силу п. 2). Кроме того, ясно, что β – изоморфизм. Поэтому из сюръективности δ следует сюръективность α . Так как $\tilde{N}$ – когерентный пучок, то отображение γ тоже сюръективно. Отсюда, из точности нижней строки и из несложного диаграммного поиска следует инъективность α .

6) Доказательство проводится точно так же, как в п. 1), с использованием тех же лемм.

7) Этот пункт следует из предыдущего пункта этого предложения и леммы 7. (Так как у любой точки можно выбрать как угодно малую аффинную окрестность, которая имеет аффинные пересечения со всеми U_i , то для этой аффинной окрестности будет выполняться п. 6).)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Пусть X – нётерова отделимая схема. Пусть заданы два флага замкнутых подсхем в X :

$$Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_n \quad \text{и} \quad Y'_0 \supset Y'_1 \supset \cdots \supset Y'_n$$

с пучками идеалов J_i и J'_i соответственно ($0 \leq i \leq n$), так что для любого $0 \leq i \leq n$ существуют целые $l_i \geq 1$ и $l'_i \geq 1$ такие, что:

$$J_i^{l_i} \subset J'_i \quad \text{и} \quad (J'_i)^{l'_i} \subset J_i. \quad (26)$$

Тогда функторы $V_{(Y_0, \dots, Y_n)}(X, \cdot)$ и $V_{(Y'_0, \dots, Y'_n)}(X, \cdot)$ совпадают для любых $(\eta_0, \dots, \eta_k) \in S_k$.

2) Рассмотрим флаг замкнутых подсхем

$$X \supset Z \supset Y_0 \supset \cdots \supset Y_n$$

на нётеровой отделимой схеме X . Пусть $i: Z \hookrightarrow X$ – замкнутое вложение.

Тогда для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на схеме Z верно следующее:

$$i_*(V_{(Y_0, \dots, Y_n)}(Z, \mathcal{F})) = V_{(Y_0, \dots, Y_n)}(X, i_*\mathcal{F}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (26) эквивалентно тому, что топологические пространства подсхем Y_i и Y'_i одни и те же для всех $0 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это достаточно доказать только для случая, когда $J_i = J'_i$ при всех $i \neq j$, $0 \leq i \leq n$, где j – некоторое фиксированное число, $0 \leq j \leq n$. В силу индуктивности определения функтора $V_{(Y_0, \dots, Y_n)}(X, \cdot)$ (и $V_{(Y'_0, \dots, Y'_n)}(X, \cdot)$) достаточно также ограничиться случаем, когда $j = 0$. Этот случай следует из конфинантности проективных систем $\mathcal{F}/J_j^k$ и $\mathcal{F}/(J'_j)^k$ (из условия (26)).

2) Этот пункт сразу следует из конструкции и того, что носители всех возникающих в процессе индукции пучков будут находиться на подсхеме Z .

§ 3. Комплексы и их точность

Рассмотрим стандартный n -симплекс без вырождений $S = \{S_k, 0 \leq k \leq n\}$. Если $\sigma = (\eta_0, \dots, \eta_k) \in S_k$, то $\partial_i(\sigma)$ — i -я грань σ , $0 \leq i \leq k$. Тогда определим морфизм функторов $d_i(\sigma): V_{\partial_i(\sigma)} \longrightarrow V_\sigma$ как морфизм, коммутирующий с инъективными пределами и на когерентных пучках являющийся отображением

$$V_{\partial_i(\sigma)}(\mathcal{F}) \longrightarrow V_\sigma(\mathcal{F}), \quad (27)$$

определяемым следующими правилами:

а) если $i = 0$, то (27) получается применением к отображению

$$\mathcal{F} \longrightarrow (i_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})$$

функтора $V_{\partial_0(\sigma)}$ и переходом к проективному пределу по m ;

б) если $i = 1$, $k = 1$, то имеем естественное отображение

$$(i_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \rightarrow V_{(\eta_1)}((i_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}));$$

теперь после перехода к проективному пределу по m получаем отображение (27) в этом случае;

в) если $i \neq 0$, $k > 1$, то, применяя индукцию по k , можно считать, что мы имеем отображение

$$V_{\partial_{i-1}(\partial_0(\sigma))}((i_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})) \rightarrow V_{\partial_0(\sigma)}((i_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})),$$

и переход к проективному пределу по m дает отображение (27) и в этом случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любых $1 \leq k \leq n$, $0 \leq i \leq k$ пусть

$$d_i^k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_k} d_i(\sigma): \bigoplus_{\sigma \in S_{k-1}} V_\sigma \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in S_k} V_\sigma.$$

Определим отображение

$$d_0^0: \text{id} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in S_0} V_\sigma$$

как прямую сумму естественных отображений $\mathcal{F} \longrightarrow V_\sigma(\mathcal{F})$. (Здесь id — функтор естественного вложения $\text{QS}(X)$ в $\text{Sh}(X)$, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X , $\sigma \in S_0$.)

Тогда для всех $0 \leq i < j \leq k \leq n-1$ верно

$$d_j^{k+1} d_i^k = d_i^{k+1} d_{j-1}^k. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится по индукции несложным разбором случаев с использованием индуктивности определения. Достаточно разобратить случаи только для небольших i и k (см., например, разбор похожей ситуации в [15, § 2.4] или [14]).

Пусть

$$d^m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \leq i \leq m} (-1)^i d_i^m.$$

Тогда, используя предложение 3, можем стандартным образом построить комплекс пучков $V(\mathcal{F})$ по любому квазикогерентному пучку $\mathcal{F}$ на X :

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in S_{m-1}} V_{\sigma}(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^m} \bigoplus_{\sigma \in S_m} V_{\sigma}(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots,$$

где то, что $d^{m+1}d^m = 0$, следует из (28) несложными прямыми вычислениями.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – нётерова отделимая схема, $Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем с локально аффинными дополнениями. Предположим, что $Y_0 = X$. Тогда точен комплекс пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{d^0} V(\mathcal{F}) \longrightarrow 0. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть только случай, когда пучок $\mathcal{F}$ когерентен. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow (j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0. \quad (30)$$

Здесь $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ – ядро и коядро естественного отображения пучков $\mathcal{F} \rightarrow (j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F}$. Из точности функторов V_{σ} (для любого σ) мы получаем следующую точную последовательность комплексов пучков:

$$0 \longrightarrow V(\mathcal{H}) \longrightarrow V(\mathcal{F}) \longrightarrow V((j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F}) \longrightarrow V(\mathcal{G}) \longrightarrow 0. \quad (31)$$

По лемме 9 носители пучков $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ находятся на Y_1 , поэтому в случае $\eta_0 = 0$ $V_{(Y_{\eta_0}, \dots, Y_{\eta_k})}(X, \mathcal{H}) = 0$ и $V_{(Y_{\eta_0}, \dots, Y_{\eta_k})}(X, \mathcal{G}) = 0$. Поэтому, используя это, а также лемму 9 (раскладывающую пучки $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ в инъективные пределы пучков, когерентных на подсхемах с топологическим пространством Y_1), предложение 2, перестановочность функторов V_{σ} с инъективными пределами, мы можем применить индукцию по длине флага и считать, что комплексы

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{d^0} V(\mathcal{H}) \longrightarrow 0, \quad (32)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{d^0} V(\mathcal{G}) \longrightarrow 0 \quad (33)$$

уже точны. Нетрудно понять, что если $\eta_0 = 0$ для любого $\sigma = (\eta_0, \dots, \eta_k) \in S_k$, то $V_{\sigma}((j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F}) = V_{\sigma}(\mathcal{F})$, а если $\eta_0 \neq 0$, то $V_{\sigma}((j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F}) = V_{\sigma'}(\mathcal{F})$, где

$\sigma' = (0, \eta_0, \dots, \eta_k) \in S_{k+1}$. Отсюда в степенях k и $k+1$ комплекса $V((j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F})$ присутствуют одинаковые компоненты $V_{\sigma'}(\mathcal{F})$. Поэтому, отщепляя последовательно начиная со старших степеней тривиальные комплексы

$$0 \longrightarrow V_{\sigma}((j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F}) \longrightarrow V_{\sigma'}((j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F}) \longrightarrow 0,$$

получаем точность комплекса

$$0 \longrightarrow (j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F} \xrightarrow{d^0} V((j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F}) \longrightarrow 0. \quad (34)$$

Теперь так как комплексы (32)–(34) точны, то из точности (31) и (30) получаем точность комплекса (29). Теорема доказана.

Для любого $\sigma \in S_k$ определим

$$A_{\sigma}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(X, V_{\sigma}(\mathcal{F})).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X – нётерова отделимая схема, $Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем, так что все U_i аффинны, $0 \leq i \leq n$. Пусть $\sigma \in S_k$ – любое. Тогда:

- 1) A_{σ} – точный и аддитивный функтор: $\text{QS}(X) \longrightarrow \text{Ab}$;
- 2) если $X = \text{Spec } A$, M – некоторый A -модуль, то

$$A_{\sigma}(\widetilde{M}) = A_{\sigma}(\mathcal{O}_X) \otimes_A M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Этот пункт сразу следует из пп. 2) и 7) предложения 1.

2) Как и при доказательстве п. 5) предложения 1, предполагаем модуль M конечно порожденным над A и рассмотрим точную последовательность A -модулей

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^{\oplus r} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Отсюда получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A_{\sigma}(\mathcal{O}_X) \otimes_A \widetilde{N} & \longrightarrow & A_{\sigma}(\mathcal{O}_X)^{\oplus r} & \longrightarrow & A_{\sigma}(\mathcal{O}_X) \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \\ 0 \longrightarrow & A_{\sigma}(\widetilde{N}) & \longrightarrow & A_{\sigma}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}) & \xrightarrow{\delta} & A_{\sigma}(\widetilde{M}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

где нижняя строка точна в силу п. 1) этого предложения. Ясно, что β – изоморфизм. Поэтому, рассуждая так же, как и в п. 5), получаем сначала сюръективность отображения α , а потом и инъективность α . Предложение доказано.

Пусть $\mathcal{F}$ – любой квазикогерентный пучок на X . Применим функтор $H^0(X, \cdot)$ к комплексу $V(\mathcal{F})$. Получим тогда комплекс абелевых групп $A(\mathcal{F})$:

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in S_{m-1}} A_{\sigma}(\mathcal{F}) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in S_m} A_{\sigma}(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – нётерова отделимая схема, $Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем, так что $Y_0 = X$, все U_i – аффинны, $0 \leq i \leq n$. Тогда когомологии комплекса $A(\mathcal{F})$ совпадают с когомологиями пучка $\mathcal{F}$ на X , т.е. для любого i

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(A(\mathcal{F})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 и п. 7) предложения 1 следует, что $V(\mathcal{F})$ – ациклическая резольвента для пучка $\mathcal{F}$. Поэтому когомологии пучка $\mathcal{F}$ можно вычислять при помощи глобальных сечений этой резольвенты. Теорема доказана.

Из последней теоремы мы сразу же получаем следующее геометрическое следствие.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – проективная алгебраическая схема размерности n над полем. Пусть $Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем, так что $Y_0 = X$, Y_i является обильным дивизором на схеме Y_{i-1} для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X , для любого i

$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(A(\mathcal{F})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как Y_i – обильный дивизор на Y_{i-1} для всех $1 \leq i \leq n$, то U_i – аффинная схема для всех $0 \leq i \leq n-1$. Так как $\dim Y_n = 0$, то $U_n = Y_n$ тоже аффинна. Теперь применение теоремы 2 заканчивает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ и для любого $\sigma = (\eta_0) \in S_0$ группа $A_\sigma(\mathcal{F})$ есть группа сечений над U_{η_0} пучка $\mathcal{F}$, поднятого на формальную окрестность подсхемы Y_{η_0} в X , и комплекс $A(\mathcal{F})$ можно воспринимать как комплекс Чеха для такого “покрытия” схемы X .

§ 4. Комбинаторные свойства и отображение Кричевера

ЛЕММА 10. Пусть X – нётерова отделимая схема. Пусть $Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем, так что $Y_0 = X$, Y_i является дивизором Картье на схеме Y_{i-1} , $1 \leq i \leq n$. Пусть J_i – соответствующие подсхемам Y_i пучки идеалов на X . Пусть $\sigma = (\eta_0, \dots, \eta_k) \in S_k$. Тогда для любого $i \leq \eta_0$ и для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X верно

$$A_\sigma(\mathcal{F}) = \varprojlim_m A_\sigma(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}). \quad (35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Мы рассматриваем в (35) пучок $\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}$ как пучок на схеме X . Для упрощения обозначений соответствующий функтор прямого образа с подсхем Y_i опущен. В аналогичных ситуациях мы будем поступать так и дальше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функтора A_σ имеем

$$\begin{aligned} \varprojlim_m A_\sigma(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}) &= \varprojlim_m \varprojlim_l A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/(J_i^m + J_{\eta_0}^l) \mathcal{F})) \\ &= \varprojlim_{(m,l)} A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/(J_i^m + J_{\eta_0}^l) \mathcal{F})) \\ &= \varprojlim_l A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^l \mathcal{F})) = A_\sigma(\mathcal{F}), \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство следует из конфинантности проективных систем

$$A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/(J_i^m + J_{\eta_0}^l) \mathcal{F})) \quad \text{и} \quad A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^l \mathcal{F})),$$

что следует из конфинантности систем $\mathcal{F}/(J_i^m + J_{\eta_0}^l) \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}/J_{\eta_0}^l \mathcal{F}$. Кроме того, в наших рассуждениях мы подразумевали, что если $\sigma \in S_0$, то $A_{\partial_0(\sigma)} = H^0(X, \cdot)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть X – коэно-маколеева нётерова схема. Пусть $Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем, так что $Y_0 = X$, Y_i является дивизором Картье на схеме Y_{i-1} , $1 \leq i \leq n$. Пусть J_i – соответствующие подсхемам Y_i пучки идеалов на X . Пусть j_k – открытое вложение $Y_k \hookrightarrow Y_{k+1}$ в Y_k , $0 \leq k < n$. Тогда для любого $0 \leq k < n$, для любого $m \geq 1$ и для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X естественное отображение

$$\mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F} \longrightarrow (j_k)_*(j_k)^*(\mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F})$$

является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по m .

Пусть $m = 1$. Тогда $\mathcal{F}/J_k \mathcal{F}$ – локально свободный пучок на Y_k . Поэтому, применяя лемму 9 к паре $Y_{k+1} \hookrightarrow Y_k$, получаем инъективность в этом случае, так как дивизор Картье локально порождается одним элементом, не являющимся делителем нуля в структурном пучке.

Пусть $m > 1$. Тогда из того, что Y_i – дивизоры Картье на Y_{i-1} , имеем, что Y_k является локально полным пересечением и локально задается регулярной последовательностью на X . Поэтому пучок J_k^{m-1}/J_k^m локально свободен на Y_k (см. [9, гл. II, теорема 8.21A]). Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow J_k^{m-1} \mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/J_k^{m-1} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad (36)$$

и леммы 4 получаем точность последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow (j_k)_*(j_k)^*(J_k^{m-1} \mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F}) &\rightarrow (j_k)_*(j_k)^*(\mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F}) \rightarrow \\ &\rightarrow (j_k)_*(j_k)^*(\mathcal{F}/J_k^{m-1} \mathcal{F}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Пучок $J_k^{m-1}\mathcal{F}/J_k^m\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_k^{m-1}/J_k^m$ локально свободен на Y_k . Поэтому отображение

$$J_k^{m-1}\mathcal{F}/J_k^m\mathcal{F} \longrightarrow (j_k)_*(j_k)^*(J_k^{m-1}\mathcal{F}/J_k^m\mathcal{F})$$

является вложением. Также и отображение

$$\mathcal{F}/J_k^{m-1}\mathcal{F} \longrightarrow (j_k)_*(j_k)^*(\mathcal{F}/J_k^{m-1}\mathcal{F})$$

является вложением по предположению индукции. Из этого, из (36), (37) и из несложного диаграммного поиска получаем, что отображение

$$\mathcal{F}/J_k^m\mathcal{F} \longrightarrow (j_k)_*(j_k)^*(\mathcal{F}/J_k^m\mathcal{F})$$

является вложением. Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть X – проективная равноразмерная коэно-маколеева алгебраическая схема размерности n над полем. Пусть $Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_k$ – флаг замкнутых подсхем, так что $Y_0 = X$, Y_i является обильным дивизором Картье на схеме Y_{i-1} для любого i , $1 \leq i \leq k$. Пусть J_i – соответствующие подсхемам Y_i пучки идеалов на X . Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{F}/J_k^m\mathcal{F})$$

является вложением, а если $k < n$, то и изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем проводить индукцией по k .

Пусть сначала $k = 1$. Пучок J_1 является обратным к обильному обратимому пучку на X . Из условий на X (коэно-маколеевость, проективность, равноразмерность) существует (см. [9, гл. III, теорема 7.6]) $l > 0$, так что для любого $m > l$ $H^0(X, J_1^m\mathcal{F}) = 0$, и если $n \geq 2$, то также $H^1(X, J_1^m\mathcal{F}) = 0$.

Отсюда и из точной последовательности

$$0 \longrightarrow J_1^m\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

получаем, что отображение

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F})$$

является вложением при $m > l$ и

$$H^0(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F})$$

при $m > l$ и $n \geq 2$. Переходя теперь к проективному пределу по m , получаем вложение

$$H^0(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F}) = H^0(X, \varprojlim_m \mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F})$$

и при $n > 1$ – изоморфизм

$$H^0(X, \mathcal{F}) \simeq H^0\left(X, \varprojlim_m \mathcal{F}/J_1^m \mathcal{F}\right).$$

Пусть теперь $k > 1$ – любое. Из условий леммы следует, что Y_k локально задается регулярной последовательностью на X , поэтому Y_k – коэно-маколеева схема и J_k^m/J_k^{m+1} – локально свободные пучки на Y_k (см. [9, гл. II, теорема 8.21A]). По предположению индукции имеем

$$\varprojlim_l H^0(X, \mathcal{F}/J_{k-1}^l \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}). \quad (38)$$

Из конфинальности проективных систем $\mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}/(J_k^m + J_{k-1}^l) \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{aligned} \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F}) &= \varprojlim_{(l,m)} H^0(X, \mathcal{F}/(J_k^m + J_{k-1}^l) \mathcal{F}) \\ &= \varprojlim_l \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{F}/(J_k^m + J_{k-1}^l) \mathcal{F}). \end{aligned}$$

С учетом этого равенства и равенства (38) утверждение леммы будет следовать, если мы покажем, что для любого $l \geq 1$ отображение

$$H^0(X, \mathcal{F}/J_{k-1}^l \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{F}/(J_k^m + J_{k-1}^l) \mathcal{F})$$

является вложением и при $k < n$ – изоморфизмом.

Для этого рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \frac{J_k^m \mathcal{F} + J_{k-1}^l \mathcal{F}}{J_{k-1}^l \mathcal{F}} \longrightarrow \frac{\mathcal{F}}{J_{k-1}^l \mathcal{F}} \longrightarrow \frac{\mathcal{F}}{(J_k^m + J_{k-1}^l) \mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

Достаточно показать, что для всех больших m выполнено

$$H^0\left(X, \frac{J_k^m \mathcal{F} + J_{k-1}^l \mathcal{F}}{J_{k-1}^l \mathcal{F}}\right) = 0, \quad (39)$$

и при $k < n$ к тому же верно равенство

$$H^1\left(X, \frac{J_k^m \mathcal{F} + J_{k-1}^l \mathcal{F}}{J_{k-1}^l \mathcal{F}}\right) = 0. \quad (40)$$

Для этого проведем индукцию по l . Если $l = 1$, то (39) и (40) сразу же следуют из [9, гл. III, теорема 7.6] и того, что пучок J_k двойствен к обильному обратимому пучку на Y_{k-1} .

Если $l > 1$, то из тождества $\frac{A+B}{B} = \frac{A}{A \cap B}$ следует точная последовательность

$$0 \longrightarrow \frac{J_k^m \cap J_{k-1}^{l-1}}{J_k^m \cap J_{k-1}^l} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow \frac{J_k^m \mathcal{F} + J_{k-1}^l \mathcal{F}}{J_{k-1}^l \mathcal{F}} \longrightarrow \frac{J_k^m \mathcal{F} + J_{k-1}^{l-1} \mathcal{F}}{J_{k-1}^{l-1} \mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

Рассматривая локальную ситуацию и используя то, что J_i порождается регулярной последовательностью, а также [9, гл. II, теорема 8.21A], нетрудно понять, что

$$\frac{J_k^m \cap J_{k-1}^{l-1}}{J_k^m \cap J_{k-1}^l} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} = \frac{J_k^{m-l+1} + J_{k-1}}{J_{k-1}} \left(\frac{J_{k-1}^{l-1}}{J_{k-1}^l} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \right).$$

При этом пучок $\frac{J_{k-1}^{l-1}}{J_{k-1}^l} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ локально свободен на Y_{k-1} . Пучок J_k обратен к обильному обратимому пучку на схеме Коэна–Маколея Y_{k-1} . Поэтому из [9, гл. III, теорема 7.6] для достаточно большого m верно

$$H^0 \left(X, \frac{J_k^m \cap J_{k-1}^{l-1}}{J_k^m \cap J_{k-1}^l} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \right) = 0$$

и при $k < n$

$$H^1 \left(X, \frac{J_k^m \cap J_{k-1}^{l-1}}{J_k^m \cap J_{k-1}^l} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \right) = 0.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы 12 для любого $\sigma \in S_0$ естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F})$$

является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma = (m)$. По лемме 12 имеем вложение

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F} \longrightarrow (j_k)_* (j_k)^* (\mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F}).$$

Отсюда получаем вложение

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, (j_k)_* (j_k)^* (\mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F})).$$

Переходя к проективному пределу по m , получаем вложение

$$0 \longrightarrow \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{F}/J_k^m \mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F}).$$

Теперь применение леммы 12 завершает доказательство следствия.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – проективная равноразмерная коено-маколеева схема размерности n над полем. Пусть $Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем, так что $Y_0 = X$, Y_i является обильным дивизором Картье на схеме Y_{i-1} для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X :

- 1) для любого $\sigma \in S_k$, $0 \leq k \leq n$, естественное отображение $H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F})$ является вложением;
- 2) для любого $\sigma \in S_k$, $1 \leq k \leq n$, и для любого i , $0 \leq i \leq k$, естественное отображение $d_i(\sigma): A_{\partial_i(\sigma)}(\mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F})$ является вложением.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Учитывая (28), можно переформулировать п. 2) этой теоремы следующим образом: для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X и для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in S$, $\sigma_1 \subset \sigma_2$, естественное отображение $A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \longrightarrow A_{\sigma_2}(\mathcal{F})$ является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J_i – пучки идеалов на X , соответствующие подсхемам Y_i . Будем доказывать сначала п. 2) теоремы. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $\sigma = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$ и $i = 0$. Тогда $\partial_0(\sigma) = (\eta_1, \dots, \eta_k)$.

По лемме 11 для любого $m \geq 1$ отображение

$$\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F} \longrightarrow (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})$$

является вложением. Применим к этой последовательности точный функтор $A_{\partial_0(\sigma)}$. Получаем вложение

$$A_{\partial_0(\sigma)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})).$$

Переходя к проективному пределу по m , получаем вложение

$$\varprojlim_m A_{(\eta_1, \dots, \eta_k)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F}).$$

При этом из леммы 10 мы имеем

$$\varprojlim_m A_{(\eta_1, \dots, \eta_k)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) = A_{(\eta_1, \dots, \eta_k)}(\mathcal{F}).$$

Таким образом, мы получили, что в этом случае отображение $A_{\partial_0(\sigma)}(\mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F})$ является вложением.

Случай 2. Пусть $\sigma = (\eta_0, \eta_1)$ и $i = 1$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} A_{\partial_1(\sigma)}(\mathcal{F}) &= \varprojlim_m H^0(X, (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})), \\ A_\sigma(\mathcal{F}) &= \varprojlim_m A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})), \end{aligned}$$

и утверждение теоремы будет следовать, если мы покажем, что для любого $m \geq 1$ отображение

$$H^0(X, (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})) \quad (41)$$

является вложением.

Докажем это по индукции. Пусть $m = 1$. Тогда $\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F}$ – локально свободный пучок на Y_{η_0} . Кроме того, так как Y_{η_0+1} – дивизор Картье на Y_{η_0} , то из п. 5) предложения 1 имеем

$$\begin{aligned} (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F}) &= ((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^* \mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} (\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F}) \\ &= \varinjlim_j \mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}(jY_{\eta_0+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} (\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F}) \\ &= \varinjlim_j (\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F})(jY_{\eta_0+1}). \end{aligned} \quad (42)$$

Пучки $(\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F})(jY_{\eta_0+1})$ также локально свободны на Y_{η_0} . Поэтому по следствию из леммы 12 отображение

$$H^0(X, (\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F})(jY_{\eta_0+1})) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((\mathcal{F}/J_{\eta_0} \mathcal{F})(jY_{\eta_0+1}))$$

является вложением. Переходя к инъективному пределу по j , получаем инъективность (41) в случае $m = 1$.

Если $m > 1$, то утверждение будет следовать из предположения индукции и рассмотрения следующих двух точных последовательностей:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^* \mathcal{G}) &\longrightarrow H^0(X, (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^* \mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^0(X, (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^* \mathcal{F}/J_{\eta_0}^{m-1} \mathcal{F}) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^* \mathcal{G}) &\longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^* \mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^* \mathcal{F}/J_{\eta_0}^{m-1} \mathcal{F}) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где пучок $\mathcal{G} = J_{\eta_0}^{m-1} \mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}$ локально свободен на Y_{η_0} . Случай 2 разобран.

Случай 3. Рассмотрим все варианты, не разобранные в случаях 1 и 2. Пусть $\sigma = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$ и $i \neq 0$. Будем проводить индукцию по i . Случай $i = 0$ нами уже разобран (случай 1). Имеем

$$\begin{aligned} A_{\partial_i(\sigma)}(\mathcal{F}) &= \varprojlim_m A_{\partial_{i-1}(\partial_0(\sigma))}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})), \\ A_{\sigma}(\mathcal{F}) &= \varprojlim_m A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})). \end{aligned}$$

По предположению индукции, примененной к схеме Y_{η_0} , можно считать, что для любого локально свободного пучка $\mathcal{H}$ на Y_{η_0} отображение

$$0 \longrightarrow A_{\partial_{i-1}(\partial_0(\sigma))}(\mathcal{H}) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}(\mathcal{H}) \quad (43)$$

является вложением. Покажем, что для любого m отображение

$$A_{\partial_{i-1}(\partial_0(\sigma))}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) \quad (44)$$

является вложением.

Если $m = 1$, то, как и в случае 2, используя (42), сразу все сводим к последовательности (43). Потом переходим к инъективному пределу.

Если $m > 1$, то, как и в случае 2, можем применить индукцию по m , используя следующие две точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow A_{\partial_{i-1}(\partial_0(\sigma))}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\mathcal{G}) &\longrightarrow A_{\partial_{i-1}(\partial_0(\sigma))}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow A_{\partial_{i-1}(\partial_0(\sigma))}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\mathcal{F}/J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\mathcal{G}) &\longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\mathcal{F}/J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{G} = J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}$.

Теперь, переходя в (44) к пределу, завершаем доказательство случая 3.

Рассмотрим п. 1) теоремы. Если $k = 0$, то это – следствие из леммы 12. Если $k > 0$, то представим отображение

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F})$$

как композицию отображений

$$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma)}(\mathcal{F}) \text{ и } A_{\partial_0(\sigma)}(\mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F}),$$

где первое отображение можно считать инъективным в силу индукции по k , а второе – инъективным из п. 2) этой теоремы. Теорема доказана.

ЛЕММА 13. Пусть выполнены все условия теоремы 4. Через J_i обозначим соответствующие Y_i пучки идеалов на X . Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X и для любого $m > 0$ имеем:

1) отображение

$$H^0(X, \mathcal{F}/J_i^m\mathcal{F}) \longrightarrow A_\sigma(\mathcal{F}/J_i^m\mathcal{F})$$

является вложением для любого $\sigma = (\zeta_0, \dots, \zeta_k)$, $0 \leq i \leq \zeta_0$;

2) отображение

$$A_{\sigma_1}(\mathcal{F}/J_i^m\mathcal{F}) \longrightarrow A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_i^m\mathcal{F})$$

является вложением для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in S$, $\sigma_1 \subset \sigma_2 = (\eta_0, \dots, \eta_k)$, $0 \leq i \leq \eta_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем п. 1). Если $m = 1$, то это следует из теоремы 4, примененной к многообразию Y_i .

Если $m > 1$, то применим индукцию. Для этого рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow J_i^{m-1} \mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} / J_i^{m-1} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Отсюда и из точности функтора A_σ имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X, J_i^{m-1} \mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{F} / J_i^{m-1} \mathcal{F}) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A_\sigma(J_i^{m-1} \mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & A_\sigma(\mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & A_\sigma(\mathcal{F} / J_i^{m-1} \mathcal{F}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Пучок $\frac{J_i^{m-1} \mathcal{F}}{J_i^m \mathcal{F}} = \frac{J_i^{m-1}}{J_i^m} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ локально свободен на Y_i (см. [9, гл. II, теорема 8.21A]). Поэтому отображение α – вложение. Отображение γ – вложение по предположению индукции. Теперь из несложного диаграммного поиска следует, что β – тоже вложение.

Пункт 2) сразу же следует из аналогичных п. 1) индуктивных по m рассуждений, примененных к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{\sigma_1}(J_i^{m-1} \mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & A_{\sigma_1}(\mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & A_{\sigma_1}(\mathcal{F} / J_i^{m-1} \mathcal{F}) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A_{\sigma_2}(J_i^{m-1} \mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & A_{\sigma_2}(\mathcal{F} / J_i^m \mathcal{F}) & \longrightarrow & A_{\sigma_2}(\mathcal{F} / J_i^{m-1} \mathcal{F}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены все условия теоремы 4. Тогда для любого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ и для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ имеем:

- 1) если $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, то $A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$;
- 2) если $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$, то $A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) = A_{\sigma_1 \cap \sigma_2}(\mathcal{F})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. О пересечении имеет смысл говорить, так как из теоремы 4 следует, что мы можем всегда вложить $A_{\sigma_1}(\mathcal{F})$ и $A_{\sigma_2}(\mathcal{F})$ в $A_\eta(\mathcal{F})$, где η содержит σ_1 и σ_2 . Например, $\eta = \sigma_1 \cup \sigma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, через J_i будем обозначать соответствующие Y_i пучки идеалов на X .

Докажем п. 1). Пусть $\sigma_1 = (\eta_0, \dots)$, $\sigma_2 = (\zeta_0, \dots)$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Без ограничения общности можно считать, что $\zeta_0 > \eta_0$. Предположим, что $\sigma_1 \notin S_0$.

По лемме 11 для любого $m > 1$ имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} / J_{\eta_0}^m \mathcal{F} \longrightarrow (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F} / J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G}_m \longrightarrow 0,$$

$$\text{где } \mathcal{G}_m = \frac{(j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F} / J_{\eta_0}^m \mathcal{F})}{\mathcal{F} / J_{\eta_0}^m \mathcal{F}}.$$

Покажем индукцией по m , что естественное отображение

$$A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{G}_m) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{G}_m) \quad (45)$$

является вложением.

Если $m = 1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \frac{(j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F})}{\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F}} = \frac{(j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} (\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F})}{\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F}} \\ &= \frac{\varinjlim_k \mathcal{O}(kY_{\eta_0+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} (\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F})}{\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F}} \\ &= \varinjlim_{k>0} ((\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} (\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}(kY_{\eta_0+1})/\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}})). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{H}_k = (\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} (\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}(kY_{\eta_0+1})/\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}})$. Индукцией по k покажем, что отображения

$$A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{H}_k) \longrightarrow A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{H}_k) \quad (46)$$

являются вложениями.

Если $k = 1$, то пучок $\mathcal{H}_1$ локально свободен на Y_{η_0+1} , поэтому (46) следует из теоремы 4, примененной к Y_{η_0+1} .

Если $k > 1$, то из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}((k-1)Y_{\eta_0+1})}{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}(kY_{\eta_0+1})}{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}(kY_{\eta_0+1})}{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}((k-1)Y_{\eta_0+1})} \longrightarrow 0$$

следует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{H}_{k-1}) & \longrightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{H}_k) & \longrightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{H}_k/\mathcal{H}_{k-1}) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ 0 \longrightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{H}_{k-1}) & \longrightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{H}_k) & \longrightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{H}_k/\mathcal{H}_{k-1}) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Пучок $\mathcal{H}_k/\mathcal{H}_{k-1} = (\mathcal{F}/J_{\eta_0}\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}} (\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}(kY_{\eta_0+1})/\mathcal{O}_{Y_{\eta_0}}((k-1)Y_{\eta_0+1}))$ локально свободен на Y_{η_0+1} . Поэтому отображение γ инъективно по теореме 4, примененной к Y_{η_0+1} . Отображение α инъективно по предположению индукции. Отсюда инъективно и отображение β . Итак, (46) доказано. Переходя теперь в (46) к индуктивному пределу по k , получаем (45) в случае $m = 1$.

Покажем теперь (45) в случае $m > 1$. Из точных троек

$$0 \longrightarrow \frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}} \longrightarrow \frac{\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}} \longrightarrow \frac{\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

и

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\left(\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}\right) \rightarrow \\ \rightarrow (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) \rightarrow (j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

следует точная последовательность

$$0 \rightarrow \frac{(j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\left(\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}\right)}{\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}} \rightarrow \mathcal{G}_m \rightarrow \mathcal{G}_{m-1} \rightarrow 0.$$

Применяя точные функторы $A_{\partial_0(\sigma_1)}$ и $A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}$, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1)}\left(\frac{(j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\left(\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}\right)}{\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}}\right) & \rightarrow & \\ \downarrow \alpha & & \\ 0 \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}\left(\frac{(j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*\left(\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}\right)}{\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}}\right) & \rightarrow & \\ & \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{G}_m) \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{G}_{m-1}) \rightarrow 0 & \\ & \downarrow \beta \quad \quad \downarrow \gamma & \\ & \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{G}_m) \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{G}_{m-1}) \rightarrow 0. & \end{array}$$

Пучок $\frac{J_{\eta_0}^{m-1}\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}} = \frac{J_{\eta_0}^{m-1}}{J_{\eta_0}^m} \otimes_{Y_{\eta_0}} \left(\frac{\mathcal{F}}{J_{\eta_0}^m\mathcal{F}}\right)$ локально свободен на Y_{η_0} . Поэтому отображение α инъективно по тем же причинам, что и в случае $m = 1$. Отображение γ инъективно по предположению индукции. Поэтому и отображение β тоже инъективно (из несложного диаграммного поиска). Итак, мы показали (45).

Рассмотрим теперь следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) & \rightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) \xrightarrow{\psi} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \theta \\ 0 \rightarrow A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) & \rightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\psi} & A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{G}_m) \rightarrow 0 \\ & \downarrow \beta & \\ & \rightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{G}_m) \rightarrow 0. \end{array}$$

(Отметим, что отображение θ здесь инъективно. Это следует из того, что отображение β инъективно по только что доказанному, и отображение ϕ инъективно по лемме 13.)

Теперь пусть $x \in A_{\partial_0(\sigma_1)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}))$, но $x \notin A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})$. Тогда из инъективности отображения β следует, что

$$\beta\psi(x) \neq 0. \quad (47)$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) & \rightarrow & A_{\sigma_2}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) & \xrightarrow{\psi_1} & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 \rightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) & \rightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) & \rightarrow & & \\ & & & \xrightarrow{\psi_1} & A_{\sigma_2}(\mathcal{G}_m) & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \beta_1 & & \\ & & & & \rightarrow & A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}(\mathcal{G}_m) & \rightarrow 0. \end{array}$$

(Аналогично предыдущим рассуждениям, в этой диаграмме все вертикальные отображения инъективны.)

Если элемент $x \in A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})$, то

$$\beta_1\psi_1(x) = 0. \quad (48)$$

Если теперь

$$x \in A_{\partial_0(\sigma_1)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})$$

(пересечение можно искать в $A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}))$ в силу инъективности всех возникающих отображений), то из функториальности имеем

$$\beta\psi(x) = \beta_1\psi_1(x).$$

Сравнивая это с (47) и (48), получаем, что в $A_{\partial_0(\sigma_1) \cup \sigma_2}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}))$ выполняется

$$\begin{aligned} & A_{\partial_0(\sigma_1)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) \\ &= A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Теперь из определения A_σ имеем

$$A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) = \varprojlim_m A_{\partial_0(\sigma_1)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m\mathcal{F})),$$

а из леммы 10 получаем

$$A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) = \varprojlim_m A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) &= \left(\varprojlim_m A_{\partial_0(\sigma_1)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})) \right) \cap \left(\varprojlim_m A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \right) \\ &= \varprojlim_m \left(A_{\partial_0(\sigma_1)}((j_{\eta_0})_*(j_{\eta_0})^*(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \right) \\ &= \varprojlim_m (A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F})) \\ &= \left(\varprojlim_m A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \right) \cap \left(\varprojlim_m A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_{\eta_0}^m \mathcal{F}) \right) \\ &= A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Действуя таким образом и дальше, т.е. убирая каждый раз минимальное число в объединении индексов, мы получим

$$A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) = A_{(i)}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma}(\mathcal{F}),$$

где $\sigma = (\zeta_0, \dots)$ и $\zeta_0 > i$. Но в этом случае, рассуждая так же, как выше, сразу получим

$$\begin{aligned} H^0(X, (j_i)_*(j_i)^*(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F})) \cap A_{\sigma}(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}) \\ = H^0(X, \mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}) \cap A_{\sigma}(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}). \end{aligned}$$

(Отметим, что в отличие от рассуждений, проведенных выше для функтора A_{γ} , функтор $H^0(X, \cdot)$ точен только слева. Но, как и раньше, мы имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 \end{array}$$

и если отображения α и γ инъективны, то и отображение β инъективно.)

Теперь

$$\begin{aligned} A_i(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma}(\mathcal{F}) &= \left(\varprojlim_m H^0(X, (j_i)_*(j_i)^*(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F})) \right) \cap \left(\varprojlim_m A_{\sigma}(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}) \right) \\ &= \varprojlim_m (H^0(X, (j_i)_*(j_i)^*(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F})) \cap A_{\sigma}(\mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F})) \\ &= \varprojlim_m H^0(X, \mathcal{F}/J_i^m \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из леммы 12.

Докажем п. 2) теоремы. Рассмотрим три случая.

И из точных последовательностей

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A_{\sigma_1}(J_1^{m-1}\mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F}) \longrightarrow A_{\sigma_1}(\mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F}) \longrightarrow A_{\sigma_1}(\mathcal{F}/J_1^{m-1}\mathcal{F}), \\ 0 &\longrightarrow A_{\sigma_2}(J_1^{m-1}\mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F}) \longrightarrow A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F}) \longrightarrow A_{\sigma_2}(\mathcal{F}/J_1^{m-1}\mathcal{F}) \end{aligned}$$

сразу следует, что отображение θ является вложением. Кроме того, отображение $\theta \cdot \gamma$ является естественным отображением из $A_{\sigma_1 \cap \sigma_2}(\mathcal{F}/J_1^{m-1}\mathcal{F})$ в H_{m-1} , и, следовательно, по предположению индукции можно считать, что $\theta \cdot \gamma$ – изоморфизм.

Из последних двух фактов мы сразу же получаем, что γ – изоморфизм. Так как пучок $J_1^{m-1}\mathcal{F}/J_1^m\mathcal{F} = J_1^{m-1}/J_1^m \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ локально свободен на Y_1 и $\dim Y_1 < \dim X$, то отображение α – тоже изоморфизм. Поэтому из этой коммутативной диаграммы следует, что отображение β – тоже изоморфизм.

Итак, равенство (49) доказано. Переход теперь в (49) к проективному пределу по m завершает доказательство случая 1.

Случай 2. $0 \in \sigma_1$, $0 \notin \sigma_2$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$.

Таковыми же рассуждениями, как в доказательстве п. 1) этой теоремы, теперь сразу же получаем

$$A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) = A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}),$$

что сводит этот случай к случаю 1.

Случай 0 $\notin \sigma_1$, $0 \in \sigma_2$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ полностью аналогичен.

Случай 3. $0 \in \sigma_1$, $0 \in \sigma_2$.

Тогда

$$A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) = \varinjlim_k A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}(kY_1)), \quad A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) = \varinjlim_k A_{\partial_0(\sigma_2)}(\mathcal{F}(kY_1)).$$

Теперь из случая 1 (или если $\partial_0(\sigma_1) \cap \partial_0(\sigma_2) = \emptyset$, то из п. 1) этой теоремы)

$$A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}(kY_1)) \cap A_{\partial_0(\sigma_2)}(\mathcal{F}(kY_1)) = A_{\partial_0(\sigma_1) \cap \partial_0(\sigma_2)}(\mathcal{F}(kY_1)).$$

(Здесь $A_{\emptyset}(\cdot) = H^0(X, \cdot)$.) Поэтому

$$\begin{aligned} A_{\sigma_1}(\mathcal{F}) \cap A_{\sigma_2}(\mathcal{F}) &= \left(\varinjlim_k A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}(kY_1)) \right) \cap \left(\varinjlim_k A_{\partial_0(\sigma_2)}(\mathcal{F}(kY_1)) \right) \\ &= \varinjlim_k (A_{\partial_0(\sigma_1)}(\mathcal{F}(kY_1)) \cap A_{\partial_0(\sigma_2)}(\mathcal{F}(kY_1))) \\ &= \varinjlim_k A_{\partial_0(\sigma_1) \cap \partial_0(\sigma_2)}(\mathcal{F}(kY_1)) = A_{\sigma_1 \cap \sigma_2}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что выполнены все условия теоремы 4 и поле определения схемы X – это поле k . Будем предполагать также, что $Y_n = x$, где x –

k -рациональная точка на X , гладкая на любом Y_i , $0 \leq i \leq n$. Выберем и зафиксируем локальные параметры $z_1, \dots, z_n \in \widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$, так что $z_{n-i+1}|_{Y_{i-1}} = 0$ – уравнение дивизора Y_i в формальной окрестности точки x на схеме Y_{i-1} , $1 \leq i \leq n$. Пусть $\mathcal{F}$ – локально свободный пучок ранга 1 на X . Зафиксируем тривиализацию e_x пучка $\mathcal{F}$ в формальной окрестности точки x на X . Теперь сделанный выбор локальных параметров и тривиализации позволяет отождествить $A_{(0,1,\dots,n)}(\mathcal{F})$ с n -мерным локальным полем $k((z_1)) \dots ((z_n))$.

Более того, зафиксируем набор чисел $0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n-1$. Определим $\sigma \in S_{n-k}$ как множество $\{i: 0 \leq i \leq n, i \neq j_1, \dots, i \neq j_k\}$. По теореме 4 имеем естественное вложение $A_\sigma(\mathcal{F}) \rightarrow A_{(0,1,\dots,n)}(\mathcal{F})$. И при отождествлении $A_{(0,1,\dots,n)}(\mathcal{F})$ с полем $k((z_1)) \dots ((z_n))$ пространство $A_\sigma(\mathcal{F})$ перейдет в следующее k -подпространство в $k((z_1)) \dots ((z_n))$:

$$\left\{ \sum a_{i_1, \dots, i_n} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} : a_{i_1, \dots, i_n} \in k, i_{n-j_1} \geq 0, i_{n-j_2} \geq 0, \dots, i_{n-j_k} \geq 0 \right\}. \quad (50)$$

Таким образом, из теоремы 5 мы получаем, что для определения образов $A_\sigma(\mathcal{F})$ в $k((z_1)) \dots ((z_n))$ (для любых $\sigma \in S$) достаточно знать только один образ $A_{(0,1,\dots,n-1)}$ в $k((z_1)) \dots ((z_n))$. (Все остальные получаются пересечением образа $A_{(0,1,\dots,n-1)}$ в $k((z_1)) \dots ((z_n))$ со стандартными подпространствами (50) в $k((z_1)) \dots ((z_n))$.)

Ясно, что эти рассуждения сразу же обобщаются на локально свободные пучки $\mathcal{F}$ ранга r и пространства $k((z_1)) \dots ((z_n))^{\oplus r}$.

Описанное отображение

$$(X, Y_1, \dots, Y_n, (z_1, \dots, z_n), \mathcal{F}, e_x) \rightarrow A_{(0,1,\dots,n-1)}(\mathcal{F}) \hookrightarrow A_{(0,1,\dots,n-1,n)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{e_x} A_{(0,1,\dots,n)}(\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}) \xrightarrow{z_1, \dots, z_n} k((z_1)) \dots ((z_n))^{\oplus r}$$

обозначим через Ψ_r .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$$\mathcal{M}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{X, (Y_1, \dots, Y_n), (z_1, \dots, z_n), \mathcal{F}, e_{Y_n}\},$$

где X – проективная равноразмерная схема Коэна–Маколея размерности n над полем k ; $X = Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n$ – флаг замкнутых подсхем, так что Y_i является обильным дивизором Картье на схеме Y_{i-1} , $1 \leq i \leq n$; Y_n – гладкая k -рациональная точка на всех Y_i , $0 \leq i \leq n$; $z_1, \dots, z_n$ – формальные локальные параметры в точке Y_n , так что $(z_{n-i+1}|_{Y_{i-1}} = 0) = Y_i$ в формальной окрестности точки Y_n на схеме Y_{i-1} ; $\mathcal{F}$ – векторное расслоение ранга r на X ; e_{Y_n} – тривиализация $\mathcal{F}$ в формальной окрестности точки Y_n на X .

В поле $K = k((z_1)) \dots ((z_n))$ имеем следующую фильтрацию:

$$K(m) = z_n^m k((z_1)) \dots ((z_{n-1}))[[z_n]].$$

Пусть $V = K^{\oplus r}$ – K -пространство и $V(m) = K(m)^{\oplus r}$ – фильтрация на нем.

ТЕОРЕМА 6. *Существует каноническое отображение $\Phi_n: \mathcal{M}_n \longrightarrow \{k\text{-векторные подпространства } B \subset K, W \subset V\}$, так что:*

- 1) *по подпространству $B \subset K$ однозначно восстанавливается комплекс $A(\mathcal{O}_X)$, вычисляющий когомологии пучка $\mathcal{O}_X$ на X ;*
- 2) *по подпространству $W \subset V$ однозначно восстанавливается комплекс $A(\mathcal{F})$, вычисляющий когомологии пучка $\mathcal{F}$ на X ;*
- 3) *если $(B, W) \in \text{Im } \Phi_n$, то $B \cdot B \subset B$, $B \cdot W \subset W$;*
- 4) *для всех n отображение*

$$\begin{aligned} & \{Y_1, (Y_2, \dots, Y_n), (z_1, \dots, z_{n-1})|_{Y_1}, \mathcal{F}(-mY_1)|_{Y_1}, e_{Y_n}(-m)|_{Y_1}\} \longrightarrow \\ & \longrightarrow \left\{ \frac{B \cap K(m)}{B \cap K(m+1)} \subset \frac{K(m)}{K(m+1)} = k((z_1)) \dots ((z_{n-1})), \right. \\ & \quad \left. \frac{W \cap V(m)}{W \cap V(m+1)} \subset \frac{V(m)}{V(m+1)} = k((z_1)) \dots ((z_{n-1}))^{\oplus r} \right\} \end{aligned}$$

совпадает с отображением Φ_{n-1} ;

- 5) *если $q, q' \in \mathcal{M}_n$ и $\Phi_n(q) = \Phi_n(q')$, то q изоморфно q' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если

$$q = \{X, (Y_1, \dots, Y_n), (z_1, \dots, z_n), \mathcal{F}, e_{Y_n}\} \in \mathcal{M}_n,$$

то отображение Φ_n определим следующим образом:

$$\begin{aligned} B &= \Psi_1(X, Y_1, \dots, Y_n, (z_1, \dots, z_n), \mathcal{O}_X, \text{id}), \\ W &= \Psi_r(X, Y_1, \dots, Y_n, (z_1, \dots, z_n), \mathcal{F}, e_{Y_n}), \\ \Phi_n(q) &= \{B, W\}. \end{aligned}$$

Теперь пп. 1)–4) этой теоремы следуют из теорем 3–5 и рассуждений, приведенных выше, об отображении Ψ , а также того (п. 4)), что $(j_0)_*(j_0)^*\mathcal{F} = \varinjlim_m \mathcal{F}(mY_1)$.

Докажем п. 5). Пересекая B со стандартными подпространствами (50), мы однозначно восстанавливаем алгебру $A_{(0)}(\mathcal{O}_X) \subset K$. Аналогично, из W восстанавливаем k -подпространство $A_{(0)}(\mathcal{F}) \subset V$. Тогда

$$\begin{aligned} X - Y_1 &= \text{Spec } A_{(0)}(\mathcal{O}_X), \\ X &= \text{Proj} \left(\bigoplus_{m \geq 0} (A_{(0)}(\mathcal{O}_X) \cap K(-m)) \right), \\ \mathcal{F} &= \text{Proj} \left(\bigoplus_{m \geq 0} (A_{(0)}(\mathcal{F}) \cap V(-m)) \right), \end{aligned} \tag{51}$$

где последние равенства следуют из утверждения (см. [18, лемма 7]): если X – проективная схема над полем, $\mathcal{F}$ – когерентный пучок на X и C – обильный дивизор

на X , то $X \cong \text{Proj}(S)$, $\mathcal{F} \cong \text{Proj}(F)$, где $S = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mC))$, $F = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{F}(mC))$.

Кроме того, образ при вложении

$$\bigoplus_{m \geq 0} (A_{(0)}(\mathcal{O}_X) \cap K(-m+1)) \quad \text{в} \quad \bigoplus_{m \geq 0} (A_{(0)}(\mathcal{O}_X) \cap K(-m))$$

является однородным идеалом, определяющим подсхему Y_1 в X . Теперь, используя п. 4) этой теоремы, восстанавливаем аналогичным способом геометрические данные на подсхеме Y_1 и, далее, индуктивно восстанавливаем полностью все данные из q с точностью до изоморфизма. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Отметим, что $\mathcal{F}(nY_1)|_{Y_1} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(nY_1)|_{Y_1}$, при этом

$$\mathcal{O}(nY_1)|_{Y_1} = \mathcal{O}(nY_1)/\mathcal{O}((n-1)Y_1) = \mathcal{N}_{Y_1/X}^n,$$

где расслоение $\mathcal{N}_{Y_1/X}$ совпадает в некоторых случаях (например, когда X и Y_1 гладкие) с нормальным расслоением Y_1 в X .

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Из (51) и того, что в поле K нет делителей нуля, мы сразу же получаем, что схемы $X, Y_1, \dots, Y_n$, удовлетворяющие условиям из определения $\mathcal{M}_n$, будут всегда целыми схемами.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Отображение Φ_1 определяет соответствие Кричевера для кривых (см. [16], [18]). Кроме того, любая целая нётерова схема размерности 1 является схемой Коэна–Маколея.

Отображение Φ_2 совпадает с отображением, построенным в [18]. Отметим, что любая нормальная нётерова схема размерности 2 является схемой Коэна–Маколея (см. [9, гл. II, теорема 8.22A]). Там же, в [18], разобран пример отображения Кричевера для $X = \mathbf{P}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В [18] обсуждается проблема замены локально свободных пучков на пучки без кручения.

Пусть X – гладкая проективная поверхность с флагом неприводимых подмногообразий $Y_1 \supset Y_2$, так что Y_1 – обильный дивизор на X и Y_2 – точка. Пусть $\mathcal{G}$ – произвольный пучок без кручения на X . Тогда имеем вложение

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{**}. \quad (52)$$

Пучок $\mathcal{G}^{**}$ рефлексивен, и так как $\dim X = 2$, то $\mathcal{G}^{**}$ – локально свободный пучок. Применяя теперь к последовательности (52) точные функторы A_σ и точный слева функтор $H^0(X, \cdot)$, мы получаем сразу же из полученных последовательностей и выполнения теоремы 4 для пучка $\mathcal{G}^{**}$ то, что теорема 4 выполняется и для пучка $\mathcal{G}$.

Но теорема 5 для пучков без кручения на X уже не выполняется. Действительно, пусть $\mathcal{G} = m_Q$, где m_Q – пучок идеалов точки $Q \in X$. Тогда, применяя точные функторы A_σ к точной последовательности

$$0 \longrightarrow m_Q \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow k_Q \longrightarrow 0,$$

сразу же получаем, что:

а) если $Q \notin Y_1$, то

$$A_{(0)}(\mathcal{G}) \neq A_{(01)}(\mathcal{G}) \cap A_{(02)}(\mathcal{G}),$$

так как $A_{(01)}(\mathcal{G}) \neq A_{(01)}(\mathcal{O}_X)$, но $A_{(01)}(\mathcal{G}) = A_{(01)}(\mathcal{O}_X)$, $A_{(02)}(\mathcal{G}) = A_{(02)}(\mathcal{O}_X)$;

б) если $Q \in Y_1$, $Q \neq Y_2$, то

$$A_{(1)}(\mathcal{G}) \neq A_{(01)}(\mathcal{G}) \cap A_{(12)}(\mathcal{G}),$$

так как $A_{(1)}(\mathcal{G}) \neq A_{(1)}(\mathcal{O}_X)$, но $A_{(01)}(\mathcal{G}) = A_{(01)}(\mathcal{O}_X)$, $A_{(12)}(\mathcal{G}) = A_{(12)}(\mathcal{O}_X)$.

Список литературы

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
2. Бейлинсон А. А. Вычеты и адели // Функци. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 44–45.
3. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961.
4. Демидов Е. Е. Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и проблема Шотки. М.: Изд-во МК НМУ, 1995.
5. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН. 1977. Т. 32. С. 185–214.
6. Паршин А. Н. К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 4. С. 736–773.
7. Паршин А. Н. О кольце формальных псевдодифференциальных операторов // Тр. МИ РАН. 1999. Т. 224. С. 266–280; e-print math.AG/9911098.
8. Сигал Г., Вилсон Дж. Группа петель и уравнения типа КдФ // Э. Прессли, Г. Сигал. Группы петель. М.: Мир, 1990. С. 379–442.
9. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
10. Arbarello E., De Concini C., Kac V. G., Procesi C. Moduli Spaces of Curves and Representation Theory // Comm. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 1–36.
11. Beilinson A. A., Schechtman V. V. Determinant bundles and Virasoro algebra // Comm. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 651–701.
12. Ben-Zvi D., Frenkel E. Spectral curves, opers and integrable systems. E-preprint math.AG/9902068.
13. Fimmel T., Parshin A. N. An introduction to the higher adelic theory. Book in preparation.
14. Huber A. Adele für Schemata und Zariski-Kohomologie // Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Muenster. 3 Serie. Heft 3. 1991.
15. Huber A. On the Parshin–Beilinson Adeles for Schemas // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1991. № 61.
16. Mulase M. Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional grassmanians // Intern. J. of Math. 1990. V. 1. № 3. P. 293–342.
17. Parshin A. N. Chern classes, adeles and L-functions // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1983. B. 341. S. 174–192.
18. Parshin A. N. Krichever Correspondence for Algebraic Surfaces. Preprint / TU Braunschweig. Bericht 99/17; e-print math.AG/9911097.
19. Quandt I. On a relative version of the Krichever correspondence // Bayreuther Mathematische Schriften. 1997. V. 52. P. 1–74; e-print alg-geom/9606015.

Поступило в редакцию
21.III.2000